Zadanie 2 - zaprojektować algorytm o złożoności liniowej spełniający warunki podane w polach Require i Ensure

Require: Tablica punktów P uporządkowanych rosnąco względem współrzędnej x, a których różnica wysokości wynosi co najwyżej $k \in \mathrm{N}$ ($y \in [0, k]$), a których odległość jest co najmniej 1
Ensure: najmniejsza odległość między punktami

```
dist ← ∞
i ← 0
while i < |P| − 1 do
    if d(P[i + 1], P[i]) < dist then
        dist ← d(P[i + 1], P[i])
    end if
    j ← i + 2
    while j < |P| and P[j].x < P[i + 1].x + k do        ▷ Pętla *
        if d(P[j], P[i]) < dist then
            dist ← d(P[j], P[i])
        end if
        j ← j + 1
    end while
    i ← i + 1
end while
return dist
```

Weźmy pierwsze dwa punkty z tablicy P, nazwijmy je v_1 oraz v_2. Załóżmy że istnieje punkt p który leży bliżej v_1 niż v_2. Wiemy że $p.x \geqslant v_2.x$ oraz $d(p, v_1) < d(v_2, v_1)$.

$$\sqrt{(p.x - v_1.x)^2 + (p.y - v_1.y)^2} < \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + (v_2.y - v_1.y)^2} \tag{1}$$

$$(p.x - v_1.x)^2 + (p.y - v_1.y)^2 < (v_2.x - v_1.x)^2 + (v_2.y - v_1.y)^2 \tag{2}$$

$$(p.x - v_1.x)^2 + (p.y - v_1.y)^2 < (v_2.x - v_1.x)^2 + k^2 \tag{3}$$

$$(p.x - v_1.x)^2 < (v_2.x - v_1.x)^2 + k^2 - (p.y - v_1.y)^2 \tag{4}$$

$$(p.x - v_1.x)^2 < (v_2.x - v_1.x)^2 + k^2 \tag{5}$$

$$p.x < v_1.x + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2} \tag{6}$$

Sprawdźmy jaka jest największa wartość $p.x - v_2.x$:

$$p.x < v_1.x + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2} \tag{7}$$

$$p.x - v_2.x < v_1.x - v_2.x + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2} \tag{8}$$

$$p.x - v_2.x < -(v_2.x - v_1.x) + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2} \tag{9}$$

$$p.x - v_2.x < \begin{cases} k, & \text{jeśli } v_2.x = v_1.x \\ \frac{\left(-(v_2.x - v_1.x) + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2}\right)\left((v_2.x - v_1.x) + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2}\right)}{(v_2.x - v_1.x) + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2}}, & \text{jeśli } v_2.x > v_2.x \end{cases} \tag{10}$$

$$p.x - v_2.x < \begin{cases} k, & \text{jeśli } v_2.x = v_1.x \\ \frac{k^2}{(v_2.x - v_1.x) + \sqrt{(v_2.x - v_1.x)^2 + k^2}}, & \text{jeśli } v_2.x > v_2.x \end{cases} \tag{11}$$

$$p.x - v_2.x < \begin{cases} k, & \text{jeśli } v_2.x = v_1.x \\ \frac{k^2}{0 + \sqrt{(0)^2 + k^2}}, & \text{jeśli } v_2.x > v_2.x \end{cases} \tag{12}$$

$$p.x - v_2.x < \begin{cases} k, & \text{jeśli } v_2.x = v_1.x \\ \frac{k^2}{\sqrt{k^2}}, & \text{jeśli } v_2.x > v_2.x \end{cases} \tag{13}$$

$$p.x - v_2.x < k \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Wniosek dotyczący współrzędnej x punktu następującego po v_2 w tablicy P takiego, że jest bliższy od punktu v_2 do v_1 w sensie metryki euklidesowej:

$$p.x < v_2.x + k$$

Lemat: Dla każdego $i < n - 5k^2 + 1$ zachodzi $P[i + 5k^2 - 1].x \geqslant k + P[i].x$.
Dowód przez sprzeczność: Gdyby $P[i + 5k^2 - 1].x < k + P[i].x$ to wówczas w prostokącie $[P[i].x, P[i].x + k) \cdot [0, k]$ istnieje $5k^2$ punktów: $P[i], P[i+1], P[i+2], \ldots, P[i+5k^2-1]$. Oczywistym jest, że w prostokącie o wymiarach $[0, k] \cdot [0, k)$ nie może znaleźć się $5k^2$ punktów, aby każdy był w odległości nie mniejszej niż 1 od pozostałych punktów w tym prostokącie. Z zasady szufladkowej istnieje kolumna $[0, 1] \ldots [0, k]$ mieszcząca co najmniej $5k$ punktów. Znów z zasady szufladkowej istnieje w tej kolumnie kwadrat o boku długości 1 zawierający co najmniej 5 punktów. Na wykładzie uzgodniliśmy że w takiej sytuacji istnieje para punktów których wzajemna odległość jest mniejsza od 1. Sprzeczność.

Wniosek z lematu: Pętla w algorytmie oznaczona gwiazdką wykonuje się co najwyżej $5k^2$ razy, gdyż najpóźniej po tylu iteracjach na pewno okaże się, jak wynika z lematu, że rozważany punkt $P[j]$ nie spełnia warunku pętli. Ponieważ k jest stała to pętla wykona się stałą liczbę razy.

Wniosek: Ponieważ główna pętla działa w czasie $|P|$ a wewnętrzna w czasie stałym, cały algorytm ma liniową złożoność czasową, co należało wykazać w zadaniu.