BERNSTEINOVI POLINOMI
in
WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

Izak Jenko

9. 4. 2020

Definicija: Bernsteinov bazni polinom n-te stopnje za poljuben $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ je

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

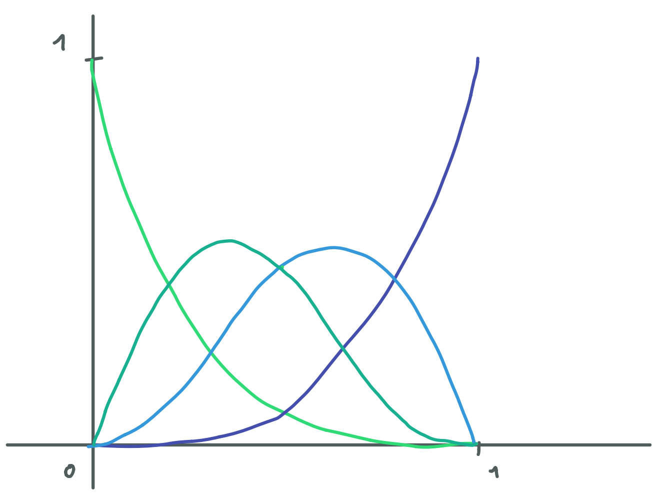
Zgled:

$b_{0,0}(x) = 1$

$b_{0,1}(x) = 1 - x$ $\qquad$ $b_{1,1}(x) = x$

$b_{0,2}(x) = (1-x)^2$ $\qquad$ $b_{1,2}(x) = 2x(1-x)$ $\qquad$ $b_{2,2}(x) = x^2$

$b_{0,3}(x) = (1-x)^3$ $\qquad$ $b_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2$ $\qquad$ $b_{2,3}(x) = 3x^2(1-x)$ $\qquad$ $b_{3,3}(x) = x^3$



__Trditev__ : Bernsteinovi bazni polinomi n-te stopnje : $\underbrace{b_{0,n}, b_{1,n}, \ldots, b_{n,n}}_{n+1}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}_n[X]$.

Dokaz :

Trditev: Bernsteinovi polinomi n-te stopnje tvorijo razčlenitev enote

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) \equiv 1$$

Dokaz:

__Definicija__: Naj bo $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. __Bernsteinov polinom__ n-te stopnje funkcije f je

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x)$$

<u>Lema</u>: Naj bosta $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$, za kateri velja

$$f \leq g.$$

Tedaj velja

$$B_n(f) \leq B_n(g).$$

Dokaz:

<u>Lema</u> : Naj bodo $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubni. Tedaj velja

$$B_n(\alpha f + \beta) = \alpha B_n(f) + \beta$$

Dokaz :

__Zgled__: Izračunajmo $B_n(t \mapsto t)$ in $B_n(t \mapsto t^2)$ za $n \in \mathbb{N}$.

<u>Izrek</u> (Weierstrass) :

Za poljubno zvezno funkcijo $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ in vsak $\varepsilon > 0$, obstaja polinom p na $[a,b]$, da velja

$$d_\infty(f, p) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon .$$

<u>Izrek</u> (Bernstein) :

Za poljubno zvezno funkcijo $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, funkcijsko zaporedje $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ enakomerno konvergira proti f na $[a,b]$

$$\lim_{n \to \infty} B_n(f) = f$$

Opomba: Bernstein $\Rightarrow$ Weierstrass

Dokaz :

$\forall f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zv.

$\forall \varepsilon > 0 .\ \exists N \in \mathbb{N} .\ \forall n \geq N .\ \forall x \in [0,1] .$

$|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$

Izrek (Stone - Weierstrass):

Naj bo X topološki prostor in A realna podalgebra zveznih funkcij $C(X, \mathbb{R}) = C(X)$, za katero velja:

(i) vse konstantne funkcije na X so v A.

(ii) za poljubni $x, y \in X$: $x \neq y \Rightarrow \exists f \in A.\ f(x) \neq f(y)$

(A loči točke prostora X)

Tedaj je podalgebra A gosta v $C(X)$ glede na kompaktno-odprto topologijo.

Zgled: