

# 衝突・破壊をとりいれたN体計算の開発と 地球型惑星形成後期のシミュレーション

磯谷和秀 (名古屋大 Ta研 M2)  
共同研究者 小林浩

# 目次

---

## 1. イントロダクション

- ・ 地球型惑星形成と問題点
- ・ 先行研究

## 2. 研究目的

## 3. 手法

- ・ N体計算と統計的手法のハイブリッド
- ・ 破壊の取り扱い方

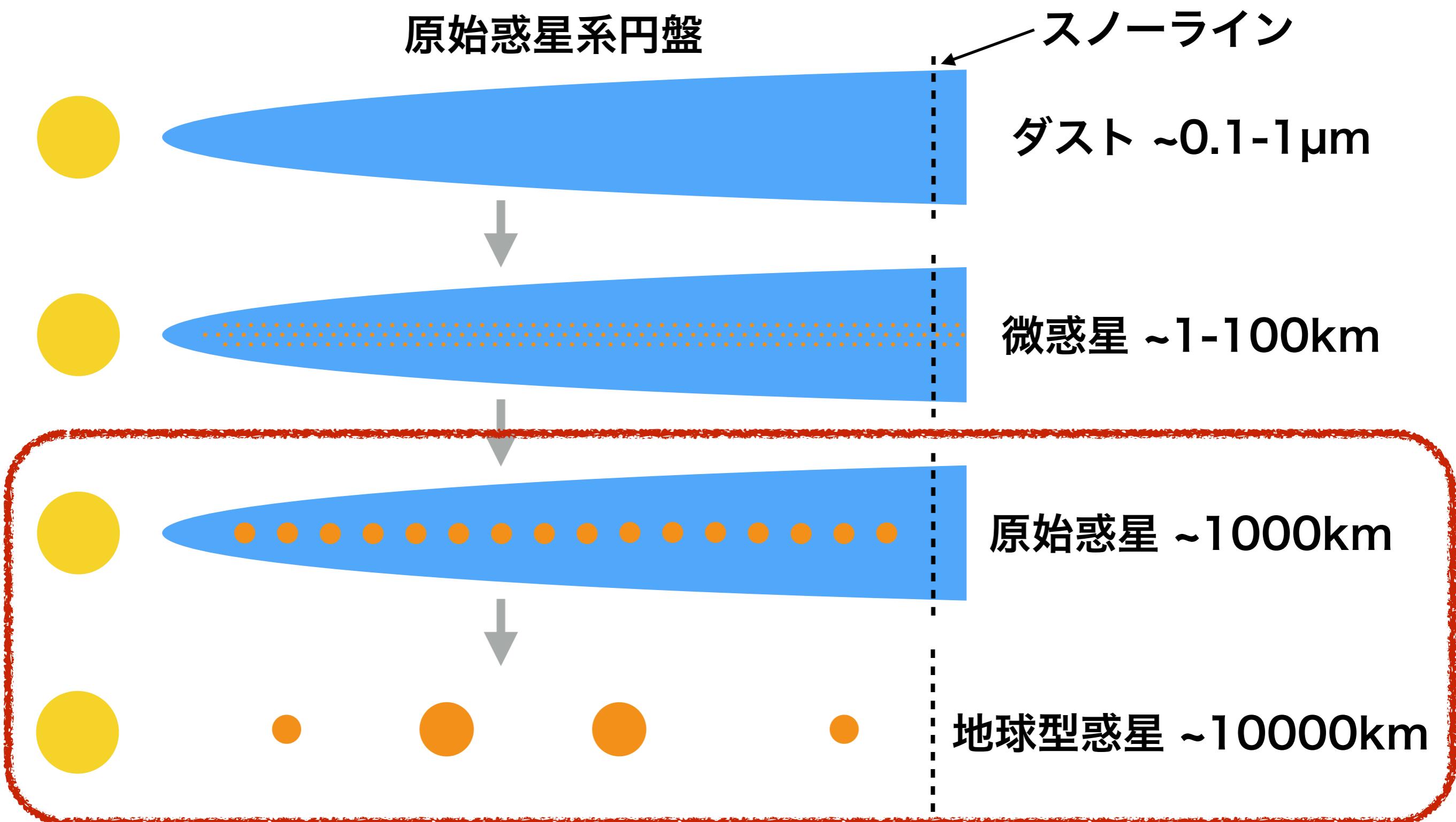
## 4. 結果

## 5. 議論

- ・ 力学的摩擦が効くような最大微惑星の大きさ
- ・ 最大微惑星の大きさへの制限

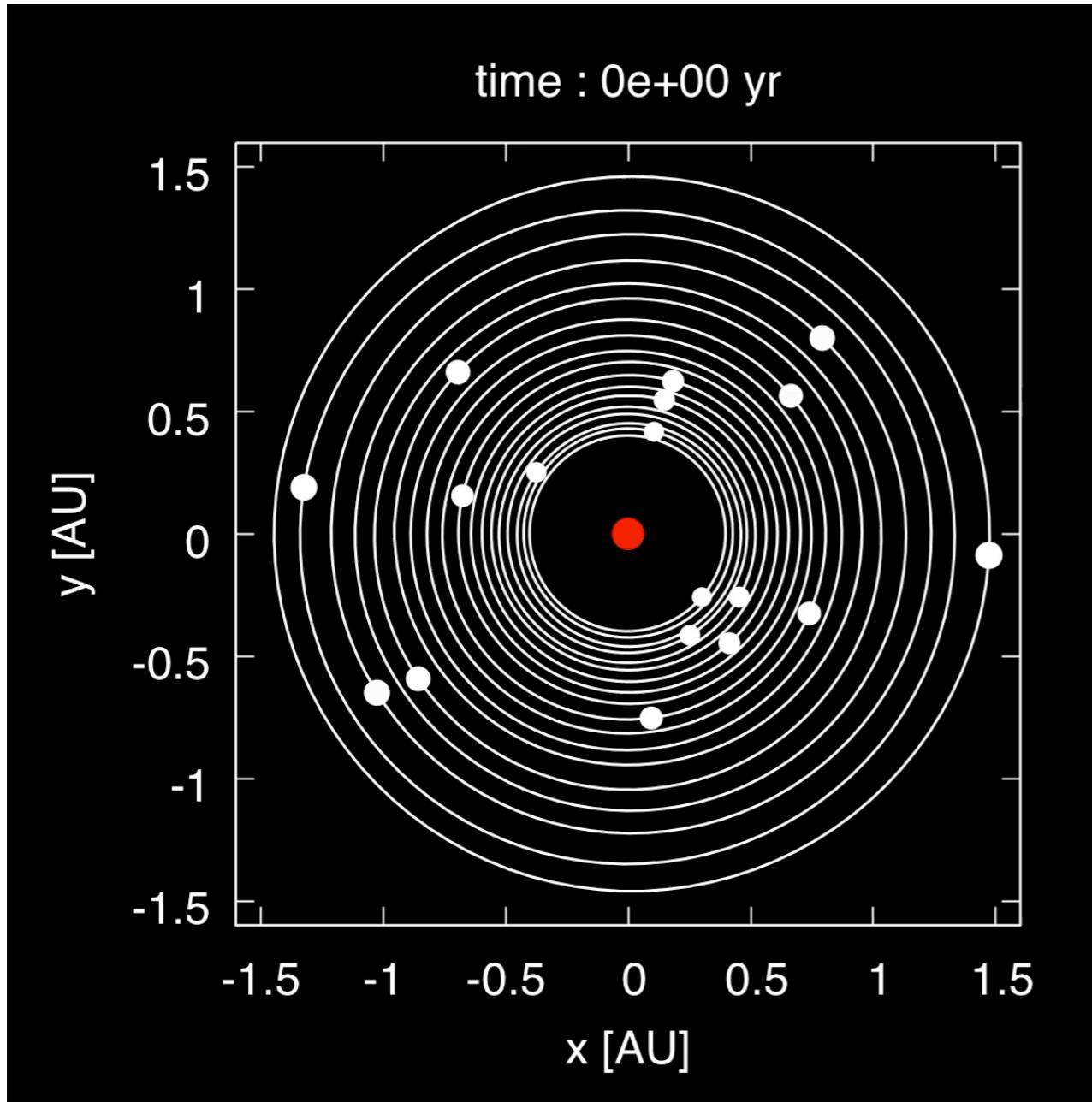
## 6. まとめ

# 地球型惑星形成（標準モデル）



巨大衝突ステージ：地球型惑星の軌道・質量を特徴付ける

# N体計算による原始惑星の衝突成長



初期条件

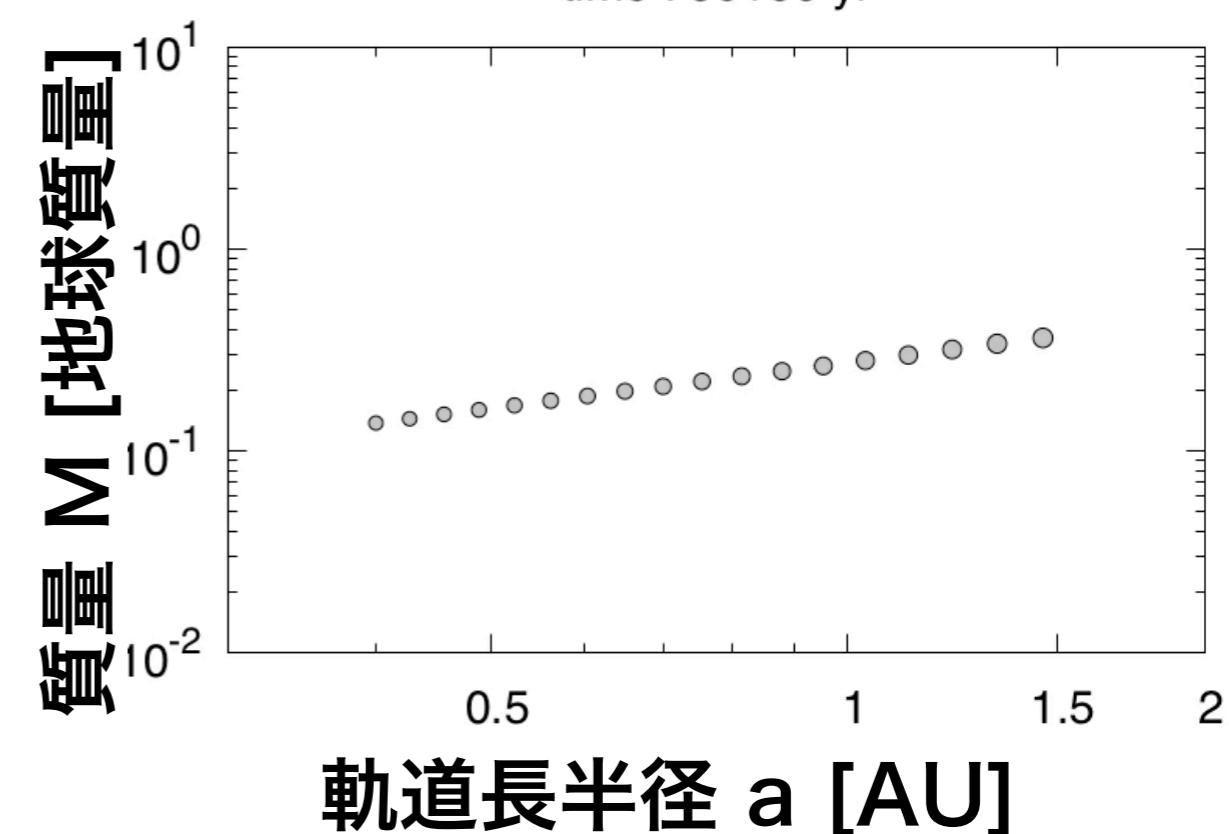
2MMSN

$e=0.01$

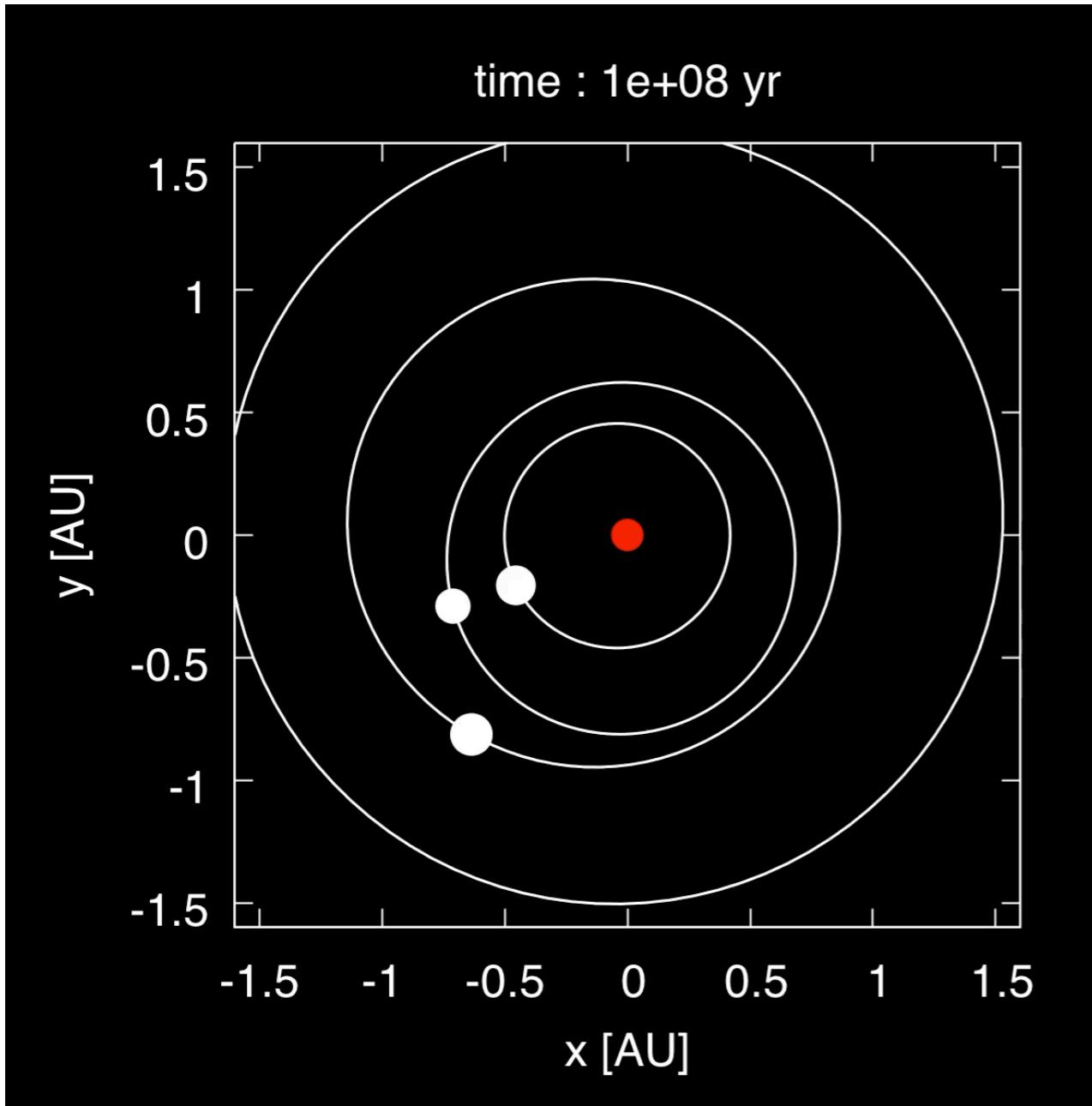
$a=0.4-1.5\text{AU}$

$i=0.005$

$\Delta a=10R_{H,M}$



# N体計算による原始惑星の衝突成長



初期条件

2MMSN

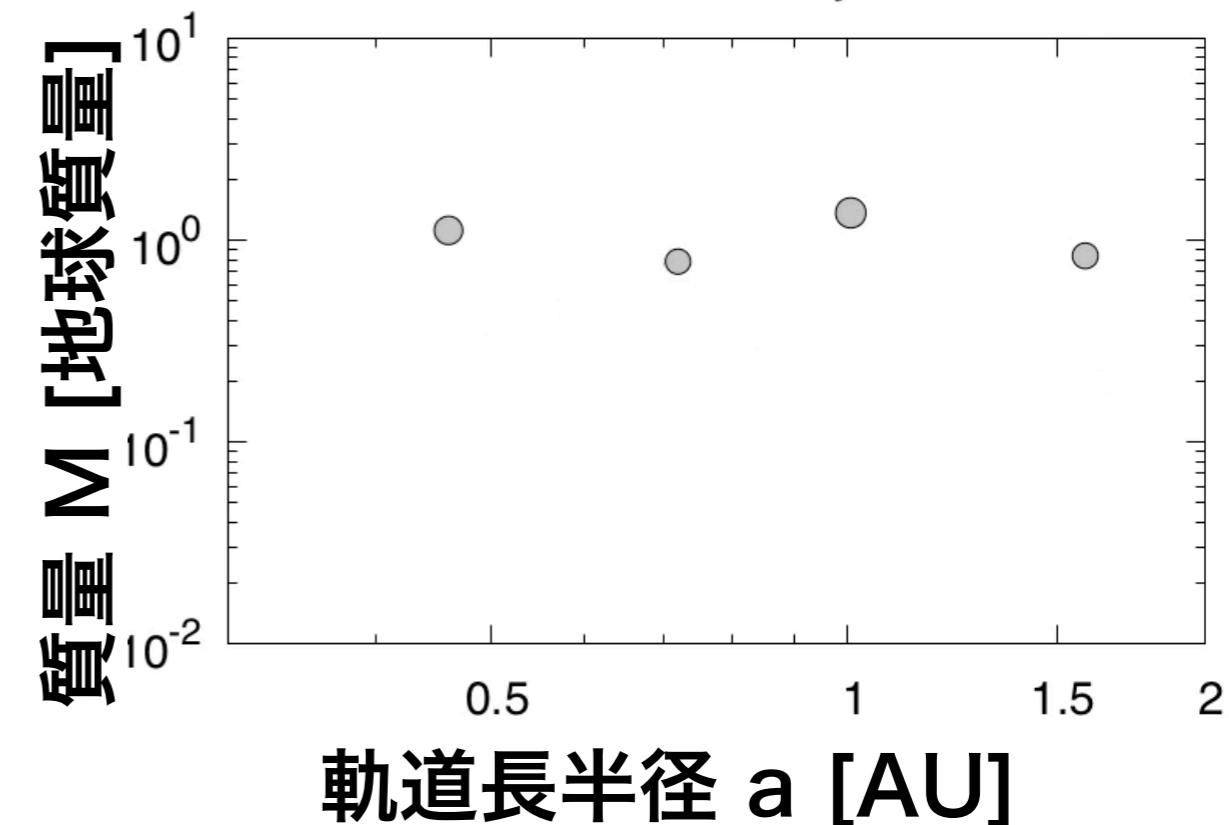
$e=0.01$

$a=0.4-1.5\text{AU}$

$i=0.005$

$\Delta a=10R_{H,M}$

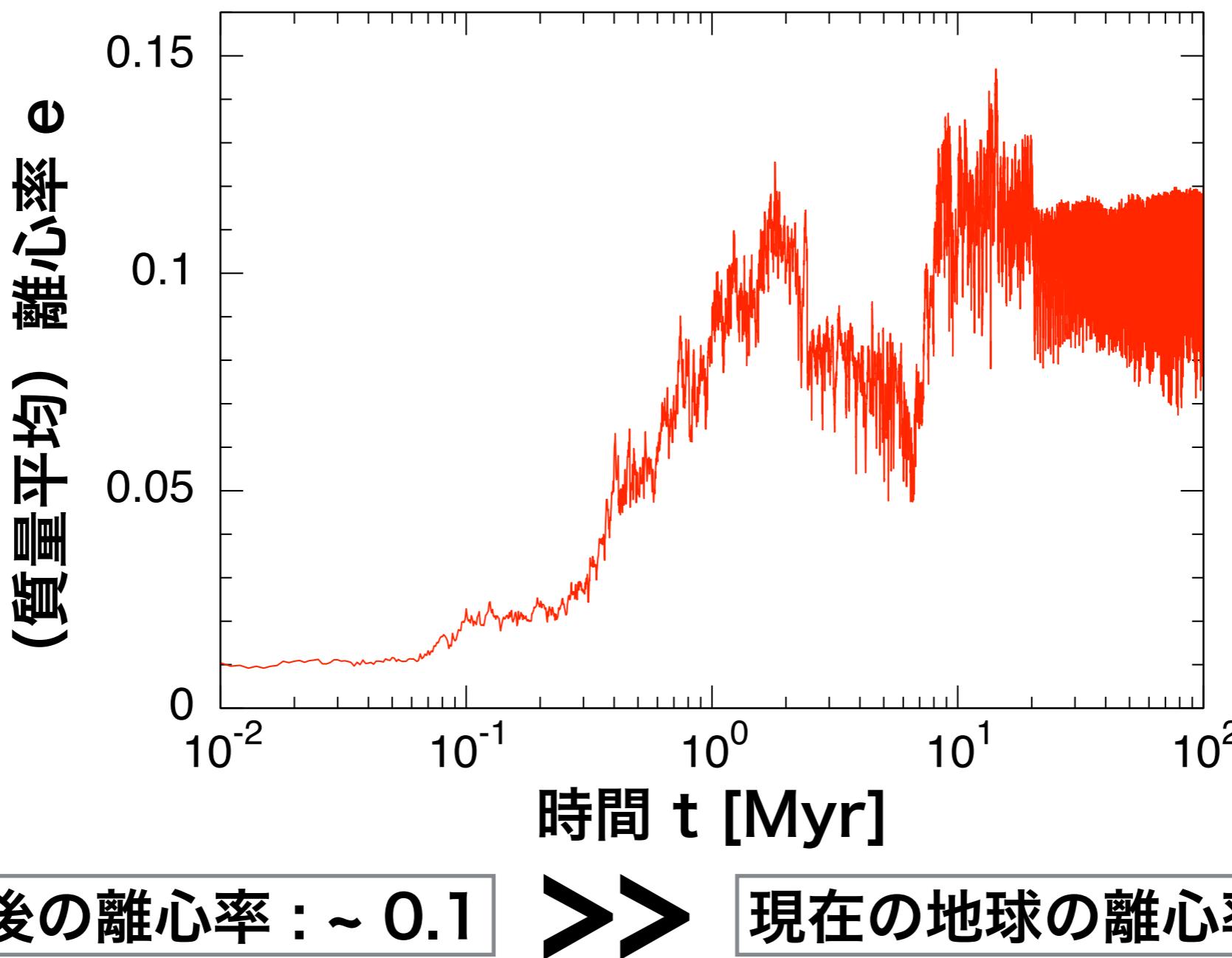
time : 1e+08 yr



1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

(e.g., Chambers & Wetherill 1998; Agnor et al. 1999;  
Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

# 問題点：離心率上昇

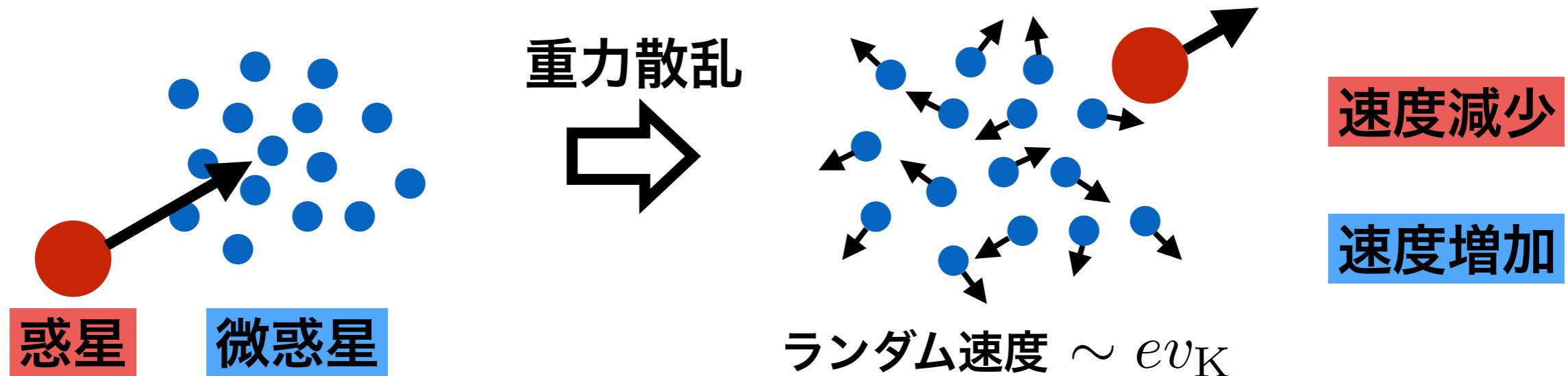


離心率が大きくなりすぎてしまう  
→ 離心率を下げるメカニズムが必要

# 離心率を下げるメカニズム

- 残存微惑星との力学的摩擦

(e.g., O'Brien et al. 2006;  
Morishima et al. 2010)



平均離心率の変化率の解析解 (e.g., Ohtsuki et al. 2002)

$$\left( \frac{d\langle e_{\text{惑}}^2 \rangle}{dt} \right)_{df} \propto - \sum_{\text{微}} \frac{(M \langle e_{\text{惑}}^2 \rangle - m \langle e_{\text{微}}^2 \rangle)}{\text{面密度 エネルギー等分配}}$$

残存微惑星との力学的摩擦により 地球型惑星の離心率は下がる！

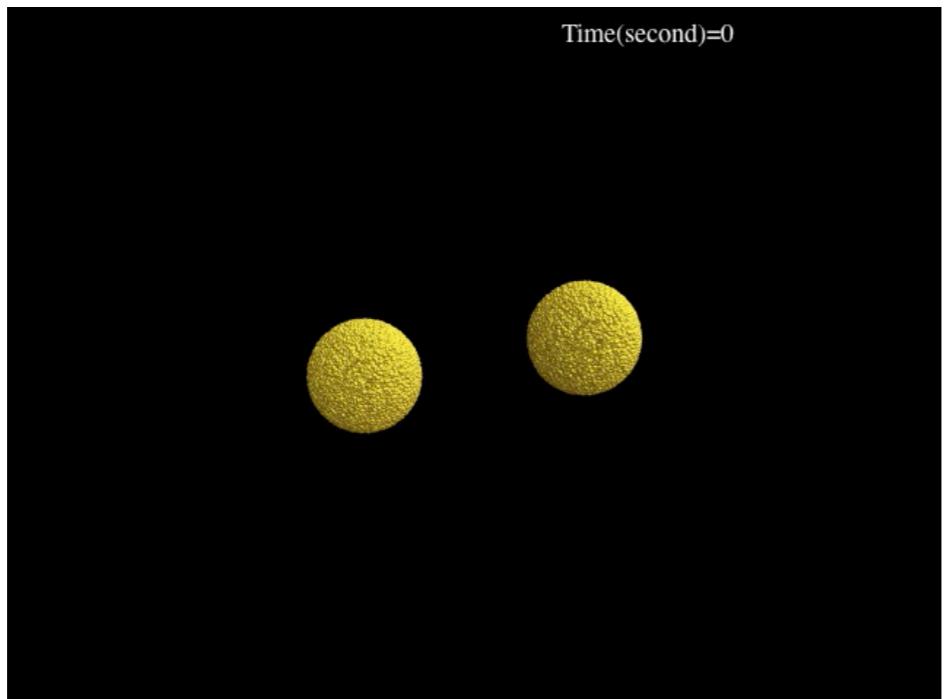
残存微惑星の面密度は変わらないのか？

# 微惑星同士の衝突・破壊

- 「衝突・破壊」 … 衝突した際に様々なサイズの破片を放出

- Catastrophic

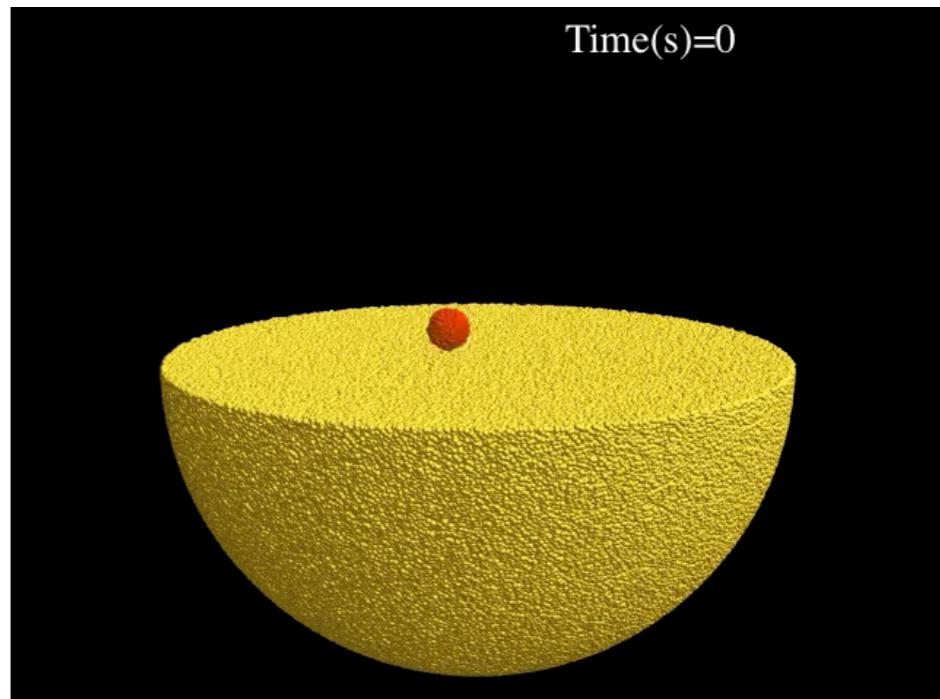
$$R = 50\text{km}, v = 0.3\text{km/s}$$



提供：杉浦（名大）

- Cratering

$$R = 5\text{km}, v = 10\text{km/s}$$



提供：伊藤（名大）

離心率~0.1をもつ10kmサイズの微惑星の場合

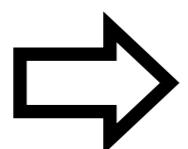
$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} \sim 10^3 \left( \frac{e}{0.1} \right)^2 \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453}$$

破壊は当然起こる！

(Benz & Asphaug 1999)

# 衝突・破壊の効果：面密度減少

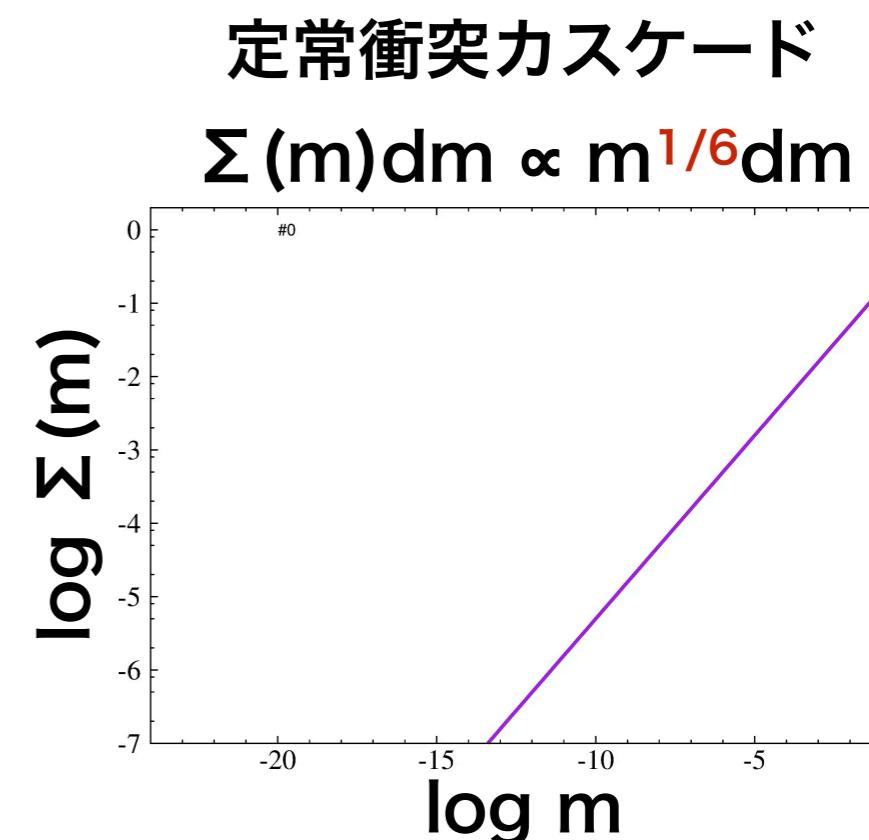
- 衝突・破壊にともなう微惑星円盤の進化
  - 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる = 衝突力スケード  
(e.g., Tanaka et al. 1996)
  - $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる



微惑星円盤の面密度は減少する

- 面密度減少の解析解  
(Kobayashi & Tanaka 2010)

- 破片の面密度はべき一定のまま減少
- 面密度減少のタイムスケール  
 $\propto 1/\text{面密度}$



# 研究目的

先行研究（残存微惑星説）の問題点：微惑星の破壊を考慮していない

破壊を考慮すると…

微惑星円盤の面密度が減少 (KT10)

- ➡ 残存微惑星による力学的摩擦の効率低下
- ➡ 地球型惑星の離心率を下げられるか？

破壊が力学的摩擦に与える影響を調べるため

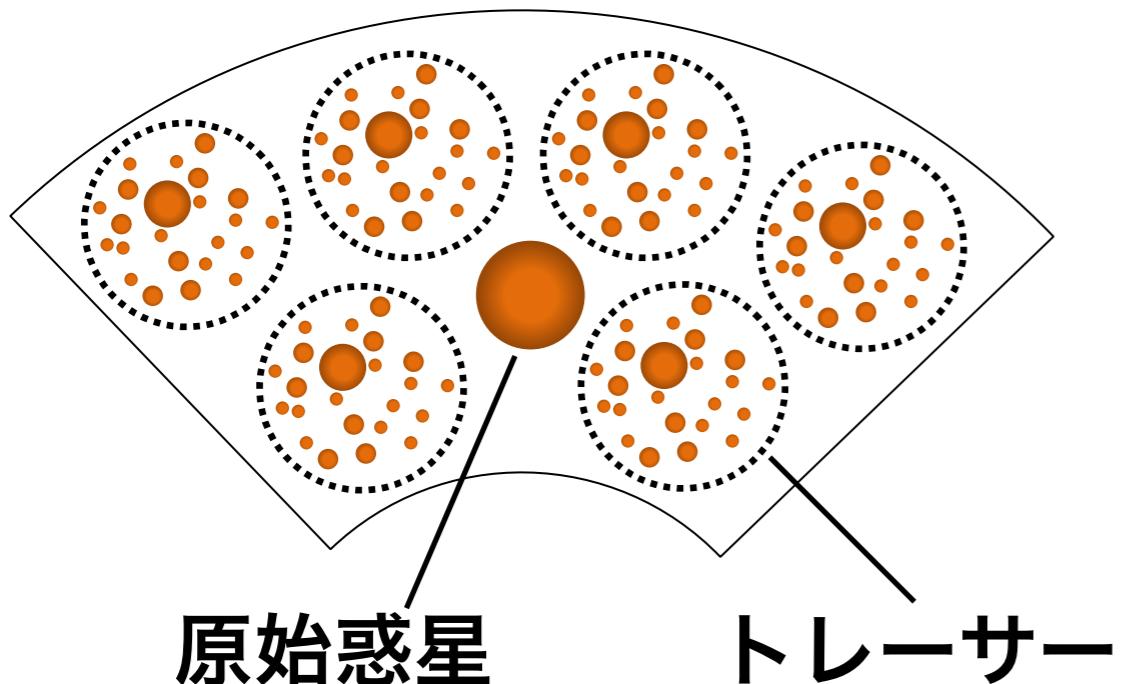
微惑星同士の衝突・破壊を考慮した  
N体シミュレーションコードを開発する

# 手法

# ハイブリッドコード

- 純粹なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

( $\because$ 破壊に伴う破片~ $10^{35}$ 個)

