BERNSTEINOVI POLINOMI IN WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

IZAK JENKO

Povzetek. V tem članku bomo spoznali enega izmed prvih konstruktivnih dokazov *Weierstrassovega aproksimacijskega izreka*, ki pravi da lahko vsako zvezno funkcijo na zaprtem intervalu poljubno dobro enakomerno aproksimiramo s polinomom. Definirali bomo posebno vrsto polinomov t. i. *Bernsteinove polinome*, si ogledali njihove lastnosti in z njimi dokazali Weierstrassov izrek.

1. Uvod

Preden se lotimo definicije Bernsteinovih polinomov in dokazovanja Weierstrassovega izreka, povejmo nekaj besed o prosotru, ki ga bomo obranavali ter normi, ki bo določila metriko na tem prostoru. Iz razlogov, ki jih bomo razjasnili pozneje, se bomo osredotočili na prostor $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, to je prostor vseh zveznih funkcij $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, in supremum normo

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x\in[0,1]\}$$

na njem. Vemo že, da ta norma porodi supremum metriko

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|,$$

za katero velja, da na kompaktnem intervalu $[0,1]$ poljubno zaporedje zveznih funkcij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ enakomerno konvergira k neki zvezni funkciji f iz prostora $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ natanko tedaj, ko to zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti f v metriki d_∞. Ravno to dejstvo pa bomo uporabili pri dokazu Weierstrassovega izreka.

Posvetimo sedaj še nekaj pozornosti samemu pojmu aproksimacije ter se začasno usmerimo na malce bolj splošne prostore. Naj bo (X,d) poljuben metričen prostor in $A\subseteq X$ takšna podmnožica, za katero lahko povemo, da za poljuben $\epsilon>0$ in vsak $x\in X$ obstaja v A takšna točka $a\in A$, da je

$$d(a,x)<\epsilon.$$

Lastnost množice A je tedaj ravno ta, da je mogoče vsako točko $x\in X$ poljubno dobro aproksimirati z nekim elementom iz A. Pravzaprav takrat za to lastnost rečemo, da je množica A povsod gosta v X.

2. Bernsteinovi polinomi

V tem poglavju bomo začeli z definicijo Bernsteinovih baznih polinomov in zanje dokazali nekaj zanimivih lastnosti, pozneje pa bomo definirali Bernsteinov polinom n-te stopnje pripadajoč zvezni neki funkciji $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Definicija 2.1 (**Bernsteinovi bazni polinomi**). *Bernsteinov bazni polinom n-te stopnje* za poljuben $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ je

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Zgled. Prvih nekaj Bernsteinovih baznih polinomov do tretje stopnje.

$$b_{0,0}(x) = 1 \qquad b_{0,1}(x) = 1 - x$$
$$b_{1,1}(x) = x$$

$$b_{0,2}(x) = (1-x)^2 \qquad b_{0,3}(x) = (1-x)^3$$
$$b_{1,2}(x) = 2x(1-x) \qquad b_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2$$
$$b_{2,2}(x) = x^2 \qquad b_{2,3}(x) = 3x^2(1-x)$$
$$b_{3,3}(x) = x^3$$

Trditev 2.1. *Bernsteinovi bazni polinomi n-te stopnje $\{b_{k,n}\}_{0 \le k \le n}$ tvorijo bazo $(n+1)$-dimenzionalnega realnega vetorskega prostora polinomov največ n-te stopnje $\mathbb{R}_n[X]$ za poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vemo že, da je $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_n[X]$. Vidimo tudi, da je moč množice $\{b_{i,n}\}_{0 \le i \le n}$ enaka $n+1$, torej bo dovolj če pokažemo, da lahko vsako potenco x^k za $0 \le k \le n$ izrazimo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov. Za poljuben $k \in \{0, \dots, n\}$ velja namreč

$$x^k = \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x).$$

Preverimo to enačbo z računom.

$$\begin{aligned} x^k &= x^k (x + (1-x))^{n-k} \\ &= x^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^{k+i} (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} x^i (1-x)^{n-i}, \end{aligned}$$

kjer bomo uporabili zvezo $\binom{n-k}{i-k} = \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x). \end{aligned}$$

□

Trditev 2.2. *Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n tvorijo razčlenitev enote.*

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) \equiv 1$$

Dokaz. Trditev enostavno preverimo z uporabo binomskega izreka in definicije Bernsteinovih baznih polinomov.

