卒論

Kazeto Fukasawa

平成 28 年 7 月 15 日

1 Copula

1.1 概要

1.1.1 Sklar の定理

周辺分布関数 $F_1, \cdots, F_n$ を持つ連続な n 変量同時分布関数を F とすると、

$$Pr(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) = F(x_1, \cdots, x_n) = C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n)) \ \cdots \ (1)$$

を満たす関数 C が一意に存在する。

1.2 正規コピュラ

1 変量標準正規分布関数を $\Phi_1(\cdot)$ とすれば、スクラーの定理から、

$$Pr(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) = \Phi_n(x_1, \cdots, x_n; \Sigma) = C(\Phi_1(x_1), \cdots, \Phi_n(x_n)) \ \cdots \ (2)$$

1.3 正規コピュラの最尤法

正規コピュラの分散の最尤推定
コピュラの確率分布関数の導出
コピュラ双対問題（途中）

2　分散の推定

2.1　多変量正規分布の最尤法による推定

多変量正規分布の分散共分散行列の最尤法による推定を考える。
多変量正規分布の確率分布関数 $f(x) : x \in \mathbb{R}^m$ は、

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu))$$

であり、このデータ数 n に関する対数尤度関数 $\log L(\mu, \Sigma)$ は、

$$\log L(\mu, \Sigma) = -\frac{mn}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu) \quad \cdots \quad (3)$$

ここで、第三項は、

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \quad \cdots \quad (4)$$

と分解することができて、さらにこの第一項は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (x_i - \bar{x}) &= tr(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (x_i - \bar{x})) \\ &= tr(\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T) \\ &= n \cdot tr(\Sigma^{-1} S) \quad \cdots \quad (5) \end{aligned}$$

と表現できる。

ここで、S は経験分散共分散行列であり、

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$$

である。

(4),(5) より、対数尤度関数は、

$$\log L(\mu, \Sigma) = -\frac{mn}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log |\Sigma| - \frac{n}{2} \cdot tr(\Sigma^{-1} S) - \frac{n}{2} (\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \quad \cdots \quad (6)$$

となる。

$$\frac{\partial \log L(\mu, \Sigma)}{\partial \mu} = n\Sigma^{-1} \bar{x} - n\Sigma^{-1} \mu = 0$$

$$\bar{x} = \mu \quad \cdots \quad (7)$$

であり、(7) を (6) に代入すると三項目が消えて、

$$\log L(\bar{x}, \Sigma) = -\frac{mn}{2} \log{(2\pi)} - \frac{n}{2} \log|\Sigma| - \frac{n}{2} \cdot tr(\Sigma^{-1} S) \quad \cdots \quad (8)$$

となる。

ここで、対称行列 $A = (a_{ij})$ において、A の行列式をその要素で微分するとき、$\tilde{A_{ij}}$ を a_{ij} の余因子行列とすると、

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}} = \tilde{A_{ii}}, \frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = 2\tilde{A_{ij}} \quad (i \neq j) \quad \cdots \quad (9)$$

の関係がある。

また、

$$|\Sigma^{-1}| = |\Sigma|^{-1} \quad \cdots \quad (10)$$

$$tr(\Sigma^{-1} S) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^{(-1)} s_{ij} \quad \cdots \quad (11)$$

の関係を用いると、(8) は以下のように表現できる。

$$\log L(\bar{x}, \Sigma^{-1}) = -\frac{mn}{2} \log 2\pi + \frac{n}{2} \log |\Sigma^{-1}| - \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^{(-1)} s_{ij}$$

これを $\Sigma^{-1} = (\sigma_{ij}^{(-1)})$ の要素で偏微分する。（ここで、$\sigma_{ij}^{(-1)}$ は Σ の逆行列の (i,j) 要素を表す。）

$$\frac{\partial \log L(\bar{x}, \Sigma^{-1})}{\partial \sigma_{ii}^{(-1)}} = \frac{n}{2} \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} \tilde{\Sigma_{ii}^{-1}} - \frac{n}{2} s_{ii} = 0 \quad \cdots \quad (12)$$

$$\frac{\partial \log L(\bar{x}, \Sigma^{-1})}{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}} = n \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} \tilde{\Sigma_{ij}^{-1}} - n \cdot s_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad \cdots \quad (13)$$

ところで、逆行列の公式より、$|A| \neq 0$ ならば、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

が成り立つ。ここで、$\tilde{A}$ は各 a_{ij} に関する余因子行列を並べた行列である。

従って A^{-1} の各要素は、

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A_{ij}}$$

と表すことができる。

これを用いると、(12) と (13) は、

$$\frac{\partial \log L(\bar{x}, \Sigma^{-1})}{\partial \sigma_{ii}^{(-1)}} = (\hat{\Sigma_{ii}^{-1}})^{-1} - s_{ii} = 0$$

$$\hat{\Sigma_{ii}} = s_{ii}$$

$$\frac{\partial \log L(\bar{x}, \Sigma^{-1})}{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}} = (\hat{\Sigma_{ij}^{-1}})^{-1} - s_{ij} = 0$$

$$\hat{\Sigma_{ij}} = s_{ij}$$

となり、Σ の最尤推定値は標本分散共分散行列で与えられることが示される。

2.2 L1 罰則項を入れた推定

2.2.1 フェンチェル双対形

2.2.2 Cordinate Descent による最適化

CD

2.3 SCAD