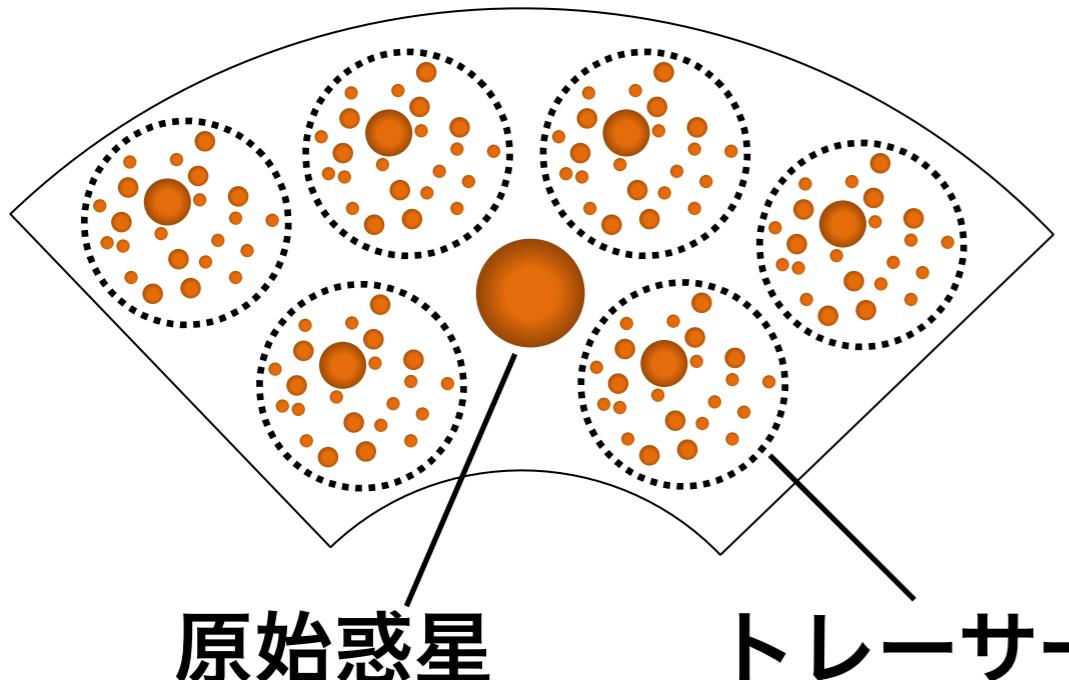


複数の微惑星を1つの粒子とみなす  
(スーパー粒子近似)  
➡ N体計算のコストを削減

# ハイブリッドコード

- 純粹なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

( $\because$ 破壊に伴う破片~ $10^{35}$ 個)



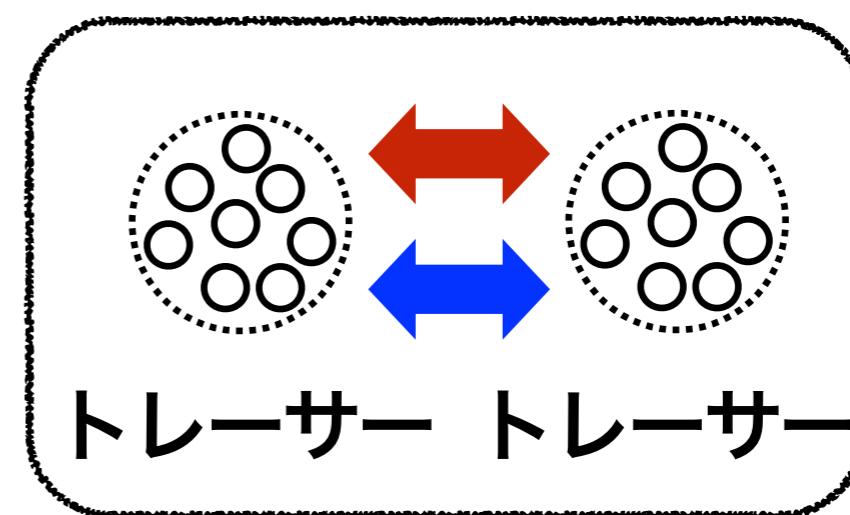
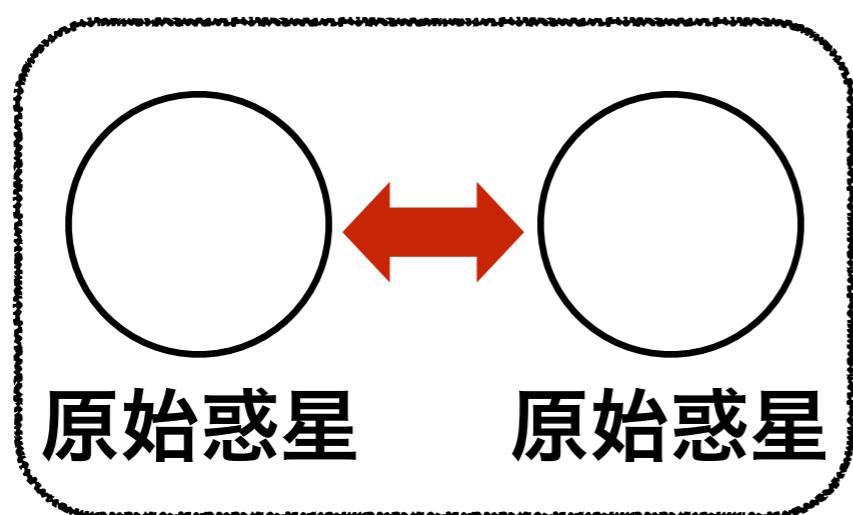
複数の微惑星を1つの粒子とみなす  
(スーパー粒子近似)  
➡ N体計算のコストを削減

N体計算 (4次のエルミート法)

重力相互作用を取り扱う

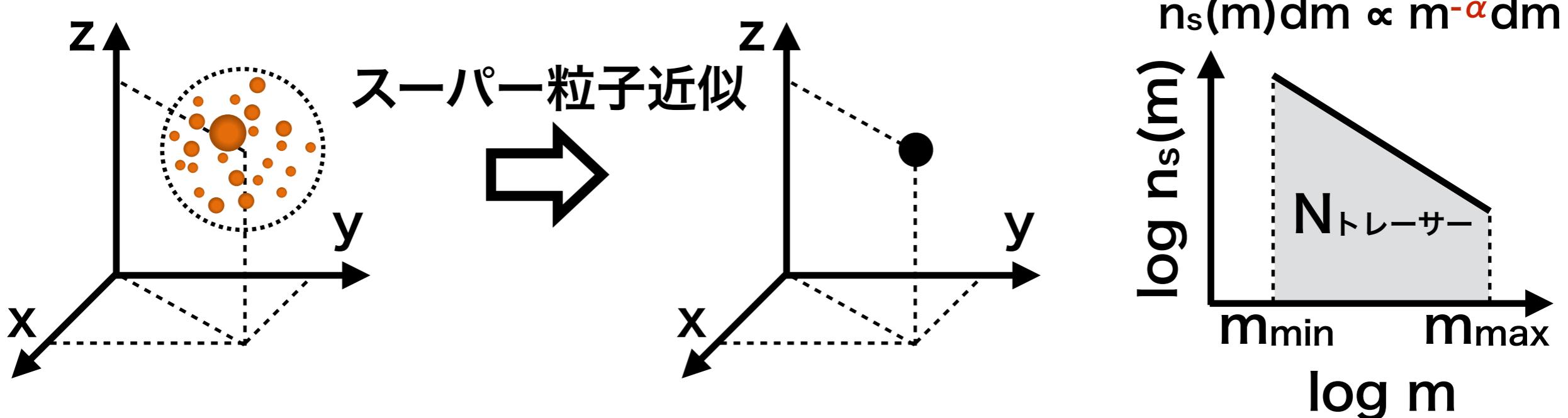
統計的計算

衝突・破壊を取り扱う

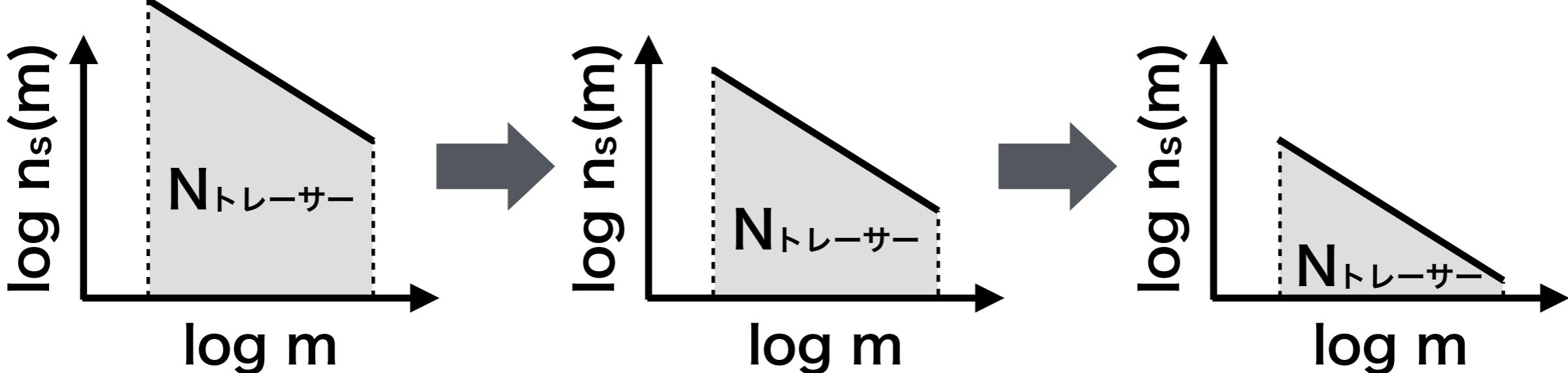


# 衝突・破壊を扱う粒子：トレーサー

- トレーサー … 計算上は質点、質量はべき分布（定常衝突力スケード）



- トレーサー内の微惑星の個数分布進化



べき一定のまま  $N_{\text{トレーサー}}$  が減少 = トレーサーの質量が減少

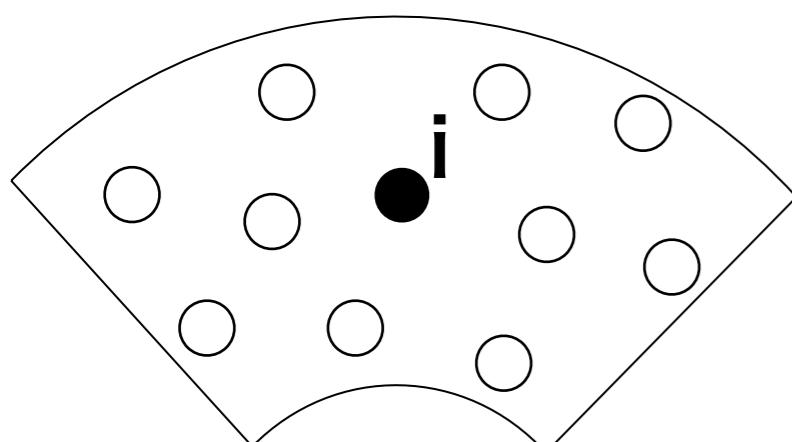
# 破壊の取り扱い方：統計的手法

- トレーサー内の微惑星の個数  $N_{\text{トレーサー}}$  の進化 (KT10)

$$\frac{dN_{\text{tracer},i}}{dt} = -\underline{C} N_{\text{tracer},i} \left( \frac{\Sigma_i}{m_{\max}} \Omega_K \pi R_{\max}^2 \right) \left( \frac{v_i (m_{\max})^2}{2Q_D^*(m_{\max})} \right)^{\alpha-1}$$

軌道分布に依存

定数  $\Sigma_i$  同士の衝突頻度  $m_{\max}$  低質量・高速度衝突



→ 面密度  $\Sigma_i$ 、衝突速度  $v_i$  が重要

ハイブリッドコードでは軌道がわかるため、

近傍トレーサーの分布・相対速度から計算可能

# 惑星-微惑星の力学的摩擦

## 初期条件

- ・ 質量 $1M_E$ の惑星3体
- ・ 総質量 $30M_E$ の微惑星  
3000体
- ・ 円盤の幅~30相互ヒル  
半径
- ・ 破壊なし、集積あり

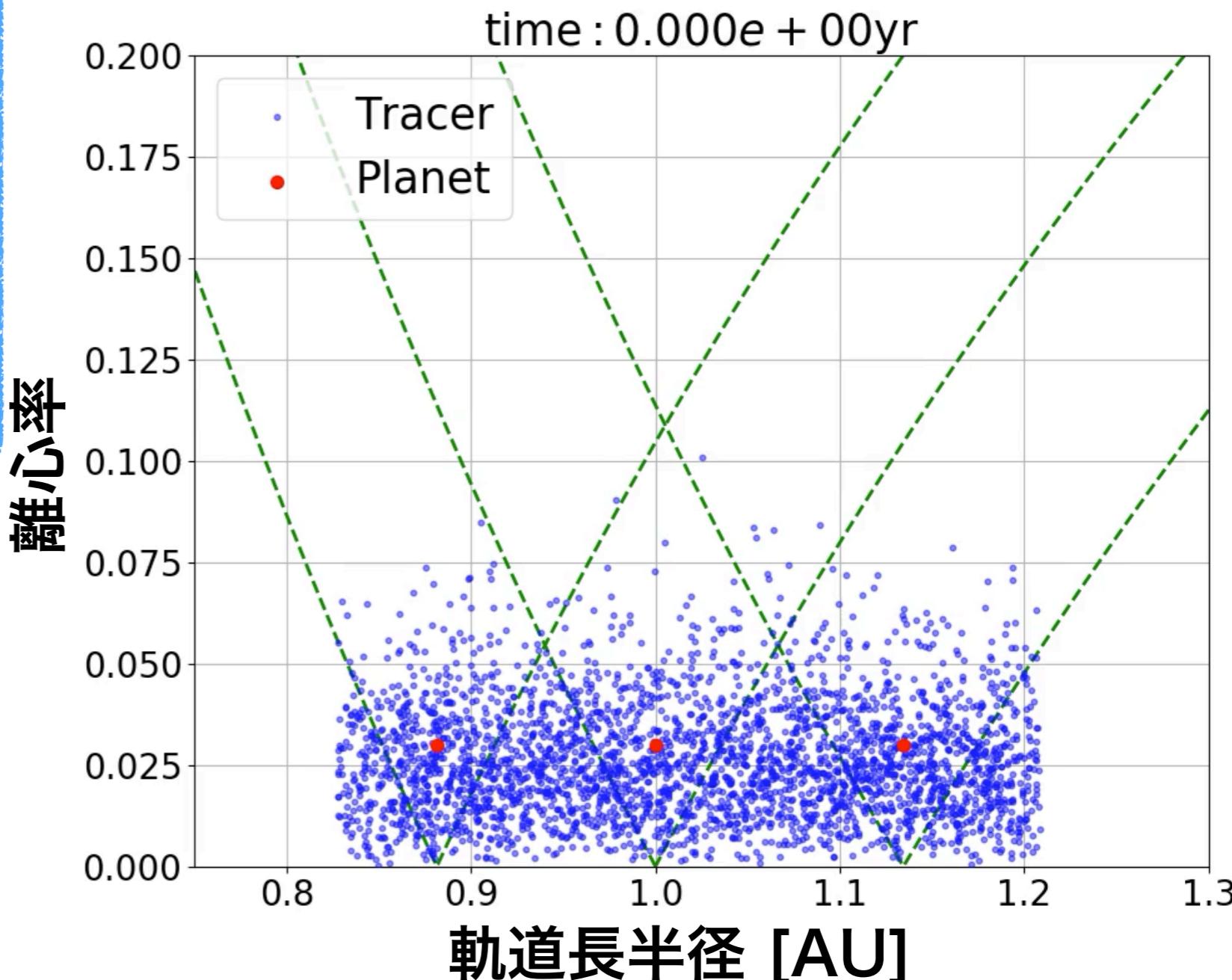
## 計算結果

- ・ 惑星の離心率は減少
- ・ 微惑星の離心率は上昇

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$

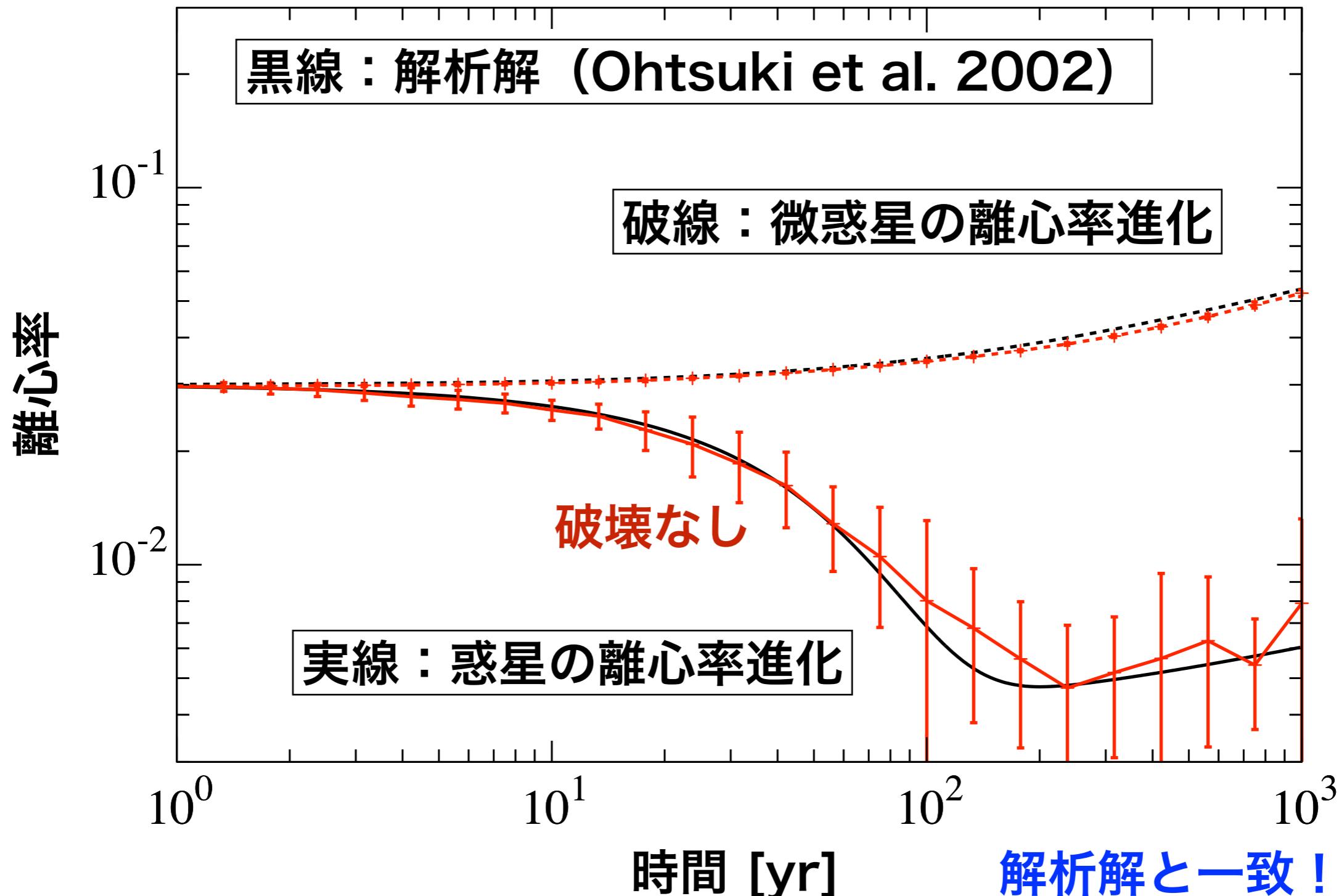
赤点：惑星 青点：微惑星

緑破線：等ヤコビエネルギー線



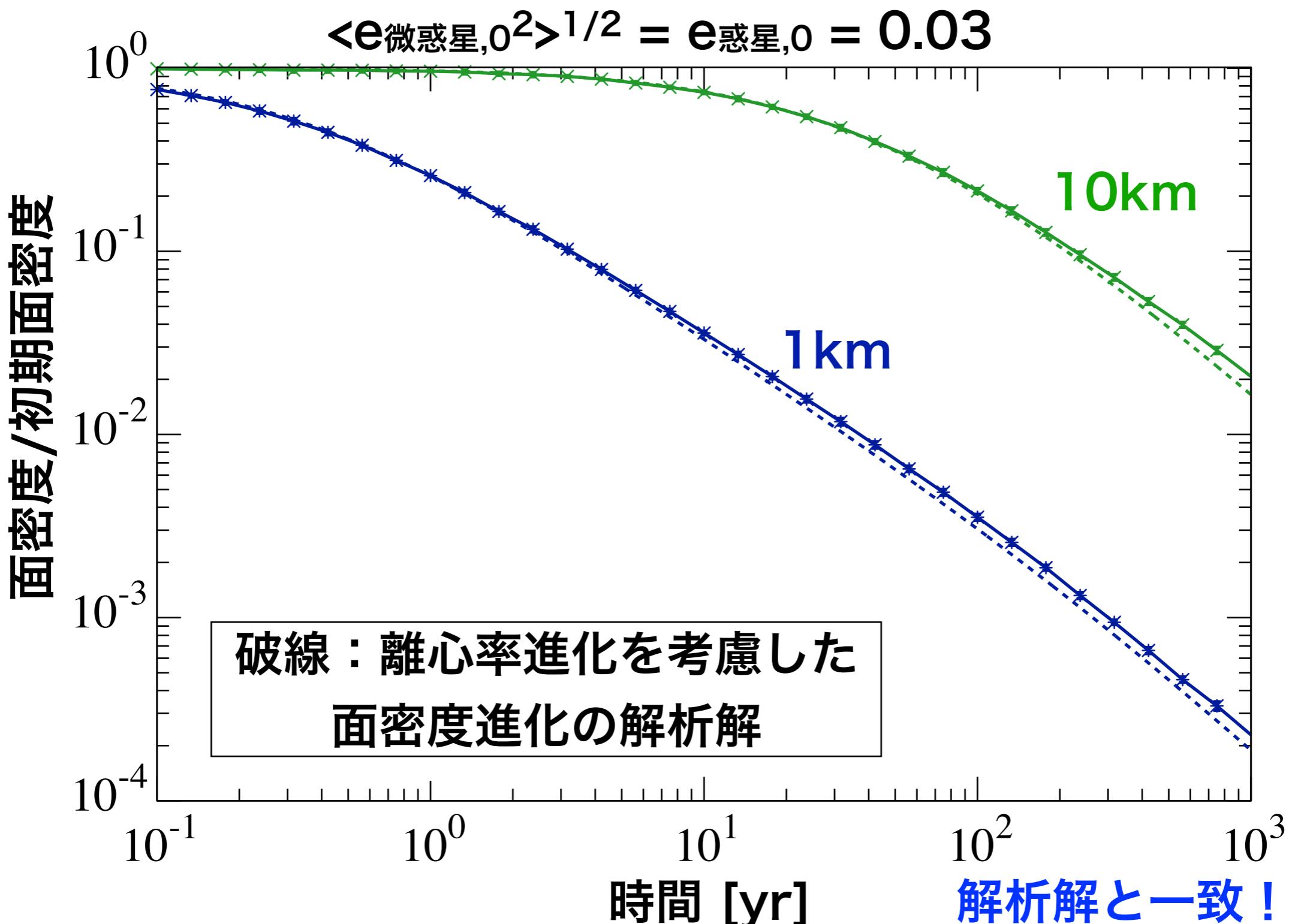
# 破壊がない場合の離心率進化

破壊なし、集積あり  $\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$



# 破壊による微惑星円盤の面密度進化

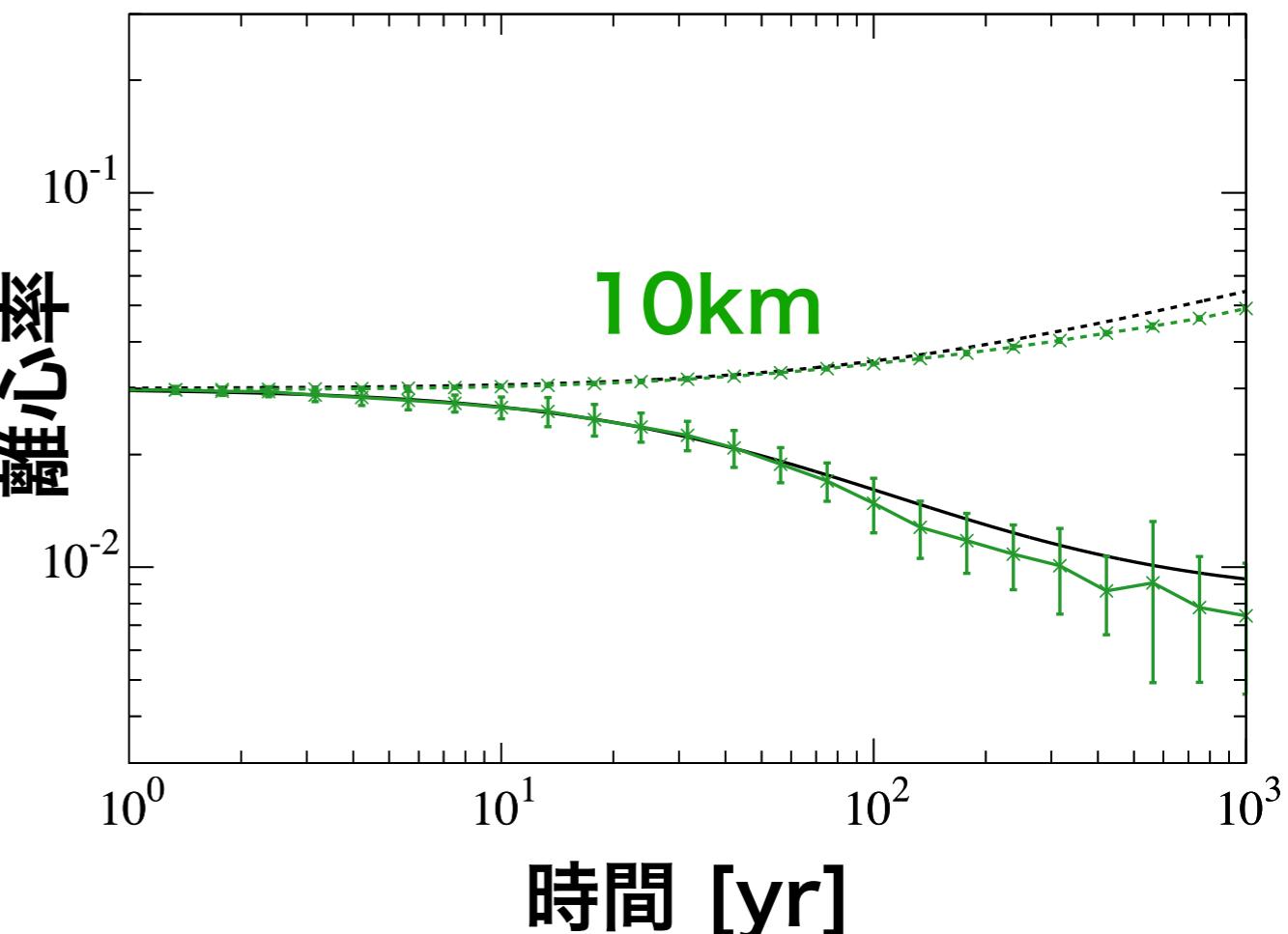
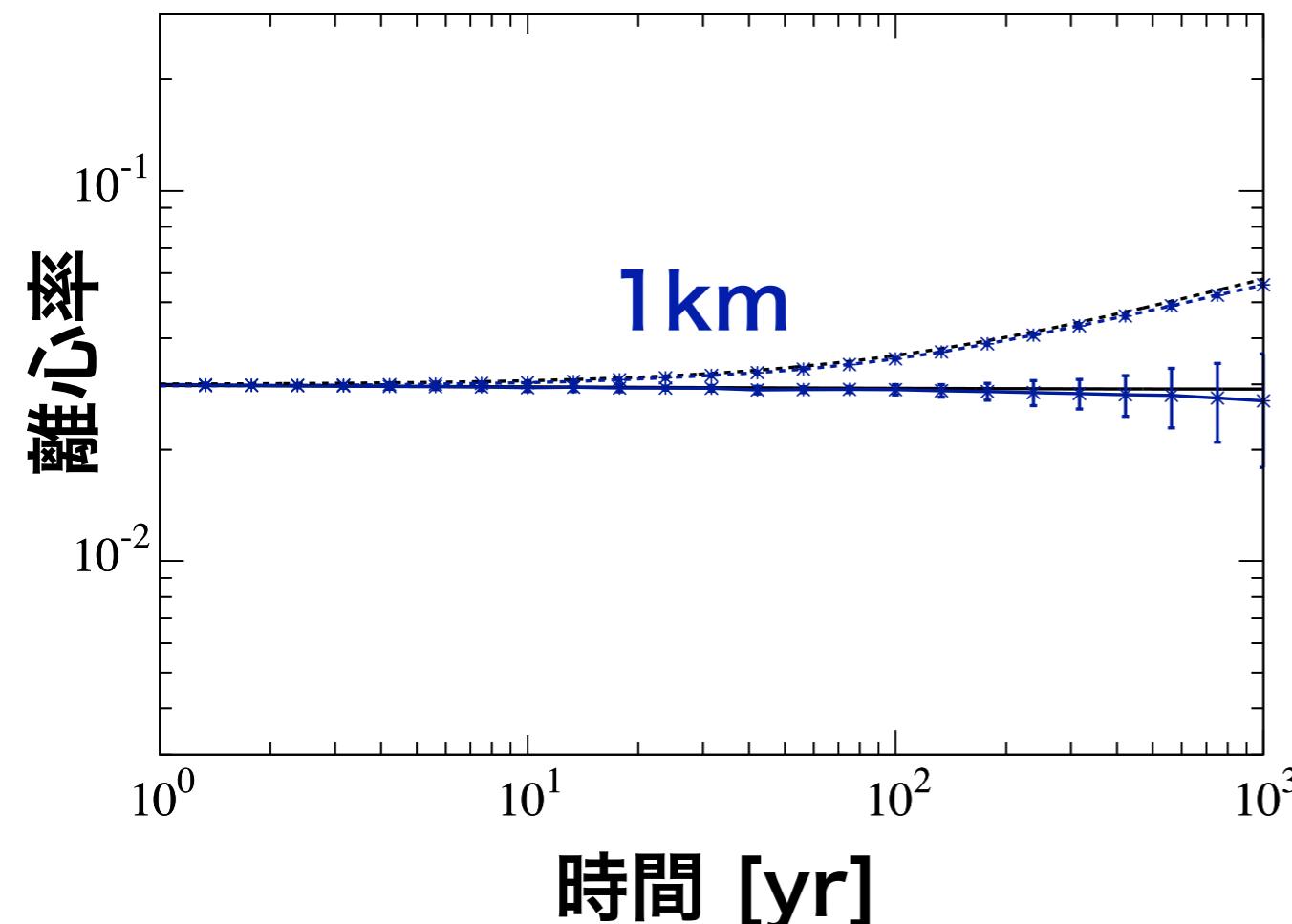
最大微惑星の質量  $m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km) と  $10^{19}g$ (~10km) に設定



