BERNSTEINOVI POLINOMI IN WEIERSTRASSOV APROKSIMACIJSKI IZREK

IZAK JENKO

Povzetek. V tem članku bomo spoznali enega izmed prvih konstruktivnih dokazov *Weierstrassovega aproksimacijskega izreka*, ki pravi da lahko vsako zvezno funkcijo na zaprtem intervalu poljubno dobro enakomerno aproksimiramo s polinomom. Definirali bomo posebno vrsto polinomov t. i. *Bernsteinove polinome*, si ogledali njihove lastnosti in z njimi dokazali Weierstrassov izrek.

1. Uvod

Preden se lotimo definicije Bernsteinovih polinomov in dokazovanja Weierstrassovega izreka, povejmo nekaj besed o prosotru, ki ga bomo obranavali ter normi, ki bo določila metriko na tem prostoru. Iz razlogov, ki jih bomo razjasnili pozneje, se bomo osredotočili na prostor $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, to je prostor vseh zveznih funkcij $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, in supremum normo

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

na njem. Vemo že, da ta norma porodi supremum metriko

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|,$$

za katero velja, da na kompaktnem intervalu $[0,1]$ poljubno zaporedje zveznih funkcij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ enakomerno konvergira k neki zvezni funkciji f iz prostora $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ natanko tedaj, ko to zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti f v metriki d_∞. Ravno to dejstvo pa bomo uporabili pri dokazu Weierstrassovega izreka.

Posvetimo sedaj še nekaj pozornosti samemu pojmu aproksimacije ter se začasno usmerimo na malce bolj splošne prostore. Naj bo (X,d) poljuben metričen prostor in $A \subseteq X$ takšna podmnožica, za katero lahko povemo, da za poljuben $\epsilon > 0$ in vsak $x \in X$ obstaja v A takšna točka $a \in A$, da je

$$d(a,x) < \epsilon.$$

Lastnost množice A je tedaj ravno ta, da je mogoče vsako točko $x \in X$ poljubno dobro aproksimirati z nekim elementom iz A. Pravzaprav takrat za to lastnost rečemo, da je množica A povsod gosta v X.

2. Bernsteinovi polinomi

V tem poglavju bomo začeli z definicijo Bernsteinovih baznih polinomov in zanje dokazali nekaj zanimivih lastnosti, pozneje pa bomo definirali Bernsteinov polinom n-te stopnje pripadajoč zvezni neki funkciji $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Definicija 2.1 (**Bernsteinovi bazni polinomi**). *Bernsteinov bazni polinom n-te stopnje* za poljuben $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ je

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Zgled. Prvih nekaj Bernsteinovih baznih polinomov do tretje stopnje.

$$\begin{aligned} &b_{0,0}(x) = 1 && b_{0,1}(x) = 1 - x \\ & && b_{1,1}(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &b_{0,2}(x) = (1-x)^2 && b_{0,3}(x) = (1-x)^3 \\ &b_{1,2}(x) = 2x(1-x) && b_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2 \\ &b_{2,2}(x) = x^2 && b_{2,3}(x) = 3x^2(1-x) \\ & && b_{3,3}(x) = x^3 \end{aligned}$$

Trditev 2.1. *Bernsteinovi bazni polinomi n-te stopnje $\{b_{k,n}\}_{0 \leq k \leq n}$ tvorijo bazo $(n+1)$-dimenzionalnega realnega vetorskega prostora polinomov največ n-te stopnje $\mathbb{R}_n[X]$ za poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vemo že, da je $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_n[X]$. Vidimo tudi, da je moč množice $\{b_{i,n}\}_{0 \leq i \leq n}$ enaka $n+1$, torej bo dovolj če pokažemo, da lahko vsako potenco x^k za $0 \leq k \leq n$ izrazimo kot linearno kombinacjo Bernsteinovih baznih polinomov. Za poljuben $k \in \{0, \ldots, n\}$ velja namreč

$$x^k = \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x).$$

Preverimo to enačbo z računom.

$$\begin{aligned} x^k &= x^k (x + (1-x))^{n-k} \\ &= x^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^{k+i} (1-x)^{n-k-i} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} x^i (1-x)^{n-i}, \end{aligned}$$

kjer bomo uporabili zvezo $\binom{n-k}{i-k} = \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} b_{i,n}(x). \end{aligned}$$

□

Trditev 2.2. *Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n tvorijo razčlenitev enote.*

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) \equiv 1$$

Dokaz. Trditev enostavno preverimo z uporabo binomskega izreka in definicije Bernsteinovih baznih polinomov.

