解析入門

Kazeto Fukasawa

平成 30 年 12 月 10 日

目 次

第1章　実数

1.1　実数の定義

1.1.1　体

定義 1. (体)
集合 $\mathbb{K}$ の任意の二つの元 $a, b \in \mathbb{K}$ に対して，和 $a+b$ と積 ab の二つの演算が定義され，以下の性質を満たす時，$\mathbb{K}$ は体 (Field) であると呼ぶ.

(F1) $a+b=b+a$. (和の交換律)

(F2) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ について，$(a+b)+c=a+(b+c)$.(和の結合律)

(F3) ある $0 \in \mathbb{K}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{K}$ について，$a+0=a$.(和の単位元の存在)

(F4) 任意の $a \in \mathbb{K}$ について，ある $-a \in \mathbb{K}$ が存在して，$a+(-a)=0$ となる.(和の逆元の存在)

(F5) $ab=ba$.(積の交換律)

(F6) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ について，$(ab)c=a(bc)$.(積の結合律)

(F7) ある $1 \in \mathbb{K}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{K}$ について $a1=a$.(積の単位元の存在)

(F8) 0 でない任意の $a \in \mathbb{K}$ について，ある $a^{-1} \in \mathbb{K}$ が存在して，$aa^{-1}=1$.(積の逆元の存在)

(F9) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ について，$a(b+c)=ab+ac$.(和と積の分配律)

(F10) $1 \neq 0$.(0 以外の元の存在)

定理 1. (和の単位元の一意性) (F3) の和の単位元 0 は一意的である.

証明. ある $0' \in \mathbb{K}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{K}$ について，$a+0'=a$ を満たし，かつ $0 \neq 0'$ となると仮定する．このとき，$0 \in \mathbb{K}$ より $0'$ の性質から $0+0'=0$ が成り立つ．一方で，$0' \in \mathbb{K}$ より同様に 0 の性質から，$0'+0=0'$ である．また，F1 より $0+0'=0'+0$ であるため，$0=0+0'=0'+0=0'$ となり，

$0 = 0'$ で矛盾である．従って，$\exists 0' \in \mathbb{K} \forall a \in \mathbb{K}(a + 0' = a) \wedge 0 \neq 0'$ を否定した $\neg(\exists 0' \in \mathbb{K} \forall a \in \mathbb{K}(a + 0' = a)) \vee 0 = 0'$ が成り立つ．(F3) より和の単位元は常に存在するため，$0 = 0'$ が常に成り立つ．　$\square$

定理 2. $\forall a \in \mathbb{K}(0a = 0)$.

証明. (F3) で $a = 0$ とすると $0 + 0 = 0$ であるため，$0a = (0 + 0)a$ となる．ここで，(F9) の分配律を用いると，$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ である．$0a = 0a + 0a$ は，(F3) より $0a$ が $0a$ 和の単位元となっていることを意味する．定理 1 より，和の単位元は一意的であるため，$0a = 0$ が成り立つ．　$\square$

1.1.2　全順序集合

1.2　連続性の公理

定義 2. (デデキントの切断)

$\mathbb{R}$ を全順序集合である体とする．このとき，$\mathbb{R}$ の部分集合の組 (A, B) について以下が成り立つとき，(A, B) をデデキントの切断と呼ぶ．

1. $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \cup B = \mathbb{R}$.
4. $\forall a \in A \forall b \in B(a < b)$.

公理 1. (デデキントの公理)

デデキントの切断に対して，A の最大元と B の最小元の存在に関して，以下の 4 ケースが考えられる．

1. A の最大元が存在する $\wedge$ B の最小元が存在しない．
2. A の最大元が存在しない $\wedge$ B の最小元が存在する．
3. A の最大元が存在する $\wedge$ B の最小元が存在する．
4. A の最大元が存在しない $\wedge$ B の最小元が存在しない．

このとき，1,2 のみに限る．

3. は $\mathbb{R}$ が全順序集合である体であることから常に成り立たない．この公理は，4 があり得ないことを仮定する．

定理 3. ($\mathbb{R}$ の稠密性)

$\mathbb{R}$ を全順序集合である体とする．このとき，$\mathbb{R}$ は稠密である．

証明. 任意の $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$ について，$c = \frac{a+b}{2}$ ととる．$\mathbb{R}$ が体であることより，$c \in \mathbb{R}$ であり，全順序集合であることからこの c にも順序関係が定義される．このときの順序は，$a < b \iff a + a < a + b \iff a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} = c$ より $a < c$．同様に，$a < b \iff a + b < b + b \iff c = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$ より $c < b$ である．したがって任意の $a, b \in \mathbb{R}(a < b)$ について $a < c < b$ となる c が存在するため，$\mathbb{R}$ は稠密である．□ □