# 破壊を考慮した時の離心率進化

最大微惑星の質量 $m_{\max}$  を $10^{16}g(\sim 1km)$ と $10^{19}g(\sim 10km)$ に設定

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$



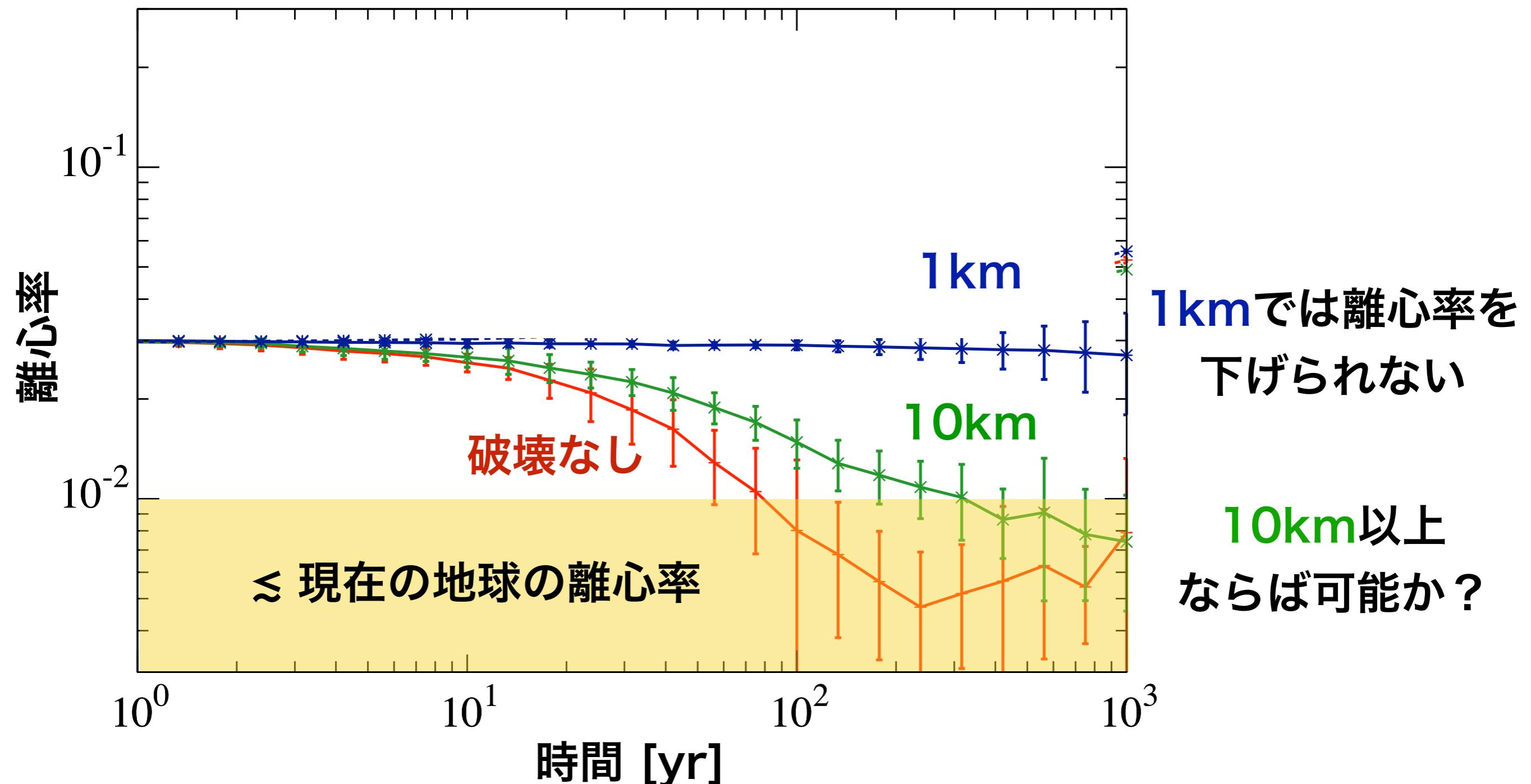
黒線：面密度進化を考慮した  
離心率進化の解析解

解析解と一致！

# 破壊が力学的摩擦に与える影響

最大微惑星の質量  $m_{\max}$  を  $10^{16}g$  ( $\sim 1km$ ) と  $10^{19}g$  ( $\sim 10km$ ) に設定

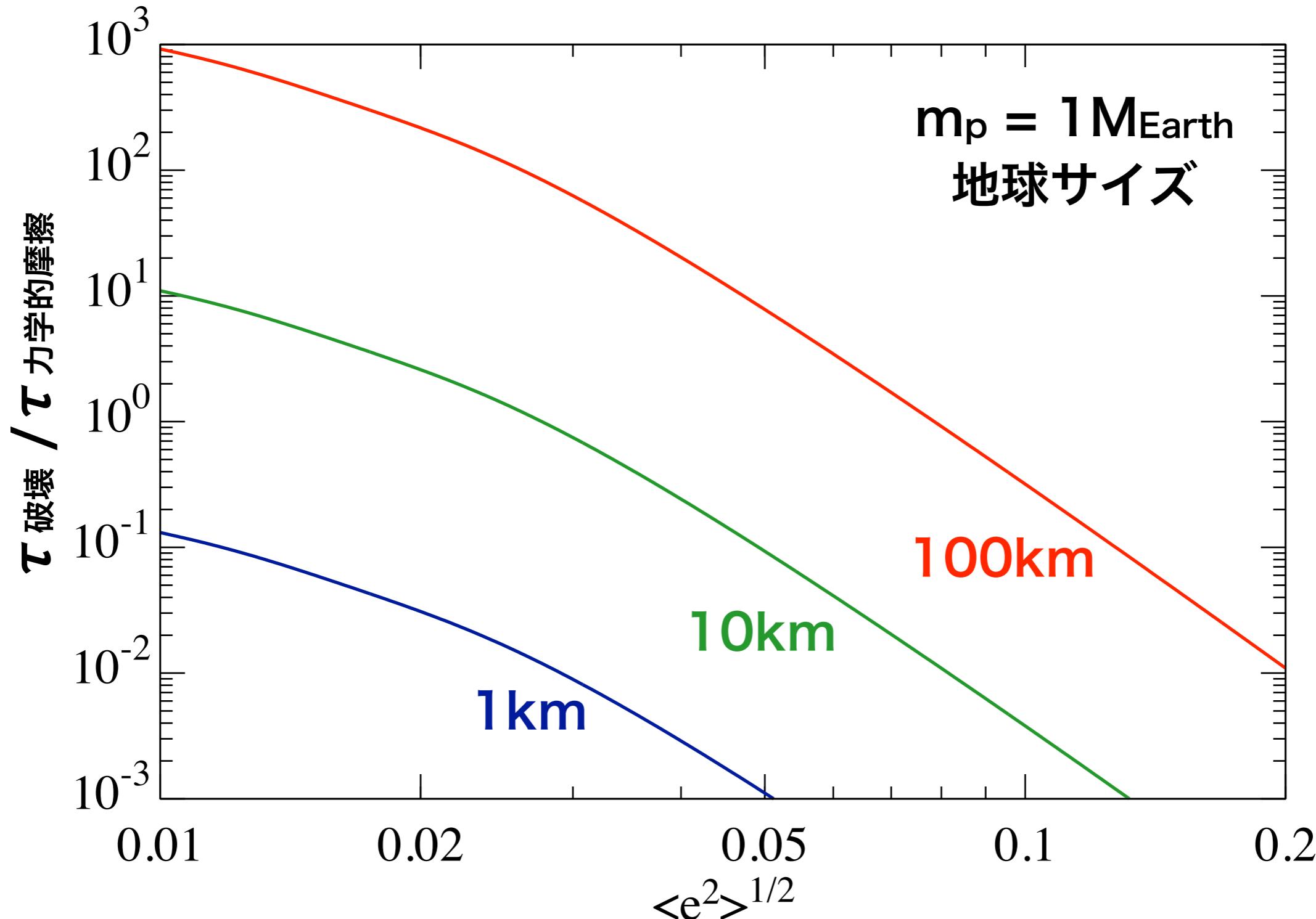
$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$



# 議論

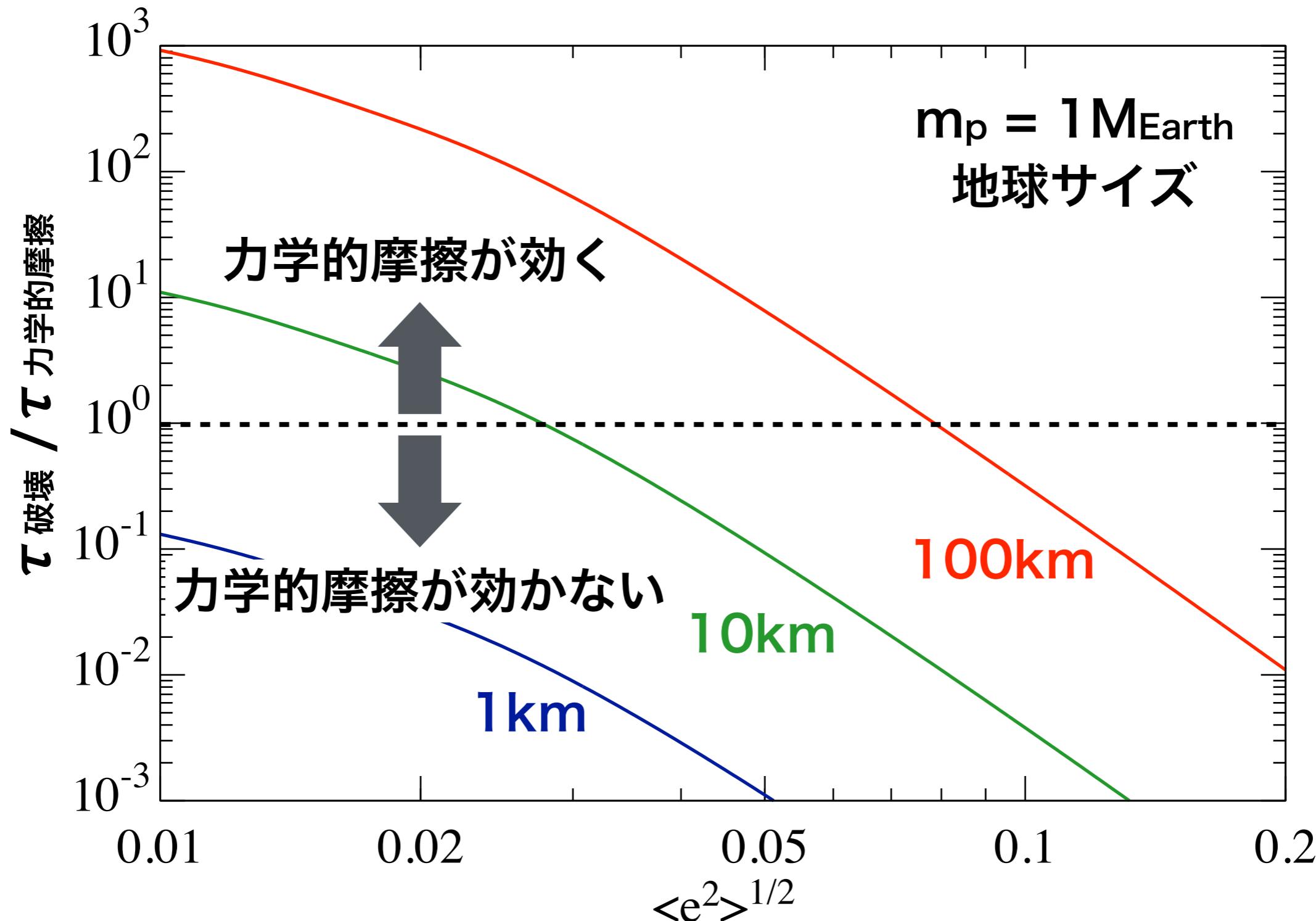
# タイムスケールの比較

- $\tau_{\text{破壊}} / \tau_{\text{力学的摩擦}}$  : 残存微惑星円盤の面密度に依存しない

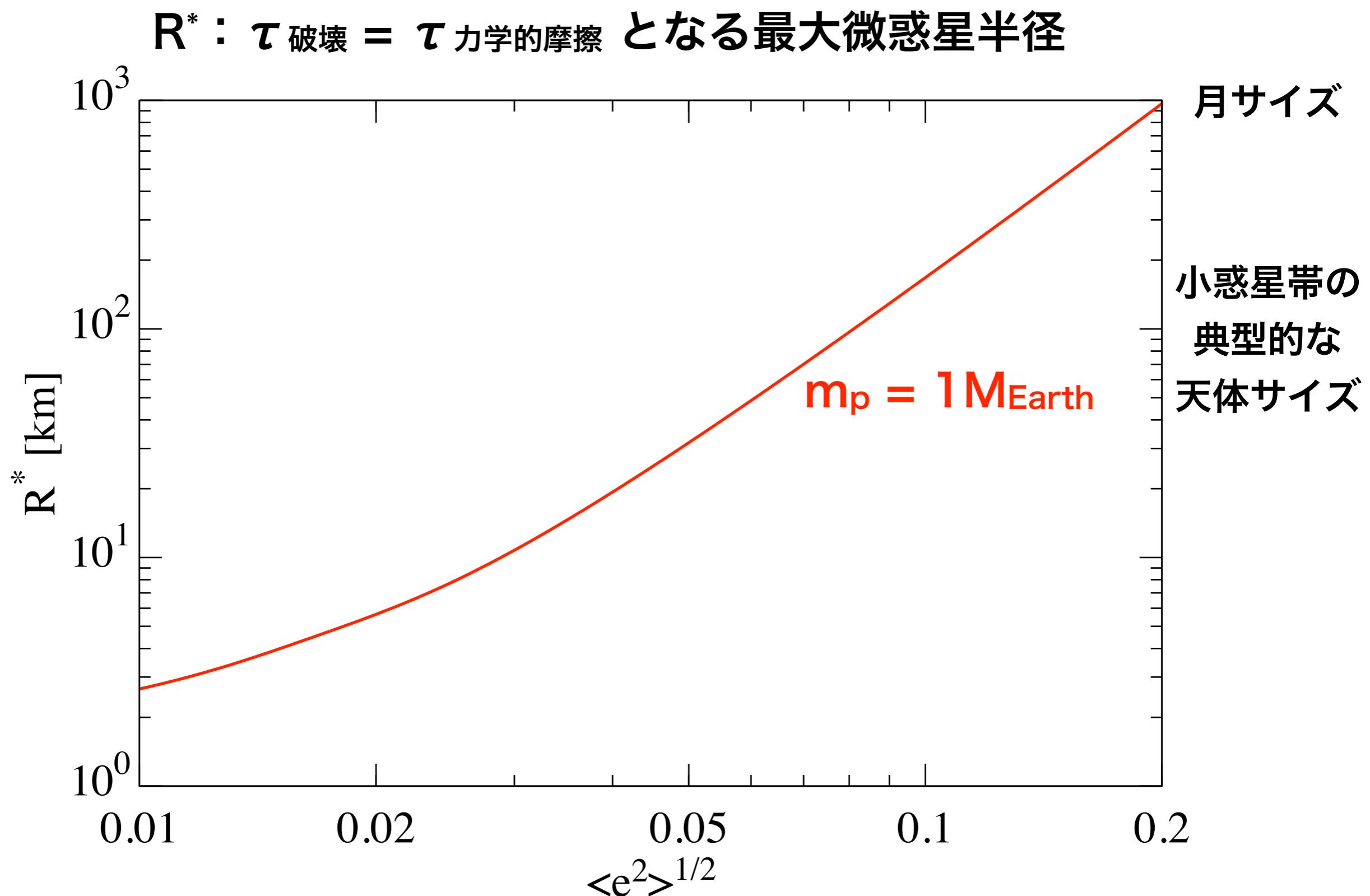


# タイムスケールの比較

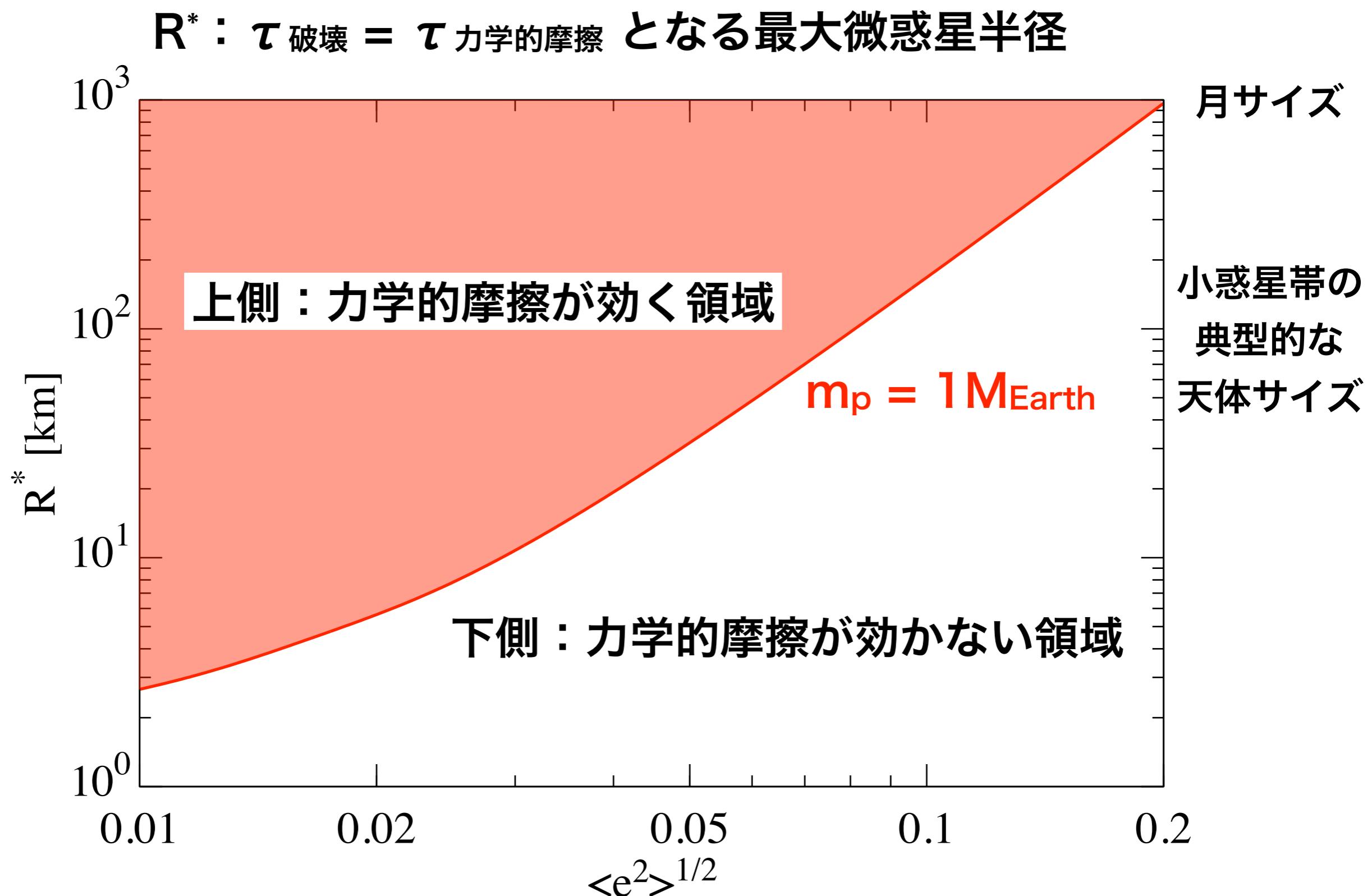
- $\tau_{\text{破壊}} / \tau_{\text{力学的摩擦}}$  : 残存微惑星円盤の面密度に依存しない



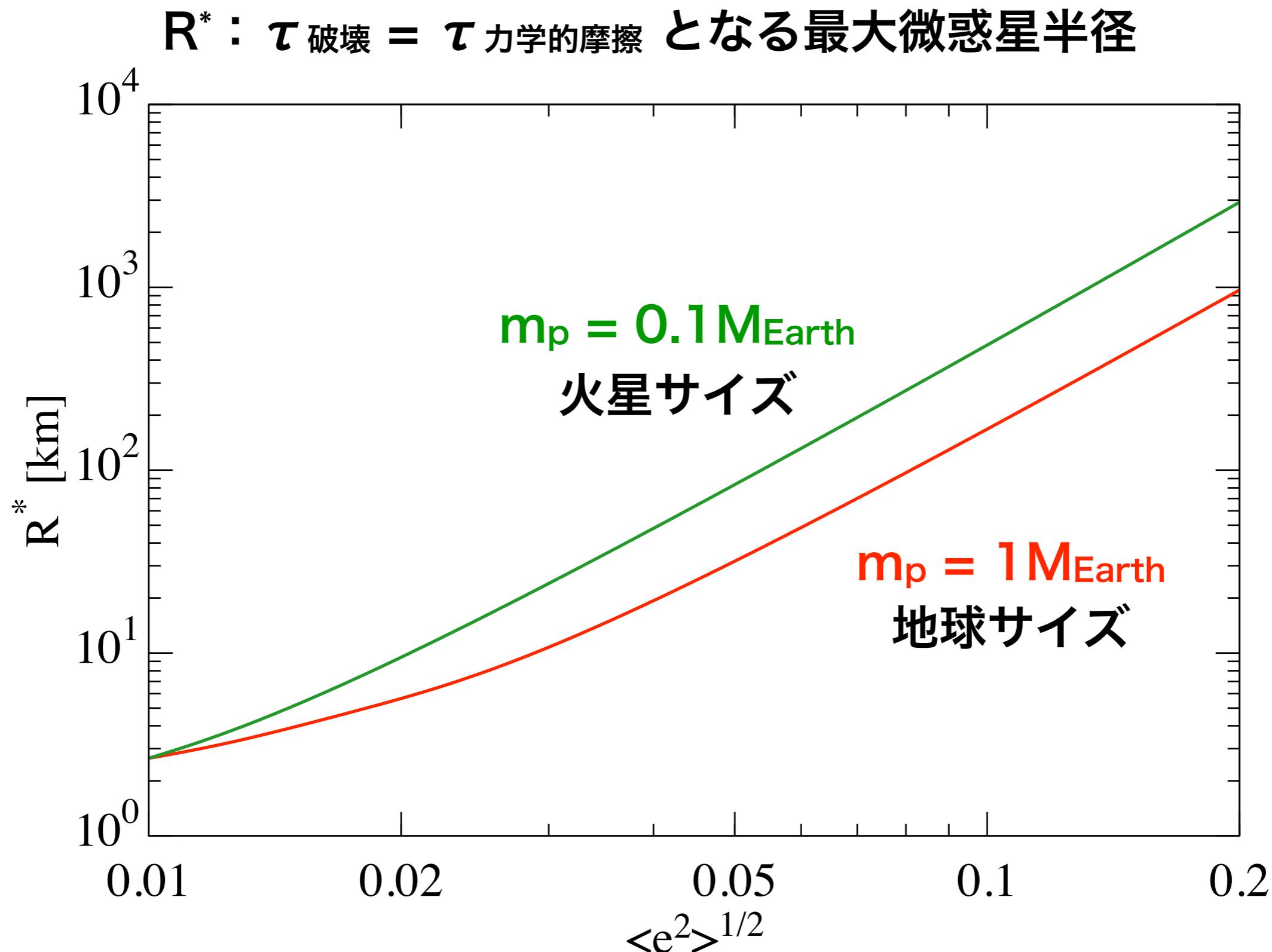
# 力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ



