

# BERNSTEINOVİ POLINOMI IN WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

IZAK JENKO

POVZETEK. V tem članku bomo spoznali enega izmed prvih konstruktivnih dokazov *Weierstrassovega aproksimacijskega izreka*, ki pravi, da lahko vsako zvezno funkcijo na zaprtem intervalu poljubno dobro enakomerno aproksimiramo s polinomom. Definirali bomo posebno vrsto polinomov, t. i. *Bernsteinove polinome*, si ogledali njihove lastnosti in z njimi dokazali Weierstrassov izrek.

## 1. UVOD

Preden se lotimo definicije Bernsteinovih polinomov in dokazovanja Weierstrassovega izreka, povejmo nekaj besed o prostoru, ki ga bomo obranavali ter normi, ki bo določila metriko na tem prostoru. Iz razlogov, ki jih bomo razjasnili pozneje, se bomo osredotočili na prostor  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . To je prostor vseh zveznih funkcij  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , s supremum normo

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

na njem. Vemo že, da ta norma porodi supremum metriko

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|,$$

za katero velja, da na kompaktnem intervalu  $[0, 1]$  poljubno zaporedje zveznih funkcij  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  enakomerno konvergira k neki zvezni funkciji  $f$  iz prostora  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  natanko tedaj, ko to zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira proti  $f$  v metriki  $d_{\infty}$ . Ravno to dejstvo bomo uporabili pri dokazu Weierstrassovega izreka.

Posvetimo sedaj še nekaj pozornosti samemu pojmu *aproksimacije* ter se začasno usmerimo na malce bolj splošne prostore. Naj bo  $(X, d)$  poljuben metričen prostor in  $A \subseteq X$  takšna podmnožica, za katero lahko povemo, da za poljuben  $\epsilon > 0$  in vsak  $x \in X$  obstaja v  $A$  takšna točka  $a \in A$ , da je

$$d(a, x) < \epsilon.$$

Lastnost množice  $A$  je tedaj ravno ta, da je mogoče vsako točko  $x \in X$  poljubno dobro aproksimirati z nekim elementom iz  $A$ . Rečemo, da je množica  $A$  povsod gosta v  $X$ .

## 2. BERNSTEINOVİ POLINOMI

V tem poglavju bomo začeli z definicijo Bernsteinovih baznih polinomov in zanje dokazali nekaj zanimivih lastnosti, pozneje pa bomo definirali Bernsteinov polinom  $n$ -te stopnje pripadajoč zvezni funkciji  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Definicija 2.1 (Bernsteinovi bazni polinomi).** *Bernsteinov bazni polinom  $n$ -te stopnje za poljuben  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  je*

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

**Zgled.** Prvih nekaj Bernsteinovih baznih polinomov do tretje stopnje.

$$\begin{aligned} b_{0,0}(x) &= 1 & b_{0,1}(x) &= 1-x \\ b_{1,1}(x) &= x \\ b_{0,2}(x) &= (1-x)^2 & b_{0,3}(x) &= (1-x)^3 \\ b_{1,2}(x) &= 2x(1-x) & b_{1,3}(x) &= 3x(1-x)^2 \\ b_{2,2}(x) &= x^2 & b_{2,3}(x) &= 3x^2(1-x) \\ b_{3,3}(x) &= x^3 \end{aligned}$$

**Trditev 2.1.** *Bernsteinovi bazni polinomi  $n$ -te stopnje  $\{b_{k,n}\}_{0 \leq k \leq n}$  tvorijo bazo  $(n+1)$ -dimenzionalnega realnega vektorskega prostora polinomov največ  $n$ -te stopnje  $\mathbb{R}_n[X]$  za poljubno naravno število  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Dokaz.* Vemo že, da je  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  baza vektorskega prostora  $\mathbb{R}_n[X]$ . Vidimo tudi, da je moč množice  $\{b_{i,n}\}_{0 \leq i \leq n}$  enaka  $n+1$ , torej bo dovolj če pokažemo, da lahko vsako potenco  $x^k$  za  $0 \leq k \leq n$  izrazimo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov. Za poljuben  $k \in \{0, \dots, n\}$  velja namreč

$$x^k = \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x).$$

Preverimo to enačbo z računom.