定理 4. 公理 1 デデキントの切断の

3. A の最大元が存在する $\wedge$ B の最小元が存在する．

は，常に成り立たない．

証明. 3. が成り立つと仮定し，A の最大元を a，B の最小元を b とすると，$a = b$ はありえない．$a \in A \wedge a \in B$ となり切断の定義 2. $A \cap B = \emptyset$. に反するからである．$a \neq b$ のとき切断の定義 4. より $a < b$ である．$\mathbb{R}$ の稠密性より $a < c < b$ となる $c \in \mathbb{R}$ が存在する．この c は $a < c$ より $c \notin A$ であり $c < b$ より $c \notin B$ である．これは切断の定義 3. $A \cup B = \mathbb{R}$. に矛盾する．
□ □

公理 2. (有界性公理) $\mathbb{R}$ を全順序集合である体とする．$\mathbb{R}$ の任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}(A \neq \emptyset)$ について，A が上に有界（下に有界）ならば，上限 $s = \sup A \in \mathbb{R}$(下限 $s = \inf A$) が存在する．

1.2.1　デデキントの公理と有界性公理の同値性

ここで，デデキントの公理と有界性公理が同値であることを示す．

デデキントの公理 $\Rightarrow$ 有界性公理

有界性公理の，上に有界な空でない任意の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について，

$$\begin{aligned} U &= \{u \in \mathbb{R} | \forall a \in A (a \leq u)\}, \\ L = U^C &= \{l \in \mathbb{R} | \exists a \in A (a > l)\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

と定義する．U は A の上界であり，L はその補集合である．

1. (L, U) が切断である．
2. L の最大元または U の最小元が $s = \sup A$ となる．
3. L の最大元は存在しない．
4. U の最小元が $s = \sup A$ となる．

という順に示す．

まずデデキントの切断であることを確認する．

1. $L \neq \emptyset \wedge U \neq \emptyset$.

A は有界であるため，ある $b \in \mathbb{R}$ が存在し，$\forall a \in A(a \leq b)$ となる．このとき，$b \in U$ であるため $U \neq \emptyset$ である．また，$A \neq \emptyset$ の仮定より，ある $a \in A$ がとれる．$a-1 \in \mathbb{R}$ を考えると，$a-1 < a \in A$ であり，これは $a-1 \in L$ を意味する．従って $L \neq \emptyset$ となる．

2. $L \cap U = \emptyset$. L は U の補集合として定義しているため，$L \cap U = \emptyset$ である．実際に，$L \cap U \neq \emptyset$ とすると，$c \in L \cap U$ がとれて，$c \in U$ より $\forall a \in A(a \leq c)$ である．一方で，$c \in L$ より $\exists a \in A(a > c)$ となり任意の a について $a \leq c$ に矛盾する．従って $L \cap U = \emptyset$ が示された．

3. $L \cup U = \mathbb{R}$. $L = U^C$ であったため，$U^C \cup U = \mathbb{R}$ を示す．まず，$U, U^C \subset \mathbb{R}$ より $U \cup U^C \subset \mathbb{R}$ が成り立つ．実際に，任意の $u \in U \cup U^C$ について，$u \in U$ であるとき $U \subset \mathbb{R}$ より $u \in \mathbb{R}$ であり，$u \in U^C$ のときも同様に $U^C \subset \mathbb{R}$ より $u \in \mathbb{R}$ であるため，$U \cup U^C \subset \mathbb{R}$ が成り立つ．一方で，任意に $a \in \mathbb{R}$ をとると，$a \in U$ または $a \notin U$ のいずれかが成り立つ．従って任意の $a \in \mathbb{R}$ について，

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \{a | a \in U \vee a \notin U\} = \{a | a \in U\} \cup \{a | a \notin U\} = U \cup U^C$$

より，$\mathbb{R} \subset U^C \cup U$. 以上より $U^C \cup U = \mathbb{R}$ が示された．

4. $\forall a \in L \forall b \in U(a < b)$. 任意に $a \in L$ をとると，$a < c$ となる $c \in A$ が存在する．また，U の定義より任意の $c' \in A$ に対して，任意の $b \in U$ は $c' \leq b$ が成り立つ．任意の c' について成り立つため，c についても成り立ち，$a < c \leq b$ となる．以上より，$\forall a \in L \forall b \in U(a < b)$ が示された．