# 力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ

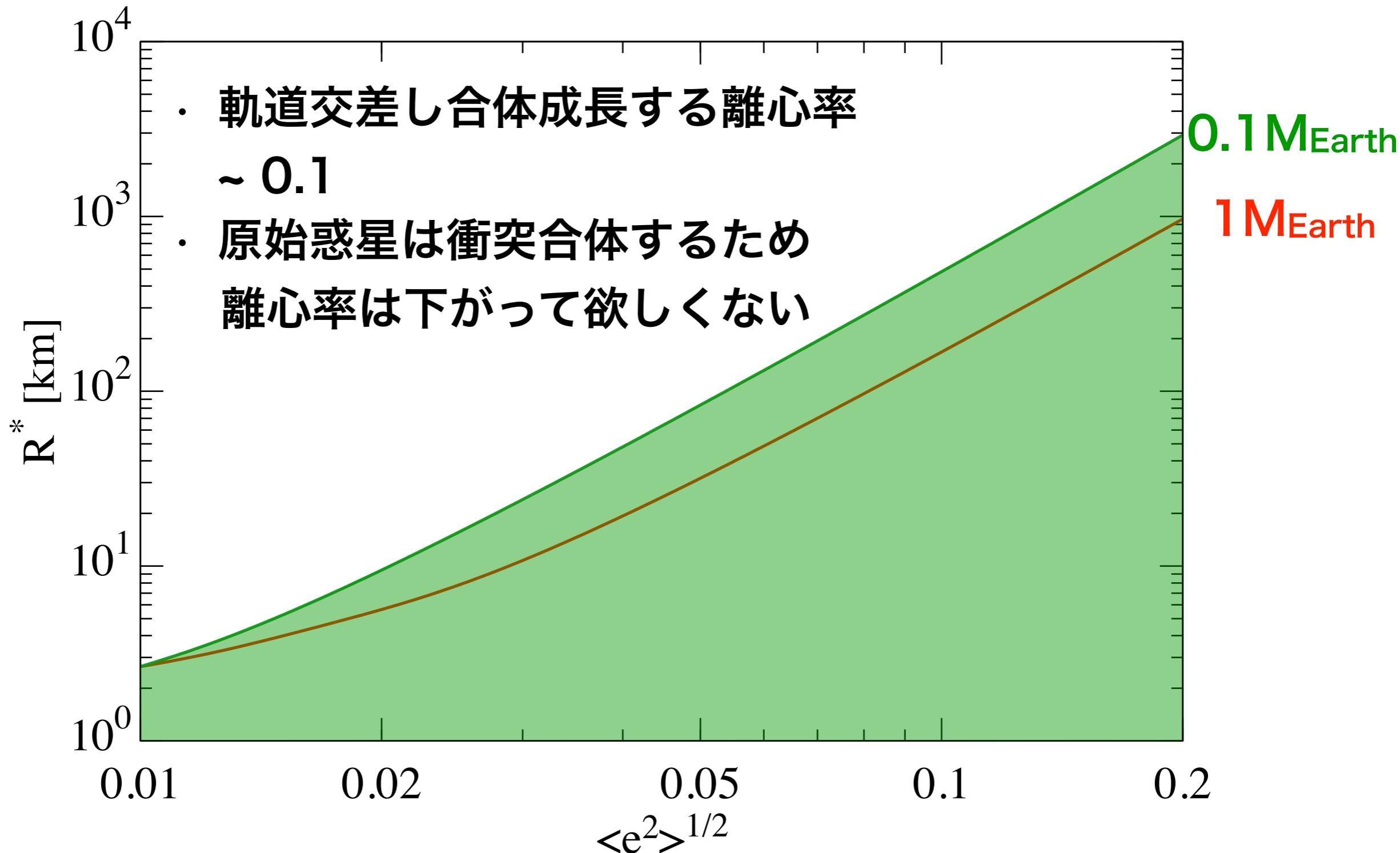


# 原始惑星（火星サイズ）の場合



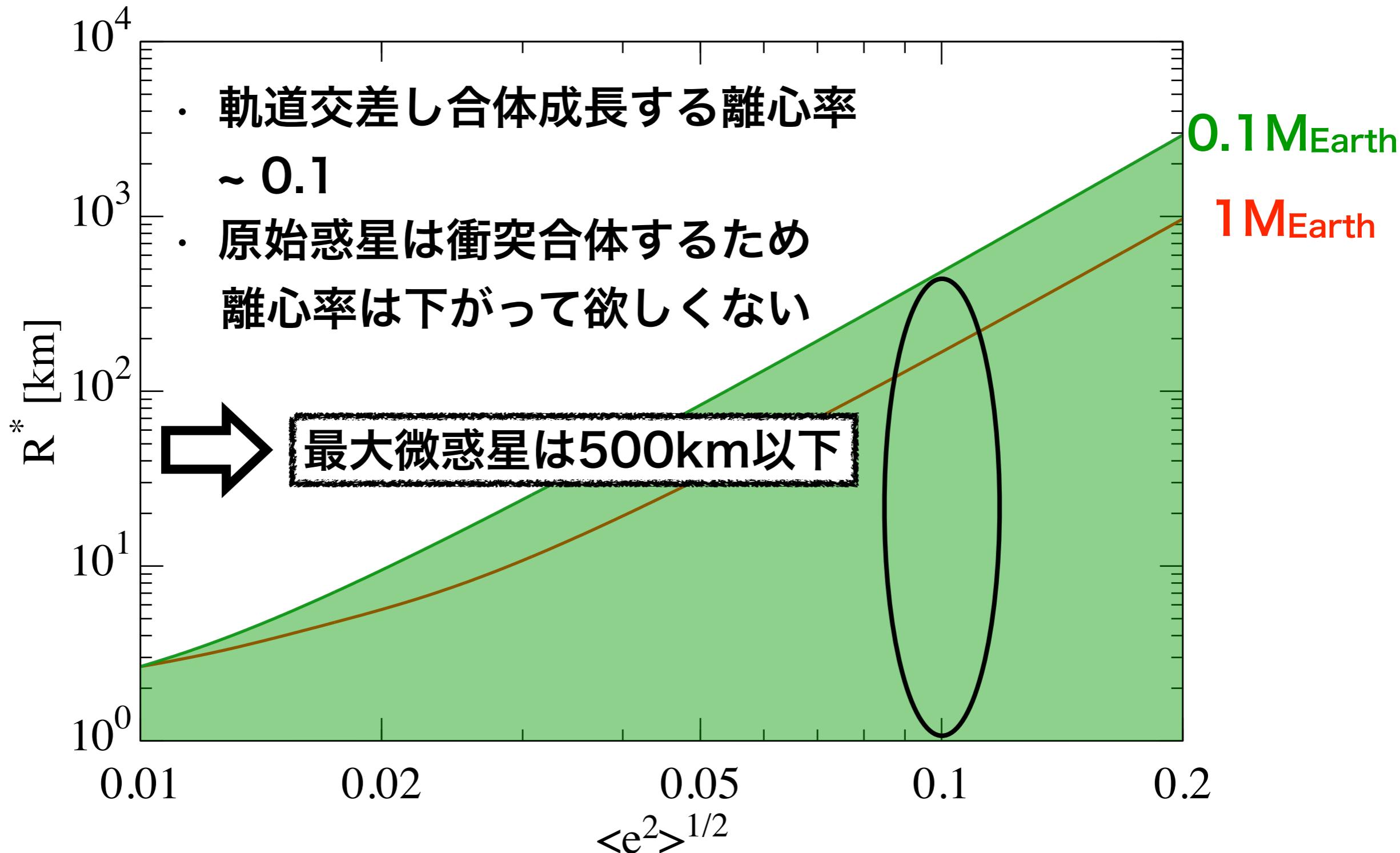
# 巨大衝突ステージ前期

$R^*$  :  $\tau_{\text{破壊}} = \tau_{\text{力学的摩擦}}$  となる最大微惑星半径



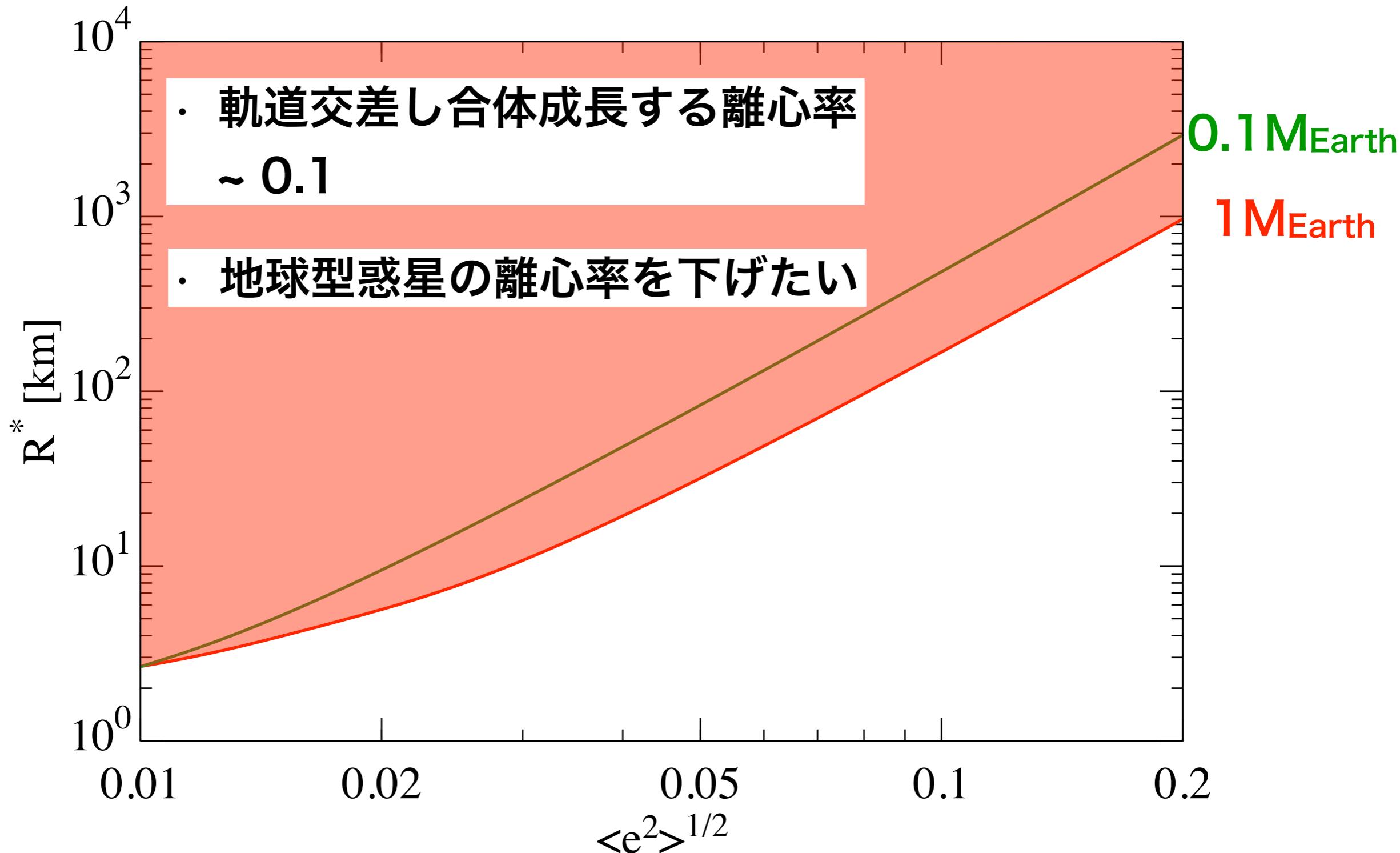
# 巨大衝突ステージ前期

$R^*$  :  $\tau_{\text{破壊}} = \tau_{\text{力学的摩擦}}$  となる最大微惑星半径



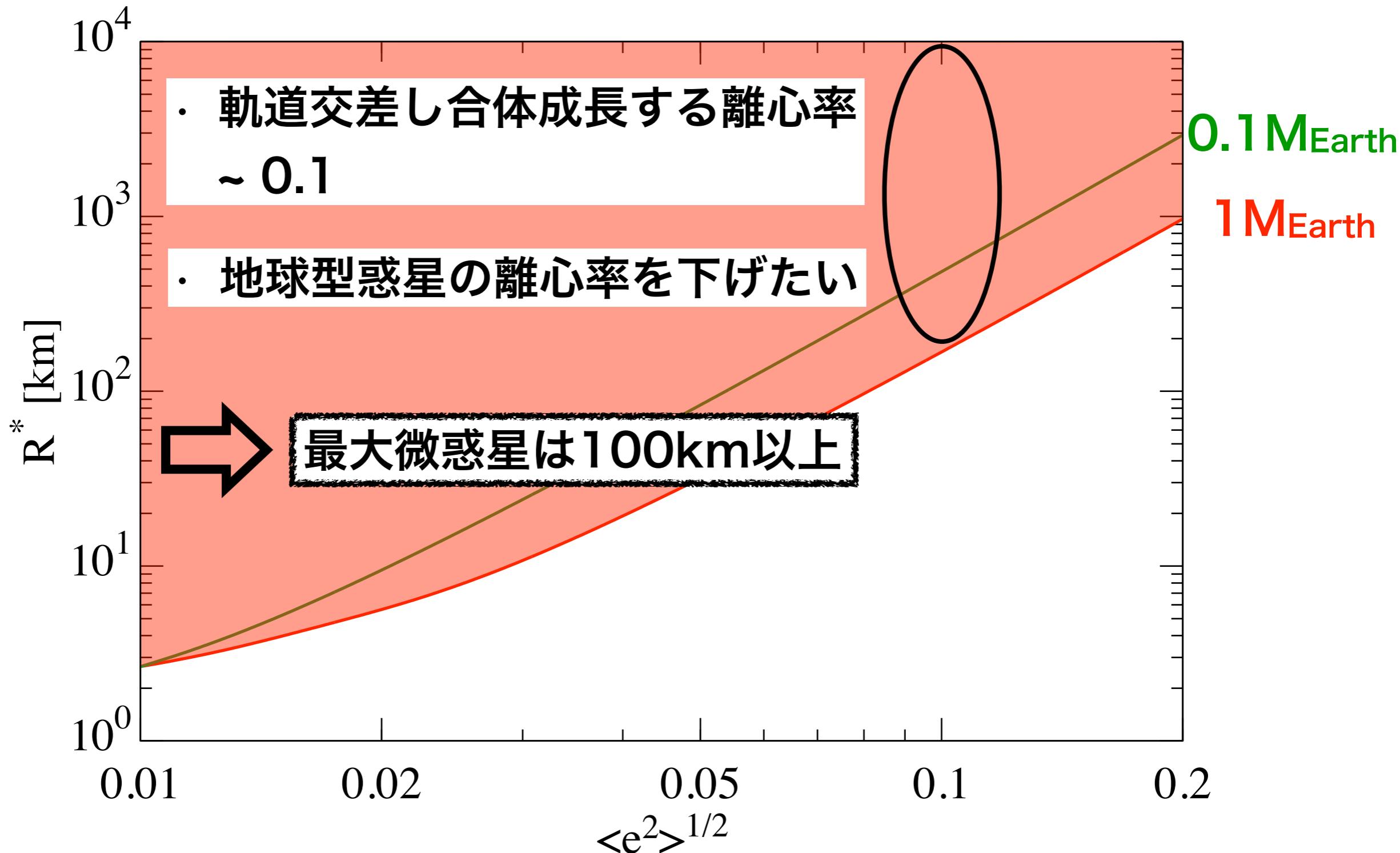
# 巨大衝突ステージ後期

$R^*$  :  $\tau_{\text{破壊}} = \tau_{\text{力学的摩擦}}$  となる最大微惑星半径

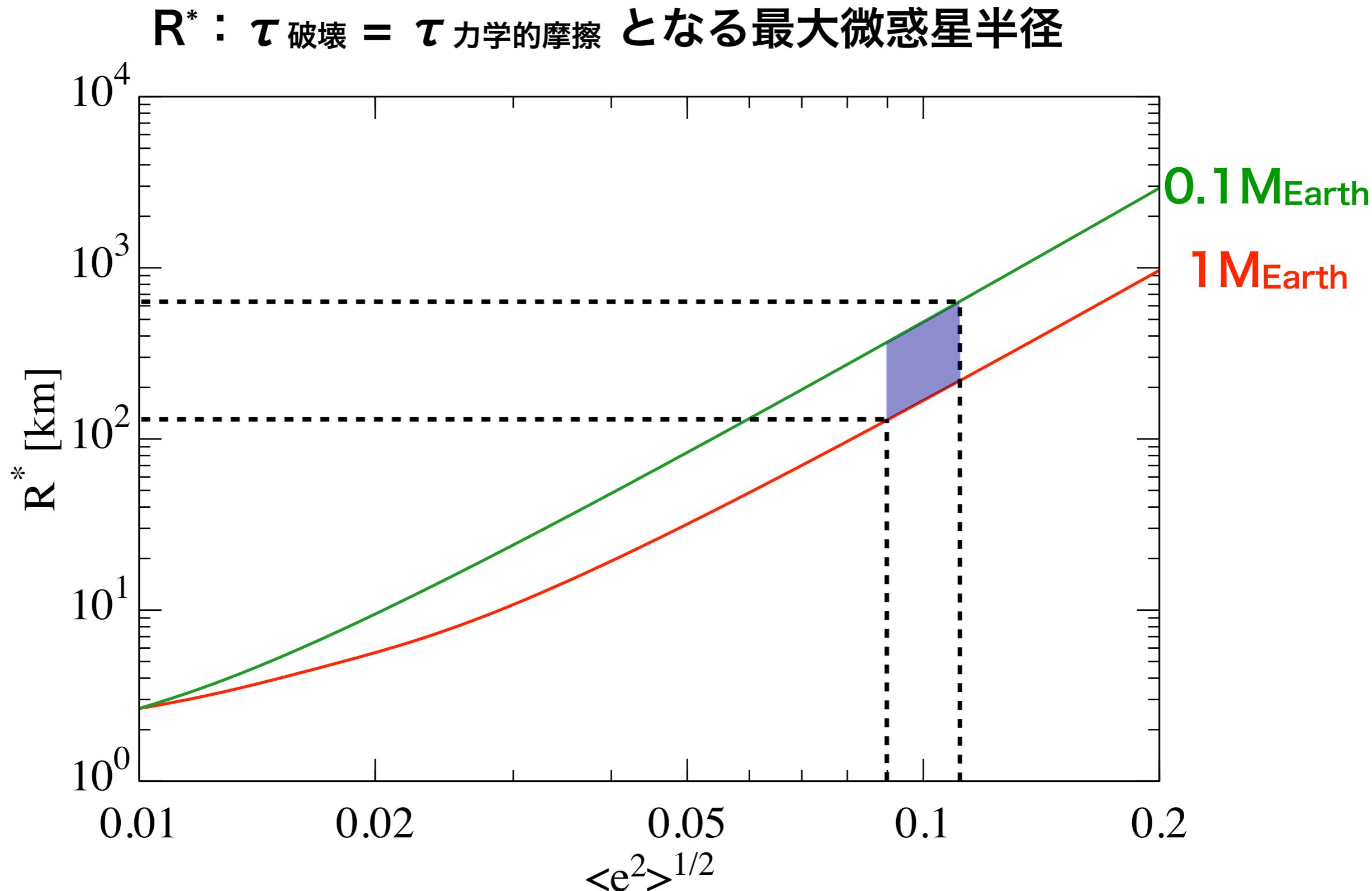


# 巨大衝突ステージ後期

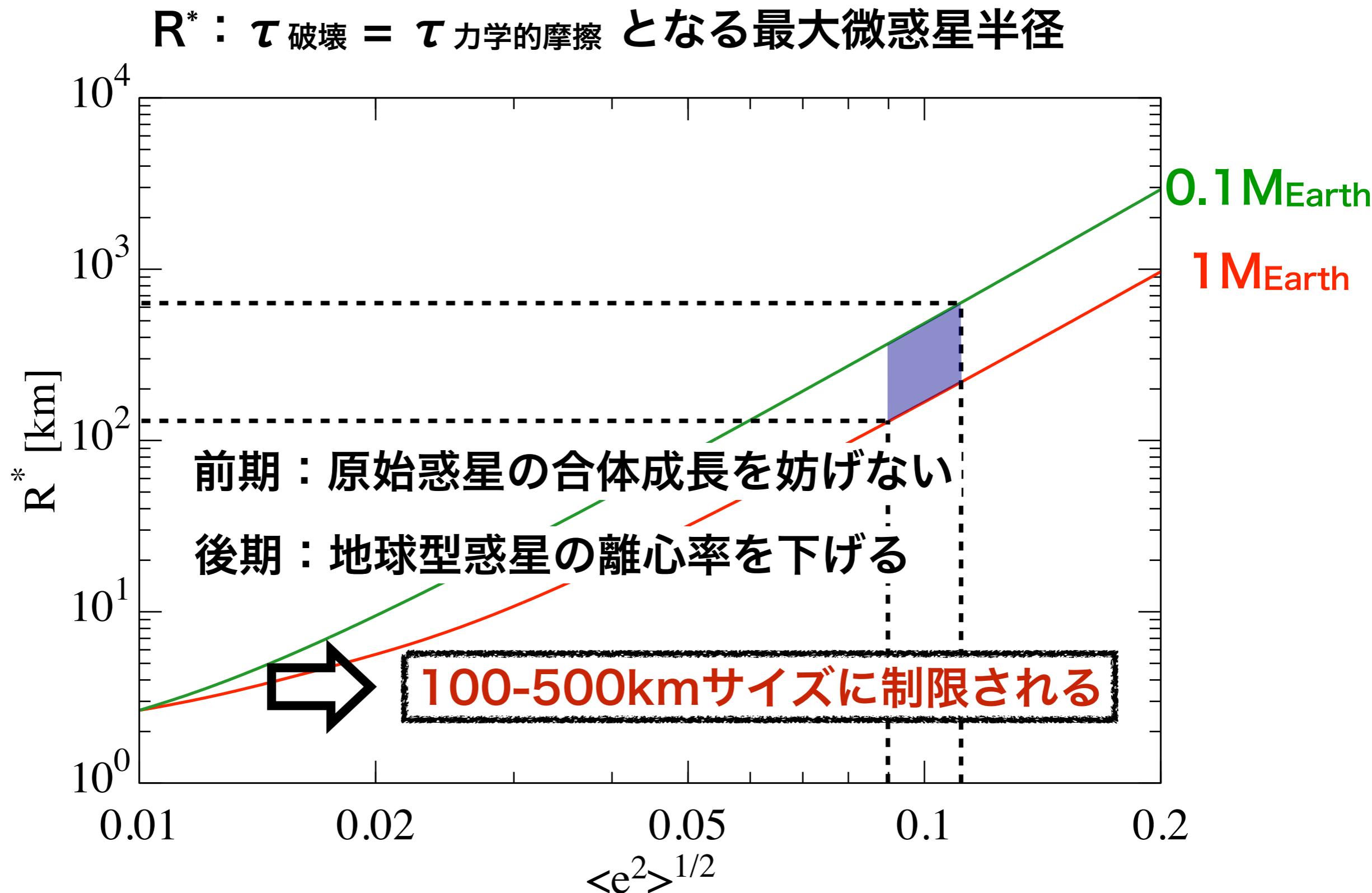
$R^*$  :  $\tau_{\text{破壊}} = \tau_{\text{力学的摩擦}}$  となる最大微惑星半径



# 最大微惑星の大きさへの制限



# 最大微惑星の大きさへの制限



# まとめ

- ・巨大衝突ステージに残存する微惑星の衝突・破壊

➡ 微惑星円盤の面密度が減少 (KT10)

➡ 残存微惑星による力学的摩擦の効率低下

- ・軌道進化と面密度進化を同時に解いて調べる必要あり

( $\tau_{\text{破壊}} \lesssim \tau_{\text{力学的摩擦}}$  の場合)

➡ 本研究のハイブリッドコードが有効

- ・「原始惑星の合体成長が可能」 & 「地球型惑星の離心率減少」

➡ 100-500kmの最大微惑星を含む残存微惑星円盤が必要

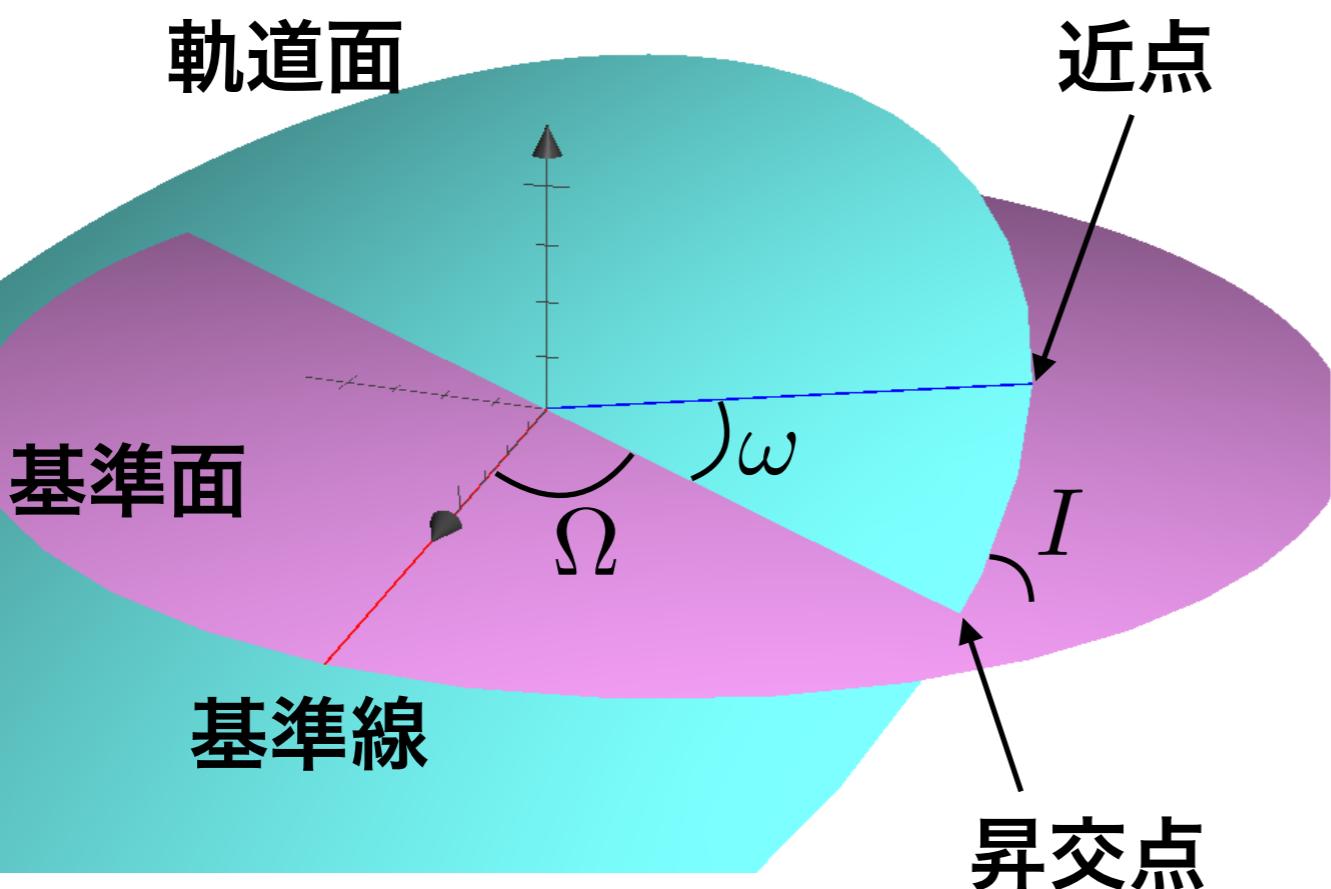


---

# Appendix

# 軌道要素

橢円軌道の場合



位置と速度の6変数



軌道要素6つ

橢円の形を決定：

軌道長半径

$a$   
 $e$

離心率

軌道面の位置を決定：

昇交点経度

$\Omega$   
 $\omega$   
 $I$

近点引数

軌道傾斜角

天体の位置を決定：  
近点通過時刻  $T$

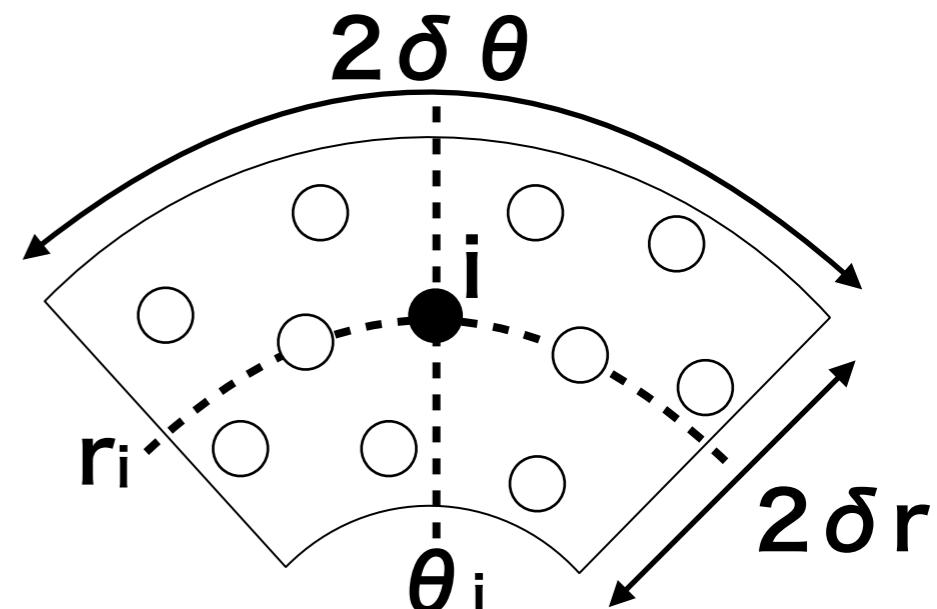
# 面密度と衝突速度

step1：トレーサー  $i$  のまわりに扇形領域  $i$  を作る (Morishima 2015)

step2：この領域の面密度を  
トレーサー  $i$  の面密度  $\Sigma_i$  とする

$$\Sigma_i = \frac{m_i + \sum_j^N m_j}{4r_i \delta r \delta \theta}$$

$j$ ：領域  $i$  内の  
トレーサー  
 $N$ ： $j$  の総和



step3： $i$  と  $j$  の相対速度をランダム速度で近似

ランダム速度  $\sqrt{e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2} v_{K,i}$

$e_{i,j}$ ：相対離心率  
 $i_{i,j}$ ：相対軌道傾斜角  
 $v_{K,i}$ ： $i$  のケプラー速度

step4：相対速度の2乗平均平方根を  $i$  の衝突速度  $v_{imp,i}$  だとみなす

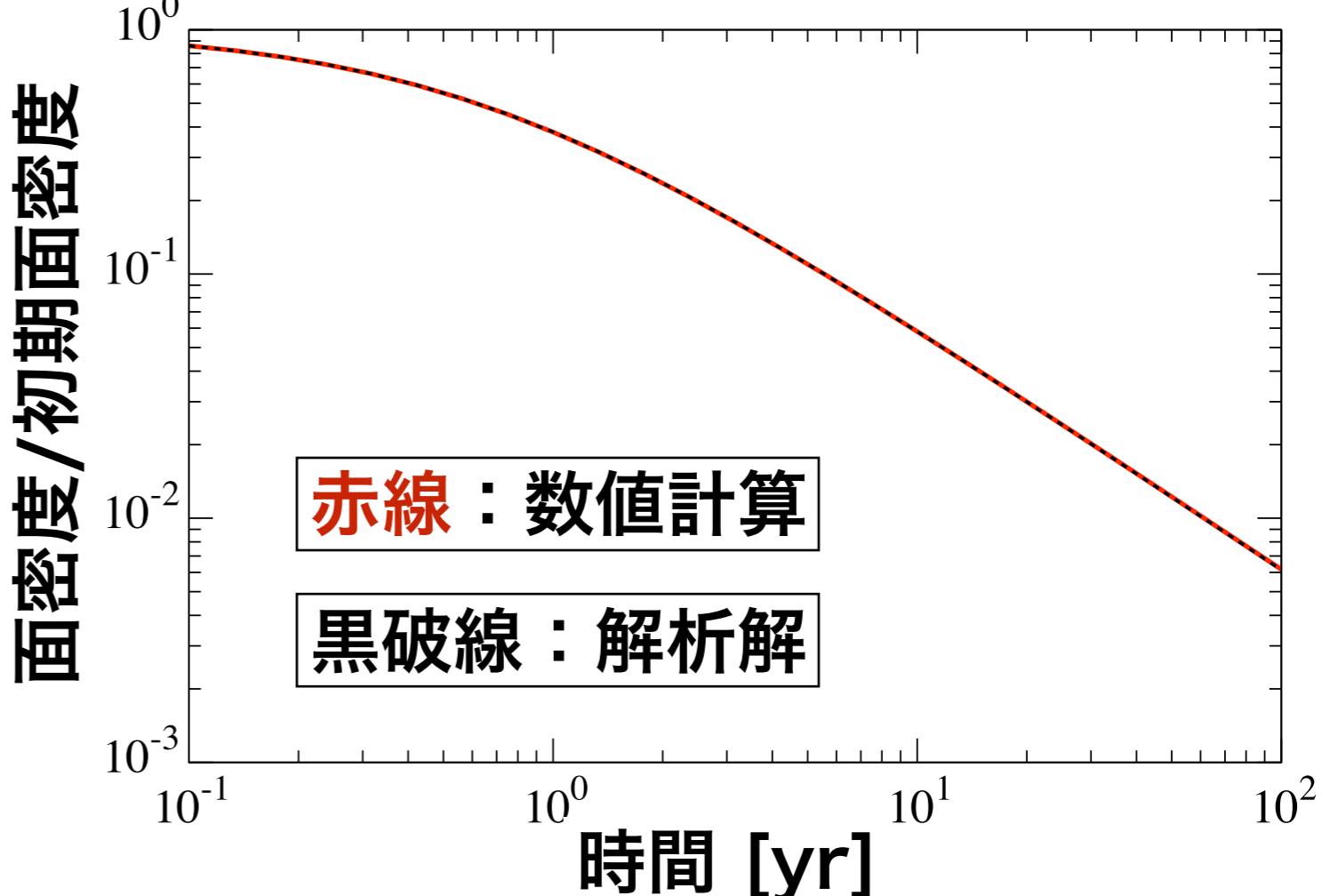
$$v_{imp,i} = \sqrt{\frac{\sum_j^N (e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2) v_{K,i}^2}{N}}$$

# 破壊計算のテスト

破壊による微惑星円盤の面密度減少をテスト

解析解と一致！

- ・ 微惑星2000体
- ・  $1 \pm 0.025 \text{AU}$
- ・ 総質量 = 10地球質量
- ・ 離心率 = 0.01
- ・  $m_{\max} = 10^{16} \text{ g}$
- ・ 重力相互作用なし



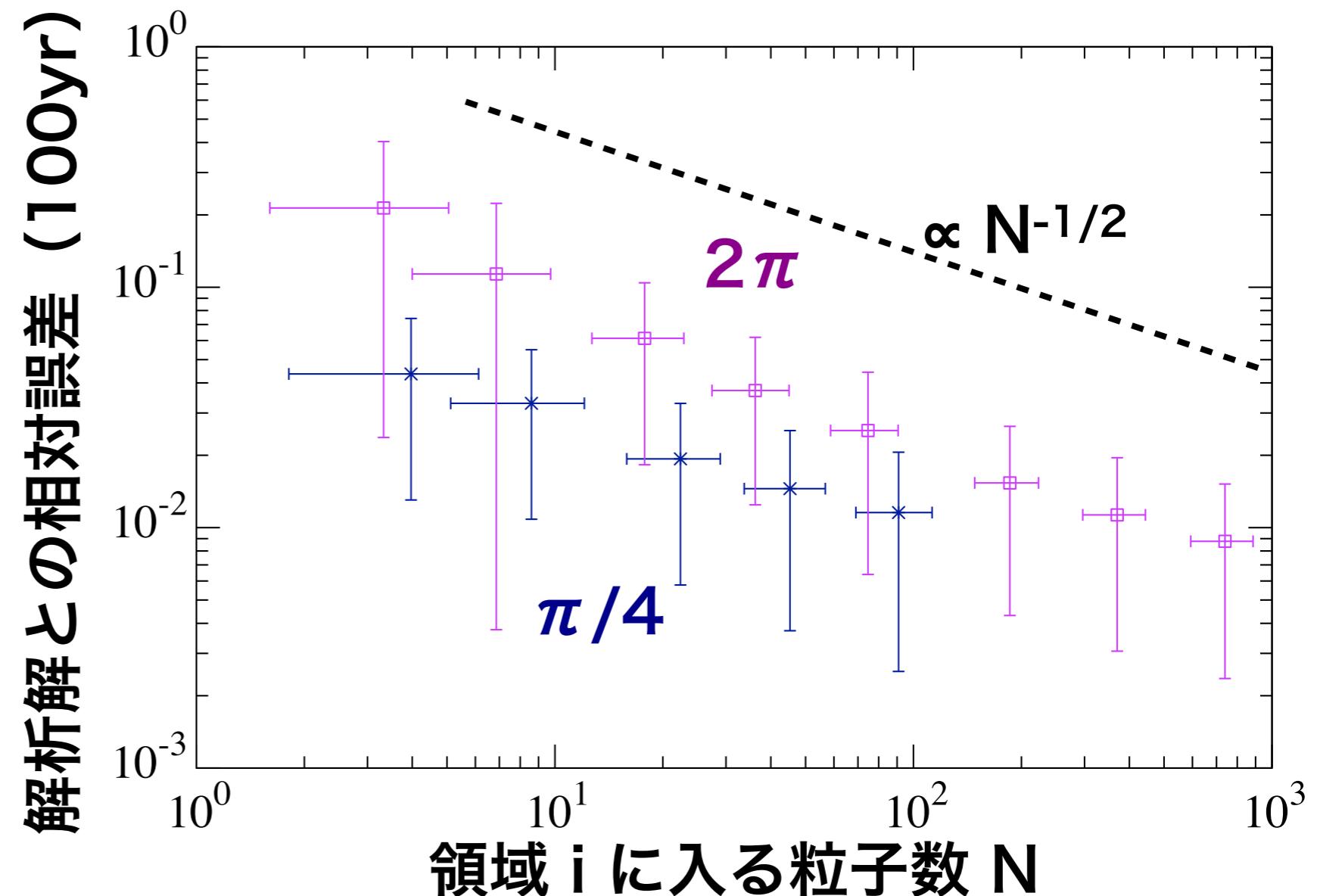
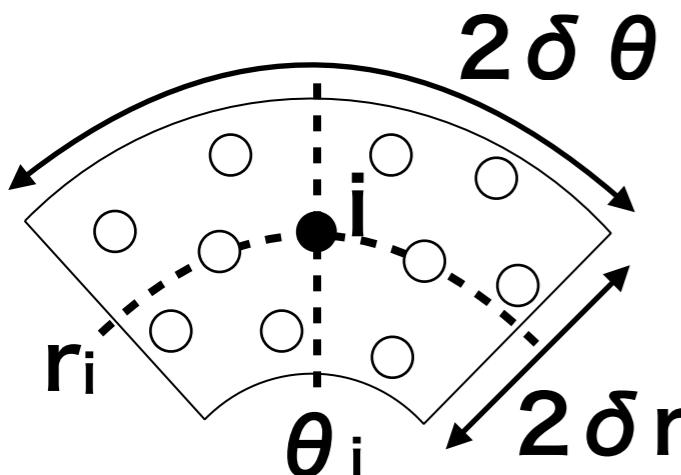
解析解 (KT10)

$$\frac{\Sigma(t)}{\Sigma_0} = \frac{1}{1 + t/\tau_{\text{dep}}}$$

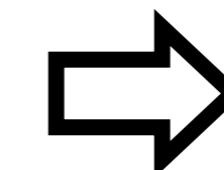
$$\begin{aligned} \tau_{\text{dep}} &= 0.617 \left( \frac{M_{\text{tot}}}{10M_{\oplus}} \right)^{-1} \left( \frac{m_{\max}}{10^{16} \text{g}} \right)^{0.641} \left( \frac{a}{1 \text{AU}} \right)^{4.18} \\ &\quad \times \left( \frac{\Delta a/a}{0.05} \right) \left( \frac{e}{0.01} \right)^{-1.36} \left( \frac{Q_0}{5.07 \times 10^6 \text{erg/g}} \right)^{0.679} \text{yr} \end{aligned}$$

# 破壊計算の精度と粒子数の関係

- 微惑星の個数：  
 $\{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000\}$  体
- $2\delta\theta = 2\pi, \pi/4$
- $2\delta r = 0.02\text{AU}$

