

BERNSTEINOVİ POLINOMI IN WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

IZAK JENKO

POVZETEK. V tem članku bomo spoznali enega izmed prvih konstruktivnih dokazov *Weierstrassovega aproksimacijskega izreka*, ki pravi da lahko vsako zvezno funkcijo na zaprtem intervalu poljubno dobro enakomerno aproksimiramo s polinomom. Definirali bomo posebno vrsto polinomov t. i. *Bernsteinove polinome*, si ogledali njihove lastnosti in z njimi dokazali Weierstrassov izrek.

1. UVOD

Preden se lotimo definicije Bernsteinovih polinomov in dokazovanja Weierstrassovega izreka, povejmo nekaj besed o prosotru, ki ga bomo obranavali ter normi, ki bo določila metriko na tem prostoru. Iz razlogov, ki jih bomo razjasnili pozneje, se bomo osredotočili na prostor $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, to je prostor vseh zveznih funkcij $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, in supremum normo

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

na njem. Vemo že, da ta norma porodi supremum metriko

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|,$$

za katero velja, da na kompaktnem intervalu $[0, 1]$ poljubno zaporedje zveznih funkcij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ enakomerno konvergira k neki zvezni funkciji f iz prostora $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ natanko tedaj, ko to zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti f v metriki d_{∞} . Ravno to dejstvo pa bomo uporabili pri dokazu Weierstrassovega izreka.

Posvetimo sedaj še nekaj pozornosti samemu pojmu aproksimacije ter se začasno usmerimo na malce bolj splošne prostore. Naj bo (X, d) poljuben metričen prostor in $A \subseteq X$ takšna podmnožica, za katero lahko povemo, da za poljuben $\epsilon > 0$ in vsak $x \in X$ obstaja v A takšna točka $a \in A$, da je

$$d(a, x) < \epsilon.$$

Lastnost množice A je tedaj ravno ta, da je mogoče vsako točko $x \in X$ poljubno dobro aproksimirati z nekim elementom iz A . Pravzaprav takrat za to lastnost rečemo, da je množica A povsod gosta v X .

2. BERNSTEINOVİ POLINOMI

V tem poglavju bomo začeli z definicijo Bernsteinovih baznih polinomov in zanje dokazali nekaj zanimivih lastnosti, pozneje pa bomo definirali Bernsteinov polinom n -te stopnje pripadajoč zvezni neki funkciji $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Definicija 2.1 (Bernsteinovi bazni polinomi). *Bernsteinov bazni polinom n -te stopnje za poljuben $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ je*

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Zgled. Prvih nekaj Bernsteinovih baznih polinomov do tretje stopnje.

$$\begin{aligned} b_{0,0}(x) &= 1 & b_{0,1}(x) &= 1-x \\ b_{1,1}(x) &= x \\ b_{0,2}(x) &= (1-x)^2 & b_{0,3}(x) &= (1-x)^3 \\ b_{1,2}(x) &= 2x(1-x) & b_{1,3}(x) &= 3x(1-x)^2 \\ b_{2,2}(x) &= x^2 & b_{2,3}(x) &= 3x^2(1-x) \\ b_{3,3}(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Trditev 2.1. *Bernsteinovi bazni polinomi n -te stopnje $\{b_{k,n}\}_{0 \leq k \leq n}$ tvorijo bazo $(n+1)$ -dimenzionalnega realnega vektorskega prostora polinomov največ n -te stopnje $\mathbb{R}_n[X]$ za poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vemo že, da je $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_n[X]$. Vidimo tudi, da je moč množice $\{b_{i,n}\}_{0 \leq i \leq n}$ enaka $n+1$, torej bo dovolj če pokažemo, da lahko vsako potenco x^k za $0 \leq k \leq n$ izrazimo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov. Za poljuben $k \in \{0, \dots, n\}$ velja namreč

$$x^k = \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x).$$

Preverimo to enačbo z računom.

$$\begin{aligned} x^k &= x^k (x + (1-x))^{n-k} \\ &= x^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^{k+i} (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} x^i (1-x)^{n-i}, \end{aligned}$$

kjer bomo uporabili zvezo $\binom{n-k}{i-k} = \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x). \end{aligned}$$

□

Trditev 2.2. *Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n tvorijo razčlenitev enote.*

$$\sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) \equiv 1$$

Dokaz. Trditev enostavno preverimo z uporabo binomskega izreka in definicije Bernsteinovih baznih polinomov.

$$\sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

□

Sedaj bomo definirali Bernsteinove polinome pripadajoče neki zvezni funkciji, ki jih bomo uporabili pri dokazu Weierstrassovega izreka, poleg tega pa bomo dokazali še nekaj lem, ki se bodo prav tako izkazale za koristne v dokazu glavnega izreka.

Definicija 2.2. *Bernsteinov n -ti polinom poljubne zvezne funkcije $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ je*

$$B_n(x, f) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Lema 2.3. *Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ poljubni zvezni funkciji za kateri velja $f \leq g$, potem za njuna Bernsteinova polinoma poljubne stopnje n velja*

$$B_n(-, f) \leq B_n(-, g).$$

Dokaz. Ker za poljuben $x \in [0, 1]$ velja $f(x) \leq g(x)$, bo tudi za vsak $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ veljalo

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Uporabimo to v računu

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \leq \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) = B_n(x, g),$$

ki velja za vsak $x \in [0, 1]$.