1.2.3.4 より，(L, U) は切断である．デデキントの公理より，L の最大元または U の最小元が存在する．

L の最大元は存在しない L の最大元が存在すると仮定し，それを s とおく．このとき $s \in L$ より $s < a \in A$ となる a が存在する．$\mathbb{R}$ の稠密性より，$s < b < a$ となる $b \in \mathbb{R}$ が存在し，s が L の最大元であることから，$b \in U$ が成り立つ．しかし，$b < a$ が任意の $a \in A$ について $a \leq u$ が成り立つという U の定義に反する．従って L の最大元は存在しない．

U の最小元は A の上限 L の最小元が存在しないため，デデキントの公理より U の最小元が存在する．U は A の上界の集合として定義されていたため，その最小元は A の上限である．従って A の上限が存在する．□

有界性公理 $\Rightarrow$ デデキントの公理

まず，任意の切断 (L, U) の L は上に有界である．もしも L が上に有界でないとすると，任意の $a \in \mathbb{R}$ について $a < l$ となる $l \in L$ が存在し，$U = \emptyset$ となるが，これは切断の定義 2. に反する．

この L に対して有界性公理より上限が存在する．$s = \sup L$ とおくと，$s \in L$ と $s \in U$ の場合が考えられる．$s \in L$ であるとき，s は L の最大元であり，$s \in U$ であるとき，s は U の最小元であることを示す．

$s \in L$ のとき，s は L の上界の要素であることから，$\forall l \in L(l \leq s)$ が成り立ち，仮定より $s \in L$ であるため，s は L の最大元である．

$s \in U$ のとき，$\forall u \in U(s \leq u)$ を示せば良い．任意の $\epsilon > 0$ について，$s-\epsilon$ は s が L の上限であることから，L に属する．つまり，$\forall x \in \mathbb{R}(x < s \Rightarrow x \in L)$ が成り立ち，対偶をとると $\forall x \in \mathbb{R}(x \in U \Rightarrow x \geq s)$ となる．従って s は U の最小元である．□

定理 5. $\mathbb{R}$ 上の，上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する．

証明. $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列であるとき，それを集合とみなした $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ は，上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合である．そのため，有界性公理より上限 $s = \sup(A)$ が存在する．
$\epsilon > 0$ を任意にとると，s が上限であることより，$s - \epsilon$ は A の上界ではない．$s - \epsilon$ が A の上界ではないとき，$s - \epsilon < a_{n_0} \leq s$ となるような $a_{n_0} \in A$ が存在する．
このとき，$\{a_n\}$ が単調増加数列であることを用いると，任意の $n_0 \leq n$ となる n について，

$$s - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n$$

が成り立つ．また，s は上限であり任意の $a_n \in A$ について $a_n \leq s$ を満たすため，

$$s - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ より右辺に ϵ を足すと等号ではなくなり，

$$s - \epsilon < a_n < s + \epsilon \iff |a_n - s| < \epsilon$$

となる．
$\epsilon > 0$ について $a_{n_0} \in A$ が存在するとき，$\{a_n\}$ は $\mathbb{N} \to A$ の全射とみなせるため，a_{n_0} に対応する $n_0 \in \mathbb{N}$ は存在する．
最終的に，任意の $\epsilon > 0$ について $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n_0 \leq n \Rightarrow |a_n - s| < \epsilon$ を満たす．これは，$\{a_n\}$ が s に収束することを意味する．□

定理 6. (アルキメデスの定理) 任意の二つの $a, b \in \mathbb{R}$ について，$na > b$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

証明. この定理は，b が数列 $(na)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界ではないことを主張している．b が数列 $(na)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界であると仮定すると，$(na)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加数列であるため，定理 5 よりある値 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する．このとき，収束の定義より，$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}(n \geq n_0 \Rightarrow |na - \alpha| < \epsilon)$ が成り立つため，$n \geq n_0$ のとき，

$$\begin{aligned} &\alpha - \epsilon < na, \\ &na < \alpha + \epsilon, \end{aligned} \tag{1.2}$$

の両方が成り立つ．ここで $\epsilon = a$ とすると，$n_a \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_a$ のとき，

$$\begin{aligned} &\alpha - a < na, \\ &na < \alpha + a. \end{aligned} \tag{1.3}$$

1 つ目の不等式の両辺に $2a$ を足すと，$\alpha + a < (n+2)a$ となり，$n_a < n+2$ であるため，$n+2$ は二つ目の不等式を満たし，$(n+2)a < \alpha + a$ となり，これは矛盾である．したがって b は数列 $(na)_{n\in\mathbb{N}}$ の上界ではない．　□