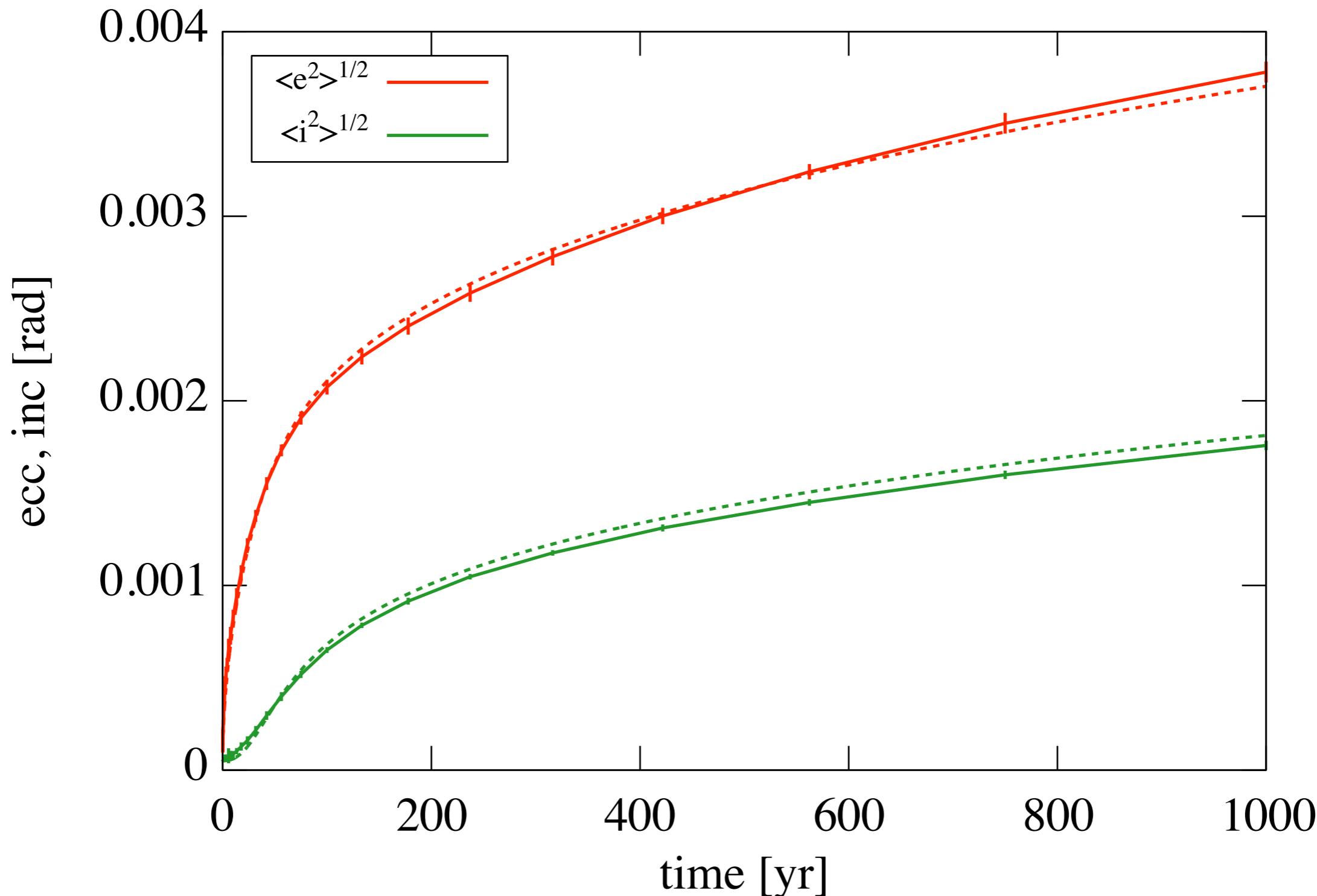


$\pi/4$ は時間経過で粒子が入れ替わるため、  
 $2\pi$ に比べ約8倍の粒子平均が取れている

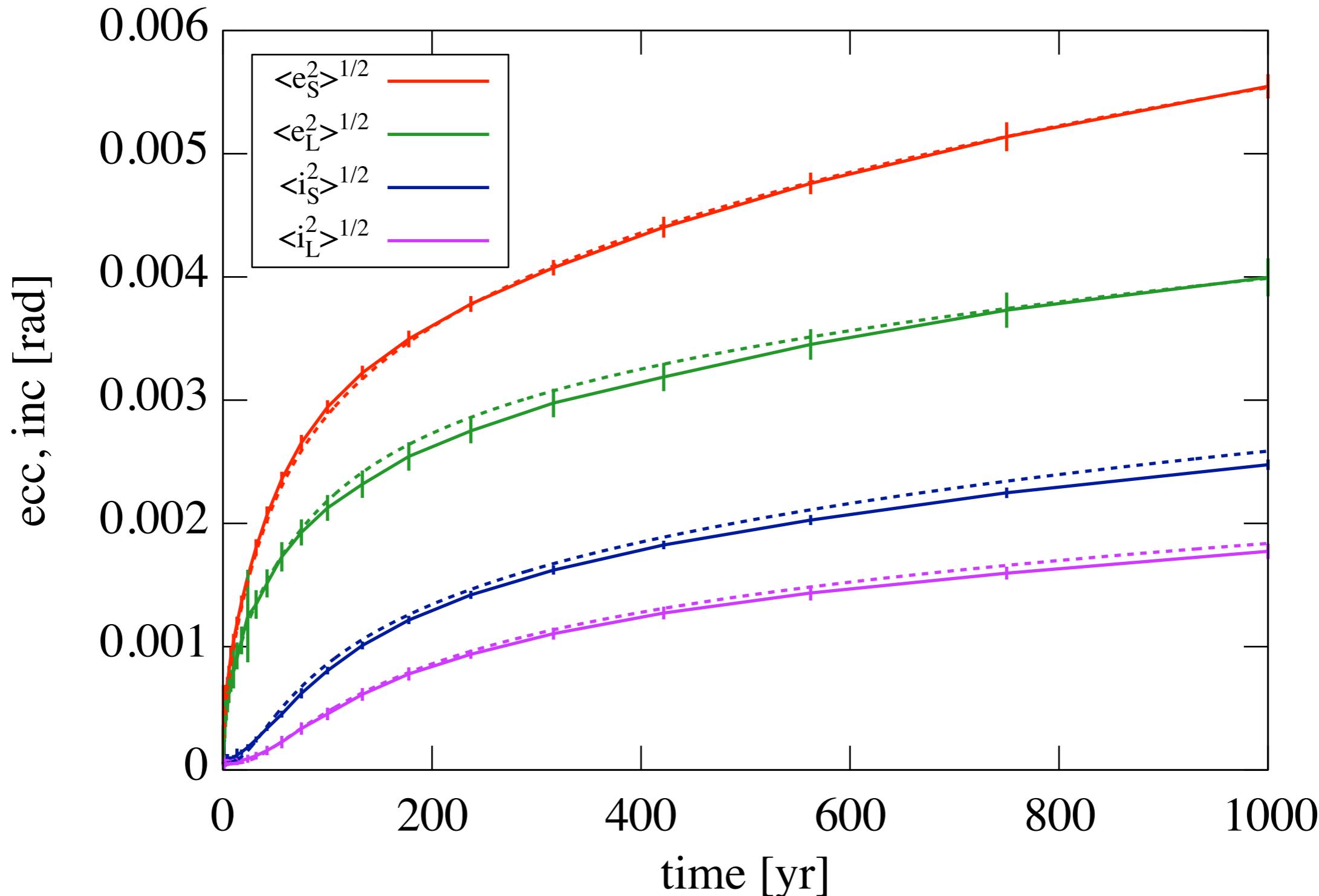


約√8倍誤差が小さい

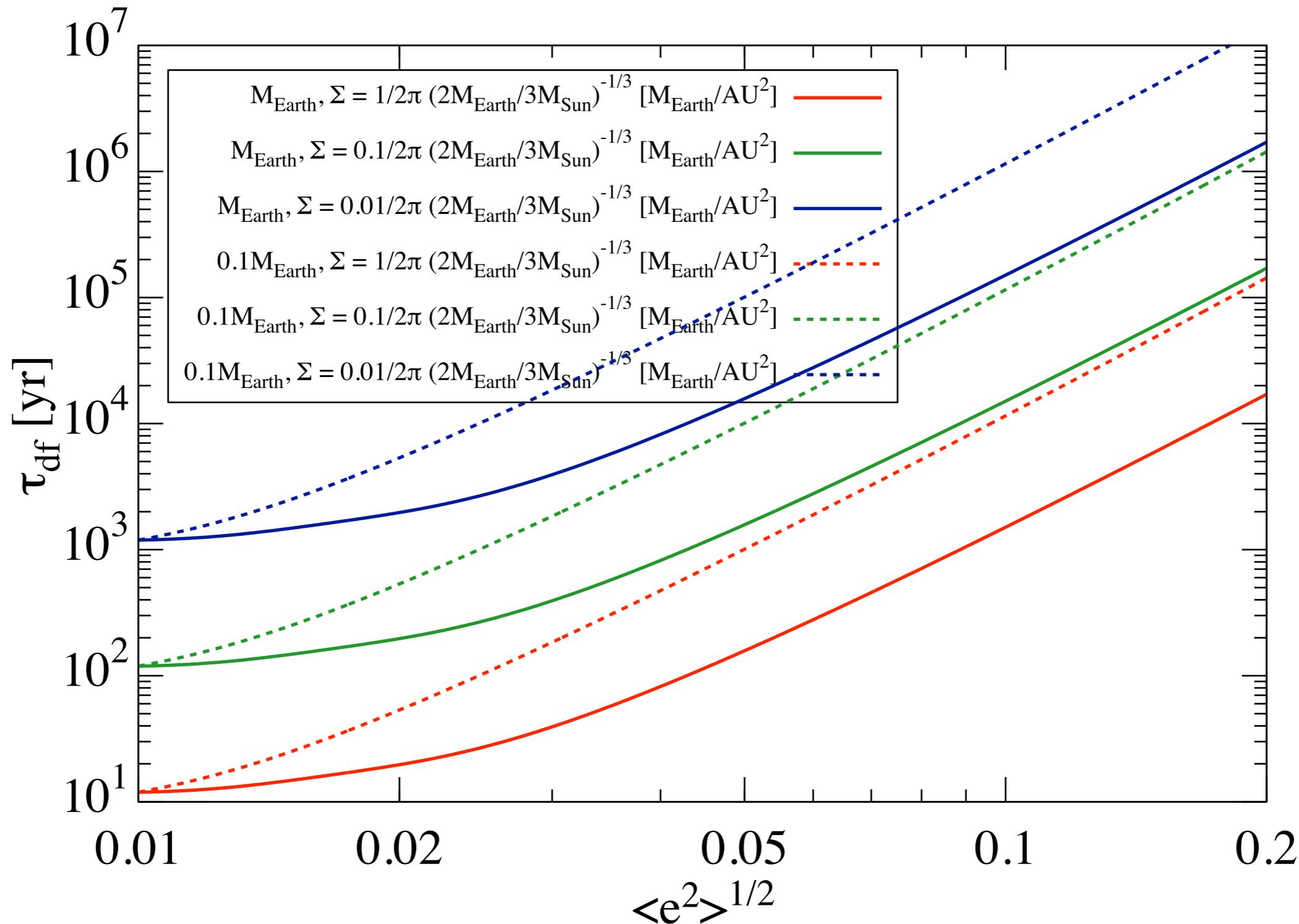
# N体計算のテスト



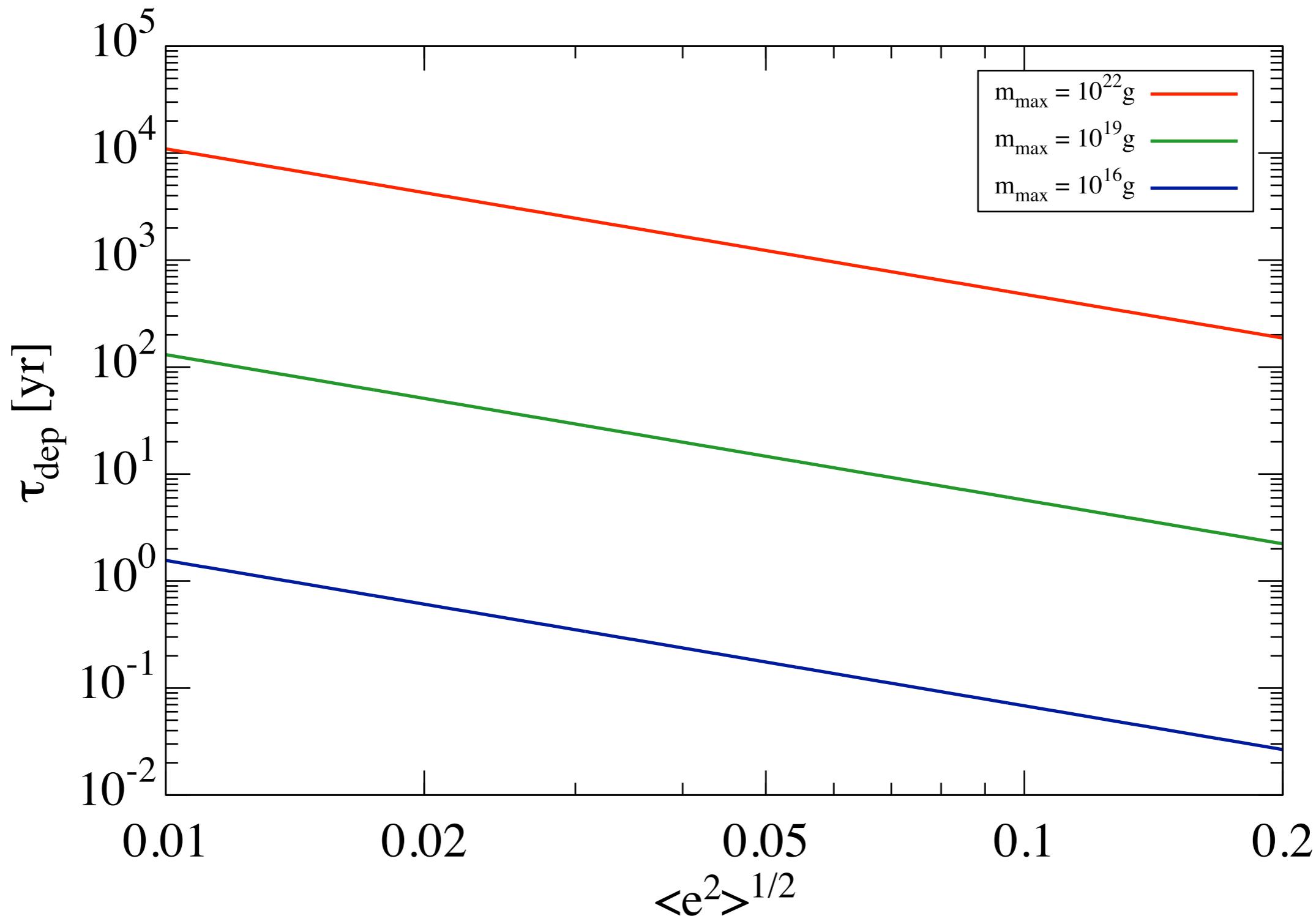
# N体計算のテスト



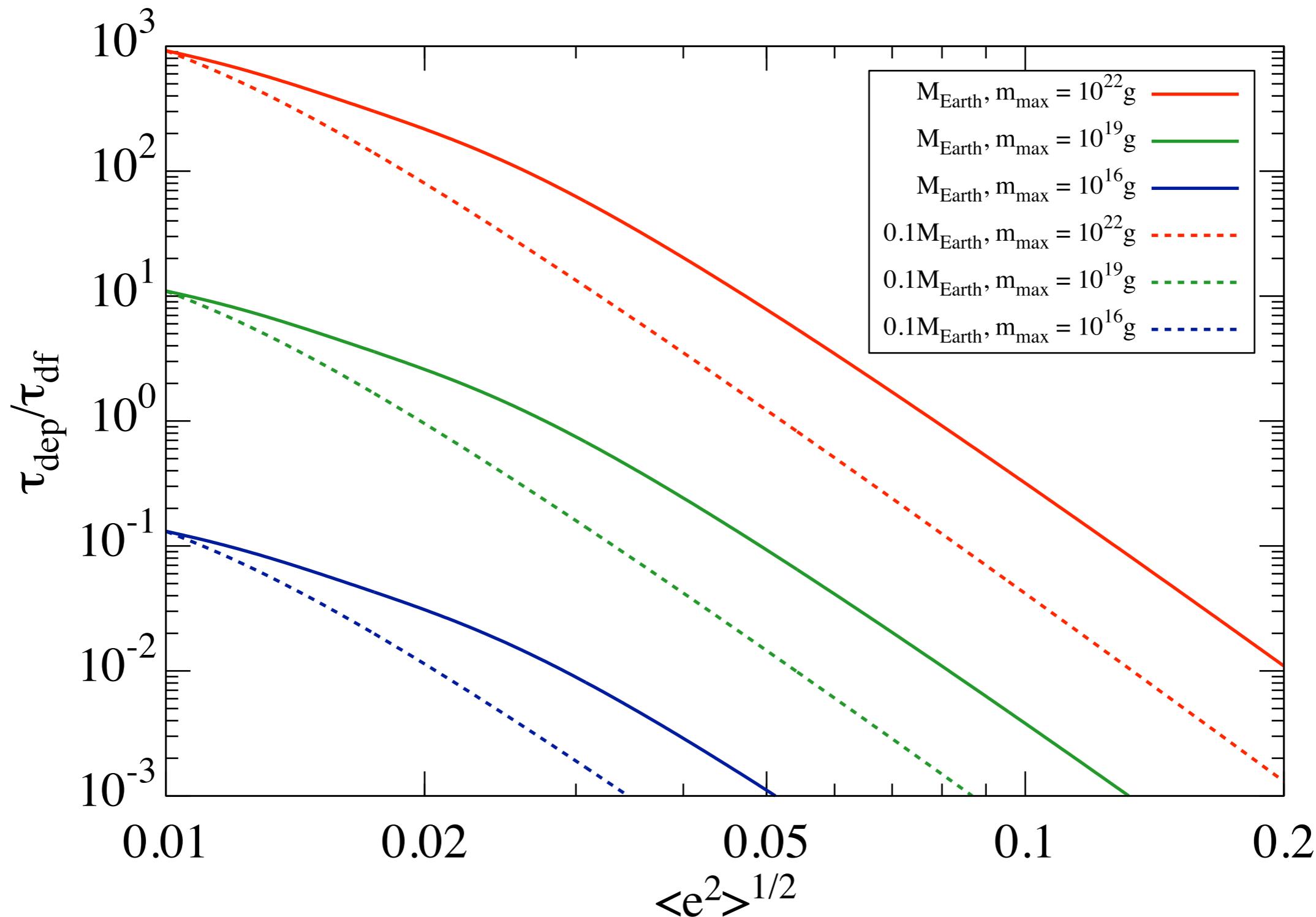
# 力学的摩擦のタイムスケール



# 破壊のタイムスケール



# タイムスケールの比較



# 巨大衝突ステージの先行研究

## 1. Chambers & Wetherill, 1998, Icarus, 136, 304

- ・ N体シミュレーション & 衝突・合体
- ・ ガス円盤無し、破壊無し、原始惑星から惑星まで

## 2. Morishima et al., 2010, Icarus, 207, 517

- ・ N体シミュレーション & 衝突・合体
- ・ ガス円盤有り、破壊無し、微惑星から惑星まで

## 3. Kobayashi & Tanaka, 2010, Icarus, 206, 735

- ・ 統計的シミュレーション & 衝突・破壊
- ・ 微惑星間の衝突・破壊による面密度の減少

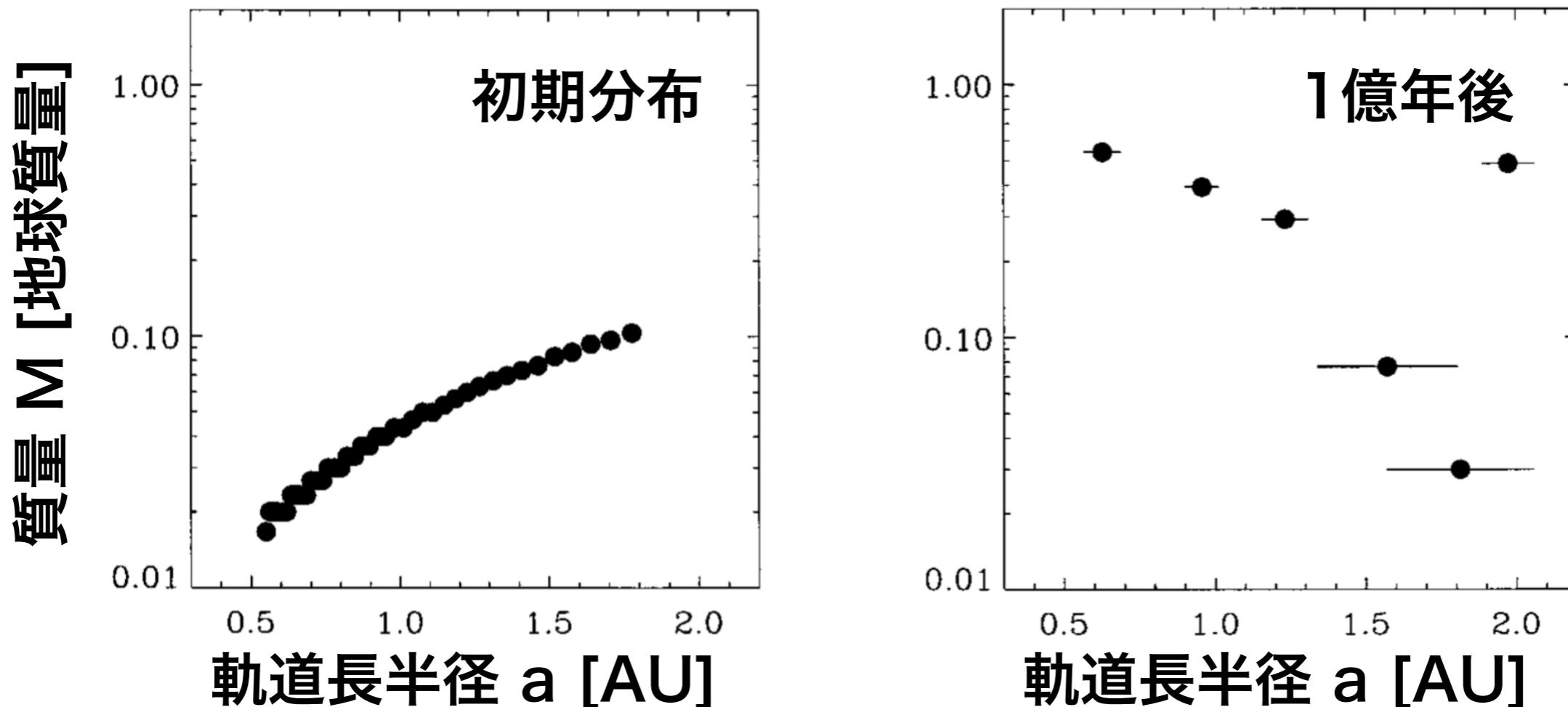
# 先行研究1：原始惑星のN体計算による衝突成長

Chambers & Wetherill (1998)

## 初期条件

固体面密度 : 6 [g/cm<sup>2</sup>] @1AU, 軌道長半径に反比例

原始惑星の間隔 : 相互ヒル半径の7倍

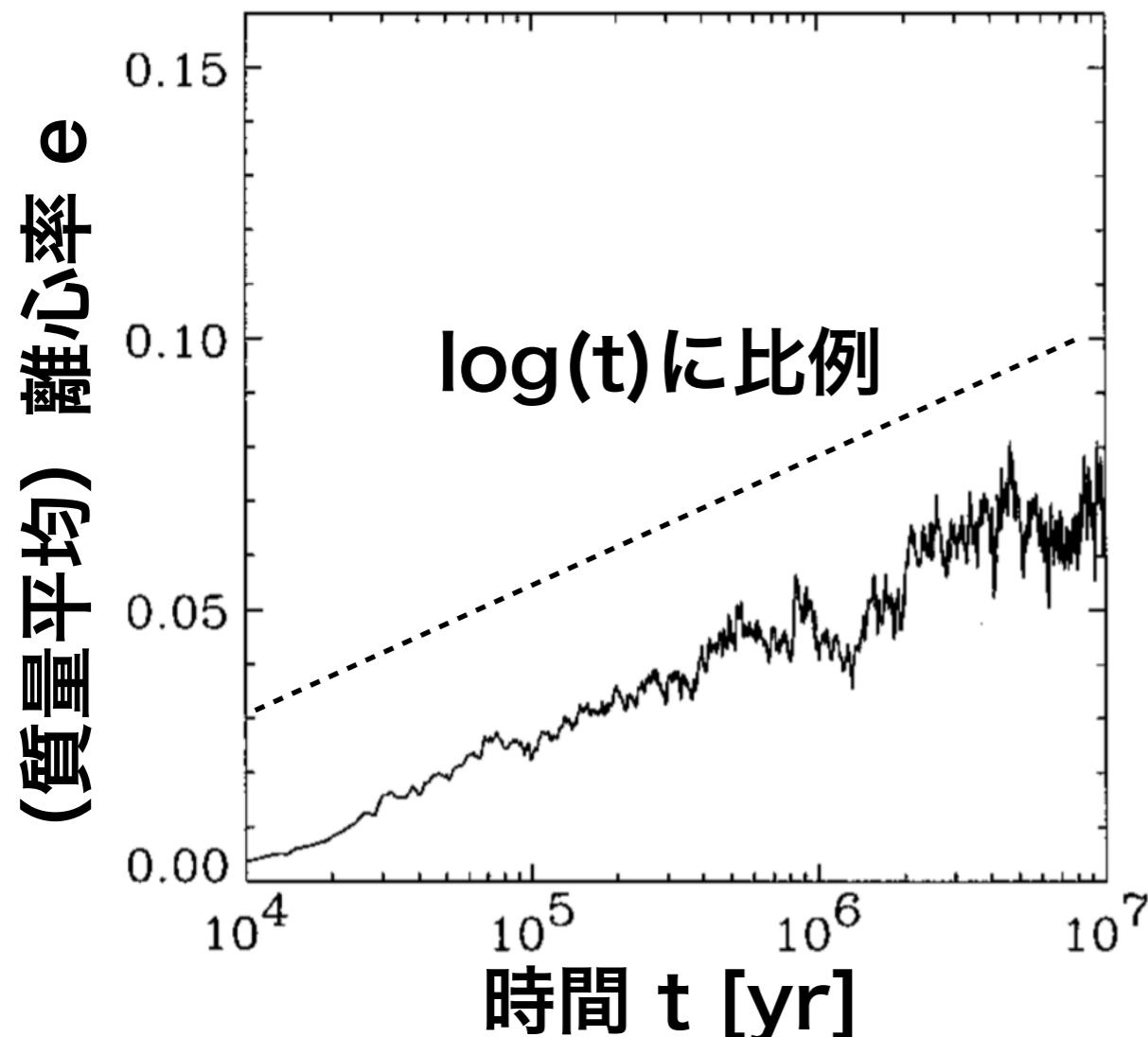


1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

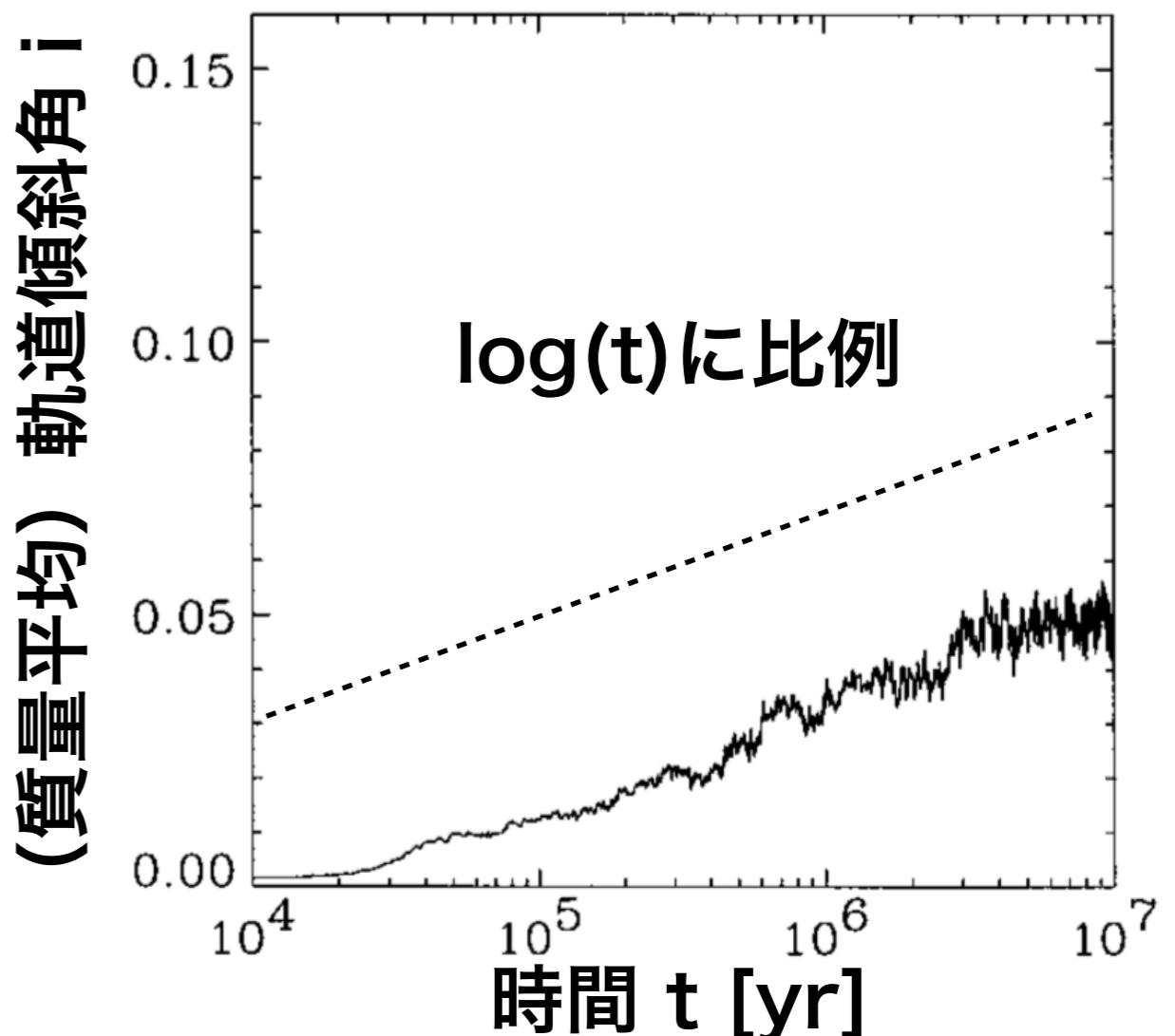
(e.g., Agnor et al. 1999; Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

# 先行研究1の問題点：離心率上昇

Chambers & Wetherill (1998)



衝突に伴い離心率が上昇



1億年後の離心率 : ~ 0.1

>>

現在の地球の離心率 : 0.0167

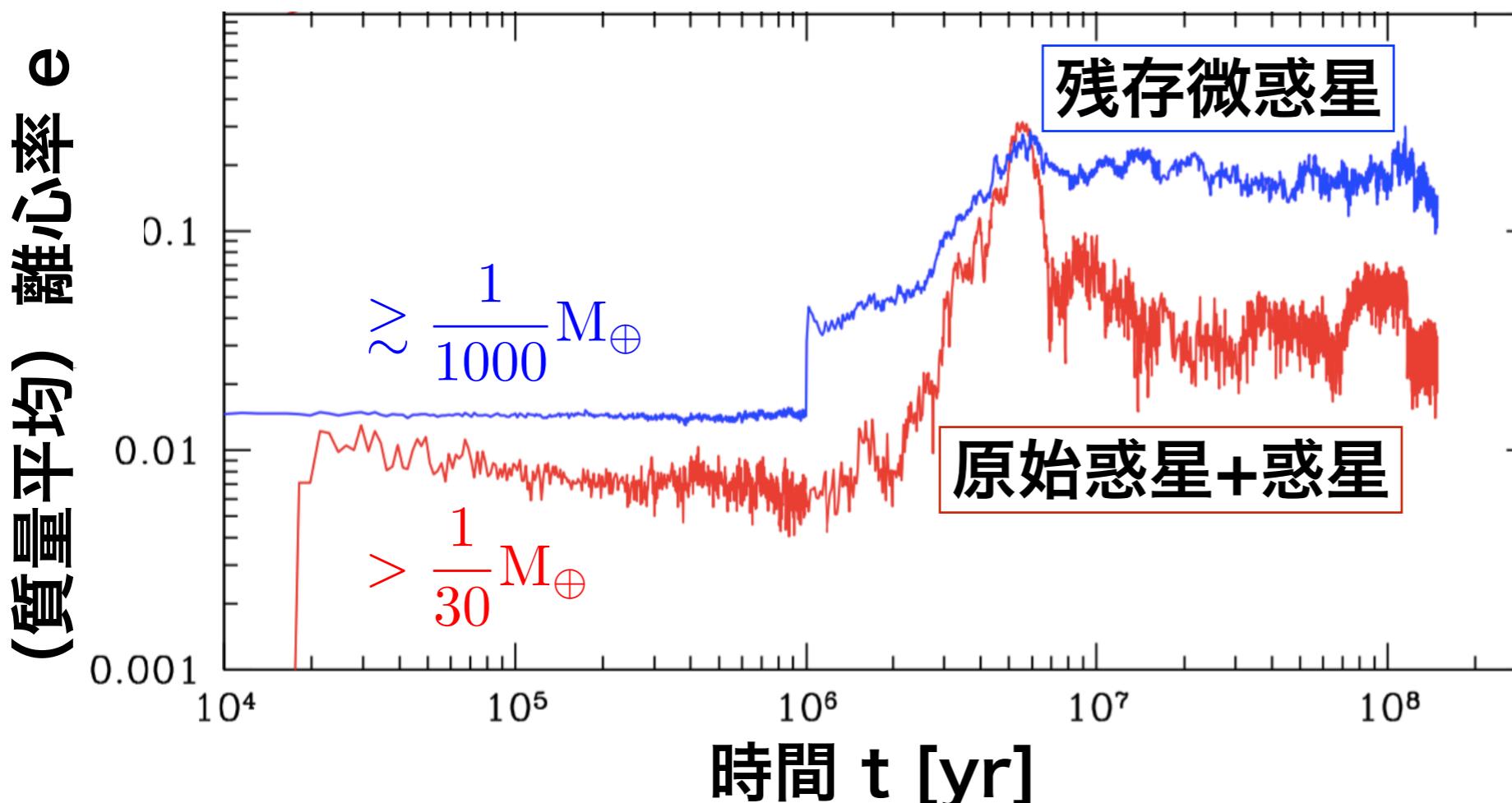
離心率が大きくなりすぎてしまう

# 先行研究2：微惑星円盤と原始惑星成長

Morishima et al. (2010)

微惑星 ( $\sim 10^{25}$  [g]) のN体計算

原始惑星形成・成長を一貫してシミュレーション

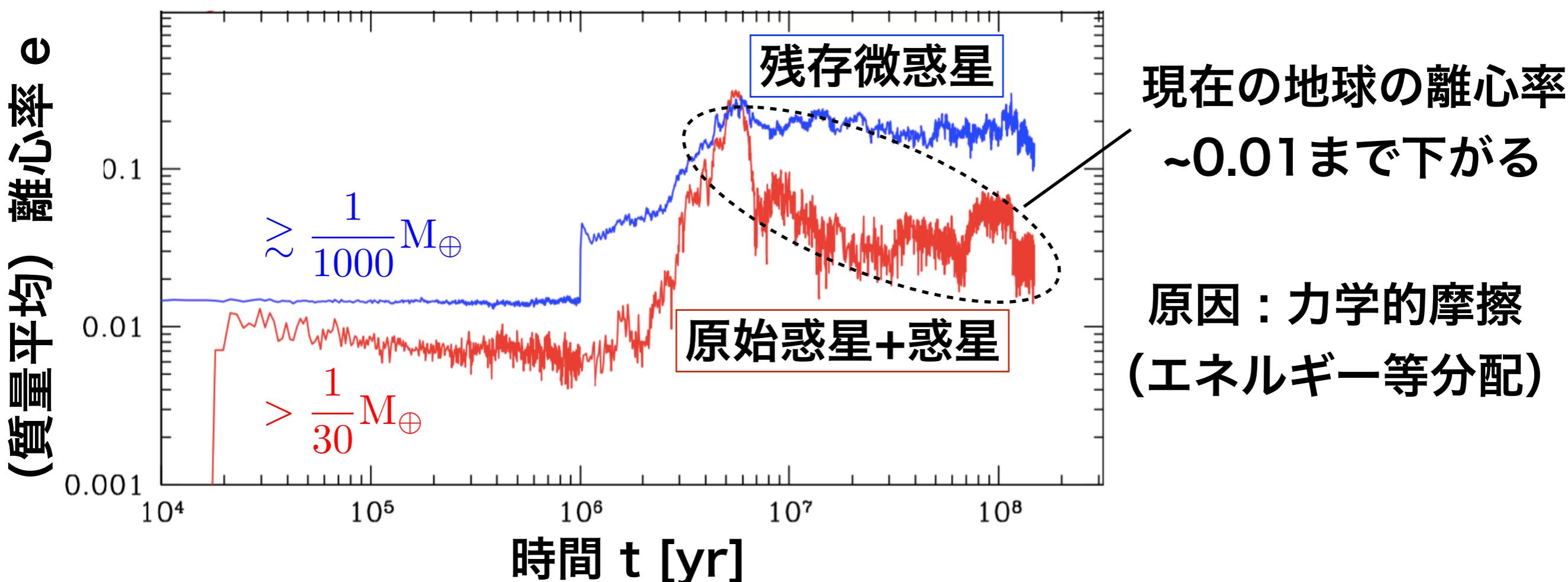


# 先行研究2：微惑星円盤と原始惑星成長

Morishima et al. (2010)