$$\begin{aligned} x^k &= x^k (x + (1-x))^{n-k} \\ &= x^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^{k+i} (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x). \end{aligned}$$

Zvezo  $\binom{n-k}{i-k} = \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i}$  smo uporabili v predzadnji enakosti.  $\square$

**Trditev 2.2.** *Bernsteinovi bazni polinomi stopnje  $n$  tvorijo razčlenitev enote:*

$$\sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) \equiv 1.$$

*Dokaz.* Trditev enostavno preverimo z uporabo binomskega izreka in definicije Bernsteinovih baznih polinomov.

$$\sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

□

Sedaj bomo definirali Bernsteinove polinome pripadajoče neki zvezni funkciji, ki jih bomo uporabili pri dokazu Weierstrassovega izreka, poleg tega pa bomo dokazali še nekaj lem, ki se bodo izkazale za koristne v dokazu glavnega izreka.

**Definicija 2.2.** *Bernsteinov  $n$ -ti polinom poljubne zvezne funkcije  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  je*

$$B_n(x, f) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

**Lema 2.3.** *Naj bosta  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  poljubni zvezni funkciji za kateri velja  $f \leq g$ , potem za njuna Bernsteinova polinoma poljubne stopnje  $n$  velja*

$$B_n(-, f) \leq B_n(-, g).$$

*Dokaz.* Ker za poljuben  $x \in [0, 1]$  velja  $f(x) \leq g(x)$ , bo tudi za vsak  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  veljalo

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Iz definicije 2.1 Bernsteinovih baznih polinomov opazimo, da je na intervalu  $[0, 1]$  izraz

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$$

za vse  $0 \leq k \leq n$ . Uporabimo to v računu

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \leq \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) = B_n(x, g),$$

ki velja za vsak  $x \in [0, 1]$ . □

**Lema 2.4.** *Naj bo  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  poljubna zvezna funkcija in  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  poljubni konstanti. Tedaj za vsak  $x \in [0, 1]$  velja*

$$B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) = \alpha B_n(x, f) + \beta.$$

*Dokaz.* Enakost preprosto preverimo z računom

$$\begin{aligned} B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) &= \sum_{k=0}^n (\alpha \cdot f + \beta) \binom{n}{k} b_{k,n}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \alpha f \left( \frac{k}{n} \right) + \beta \right) b_{k,n}(x) = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n f \left( \frac{k}{n} \right) b_{k,n}(x) + \beta \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = \alpha B_n(x, f) + \beta, \end{aligned}$$

kar velja za vse  $x \in [0, 1]$ , pri čemer smo uporabili trditev 2.2.  $\square$

**Primer 2.3.** [2] Za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  izračunajmo  $B_n(x, t \mapsto t)$  in  $B_n(x, t \mapsto t^2)$ . Po binomskem izreku vemo

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) = \frac{\partial}{\partial p} ((p+q)^n) = n(p+q)^{n-1},$$

torej, če obe strani pomnožimo s  $\frac{p}{n}$ , dobimo enačbo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} p^k q^{n-k} = p(p+q)^{n-1}. \quad (1)$$

Če v to enačbo vstavimo  $p = x$  in  $q = 1 - x$  dobimo

$$x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{k,n}(x) = B_n(x, t \mapsto t).$$

Za izračun  $B_n(x, t \mapsto t^2)$  ponovno parcialno odvajajmo enačbo (1) po spremenljivki  $p$  in nato obe strani pomnožimo s  $\frac{p}{n}$ . Tedaj dobimo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} p^k q^{n-k} = \frac{(n-1)(p+q)^{n-2}}{n} p^2 + \frac{(p+q)^{n-1}}{n} p.$$

Podobno kot prej tudi v to enačbo vstavimo  $p = x$  in  $q = 1 - x$ , zato

$$\frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_{k,n}(x) = B_n(x, t \mapsto t^2).$$

Ti dve formuli smo izračunali predvsem zato, ker ju bomo v naslednjem poglavju uporabili v dokazu Bernsteinovega izreka.