□

Lema 2.4. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ poljubna zvezna funkcija in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti. Tedaj za vsak $x \in [0, 1]$ velja*

$$B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) = \alpha B_n(x, f) + \beta.$$

Dokaz. Enakost preprosto preverimo z računom

$$\begin{aligned} B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) &= \sum_{k=0}^n (\alpha \cdot f + \beta) \binom{n}{k} b_{k,n}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \right) b_{k,n}(x) = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) + \beta \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = \alpha B_n(x, f) + \beta, \end{aligned}$$

kar velja za vse $x \in [0, 1]$, pri čemer pa smo uporabili trditev 2.2. \square

3. WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

Prispeli smo do glavnega dela tega članka. Tu bomo formulirali znani Weierstrassov izrek, in ga dokazali tako, da bomo najprej pokazali kako iz Bernsteinovega izrek o enakomerni konvergenci izbranega zaporedja Bernsteinovih polinomov sledi Weierstrassov izrek ter nato dokazali še veljavnost prvega.

Izrek 3.1 (Weierstrassov aproksimacijski izrek). *Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in poljubno natančnost $\epsilon > 0$ obstaja polinom p na $[a, b]$ za katerega velja:*

$$d_\infty(f, p) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Podajmo še Bernsteinov izrek.

Izrek 3.2 (Bernstein). *Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedje polinomov $(B_n(-, f))_{n \in \mathbb{N}}$ enakomerno konvergira proti f na $[a, b]$ ali:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x, f) = f(x)$$

enakomerno na $[a, b]$.

Opomba. Pokažimo, da iz izreka 3.2 sledi izrek 3.1. Izberimo si poljuben $\epsilon > 0$. Ker zaporedje polinomov $(B_n(-, f))_{n \in \mathbb{N}}$ enakomerno konvergira na $[a, b]$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $x \in [a, b]$ in vse $n \geq N$ velja

$$|B_n(x, f) - f(x)| < \epsilon.$$

Torej po definiciji metrike d_∞ za dobljeni N velja

$$d_\infty(f, B_N(-, f)) < \epsilon,$$

kjer je iskani polinom p seveda enak $B_N(-, f)$ in to torej pokaže Weierstrassov aproksimacijski izrek.

Dokaz (izrek 3.2). Najprej utemeljimo, zakaj se je iz splošnega zaprtega intervala $[a, b]$ dovolj omejiti na interval $[0, 1]$. To lahko storimo, saj je zaradi obstoja homeomorfizma $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, podanega s prepisom

$$\phi(t) = (b - a)t + a,$$

možno s kompozicijo $f \circ \phi$ problem prevesti na interval $[0, 1]$. \square

Nekaj let po Bernsteinovem konstruktivističnem dokazu Weierstrassovega izreka je posplošitev izreka leta 1937 formuliral in dokazal Marshall H. Stone. V izreku je poljuben zaprt interval zamenjal z abstraktnim topološkim prostorom X in algebro polinomov s poljubno podalgebro topološke algebre zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X)$ opremljene s kompaktno odprto topologijo ter nekaterimi posebnimi lastnostmi.

Izrek 3.3 (Stone–Weierstrassov izrek). *Naj bo X topološki prostor in naj bo A podalgebra algebre zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(X)$ na X , za katero velja:*

- (i) *vse konstantne realne funkcije na X so v podalgebri A ,*
- (ii) *za poljubni točki $x, y \in X$, če je $x \neq y$, potem obstaja takšna funkcija f iz podalgebre A , da je $f(x) \neq f(y)$ (tej lastnosti pravimo tudi, da A loči točke prostora X).*

Tedaj je podalgebra A gosta v $\mathcal{C}(X)$ glede na kompaktno-odprto topologijo.

Z dokazom tega posplošenega izreka se v tem članku ne bomo ukvarjali, vseeno pa bi pokometirali kam v ta izrek sodijo Bernsteinovi polinomi oziroma kako bi z njimi in s tem izrekom kot posledico ali poseben primer dokazali Weierstrassov izrek. To bomo storili v naslednjem zgledu.

Zgled. Kot zanimivost lahko še za konec na hitro preverimo, da podalgebra Bernsteinovih polinomov zares zadošča predpostavkama (i) in (ii) iz Stoneovega izreka 3.3.

Stovnovnega Stone-ovega

4. TESTI

Definicija 4.1 (Brokoli). To je definicija

Lema 4.1. *To je lema*

Izrek 4.2. *Drugi izrek*

Izrek 4.3 (Weierstrassov izrek). *Prvi izrek*

Lema 4.4. *Druga lema*

Izrek 4.5. *Tretji izrek*

Zgled. $1 + 1 = 0$, če $\text{char}(K) = 2$

Posledica 4.6. p

Zgled. Prvih nekaj Bernsteinovih baznih polinomov do tretje stopnje.

$$b_{0,0}(x) = 1,$$

$$b_{0,1}(x) = 1 - x, \quad b_{1,1}(x) = x,$$

$$b_{0,2}(x) = (1 - x)^2, \quad b_{1,2}(x) = 2x(1 - x), \quad b_{2,2}(x) = x^2,$$

$$b_{0,3}(x) = (1 - x)^3, \quad b_{1,3}(x) = 3x(1 - x)^2, \quad b_{2,3}(x) = 3x^2(1 - x), \quad b_{3,3}(x) = (1 - x)^3.$$

$$a \cdot b$$

jj