微惑星 ( $\sim 10^{25}$  [g]) のN体計算

原始惑星形成・成長を一貫してシミュレーション

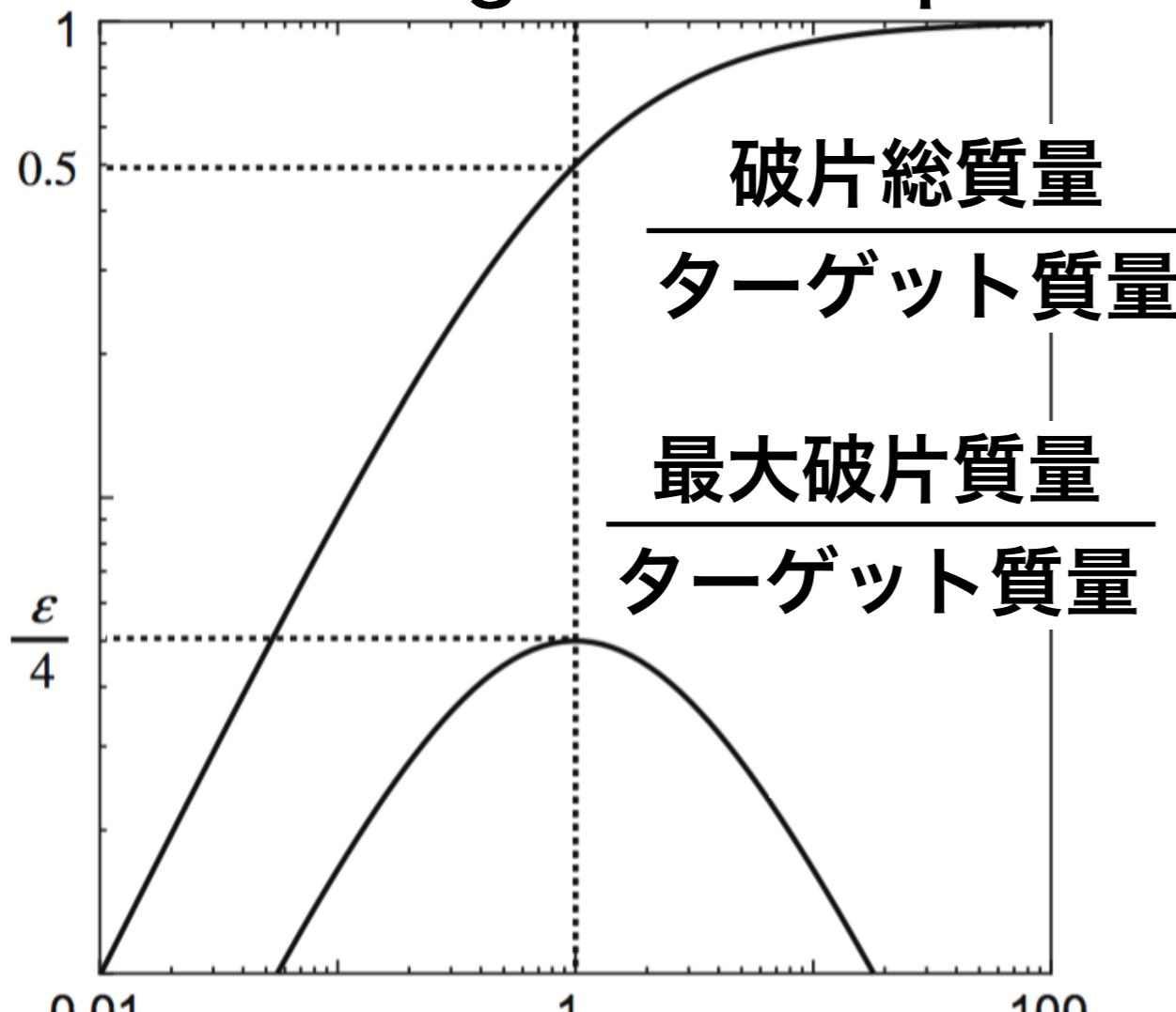


残存微惑星による力学的摩擦により原始惑星の離心率を下げる  
しかし離心率~0.1の微惑星衝突(~3km/s)により破壊が起きる

# 先行研究3：衝突・破壊のモデル

Kobayashi & Tanaka 2010

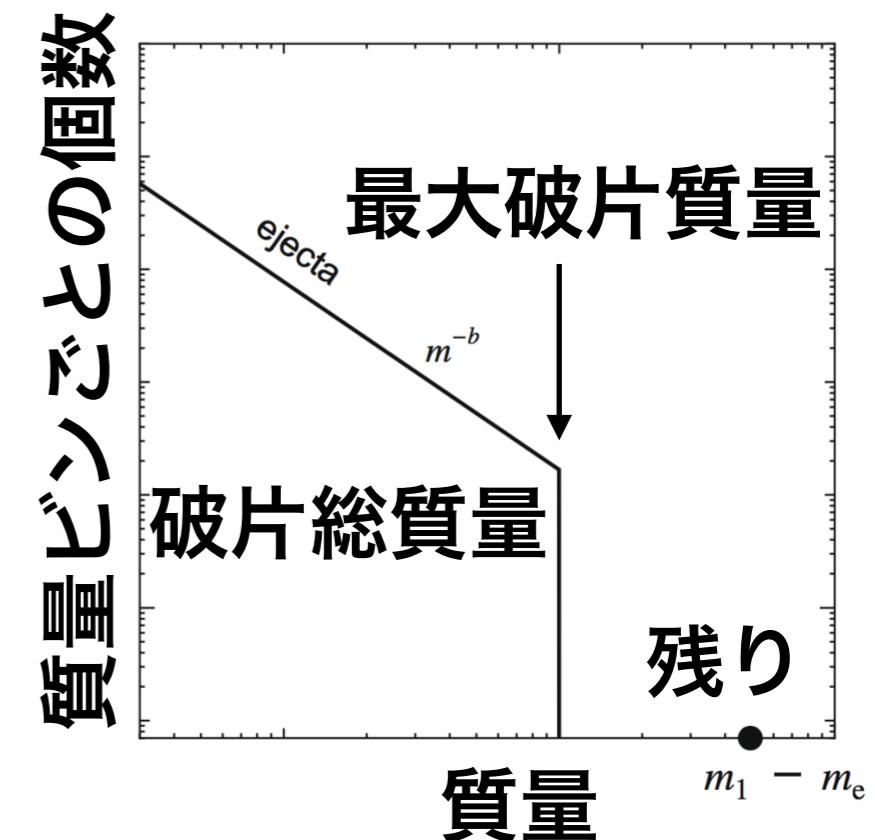
cratering catastrophic



$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} = \phi$$

$$\frac{\text{破片総質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\phi}{1 + \phi}$$

$$\frac{\text{最大破片質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\varepsilon\phi}{(1 + \phi)^2}$$



$\phi=1$  のときターゲット  
質量の半分が吹き飛ぶ

$Q_D^*$  の定義

# 破壊を起こす衝突速度

$$\frac{v_{\text{esc}}^2}{Q_{\text{D}}^*} = 1.23 \times 10^{-2} \left( \frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.213} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.213}$$

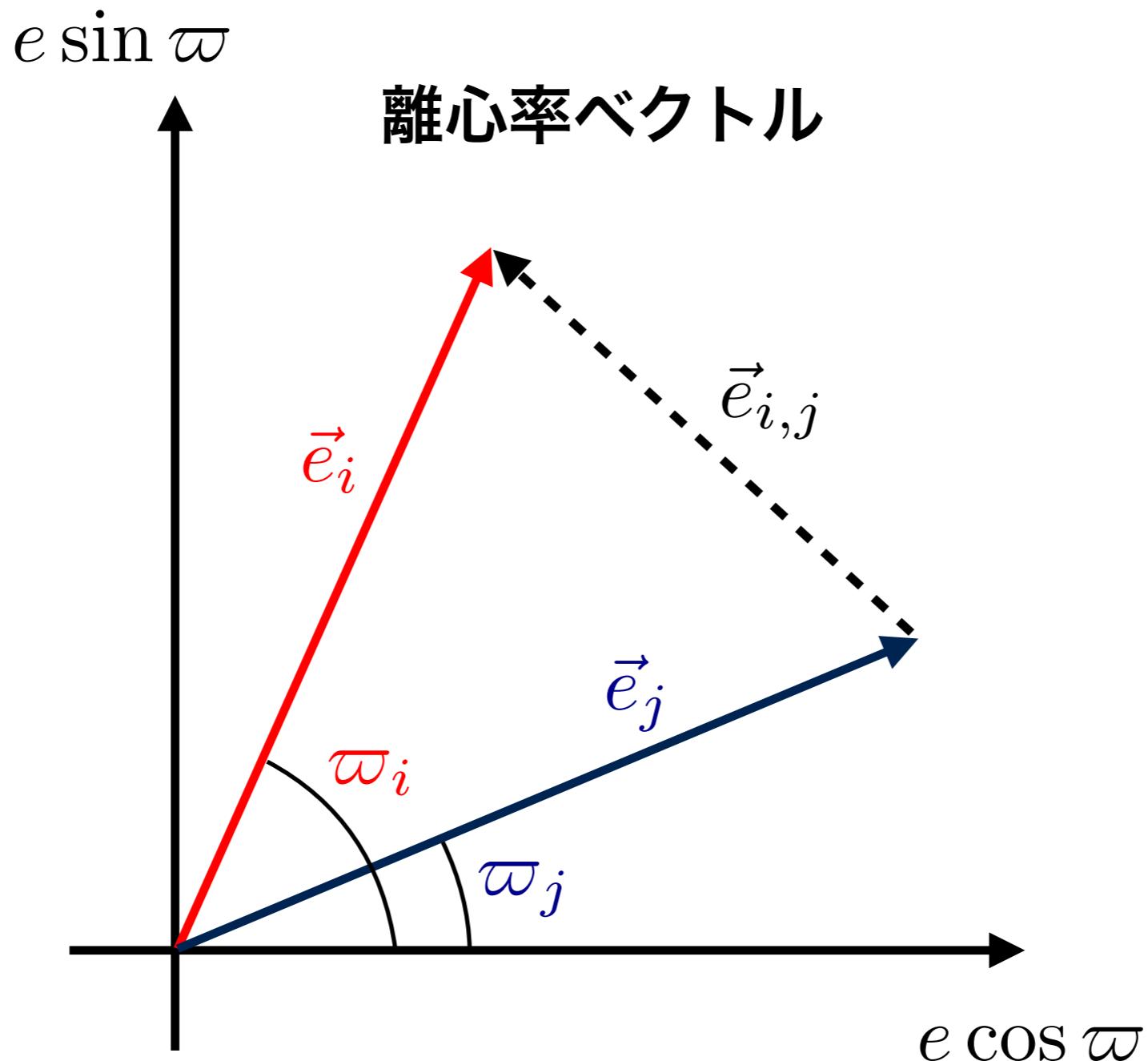
脱出速度の約10倍で衝突すれば破壊が起こる

$$\frac{(e^2 + i^2)v_{\text{K}}^2}{Q_{\text{D}}^*} = 948 \left( \frac{e}{0.1} \right)^2 \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left( \frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.547} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453} \left( \frac{M_*}{\text{M}_{\odot}} \right)$$

離心率が0.1のときには破壊に必要なエネルギーの1000倍で衝突する

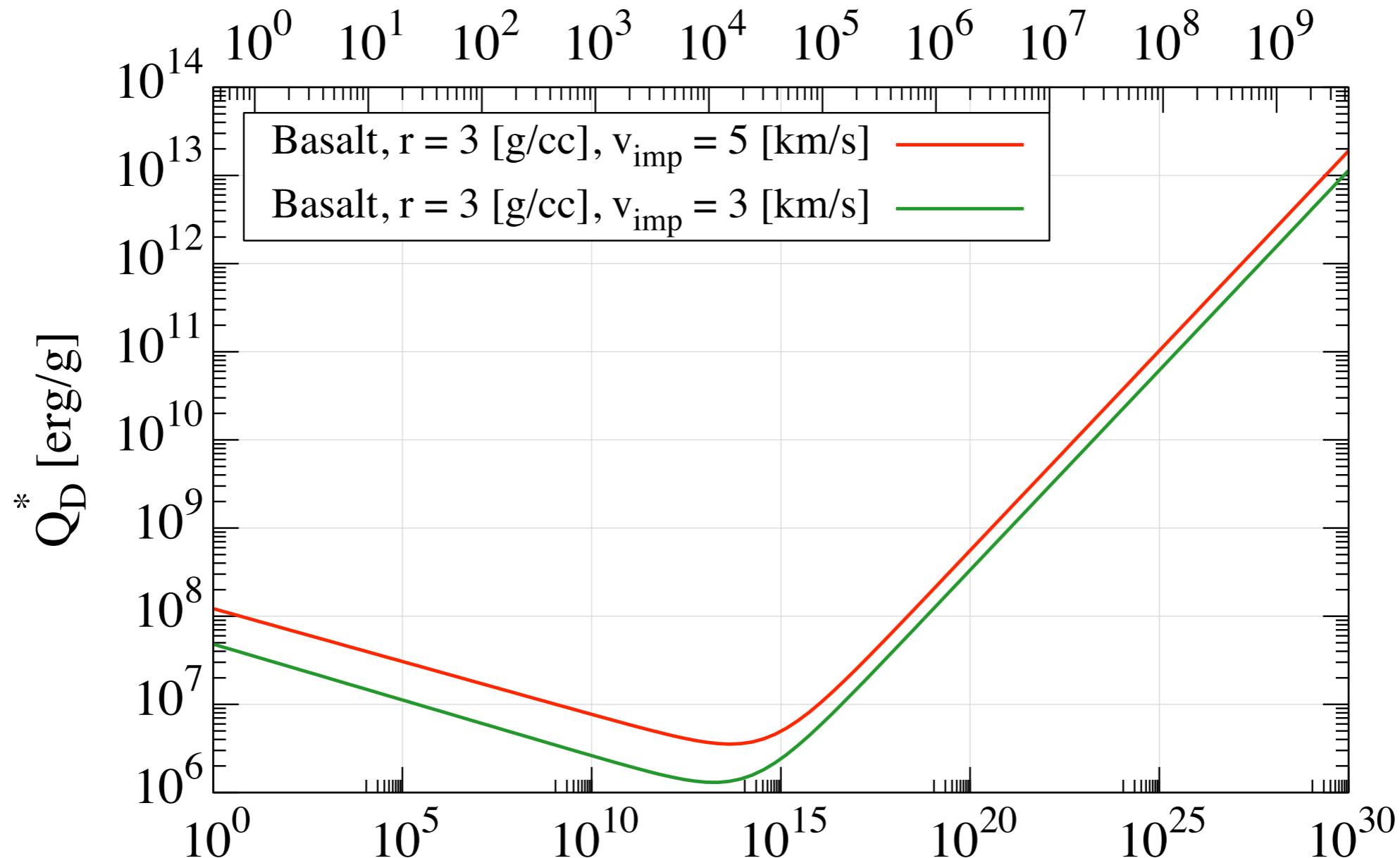
# 相対離心率

$$e_{i,j}^2 = e_i^2 + e_j^2 - 2e_i e_j \cos(\varpi_i - \varpi_j) \quad \varpi : \text{近点経度}$$



Benz &amp; Asphaug 1999

radius [cm]



Basalt, 3km/s

$$Q_D^* \simeq 1.16 \times 10^8 \left( \frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{0.547} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.453} \text{erg/g}$$

# N体計算の手法

4次のエルミート法

Makino & Aarseth 1992

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

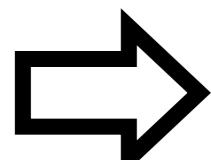
step3：加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算（4次精度）

&

独立タイムステップ

粒子は別々の時間とタイムステップを持つ

加速度 大 → タイムステップ 小



近接遭遇を精度よく効率的に解くことができる

物理半径を用いた衝突合体（惑星への集積）も取り扱っている

# 離心率の平均値の変化率（解析解）

質量 $M_1$ の粒子集団1と質量 $M_2$ の粒子集団2の重力相互作用を考える

(Ida 1990; Ohtsuki et al. 1993; Stewart & Ida 2000)

$$\frac{de_1^2}{dt} \simeq \left( \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \frac{e^2}{t_{g,12}} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

## Viscous Stirring

ランダム速度上昇の効果

ヤコビエネルギーの保存より  
 $|a_2 - a_1|$  が増えると  $e, i$  が増える

## Dynamical Friction

エネルギー等分配の効果

粒子あたりのエネルギー  
 $\propto M_j e_j^2$  を一定にする働き

$$t_{g,12} = \left( \frac{1}{e^2} \frac{de^2}{dt} \right)^{-1}$$

：相対離心率が変化する  
典型的なタイムスケール

$$e^2 = e_1^2 + e_2^2$$

：相対離心率の平均

$de_j^2/dt$ を積分すれば  
解析解が求まる！

# 力学的摩擦の特徴

力学的摩擦の項  $\left( \frac{d e_1^2}{dt} \right)_{\text{df}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$

$M_1$ と $M_2$ それぞれにエネルギーが等分配されるとき

$$M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2 \approx 0 \quad \rightarrow \quad e_{1,\text{eq}} \approx \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} e_{2,\text{eq}}$$

最終的な平衡状態の離心率は $M_1$ と $M_2$ の質量比、つまりN体計算では粒子数に大きく依存する

一方、力学的摩擦のタイムスケールは、 $M_1 \gg M_2$ かつ  $e_1 \sim e_2$  とすると

$$\tau_{\text{df}} \simeq 16 \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{3/2} \left( \frac{\Delta a/a}{0.126} \right) \left( \frac{e}{0.01} \right)^4 \left( \frac{\ln \Lambda}{5} \right)^{-1} \left( \frac{M_1}{M_\oplus} \right)^{-1} \left( \frac{M_{\text{tot},2}}{10M_\oplus} \right)^{-1} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right)^{3/2} \text{yr}$$

それぞれの $M_2$ に依存せず、集団2の総質量 $M_{\text{tot},2}$ が重要

# 軌道長半径の時間進化

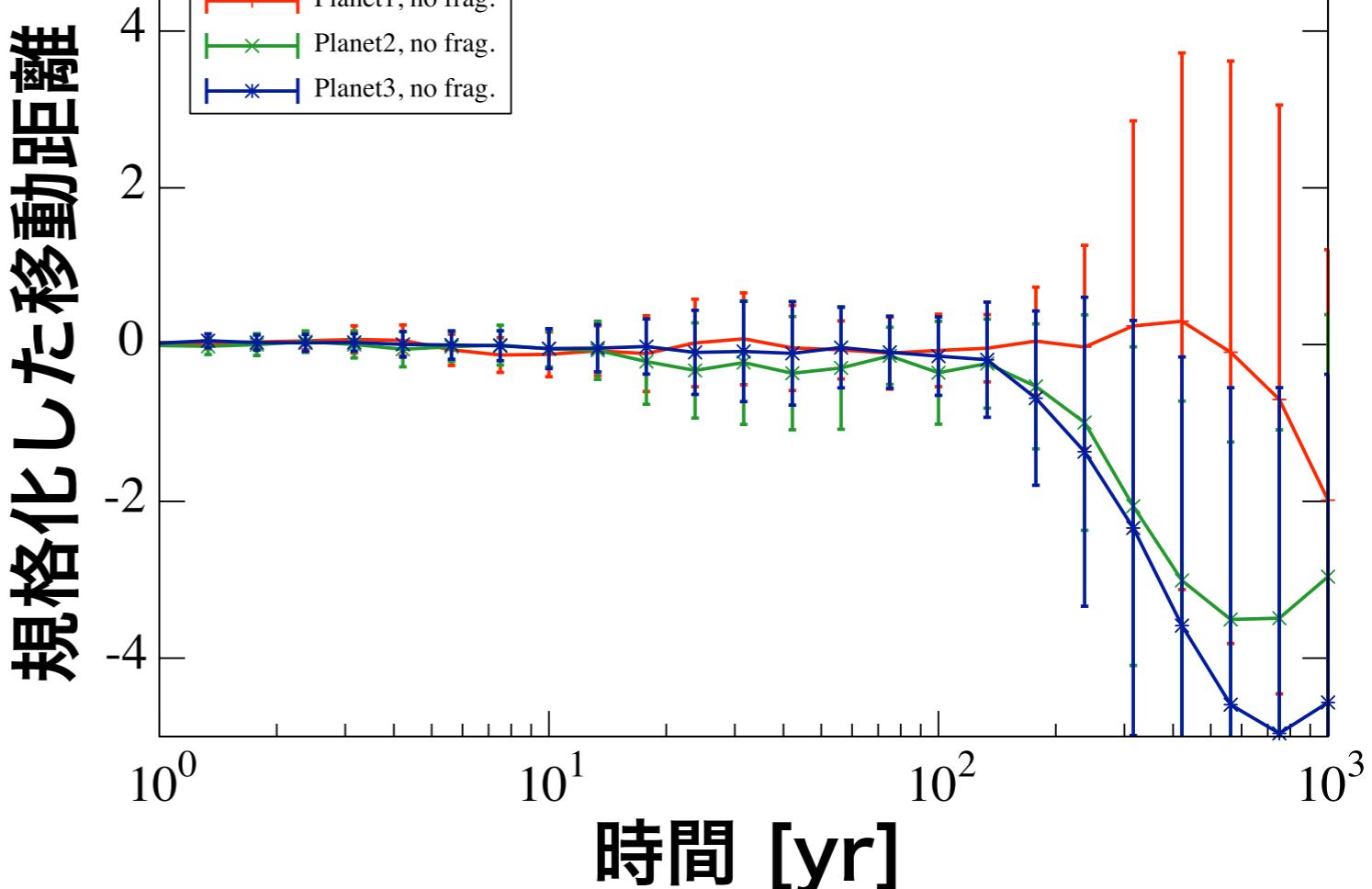
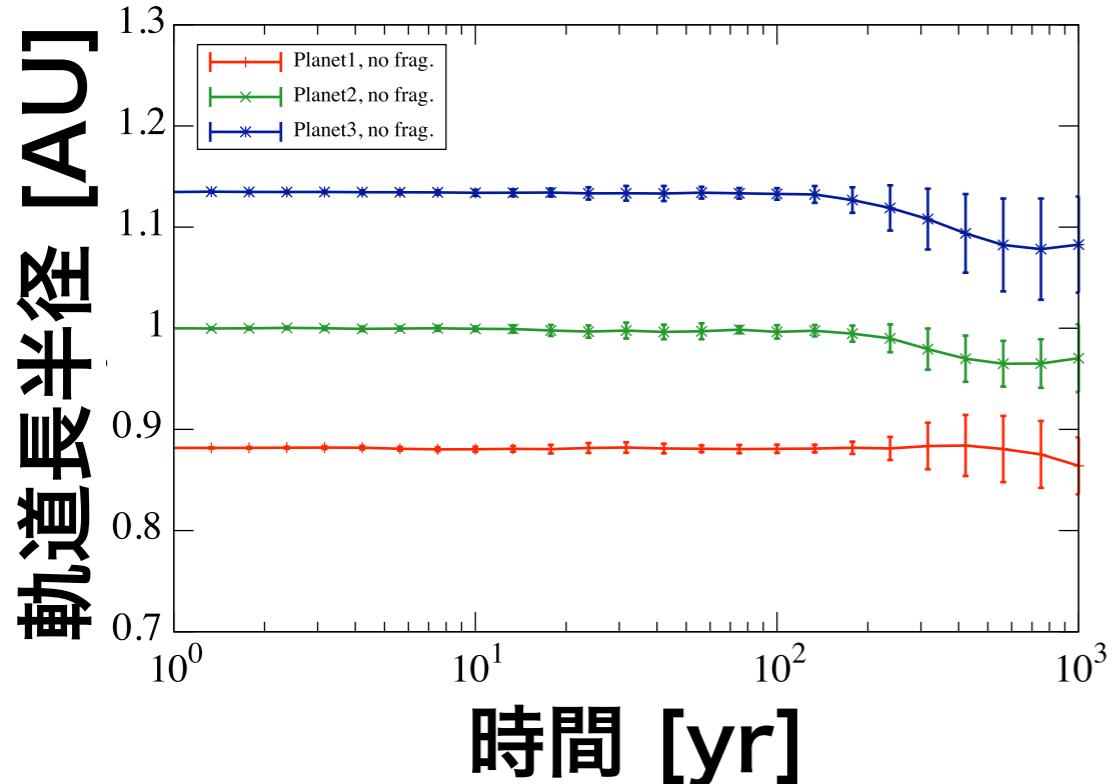
赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.01$$



点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差  $\sigma$

真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

真ん中の惑星の離心率に注目する

# 軌道長半径の時間進化

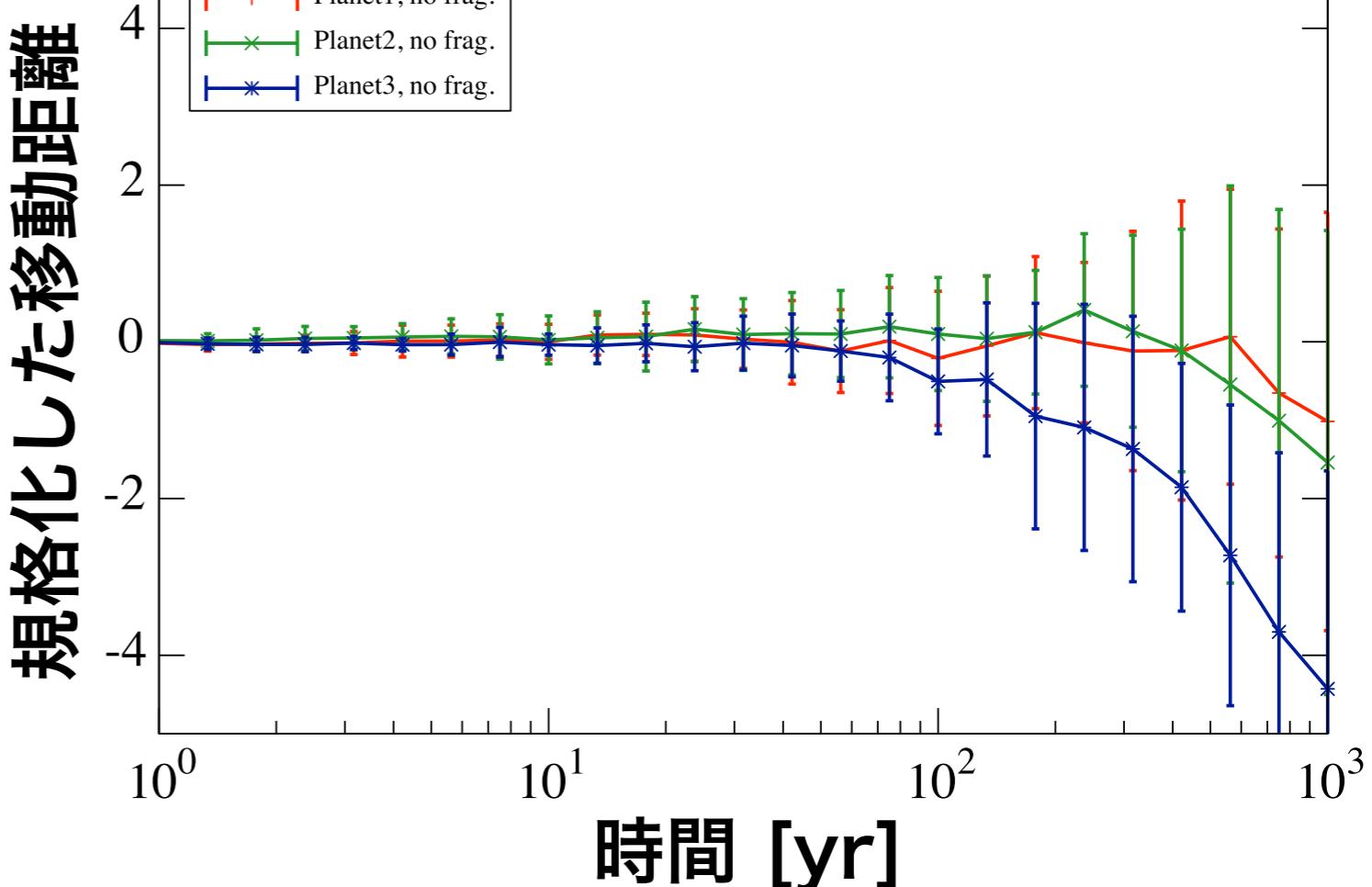
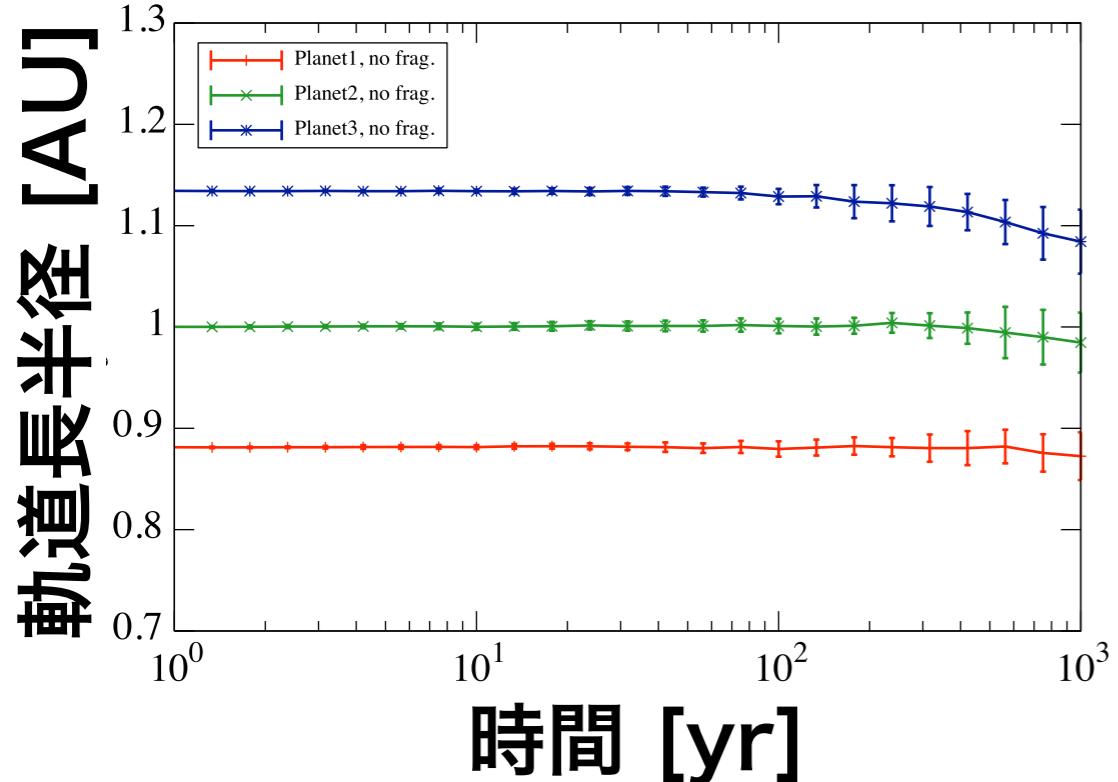
赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$



点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差  $\sigma$

真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

真ん中の惑星の離心率に注目する

# 軌道長半径の時間進化

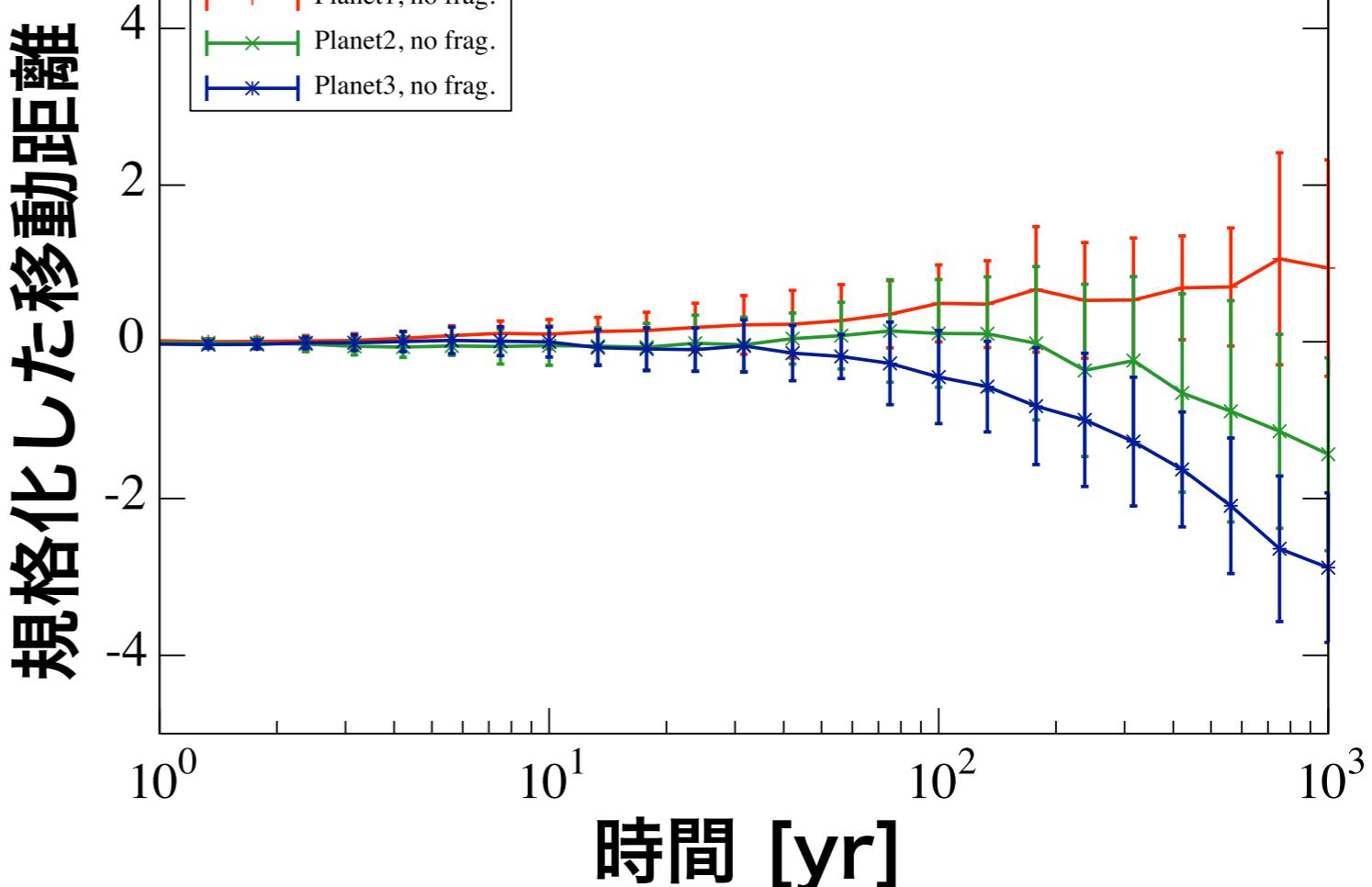
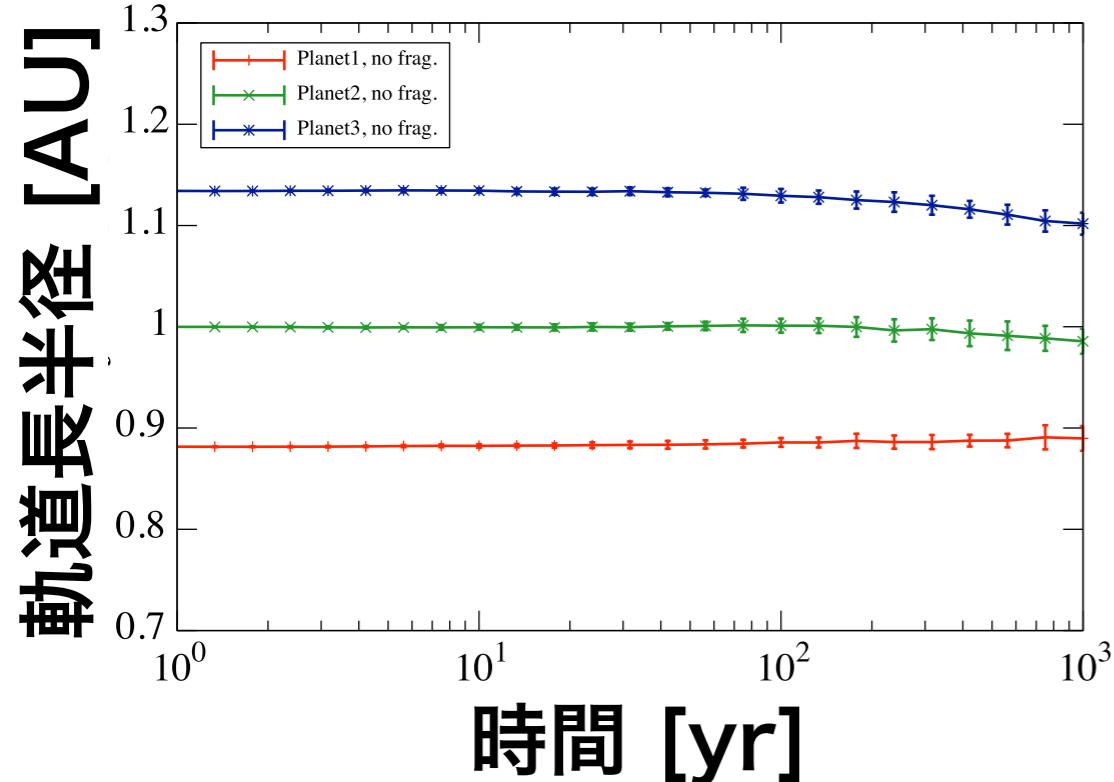
赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$$