### 3. WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

Prispeli smo do glavnega dela tega članka. Tu bomo formulirali znani Weierstrassov izrek o enakomerni aproksimaciji zvezne funkcije s polinomi na zaprtem intervalu, in ga dokazali tako, da bomo najprej pokazali kako iz Bernsteinovega izreka o enakomerni konvergenci izbranega zaporedja Bernsteinovih polinomov sledi Weierstrassov izrek, ter nato dokazali še resničnost prvega.

**Izrek 3.1 (Weierstrassov aproksimacijski izrek).** *Za poljubno zvezno funkcijo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in poljubno natančnost  $\epsilon > 0$  obstaja polinom  $p$  na  $[a, b]$ , za katerega velja*

$$d_{\infty}(f, p) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Podajmo še Bernsteinov izrek.

**Izrek 3.2 (Bernstein).** *Za poljubno zvezno funkcijo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zaporedje polinomov  $(B_n(-, f))_{n \in \mathbb{N}}$  enakomerno konvergira proti  $f$  na  $[0, 1]$ , oziroma*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x, f) = f(x)$$

enakomerno na  $[0, 1]$ .

**Opomba.** Pokažimo, da iz izreka 3.2 sledi izrek 3.1. Utemeljimo najprej, zakaj je dovolj obravnavati le primer, ko je  $[a, b] = [0, 1]$ .

Naj bo  $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  poljubna zvezna funkcija. Definirajmo preslikavo  $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ , podano s predpisom

$$\phi(t) = (b - a)t + a,$$

ki je očitno homeomorfizem. Tedaj je funkcija  $f = g \circ \phi$  zvezna in definirana na  $[0, 1]$ . Vidimo torej, da bomo lahko preko homeomorfizma  $\phi$ , zvezno funkcijo  $g$  na  $[a, b]$  enakomerno aproksimirali s polinomom natanko tedaj, ko bomo to lahko storili s funkcijo  $f = g \circ \phi$  na intervalu  $[0, 1]$ , saj bo kompozicija polinoma s  $\phi$  oz.  $\phi^{-1}$  še vedno polinom.

Izberimo si poljuben  $\epsilon > 0$ . Ker zaporedje polinomov  $(B_n(-, f))_{n \in \mathbb{N}}$  enakomerno konvergira na  $[0, 1]$ , obstaja tak  $N \in \mathbb{N}$ , da za vse  $x \in [a, b]$  in vse  $n \geq N$  velja

$$|B_n(x, f) - f(x)| < \epsilon.$$

Torej po definiciji metrike  $d_{\infty}$  za dobljeni  $N$  velja

$$d_{\infty}(f, B_N(-, f)) < \epsilon,$$

kjer je iskani polinom  $p$  seveda enak  $B_N(-, f)$  in to torej pokaže Weierstrassov aproksimacijski izrek.

*Dokaz izreka 3.2.* Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Dokazujemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x, f) = f(x)$$

enakomerno na  $[0, 1]$ , zato izberimo poljuben  $\epsilon > 0$ . Najprej omenimo nekaj opazk, ki takoj sledijo iz danih predpostavk.

