Algorytmy
Projekt: 5 – kolorowanie grafu planarnego
Katarzyna Rutkowska, wydział Fizyki, 261590
Dokumentacja wstępna

Celem projektu jest stworzenie oprogramowania przyjmującego na wejściu graf planarny, a zwracającego sposób jego pokolorowania tak, aby żadna para sąsiednich wierzchołków nie miała takiego samego koloru.

Oznaczenia:
N – liczba wierzchołków
G – kolorowany graf planarny

Pseudokod:
```
Funkcja pięciokolorowanie(G):
        if N <= 5:
                pokoloruj każdy wierzchołek innym kolorem
        else:
                if  G zawiera wierzchołek v o stopniu 5 a x i y to jego sąsiednie
        wierzchołki, niepołączone krawędzią. Usuwamy v z grafu, powstaje G’ w
        którym łączymy wierzchołki x i y. Oznacza to powstanie z wierzchołków x i
        y wierzchołka z o sąsiednich wierzchołkach będących sumą sąsiadów x oraz
        y.
                else:
                        G zawiera wierzchołek v o stropniu 4 bądź mniejszym:
                        usuń v z grafu G → G’

                pięciokolorowanie(G’)

                pokoloruj wierzchołki G zgodnie z kolorami odpowiadających im wierzchołków w
                G’. Do v przypisz inny kolor niż kolory sąsiadów.
```

Ponieważ mamy do czynienia z grafami planarnymi można zastosować twierdzenie Eulera. Wynika z niego iż graf planarny zawsze zawiera wierzchołek o stopniu co najwyżej 5 ponieważ liczba krawędzi jest ograniczona z góry liczbą: 3N-6 (dla N>=3) - zależność liniowa. Zatem algorytm będzie przetważał listę sąsiedztwa w czasie rzędu O(N).
Funkcja pięciokolorowanie w każdym kroku zmniejsza liczbę wierzchołków o co najmniej jeden, a każdym wierzchołkiem zajmuje się w czasie stałym.
Stąd złożoność algorytmu to O(n).

Program na wejściu będzie przyjmował graf w postaci listy sąsiedztwa: każdemu wierzchołkowi przypisujemy numery jego sąsiadów.

Efekt programu to plik z dwiema kolumnami o N wierszach. Pierwsza to numery wierzchołków a druga to ciąg N cyfr od 1 do 5 dla oznaczenia koloru przypisanego do każdego wierzchołka.

Analiza poprawności:

Graf mający conajwyżej 5 wierzchołków można pokolorować korzystając z 5 kolorów.

Przypadek 1: d (v) ≤ 4 Usuwamy z grafu wierzchołek v, otrzymując graf 5-kolorowalny zgodnie z założeniem indukcyjnym. Wtedy wierzchołek v może zostać pokolorowany kolorem, który nie został wykorzystany do jego sąsiadów (v ma maksymalnie 4 sąsiadów).
Przypadek 2: d (v) = 5
G jest planarny, więc podgraf G zawierający sąsiadów v (i krawędzie między nimi) nie jest K5. Dlatego v ma na pewno dwóch sąsiadów (x i y) niepołączonych krawędzią. Usuwamy z G wierzchołek v, łączymy wierzchołki x i y w jeden (z), otrzymując graf G’ 5-kolorowalny zgodnie z założeniem indukcyjnym. W związku z powyższym G \ {v} jest również 5-kolorowalny (x i y otrzymały kolor wierzchołka z z G’). v ma więc 5 sąsiadów, spośród których conajmniej dwóch (x i y) ma ten sam kolor. Sąsiedzi v zostali pokolorowani przy użyciu maskymalnie 4 kolorów. v możemy pokolorować innym kolorem niż jego sąsiadów, otrzymując 5-kolorowalny graf G

Literatura:
http://aod2011.wikispaces.com/file/view/KolorowanieGrafowPlanarnych.pdf