点：平均値

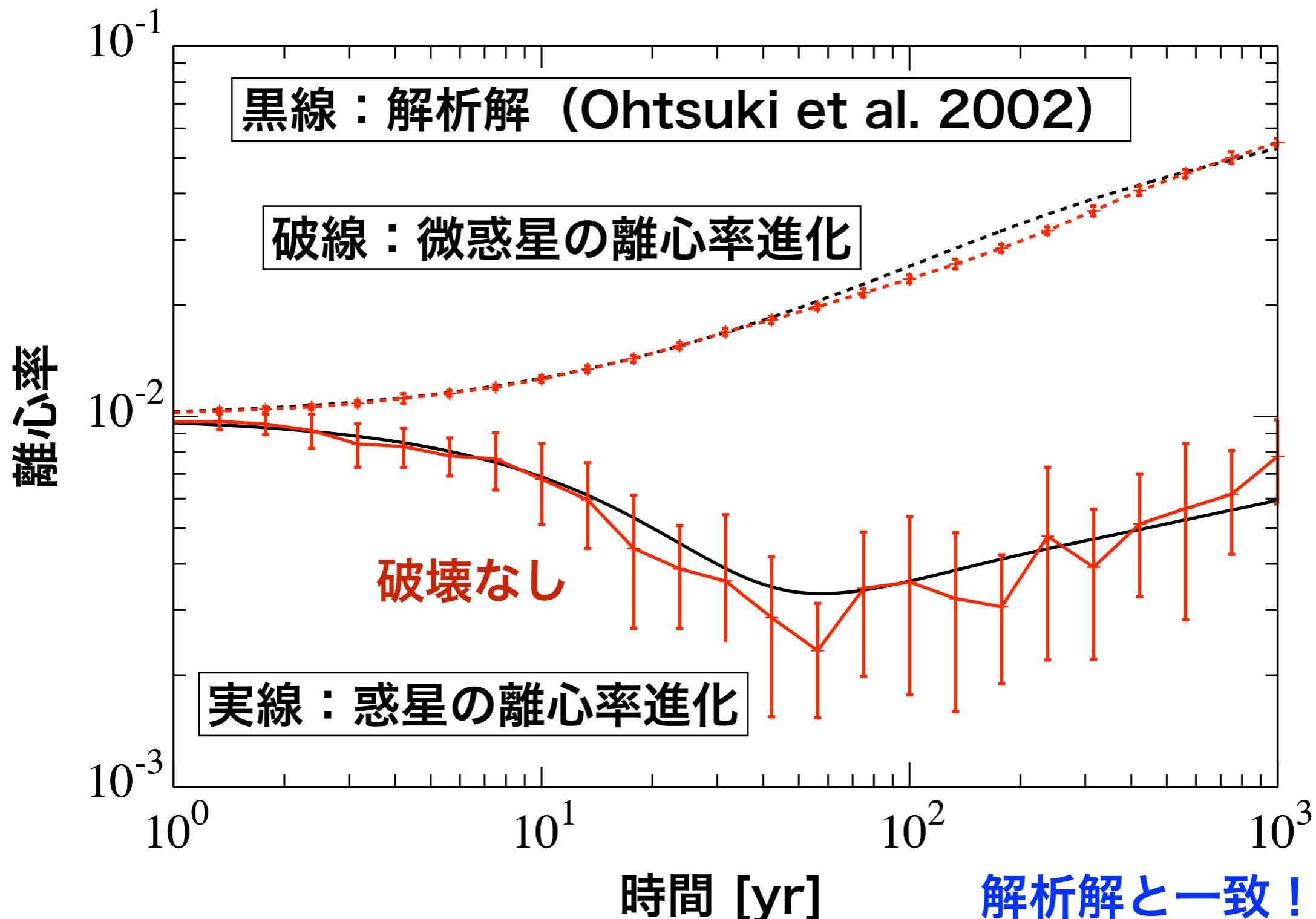
エラーバー：13runの標準偏差  $\sigma$

真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

真ん中の惑星の離心率に注目する

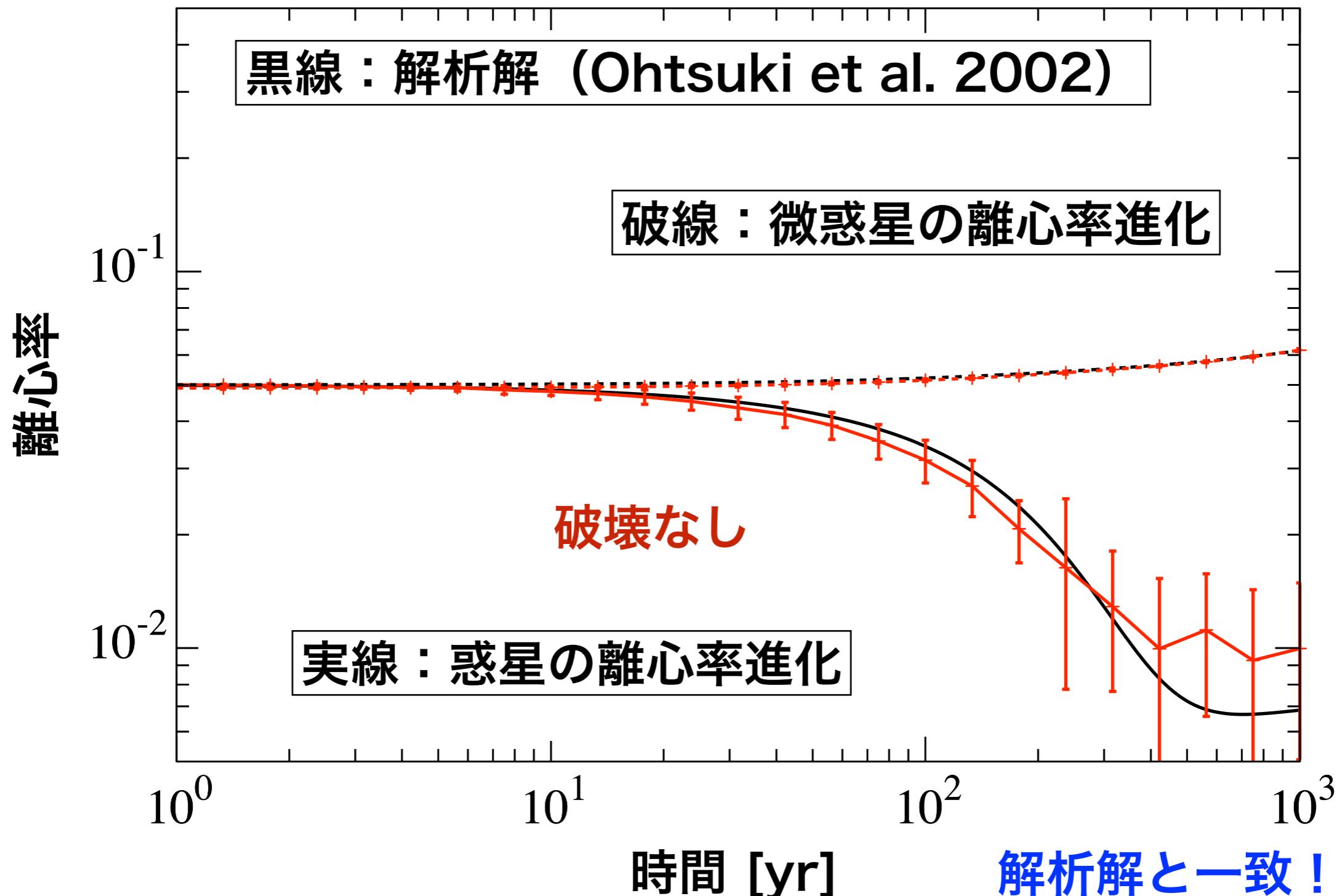
# 破壊がない場合の離心率進化

破壊なし、集積あり  $\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.01$



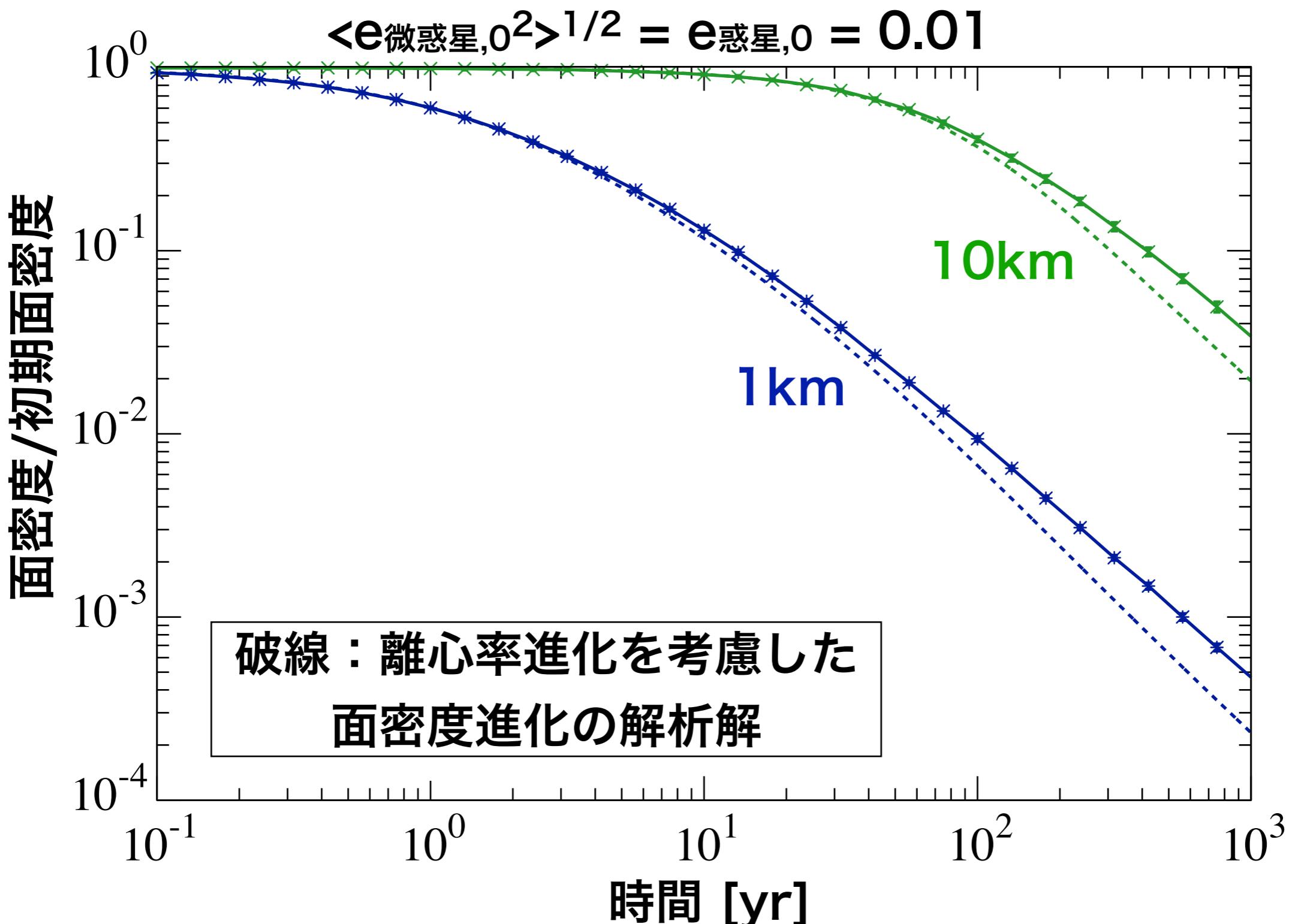
# 破壊がない場合の離心率進化

破壊なし、集積あり  $\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$



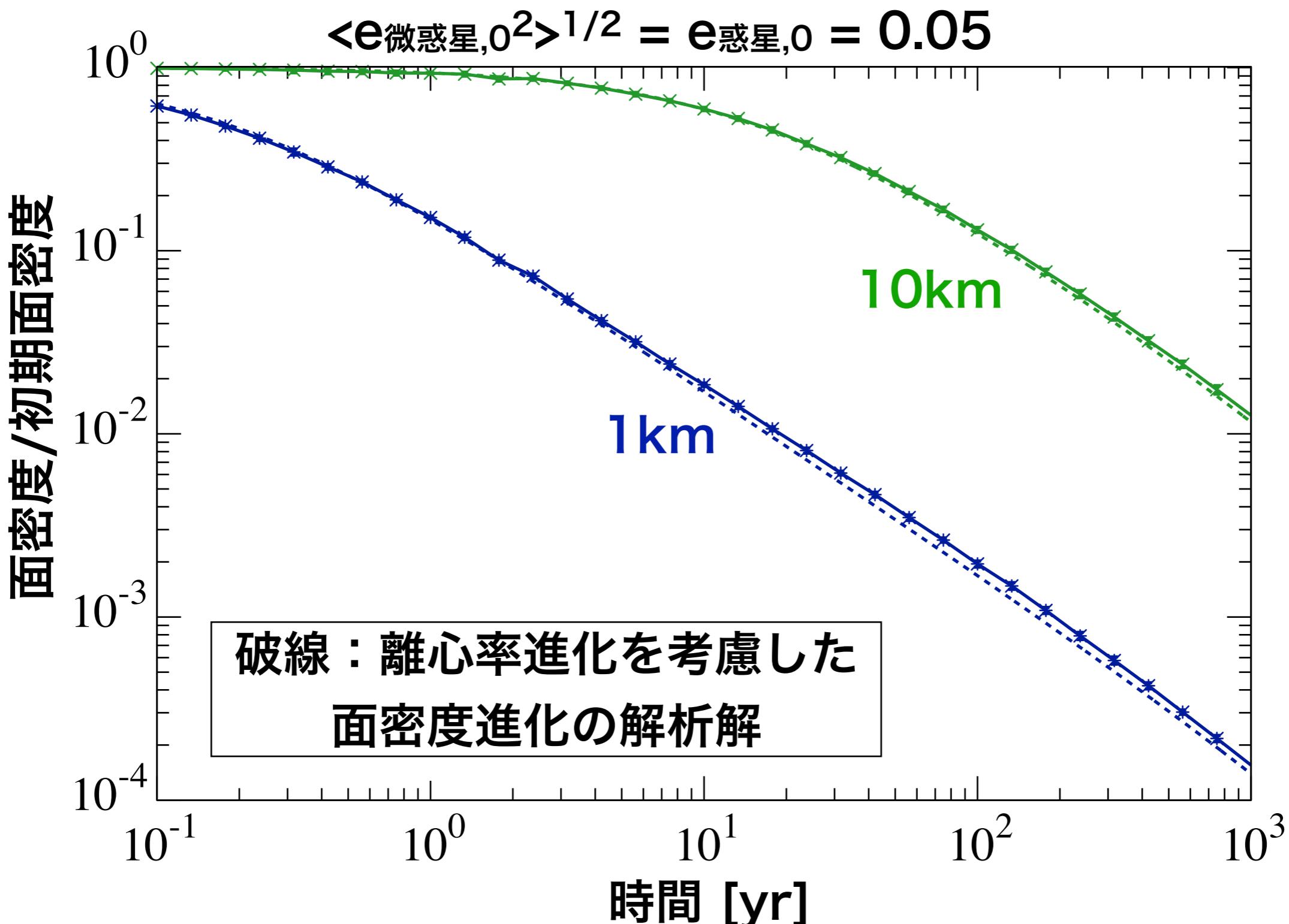
# 破壊による微惑星円盤の面密度進化

最大微惑星の質量  $m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km) と  $10^{19}g$ (~10km) に設定



# 破壊による微惑星円盤の面密度進化

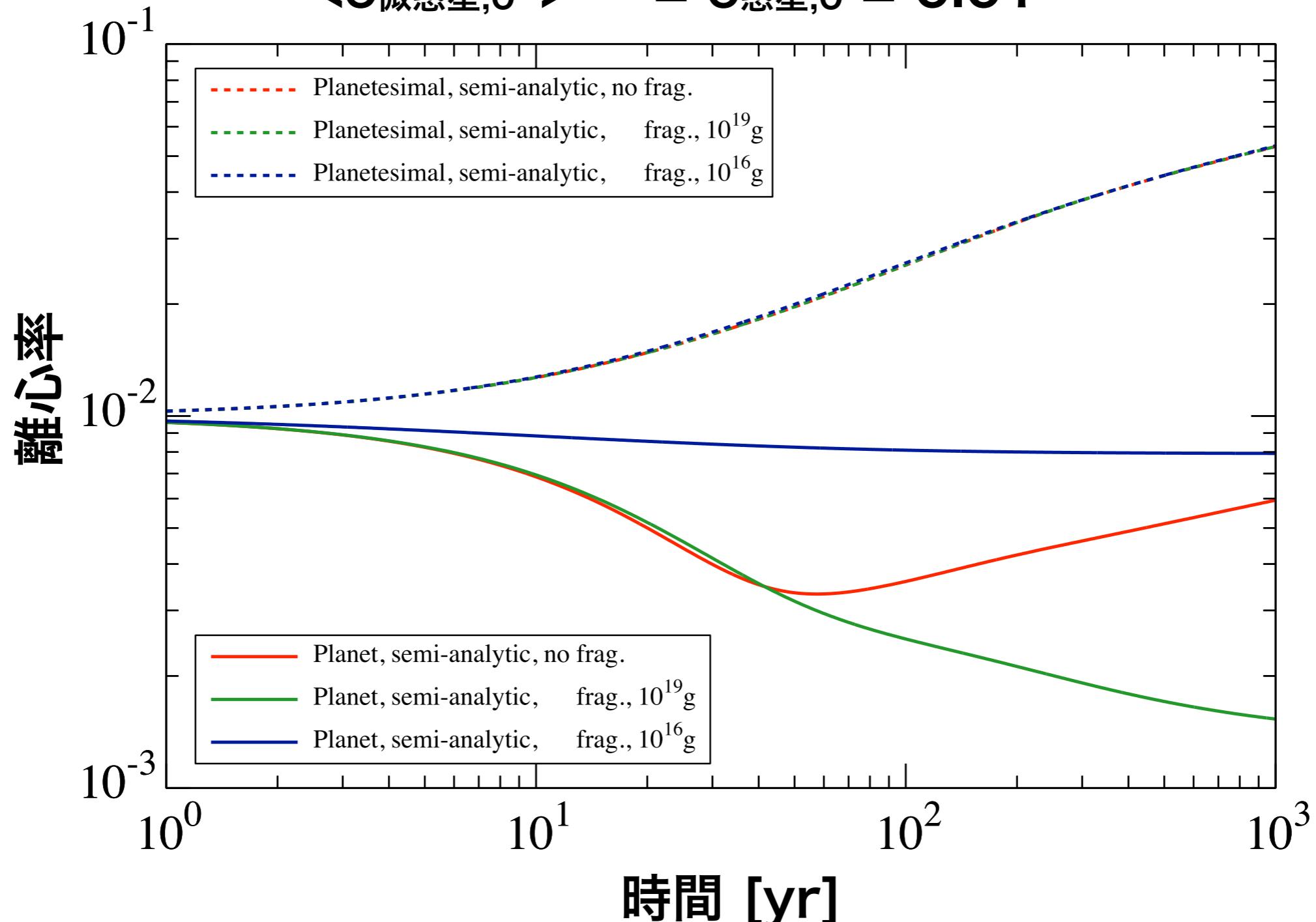
最大微惑星の質量  $m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km) と  $10^{19}g$ (~10km) に設定



# 破壊を考慮した時の離心率進化 解析解

$m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km) と  $10^{19}g$ (~10km) に設定

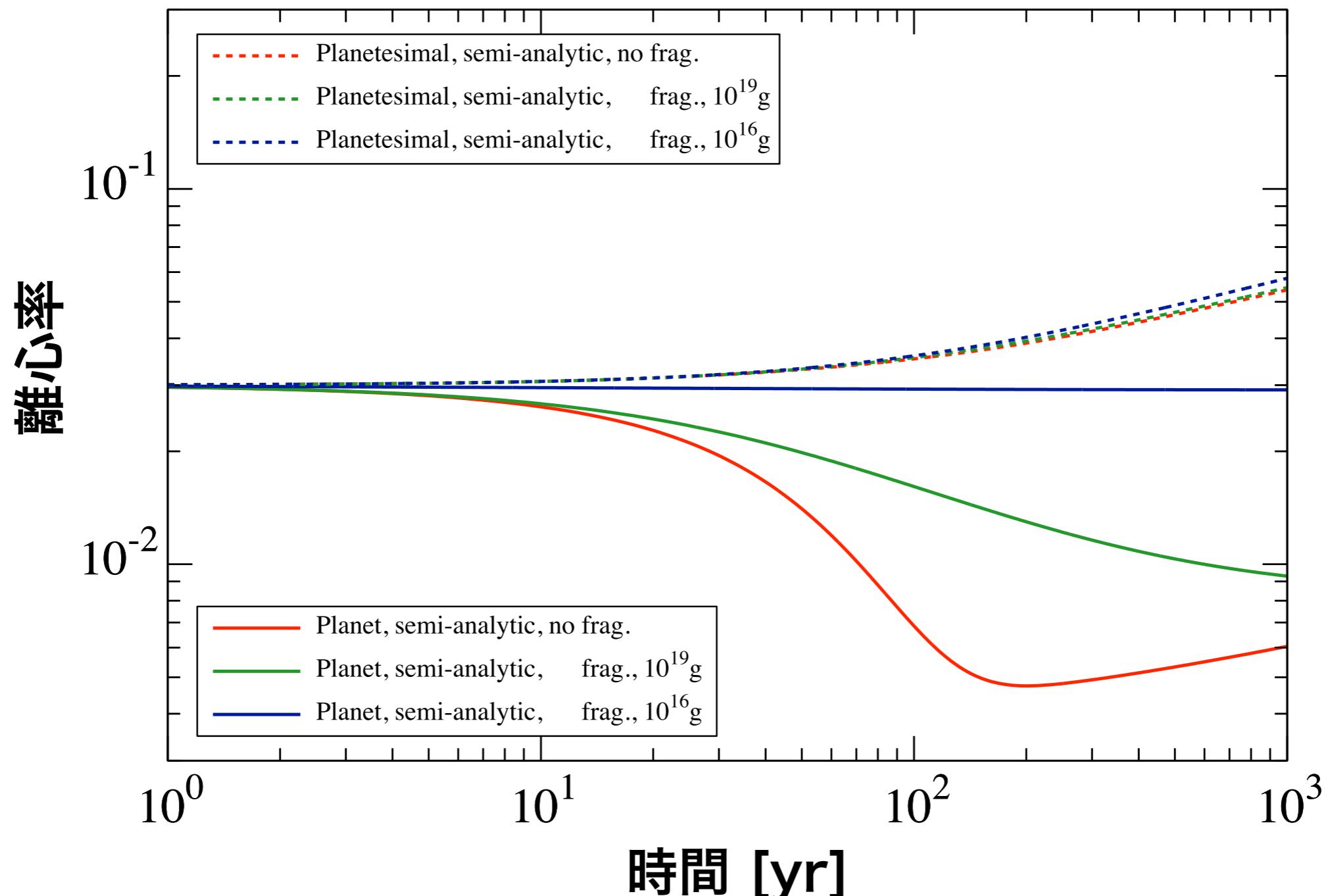
$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.01$$



# 破壊を考慮した時の離心率進化 解析解

$m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km) と  $10^{19}g$ (~10km) に設定

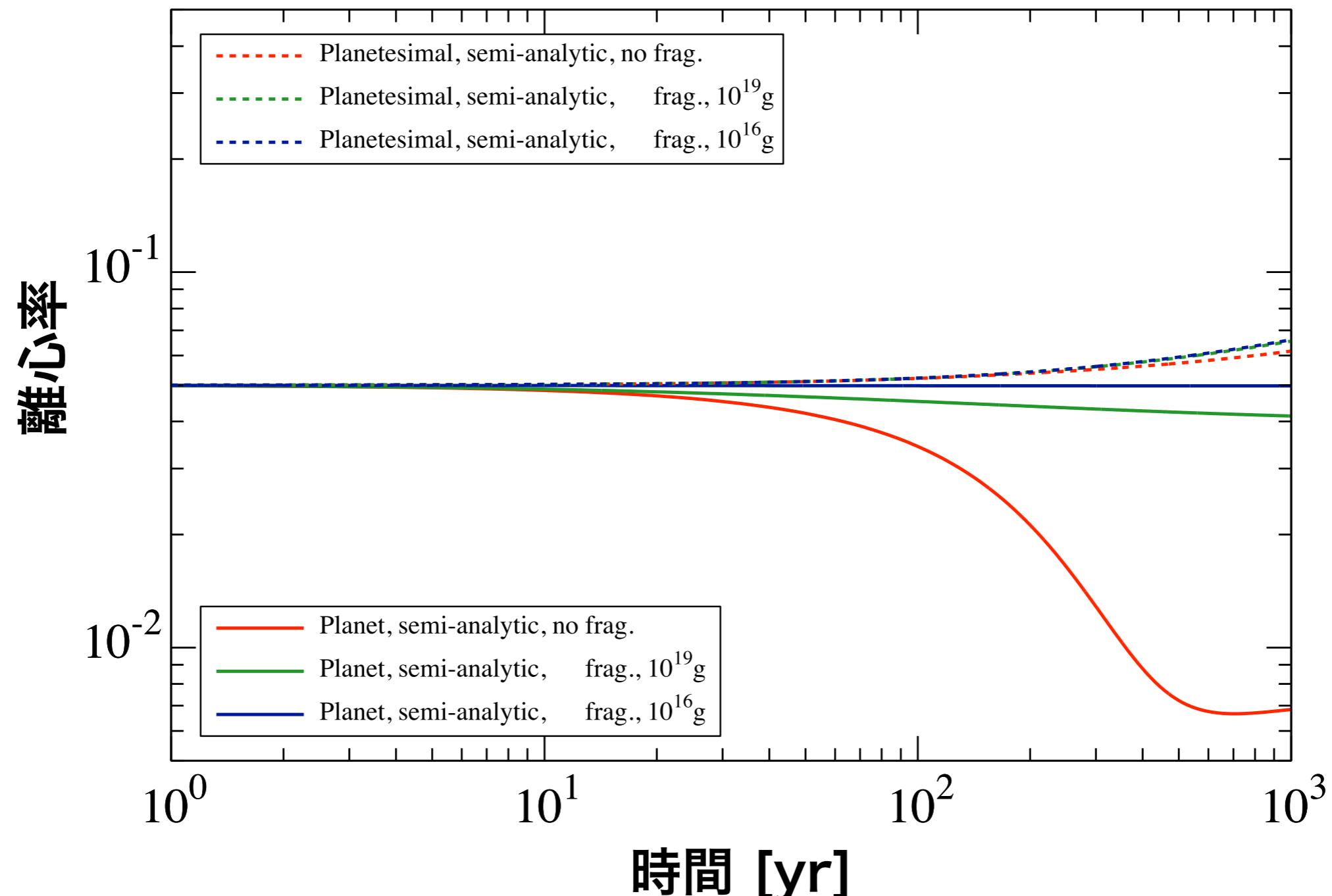
$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$



# 破壊を考慮した時の離心率進化 解析解

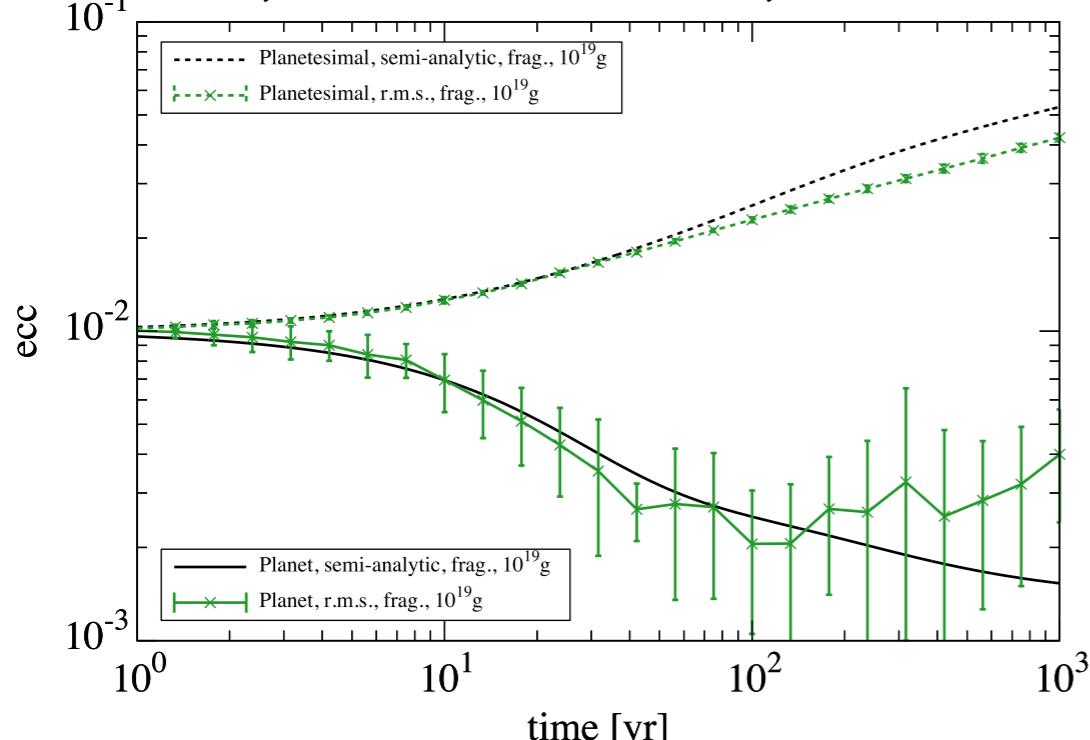
$m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km) と  $10^{19}g$ (~10km) に設定

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$$

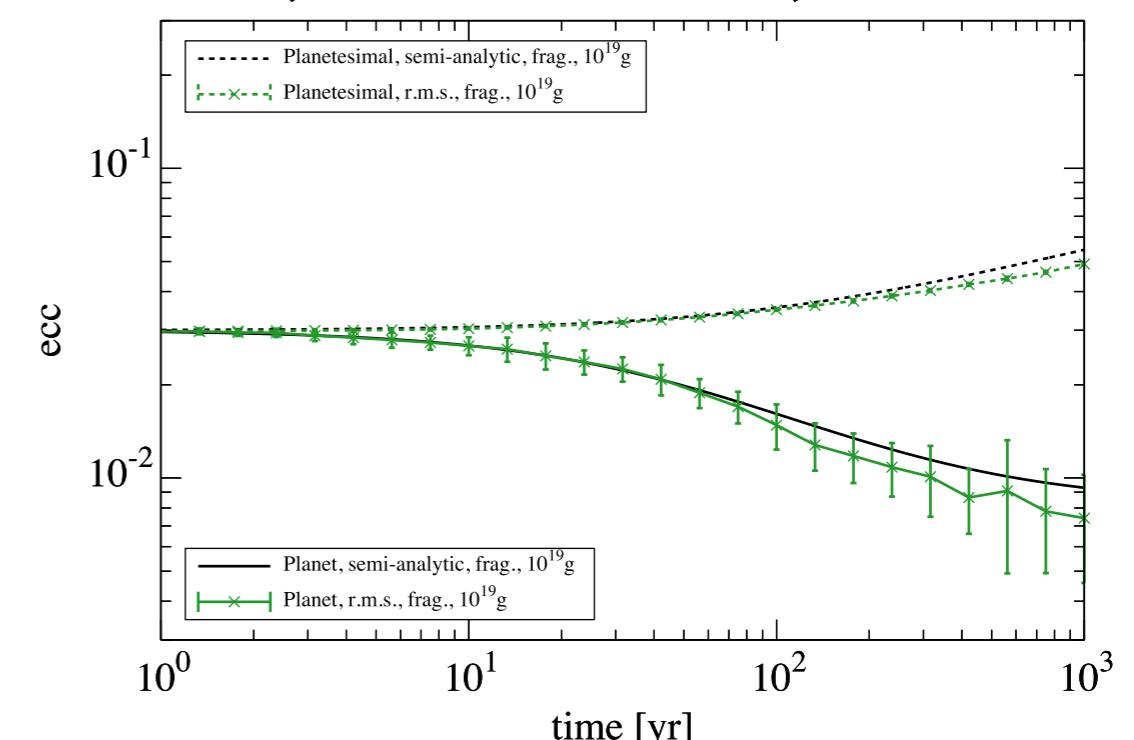


# 解析解と数値計算の比較 $10^{19}\text{g}(\sim 10\text{km})$

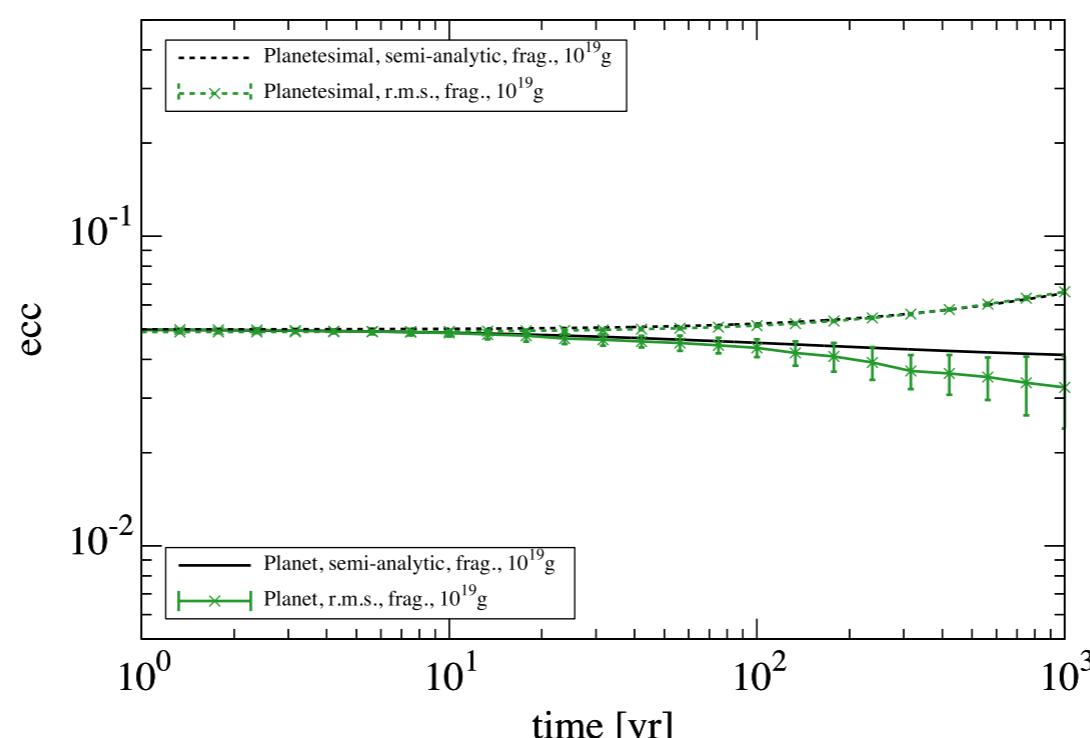
$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.01$$