Ker je  $f$  zvezna na zaprtem intervalu, ki je kompakten, je  $f$  omejena [1, Izrek 30]. Zato obstaja tak  $M \in \mathbb{R}$ , vzamemo lahko kar  $M = \|f\|_{\infty}$ , da na  $[0, 1]$  velja

$$|f| \leq M.$$

Vidimo tudi, da je  $f$  enakomerno zvezna, saj je zvezna na zaprtem intervalu  $[0, 1]$  [1, Izrek 28]. Tedaj za naš zgoraj izbrani  $\epsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsaka  $x, y \in [0, 1]$  velja

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2)$$

Izberimo si sedaj poljuben  $\xi \in [0, 1]$ . Zaradi (2) za vsak  $x \in [0, 1]$ , za katerega velja  $|x - \xi| < \delta$ , velja tudi  $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Sicer pa, če je  $x$  tak, da velja  $|x - \xi| \geq \delta$ , v tem primeru je seveda  $|x - \xi|/\delta \geq 1$ , dobimo

$$|f(x) - f(\xi)| \leq 2M \leq 2M \left( \frac{|x - \xi|^2}{\delta^2} \right) < 2M \left( \frac{x - \xi}{\delta} \right)^2 + \frac{\epsilon}{2}. \quad (3)$$

Zdaj združimo neenakosti (2) in (3), in vidimo, da za vsak  $x \in [0, 1]$  velja

$$|f(x) - f(\xi)| < 2M \left( \frac{x - \xi}{\delta} \right)^2 + \frac{\epsilon}{2}. \quad (4)$$

V naslednji račun bomo vpeljali Bernsteinove polinome, ki pa bodo zaenkrat še nedoločene stopnje  $n$ , kateri bomo pozneje podali dodatne omejitve. Po lemah 2.4 in 2.3, ki govorita o linearnosti in monotonosti Bernsteinovih polinomov v drugem argumentu, dobimo

$$\begin{aligned} |B_n(x, f) - f(\xi)| &= |B_n(x, f - f(\xi))| \\ &\leq B_n(x, |f - f(\xi)|), \end{aligned}$$

saj je  $f - f(\xi) \leq |f - f(\xi)|$ . In ker velja (4), sledi

$$\begin{aligned} &\leq B_n(x, t \mapsto 2M \left( \frac{t - \xi}{\delta} \right)^2 + \frac{\epsilon}{2}) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} B_n(x, t \mapsto (t - \xi)^2) + \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

kjer smo v prvem in zadnjem koraku uporabili lemo 2.4 in v drugem ter tretjem lemo 2.3. Iz primera 2.3 lahko izračunamo

$$\begin{aligned} B_n(x, t \mapsto (t - \xi)^2) &= B_n(x, t \mapsto t^2) - 2\xi B_n(x, t \mapsto t) + \xi^2 B_n(x, 1) \\ &= \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} - 2\xi x + \xi^2 \\ &= (x - \xi)^2 + \frac{1}{n}(x - x^2) \end{aligned}$$

Če torej nadaljujemo z oceno in uporabimo zgornjo enakost, dobimo

$$|B_n(x, f) - f(\xi)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (x - \xi)^2 + \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n} (x - x^2) + \frac{\epsilon}{2},$$

ki velja za vsak  $x \in [0, 1]$ . Če v to enačbo vstavimo  $x = \xi$ , se ocena spremeni v

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| \leq \frac{2M}{n\delta^2} (\xi - \xi^2) + \frac{\epsilon}{2},$$

ki prav tako velja za vsak  $\xi \in [0, 1]$ , saj smo na začetku izbrali poljubnega. Hitro se prepričamo, da izraz  $\xi - \xi^2$  na intervalu  $[0, 1]$  doseže maksimum v  $\frac{1}{4}$  in tako dobimo oceno

$$|B_n(\xi, f) - f(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2},$$

ki velja za vse  $\xi \in [0, 1]$ .

