赤穂昭太郎「カーネル多変量解析」　メモ

Kazeto Fukasawa

平成 26 年 5 月 19 日

1　2 章

2.2

(2.21) の導出

$$
\begin{aligned}
\phi_z(x) &= a\exp(-\beta'(z-x)^2) && \cdots\ (2.19)\\
k(x,x') &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi_z(x)\phi_z(x')dz && \cdots\ (2.20)
\end{aligned}
$$

$$
k(x,x') = a^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\beta'(z-x)^2-\beta'(z-x)^2)dz
$$
$$
= a^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\beta'(z^2-2zx+x^2)-\beta'(z^2-2zx'+x'^2))dz
$$

exp の中に着目して、

$$
-2\beta'z^2+2\beta'z(x+x')-\beta'x^2-\beta'x'^2
$$
$$
= -2\beta'(z^2-(x+x')z)-\beta'x^2-\beta'x^2
$$
$$
= -2\beta'\{(z-\frac{1}{2}(x+x'))^2-\{-\frac{1}{2}(x+x')\}^2\}-\beta'x^2-\beta'x^2
$$
$$
= -2\beta'(z-\frac{1}{2}(x+x'))^2+\frac{\beta'}{2}(x+x')^2-\beta'x^2-\beta'x^2
$$
$$
= -2\beta'(z-\frac{1}{2}(x+x'))^2+\frac{\beta'}{2}(x^2+2xx'+x'^2)-\beta'x^2-\beta'x^2
$$
$$
= -2\beta'(z-\frac{1}{2}(x+x'))^2+\frac{\beta'}{2}x^2+\beta'2xx'+\frac{\beta'}{2}x'^2-\beta'x^2-\beta'x^2
$$
$$
= -2\beta'(z-\frac{1}{2}(x+x'))^2-\frac{\beta'}{2}x^2-\frac{\beta'}{2}x'^2+\beta'x'x
$$
$$
= -2\beta'(z-\frac{1}{2}(x+x'))^2-\frac{\beta'}{2}(x^2-2x'x+x'^2)
$$

$$= -2\beta'(z - \frac{1}{2}(x + x'))^2 - \frac{\beta'}{2}(x - x')^2$$

元の式に戻すと、

$$k(x, x') = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta'(z - \frac{1}{2}(x + x'))^2 - \frac{\beta'}{2}(x - x')^2)dz$$

$$= a^2 \exp(-\frac{\beta'}{2}(x - x')^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta'(z - \frac{1}{2}(x + x'))^2)dz$$

ここで、$t = z - \frac{1}{2}(x + x')$ とおくと、$z = t + \frac{1}{2}(x + x')$ となり、微分すると、$\frac{dz}{dt} = 1$ となる。従って $dz = dt$。これで変数変換すると、

$$= a^2 \exp(-\frac{\beta'}{2}(x - x')^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\beta' t^2)dt$$

ガウス積分する。

$$= a^2 \exp(-\frac{\beta'}{2}(x - x')^2) \sqrt{\frac{\pi}{2\beta'}}$$

となって (2.21) になる。

終わりに

tex で書きおこすのが予想以上に大変なのでこれにて終了。