$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$

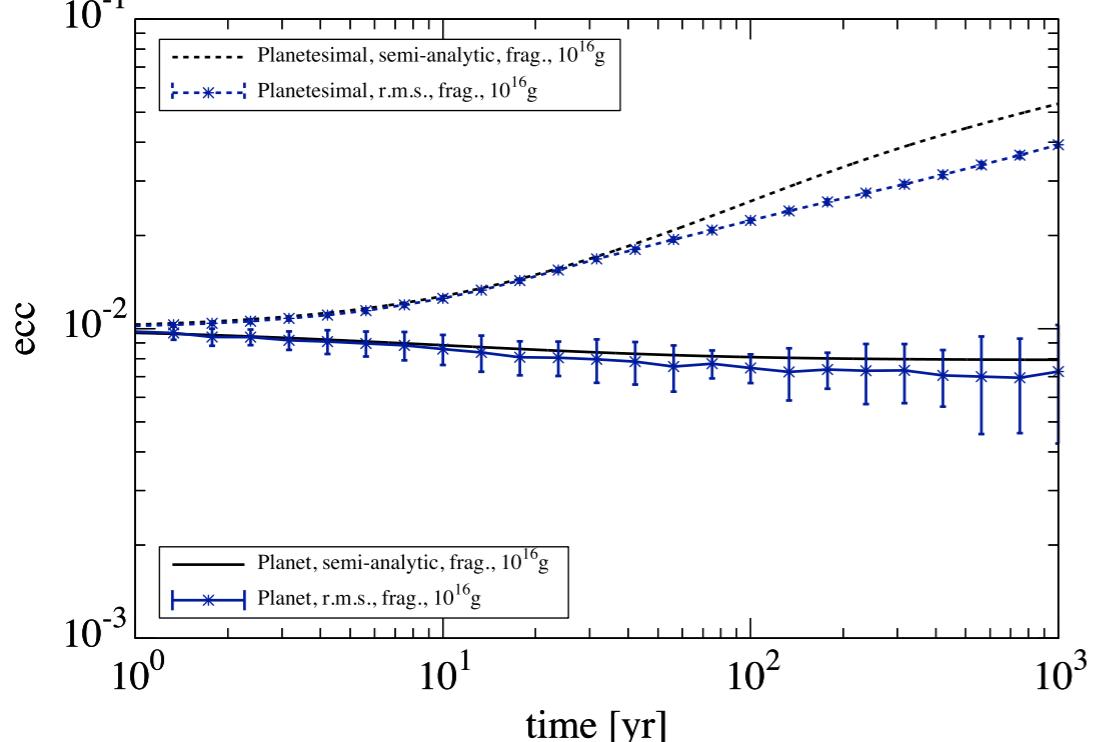


$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$$

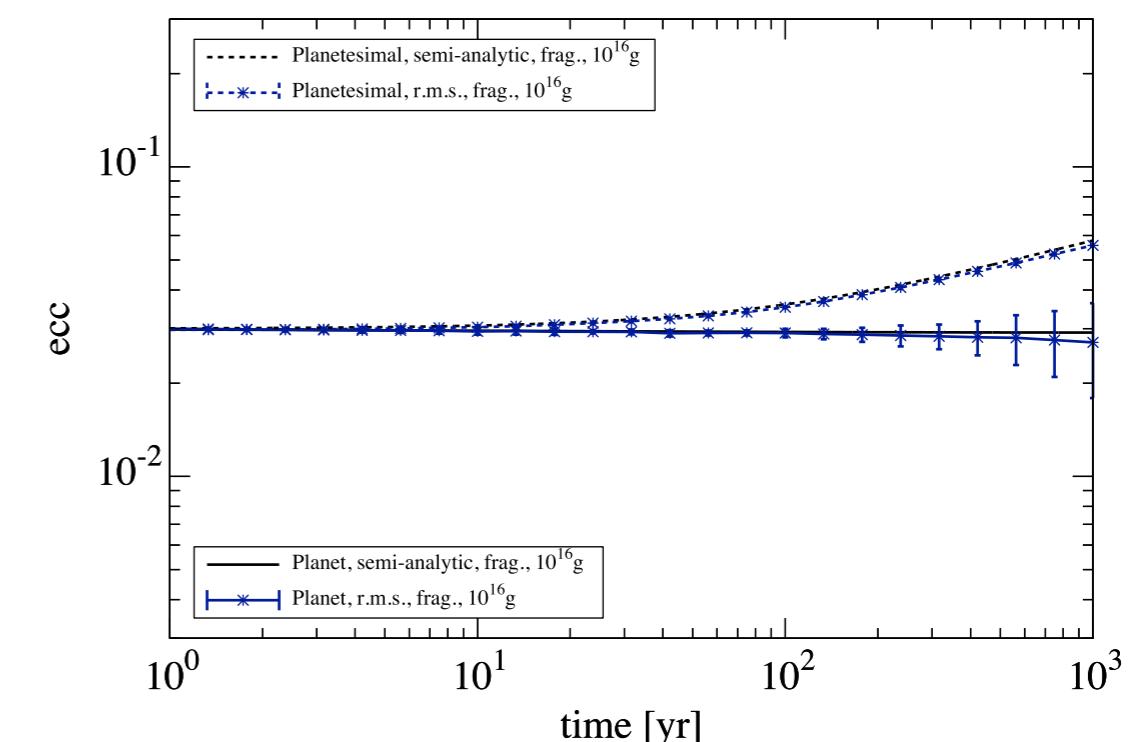


# 解析解と数値計算の比較 $10^{16}\text{g}(\sim 1\text{km})$

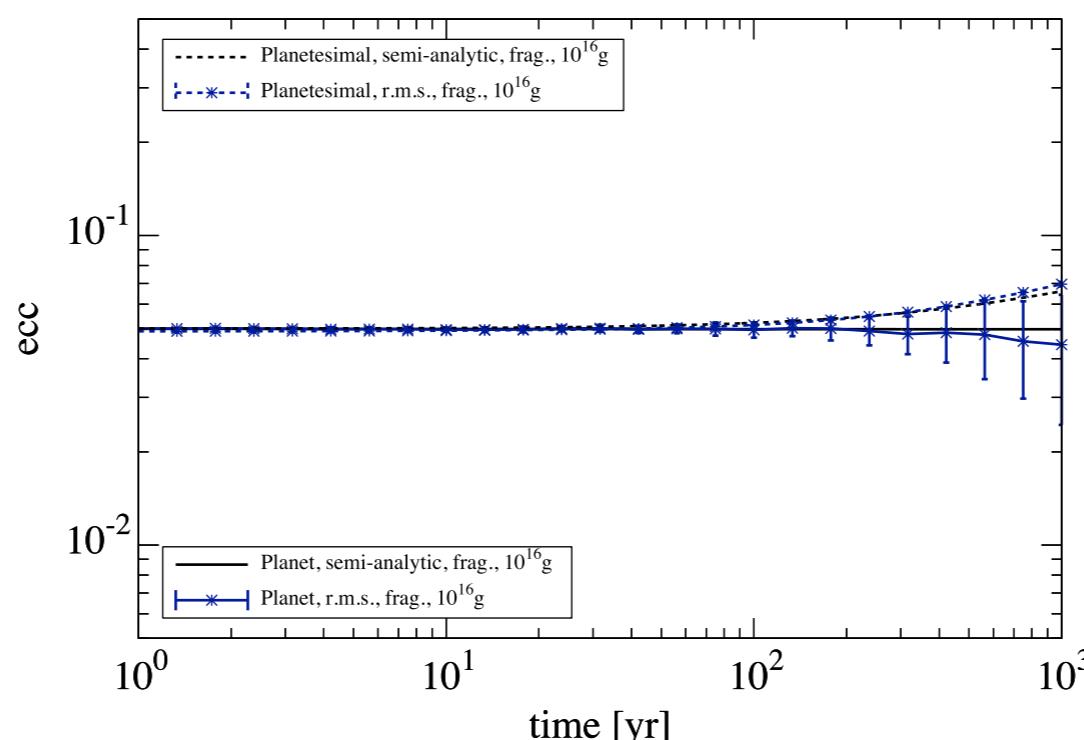
$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.01$$



$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$$

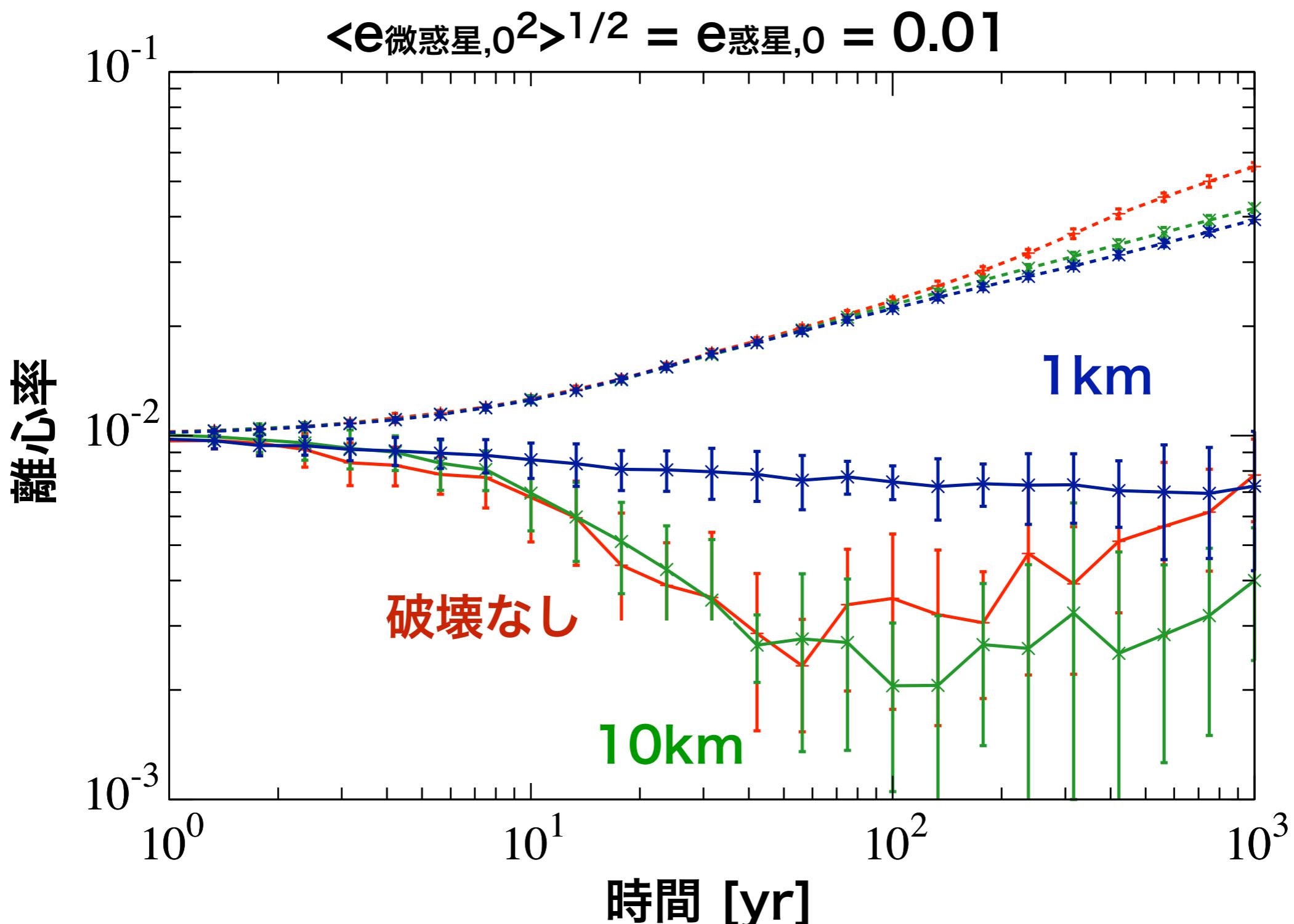


$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$$



# 破壊が力学的摩擦に与える影響

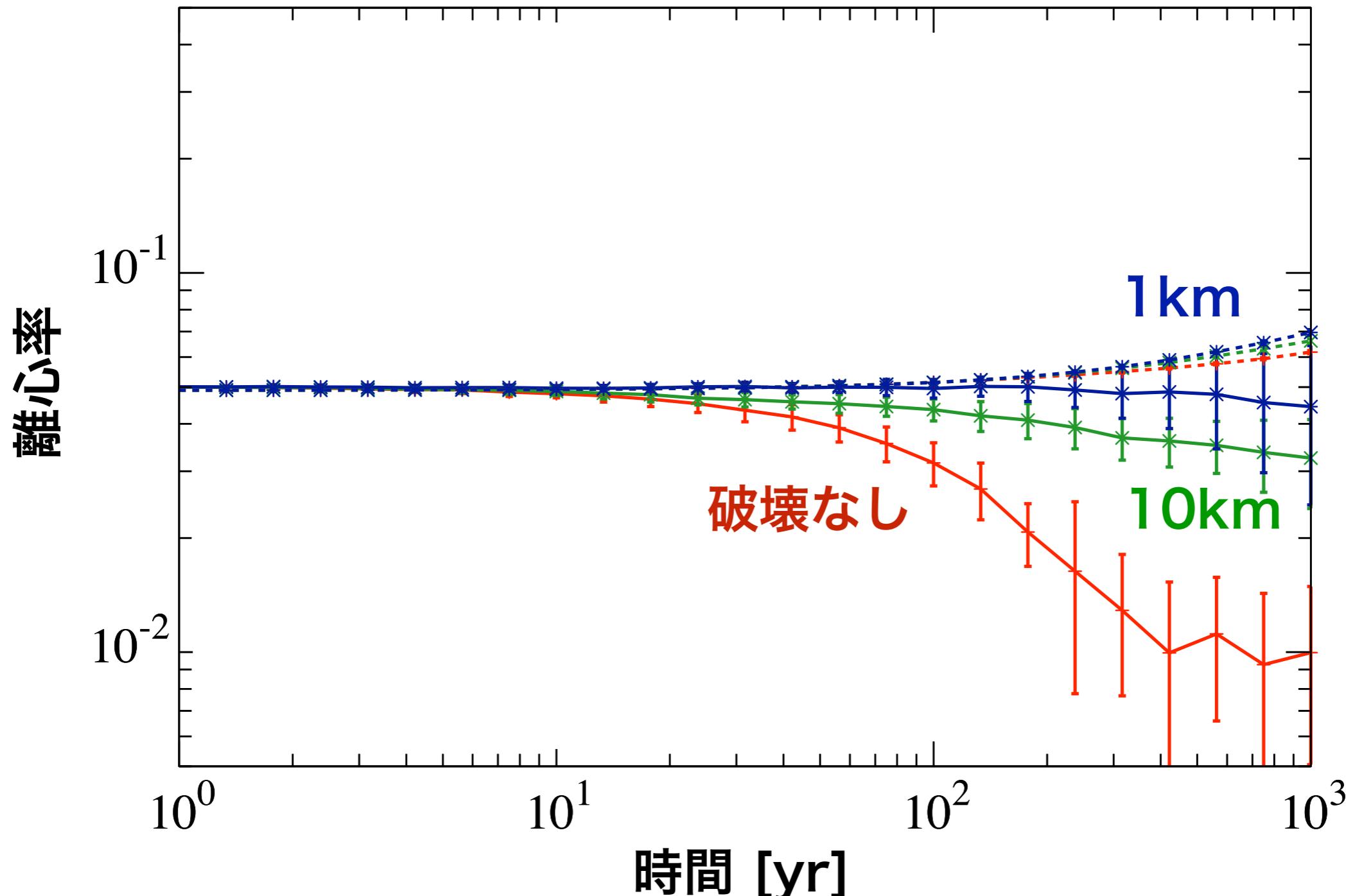
最大微惑星の質量 $m_{\max}$  を $10^{16}g(\sim 1\text{km})$ と $10^{19}g(\sim 10\text{km})$ に設定



# 破壊が力学的摩擦に与える影響

最大微惑星の質量  $m_{\max}$  を  $10^{16}g$ (~1km)と  $10^{19}g$ (~10km)に設定

$$\langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$$



# ヤコビエネルギー

## 回転系での相対運動のエネルギー

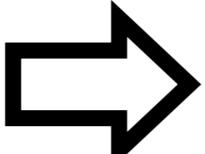
$$E_J = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2} \Omega_K^2 x^2 + \frac{1}{2} \Omega_K^2 z^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r} = \text{const.}$$

惑星による微惑星散乱では、ヤコビエネルギーを保つように軌道進化する離心率、軌道傾斜角、軌道長半径で書き換えると

$$E_J = \frac{1}{2} (e^2 + i^2) a^2 \Omega_K^2 - \frac{3}{8} \Delta a^2 \Omega_K^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r}$$

$$\equiv \frac{1}{2} v_{\text{inc}}^2$$

$v_{\text{inc}}$  : ヒル圏への侵入速度

$|\Delta a|$  増   $(e^2 + i^2)^2$  増 **Viscous Stirringの原因**

# 4次のエルミート法1

step1 : 加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算 (2次精度)

$$\begin{cases} x_{p,j} = x_{0,j} + \Delta t v_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{a}_{0,j} & \text{予測子} \\ v_{p,j} = v_{0,j} + \Delta t a_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{a}_{0,j} & \text{添字0は} t_0 \text{での値} \end{cases}$$

step2 : 予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

ここで  $\begin{cases} r_{jk} = x_{p,j} - x_{p,k} \\ v_{jk} = v_{p,j} - v_{p,k} \end{cases}$  とおくと、 $\Delta t$  進めた加速度は

$$\begin{cases} a_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \frac{r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \\ \dot{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \left[ \frac{v_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(v_{jk} \cdot r_{jk}) r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \end{cases} \quad \epsilon : \text{ソフトニングパラメータ}$$

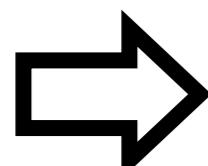
添字1は  $t_0 + \Delta t$  での値

# 4次のエルミート法2

step2続き

$$\begin{cases} a_{1,j} = a_{0,j} + \Delta t \dot{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(3)} & \text{3次のエルミート補完} \\ \dot{a}_{1,j} = \dot{a}_{0,j} + \Delta t a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(3)} & (\text{テイラー展開}) \end{cases}$$

逆に解く



$$\begin{cases} a_{0,j}^{(2)} = \frac{-6(a_{0,j} - a_{1,j}) - \Delta t(4\dot{a}_{0,j} + 2\dot{a}_{1,j})}{\Delta t^2} \\ a_{0,j}^{(3)} = \frac{12(a_{0,j} - a_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{a}_{0,j} + \dot{a}_{1,j})}{\Delta t^3} \end{cases}$$

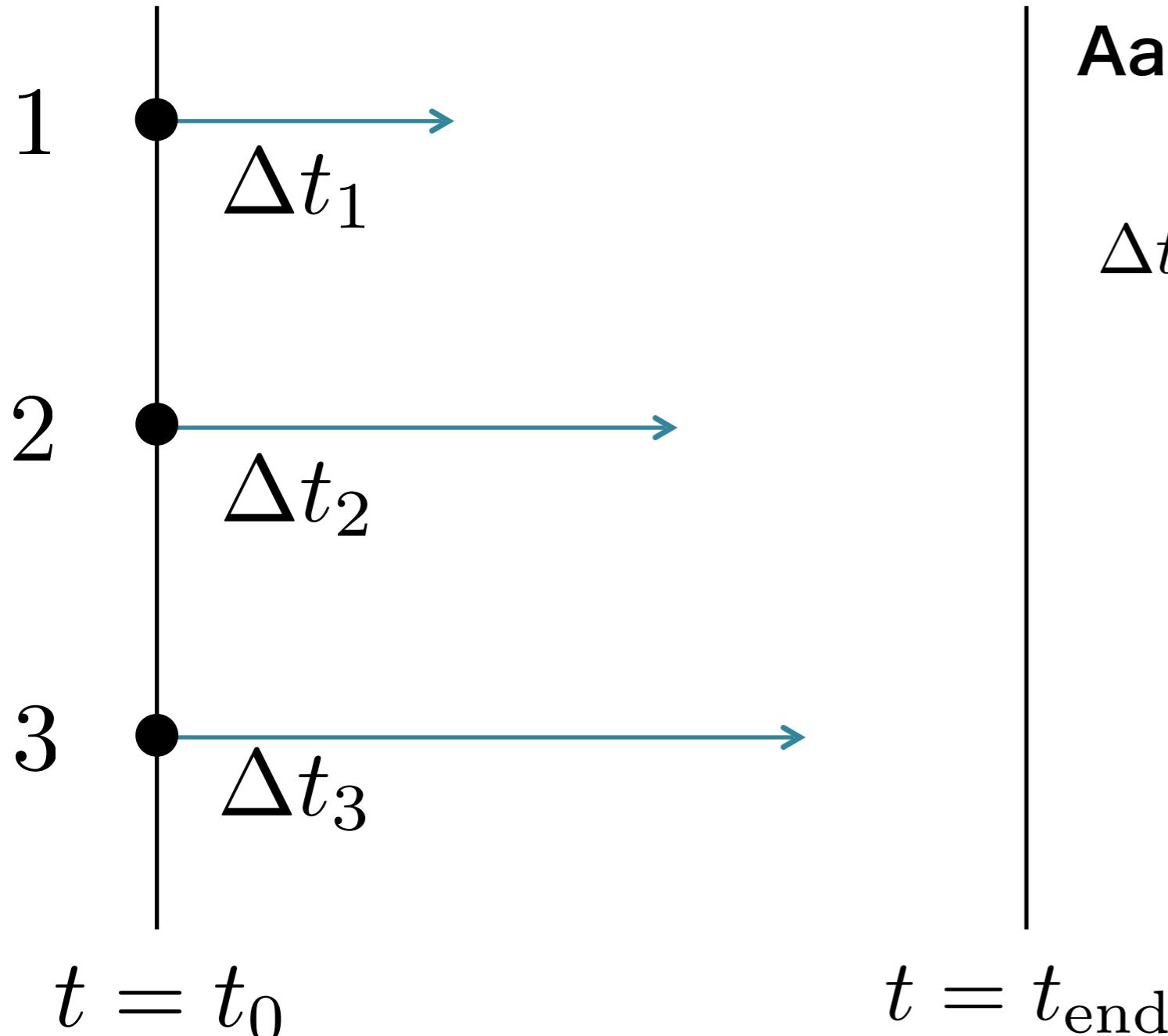
step3 : 加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算 (4次精度)

$$\begin{cases} x_{c,j} = x_{p,j} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(2)} + \alpha \frac{\Delta t^5}{120} a_{0,j}^{(3)} \\ v_{c,j} = v_{p,j} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(3)} \end{cases} \quad \text{修正子}$$

# 独立タイムステップ1

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

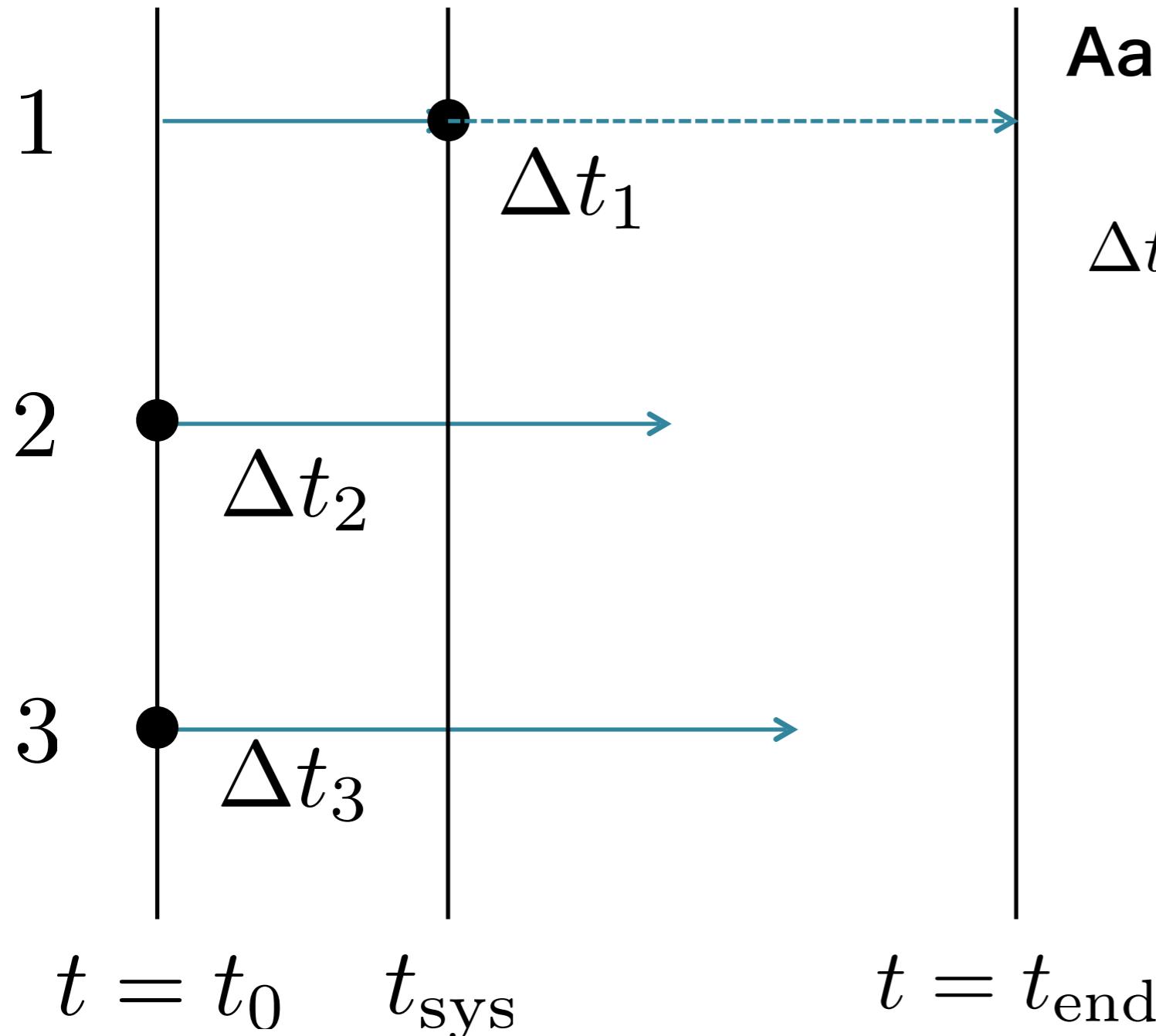
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

# 独立タイムステップ2

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

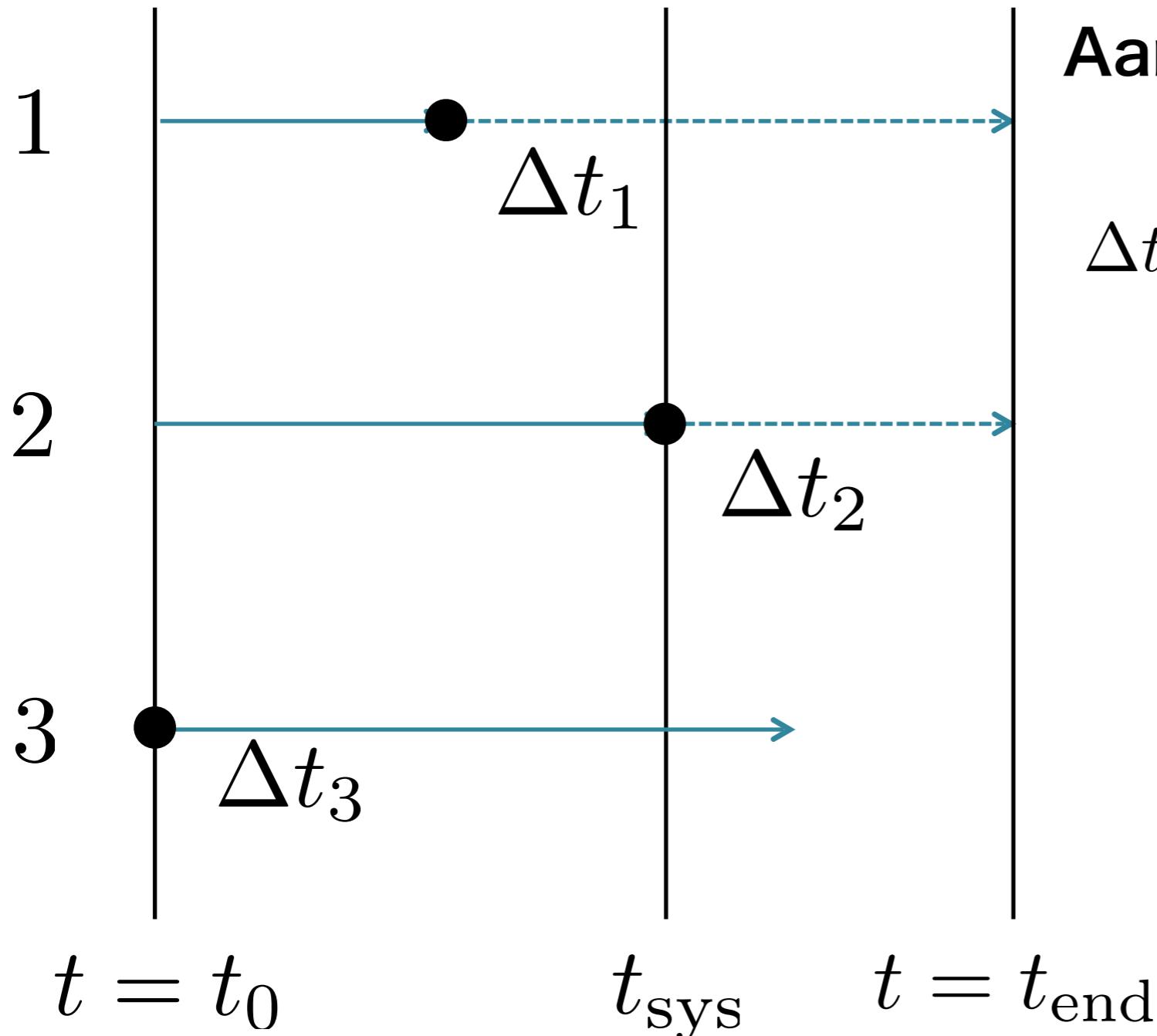
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

# 独立タイムステップ3

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

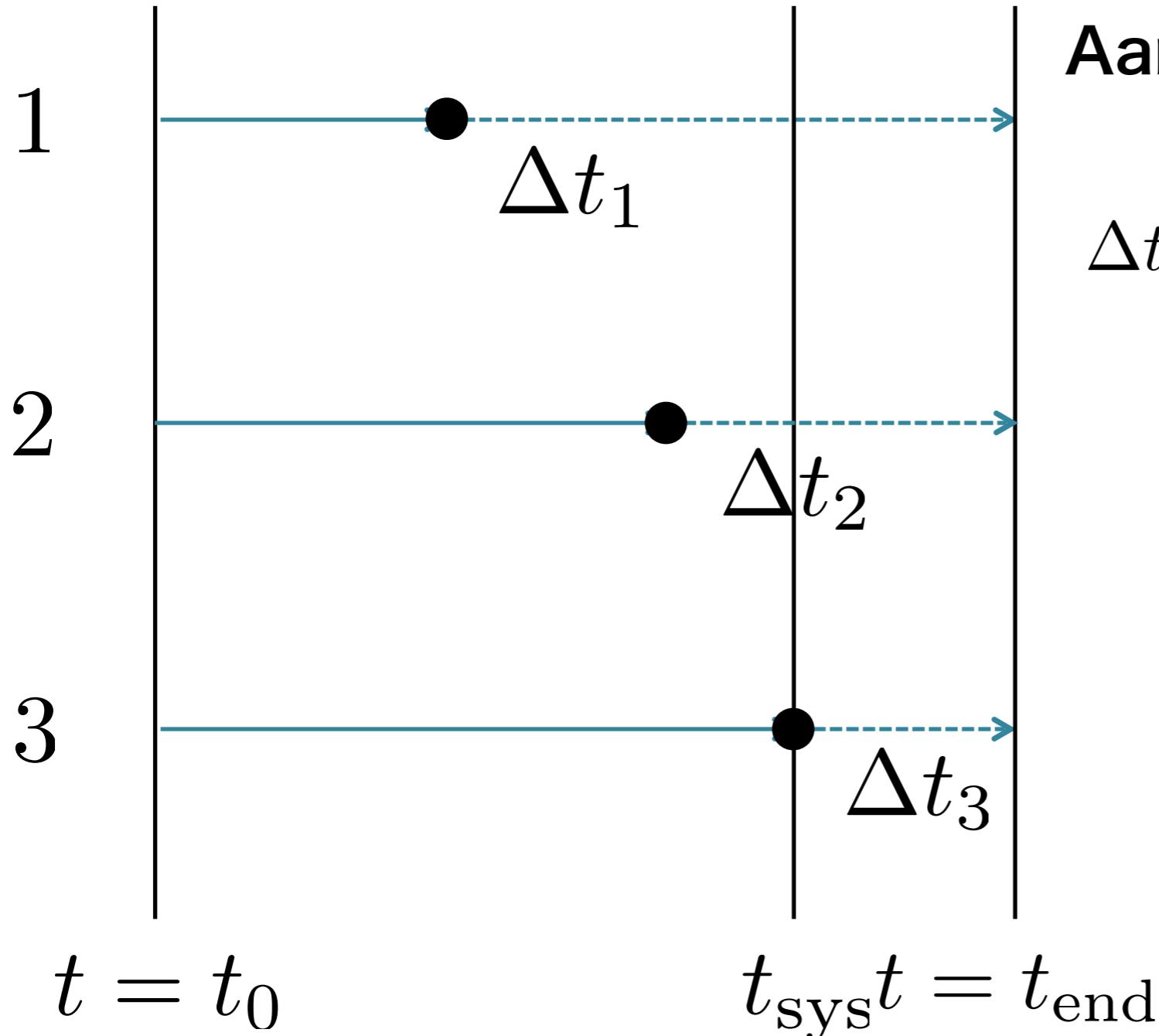
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

# 独立タイムステップ4

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

# 独立タイムステップ5

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる