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

□

Sedaj bomo definirali Bernsteinove polinome pripadajoče neki zvezni funkciji, ki jih bomo uporabli pri dokazu Weierstrassovega izrek, poleg tega pa bomo dokazali še nekaj lem, ki se bodo pravtako izkazale za koristne v dokazu glavnega izreka.

Definicija 2.2. *Bernsteinov n-ti polinom* poljubne zvezne funkcije $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ je

$$B_n(x,f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Lema 2.3. *Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ poljubni zvezni funkciji za kateri velja $f \leq g$, potem za njuna Bernsteinova polinoma poljubne stopnje n velja*

$$B_n(\text{-}\ ,f) \leq B_n(\text{-}\ ,g).$$

Dokaz. Ker za poljuben $x \in [0,1]$ velja $f(x) \leq g(x)$, bo tudi za vsak $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ veljalo

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Uporabimo to v računu

$$B_n(x,f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) = B_n(x,g),$$

ki velja za vsak $x \in [0,1]$. □

Lema 2.4. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ poljubna zvezna funkcija in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti. Tedaj za vsak $x \in [0,1]$ velja*

$$B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) = \alpha B_n(x,f) + \beta.$$

Dokaz. Enakost preprosto preverimo z računom

$$B_n(x, \alpha \cdot f + \beta) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha \cdot f + \beta)\,(k/n)\, b_{k,n}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha f \left(\frac{k}{n}\right) + \beta) b_{k,n}(x) =$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) + \beta \sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = \alpha B_n(x, f) + \beta,$$

kar velja za vse $x \in [0,1]$, pri čemer pa smo uporabili trditev 2.2. □

Primer 2.3. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunajmo $B_n(x, t \mapsto t)$ in $B_n(x, t \mapsto t^2)$. Po binomskem izreku vemo

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left((p+q)^n \right) = n(p+q)^{n-1},$$

torej, če obe strani pomnožimo s $\frac{p}{n}$, dobimo enačbo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} p^k q^{n-k} = (p+q)^{n-1} p. \tag{1}$$

Če v to enačbo vstavimo $p = x$ in $q = 1 - x$ dobimo

$$x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_{k,n}(x) = B_n(x, t \mapsto t).$$

Za izračun $B_n(x, t \mapsto t^2)$ ponovno parcialno odvajajmo enačbo (1) po spremenljivki p in nato obe strani pomnožimo s $\frac{p}{n}$. Tedaj dobimo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} p^k q^{n-k} = \frac{(n-1)(p+q)^{n-2}}{n} p^2 + \frac{(p+q)^{n-1}}{n} p.$$

Podobno kot prej tudi v to enačbo vstavimo $p = x$ in $q = 1 - x$, zato

$$\frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} b_{k,n}(x) = B_n(x, t \mapsto t^2).$$

Ti dve formuli smo izračunali predvsem zato, ker ju bomo v naslednjem poglavju uporabili v dokazu Bernsteinovega izreka.

3. Weierstrassov aproksimacijski izrek

Prispeli smo do glavnega dela tega članka. Tu bomo formulirali znani Weierstrassov izrek o enakomerni aproksimaciji zvezne funkcije s polinomi na zaprtem intervalu, in ga dokazali tako, da bomo najprej pokazali kako iz Bernsteinovega izreka o enakomerni konvergenci izbranega zaporedja Bernsteinovih polinomov sledi Weierstrassov izrek, ter nato dokazali še veljavnost prvega.