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

□

Sedaj bomo definirali Bernsteinove polinome pripadajoče neki zvezni funkciji, ki jih bomo uporabli pri dokazu Weierstrassovega izrek, poleg tega pa bomo dokazali še nekaj lem, ki se bodo pravtako izkazale za koristne v dokazu glavnega izreka.

Definicija 2.2. *Bernsteinov n-ti polinom* poljubne zvezne funkcije $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ je

$$B_n(x, f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Lema 2.3. *Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ poljubni zvezni funkciji za kateri velja $f \leq g$, potem za njuna Bernsteinova polinoma poljubne stopnje n velja*

$$B_n(\text{-}\,, f) \leq B_n(\text{-}\,, g).$$

Dokaz. Ker za poljuben $x \in [0,1]$ velja $f(x) \leq g(x)$, bo tudi za vsak $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ veljalo

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Uporabimo to v računu

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) = B_n(x, g),$$

ki velja za vsak $x \in [0,1]$. □

Lema 2.4. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ poljubna zvezna funkcija in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti. Tedaj za vsak $x \in [0,1]$ velja*

$$B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) = \alpha B_n(x, f) + \beta.$$

Dokaz. Enakost preprosto preverimo z računom

$$B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha \cdot f + \beta) \left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) =$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) + \beta \sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = \alpha B_n(x, f) + \beta,$$

kar velja za vse $x \in [0, 1]$, pri čemer pa smo uporabili trditev 2.2. □

3. Weierstrassov aproksimacijski izrek

Izrek 3.1. *Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in pojubno natančnost $\epsilon > 0$ obstaja polinom p na $[a, b]$ za katerega velja:*

$$d_\infty(f, p) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Ekvivalentna formulacija, z uporabo Bernsteinovih polinomov:

Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zaporedje polinomov $(B_n(\text{-} \ , f))_{n \in \mathbb{N}}$ enakomerno konvergira proti f na $[a, b]$ ali:

$$\lim_{n \to \infty} B_n(x, f) = f(x)$$

enakomerno na $[a, b]$.

Nekaj let po Bernsteinovem konstruktivističnem dokazu Weierstrassovega izreka je posplošitev izreka leta 1937 formuliral in dokazal Marshall H. Stone. V izreku je poljuben zaprt interval zamenjal z abstraktnim topološkim prostorom X in algebro polinomov s poljubno podalgebro topološke algebre zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X)$ opremljene s kompaktno odprto topologijo ter nekatermi posebnimi lastnostmi.

Izrek 3.2 (**Stone–Weierstrassov izrek**)**.** *Naj bo X topološki prostor in naj bo A podalgebra algebre zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(X)$ na X, za katero velja:*

(i) *vse konstantne realne funkcije na X so v podalgebri A,*
(ii) *za poljubni točki $x, y \in X$,$x \neq y$, obstaja takšna funkcija f iz podalgebre A, da je $f(x) \neq f(y)$ (tej lastnosti pravimo tudi, da A loči točke prostora X).*

Tedaj je podalgebra A gosta v $\mathcal{C}(X)$ glede na kompaktno-odprto topologijo.

Z dokazom tega posplošenega izreka se v tem članku ne bomo ukvarjali, vseeno pa bi pokometirali kam v ta izrek sodijo Bernsteinovi polinomi oziroma kako bi s tem izrekom kot posledico ali poseben primer dokazali Weierstrassov izrek.

4. Testi

Definicija 4.1 (Brokoli)**.** To je definicija

Lema 4.1. *To je lema*

Izrek 4.2. *Drugi izrek*

Izrek 4.3 (**Weierstrassov izrek**)**.** *Prvi izrek*

Lema 4.4. *Druga lema*

Izrek 4.5. *Tretji izrek*

Zgled. $1+1=0$, če $\mathrm{char}(K)=2$

Posledica 4.6. *p*

Zgled. Prvih nekaj Bernsteinovih baznih polinomov do tretje stopnje.

$b_{0,0}(x)=1,$

$b_{0,1}(x)=1-x, \quad b_{1,1}(x)=x,$

$b_{0,2}(x)=(1-x)^2, \quad b_{1,2}(x)=2x(1-x), \quad b_{2,2}(x)=x^2,$

$b_{0,3}(x)=(1-x)^3, \quad b_{1,3}(x)=3x(1-x)^2, \quad b_{2,3}(x)=3x^2(1-x), \quad b_{3,3}(x)=(1-x)^3.$

$a \cdot b$

jj