Na tem mestu pa vzemimo  $N = \lceil \frac{M}{2\epsilon\delta^2} \rceil$ , saj takrat za vsak  $n \geq N$  dobimo

$$\|B_n(-, f) - f\|_\infty < \epsilon,$$

kar dokaže enakomerno konvergenco zaporedja  $(B_n(-, f))_{n \in \mathbb{N}}$  na  $[0, 1]$ .  $\square$

Nekaj let po Bernsteinovem konstruktivističnem dokazu Weierstrassovega izreka je posplošitev izreka leta 1937 formuliral in dokazal Marshall H. Stone. V izreku je poljuben zaprt interval zamenjal z abstraktnim topološkim prostorom  $X$  in algebro polinomov s poljubno podalgebro topološke algebre zveznih realnih funkcij  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X)$  opremljene s kompaktno-odprto topologijo ter nekaterimi posebnimi lastnostmi. Naslednji izrek je iz knjige [3, Izrek 4.28].

**Izrek 3.3 (Stone–Weierstrassov izrek).** *Naj bo  $X$  topološki prostor in naj bo  $A$  podalgebra algebre zveznih realnih funkcij  $\mathcal{C}(X)$  na  $X$ , za katero velja:*

- (i) *vse konstantne realne funkcije na  $X$  so v podalgebri  $A$ ,*
- (ii) *za poljubni točki  $x, y \in X$ , če je  $x \neq y$ , potem obstaja takšna funkcija  $f$  iz podalgebre  $A$ , da je  $f(x) \neq f(y)$  (tej lastnosti pravimo tudi, da  $A$  loči točke prostora  $X$ ).*

*Tedaj je podalgebra  $A$  gosta v  $\mathcal{C}(X)$  glede na kompaktno-odprto topologijo.*

Z dokazom tega posplošenega izreka se v tem članku ne bomo ukvarjali, vseeno pa bi pokometirali kam v ta izrek sodijo Bernsteinovi polinomi oziroma kako bi z njimi in s tem izrekom kot posledico ali poseben primer dokazali Weierstrassov izrek. To bomo storili v zadnjem zgledu.

**Zgled.** Kot zanimivost lahko še za konec na hitro preverimo, da podalgebra Bernsteinovih polinomov zares zadošča predpostavkama (i) in (ii) iz Stoneovega izreka 3.3. Realno podalgebro Bernsteinovih polinomov lahko zapišemo kot

$$\mathcal{B} = \{B_n(-, f) \mid f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}\}.$$

Predpostavki (i) zadostimo, ker je  $B_1(x, 1) \equiv 1$ , predpostavki (ii) pa zato, ker imamo injektiven polinom  $B_6(x, t \mapsto t) \equiv x$  in ta vedno loči točke.

#### 4. ZAKLJUČEK

Videli smo torej, da je mogoče enakomerno aproksimirati zvezno funkcijo s polinomom na zaprtem intervalu in kako se podaja ekspliciten predpis takega polinoma. Izkaže pa se, da ta metoda aproksimacije ni precej dobra. To pomeni, da je za dano natančnost potrebno podati polinom razmeroma visoke stopnje, oziroma da dano zaporedje Bernsteinovih polinomov dokaj počasi konvergira k iskani zvezni funkciji. Iz tega razloga se Bernsteinovi polinomi niso prav zares uveljavili na področju praktičnega aproksimiranja zveznih funkcij, so pa v svojem času skupaj z dokazom Weierstrassovega izreka izstopili ravno zaradi svoje konstruktivistične narave.

#### LITERATURA

- [1] Josip Globevnik in Miha Brojan. *Analiza I*. 2012. <https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf> (dostop 24.3.2020).
- [2] Richard V. Kadison in Zhe Liu. *Bernstein Polynomials and Approximation*. <https://www.math.upenn.edu/~kadison/bernstein.pdf> (dostop 23.3.2020).
- [3] Janez Mrčun. *Topologija*. DMFA - založništvo, 2008.
- [4] Jana Vidrih. Stabilnost baze Bernsteinovih polinomov, 2016. <https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?lang=slv&id=106286> (dostop 16.3.2020).
- [5] Matt, Young. The Stone-Weierstrass theorem. Winter term, 2006. <https://mast.queensu.ca/~speicher/Section14.pdf> (dostop 16.3.2020).