Izrek 3.1 (**Weierstrassov aproksimacijski izrek**). *Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in poljubno natančnost $\epsilon > 0$ obstaja polinom p na $[a, b]$ za katerega velja:*

$$d_\infty(f, p) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Podajmo še Bernsteinov izrek.

Izrek 3.2 (**Bernstein**). *Za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zaporedje polinomov $(B_n(\text{-}\ , f))_{n\in\mathbb{N}}$ enakomerno konvergira proti f na $[a, b]$ ali:*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x, f) = f(x)$$

enakomerno na $[a, b]$.

Opomba. Pokažimo, da iz izreka 3.2 sledi izrek 3.1. Izberimo si poljuben $\epsilon > 0$. Ker zaporedje polinomov $(B_n(\text{-}\ , f))_{n\in\mathbb{N}}$ enakomerno konvergira na $[a, b]$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $x \in [a, b]$ in vse $n \geq N$ velja

$$|B_n(x, f) - f(x)| < \epsilon.$$

Torej po definiciji metrike d_∞ za dobljeni N velja

$$d_\infty(f, B_N(\text{-}\ , f)) < \epsilon,$$

kjer je iskani polinom p seveda enak $B_N(\text{-}\ , f)$ in to torej pokaže Weierstrassov aproksimacijski izrek.

Dokaz izrek 3.2. Izrek bomo dokazali za primer, ko je zaprti interval $[a, b] = [0, 1]$. Pa utemeljimo zakaj smemo to storiti. Naj bo $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ poljubna zvezna funkcija. Definirajmo preslikavo $\phi : [0, 1] \to [a, b]$, podano s predpisom

$$\phi(t) = (b - a)t + a,$$

ki je očitno homeomorfizem. Tedaj je funkcija $f = g \circ \phi$ zvezna in definirana na $[0, 1]$. Torej je res dovolj izrek dokazati za poljubno zvezno funkcijo $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Naj bo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokazujemo $\lim_{n\to\infty} B_n(x, f) = f(x)$ enakomerno na $[0, 1]$, zato izberimo poljuben pozitiven $\epsilon > 0$. Najprej omenimo nekaj opazk, ki takoj sledijo iz danih prepostavk.

Ker je f zvezna na zaprtem intervalu, ki je kompakten, je f omejena. Zato obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, vzamemo lahko kar $M = \|f\|_\infty$, da na $[0, 1]$ velja

$$|f| \leq M.$$

Vidimo tudi, da je f enakomerno zvezna, saj je zvezna na zaprtem intervalu $[0, 1]$. Tedaj za naš zgoraj izbrani $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in [0, 1]$ velja

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Izberimo si sedaj poljuben $\xi \in [0, 1]$. Zaradi zveznosti f tedaj za vsak $x \in [0, 1]$, za katerega velja $|x - \xi| < \delta$, velja tudi $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sicer pa, če je x tak, da velja $|x-\xi| \geq \delta$, v tem primeru je seveda $|x-\xi|/\delta \geq 1$, dobimo

$$|f(x)-f(\xi)| \leq 2M \leq 2M\left(\frac{|x-\xi|^2}{\delta^2}\right) < 2M\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2}. \tag{3}$$

Zdaj združimo neenakosti (2) in (3), in vidimo, da za vsak $x \in [0,1]$ velja

$$|f(x)-f(\xi)| < 2M\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2}. \tag{4}$$

V naslednji račun bomo vpeljali Bernsteinove polinome, ki pa bodo zaenkrat še nedoločene stopnje n, kateri bomo pozneje podali dodatne omejitve. Po lemah 2.4 in 2.3, ki govorita o linearnosi in monotonosti Bernsteinovih polinomov v drugem argumentu, dobimo

$$\begin{aligned}|B_(x,f)-f(\xi)| &= |B_n(x,f-f(\xi))| \\ &\leq B_n(x,|f-f(\xi)|),\end{aligned}$$

saj je $f-f(\xi) \leq |f-f(\xi)|$. In ker velja (4), sledi

$$\begin{aligned}&\leq B_n(x, t\mapsto 2M\left(\frac{t-\xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2}) \\ &= \frac{2M}{\delta^2}B_n(x,t\mapsto (t-\xi)^2) + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

kjer smo v prvem in zadnjem koraku uporabili lemo 2.4 in v drugem ter tretjem lemo 2.3. Iz primera 2.3 lahko izračunamo

$$\begin{aligned}B_n(x,t\mapsto(t-\xi)^2) &= B_n(x,t\mapsto t^2) + 2\xi B_n(x,t\mapsto t) + \xi^2 B_n(x,1) \\ &= \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} + 2\xi x + \xi^2 \\ &= (x-\xi)^2 + \frac{1}{n}(x-x^2)\end{aligned}$$

Če torej nadaljujemo z oceno in uporabimo zgornjo enakost dobimo

$$|B_n(x,f)-f(\xi)| \leq \frac{2M}{\delta^2}(x-\xi)^2 + \frac{2M}{\delta^2}\frac{1}{n}(x-x^2) + \frac{\epsilon}{2},$$

ki velja za vsak $x \in [0,1]$. Če v to enačbo vstavimo $x=\xi$ se ocena spremeni v

$$|B_n(\xi,f)-f(\xi)| \leq \frac{2M}{n\delta^2}(\xi-\xi^2) + \frac{\epsilon}{2},$$

ki pravtako velja za vsak $\xi \in [0,1]$, saj smo na začetku izbrali poljubnega. Hitro se prepričamo, da izraz $\xi-\xi^2$ na intervalu $[0,1]$ doseže maksimum v $\frac{1}{4}$ in tako dobimo oceno

$$|B_n(\xi,f)-f(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2},$$

ki velja za vse $\xi \in [0,1]$.

Na tem mestu pa vzemimo $N = \left\lceil \frac{M}{2n\delta^2} \right\rceil$, saj takrat za vsak $n \geq N$ dobimo

$$\|B_n(\text{-}\,,f)-f\|_\infty < \epsilon,$$

kar dokaže enakomerno konvergenco zaporedja $(B_n(\text{-}\,,f))_{n\in\mathbb{N}}$ na $[0,1]$. $\square$

Nekaj let po Bernsteinovem konstruktivističnem dokazu Weierstrassovega izreka je posplošitev izreka leta 1937 formuliral in dokazal Marshall H. Stone. V izreku je poljuben zaprt interval zamenjal z abstraktnim topološkim prostorom X in algebro polinomov s poljubno podalgebro topološke algebre zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X)$ opremljene s kompaktno-odprto topologijo ter nekatermi posebnimi lastnostmi.

Izrek 3.3 (**Stone–Weierstrassov izrek**). *Naj bo X topološki prostor in naj bo A podalgebra algebre zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(X)$ na X, za katero velja:*

(i) *vse konstantne realne funkcije na X so v podalgebri A,*
(ii) *za poljubni točki $x, y \in X$, če je $x \neq y$, potem obstaja takšna funkcija f iz podalgebre A, da je $f(x) \neq f(y)$ (tej lastnosti pravimo tudi, da A loči točke prostora X).*

Tedaj je podalgebra A gosta v $\mathcal{C}(X)$ glede na kompaktno-odprto topologijo.

Z dokazom tega posplošenega izreka se v tem članku ne bomo ukvarjali, vseeno pa bi pokometirali kam v ta izrek sodijo Bernsteinovi polinomi oziroma kako bi z njimi in s tem izrekom kot posledico ali poseben primer dokazali Weierstrassov izrek. To bomo storili v nasledenjem zgledu.

Zgled. Kot zanimivost lahko še za konec na hitro preverimo, da podalgebra Bernsteinovih polinomov zares zadošča predpostavkama (i) in (ii) iz Stoneovega izreka 3.3. Realno podalgebro Bernsteinovih polinomov lahko zapišemo kot

$$\mathcal{B} = \{B_n(\text{-}\ , f) \mid f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}\}.$$

Predpostavki (i) zadostimo ker je $B_1(x, 1) \equiv 1$, predpostavki (ii) pa zato, ker imamo injektiven polinom $B_6(x, t \mapsto t) \equiv x$ in ta vedno loči točke.

4. Literatura