

修士論文

衝突・破壊をとりいれた  $N$  体計算の開発と  
地球型惑星形成後期のシミュレーション

磯谷 和秀

学籍番号 261701038

名古屋大学  
理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻  
理論宇宙物理学研究室

2019年1月22日



## 概要

太陽系の地球型惑星は、数十個の火星サイズの原始惑星が無秩序な長期軌道不安定を起こし、これらがお互いに衝突・合体を繰り返すことによって、数億年かけて形成される。これは巨大衝突ステージと呼ばれ、地球型惑星の軌道や質量などの重要な特徴が決定される。しかし、原始惑星同士が軌道交差を起こすほど軌道が歪んだ状態で衝突・合体が起きるため、最終的に形成される地球型惑星の離心率 ( $\sim 0.1$ ) は、現在の太陽系の地球型惑星の離心率 ( $\sim 0.01$ ) を説明できない。ここで地球型惑星の形成後に残存微惑星が存在するならば、力学的摩擦によって地球型惑星の離心率を下げることが可能である。一方、力学的摩擦の反作用や地球型惑星からの摂動によって残存微惑星の離心率は上がり、微惑星同士の破壊的な衝突が起きるほど相対速度が速くなる。そのため様々なサイズの微惑星同士の衝突・破壊が次々に起こり、その際に放出される破片は中心星の輻射圧により系外へ吹き飛ばされるため、残存微惑星円盤の総質量は減少していく。このように微惑星同士の破壊を考慮すると、力学的摩擦の効率が落ちてしまうと予想されるが未だ研究されていない。この問題を調べるためにには、無秩序な長期的軌道進化と衝突・破壊を同時に扱うシミュレーションが必要である。軌道進化を扱うには  $N$  体計算が有効であるが、破壊によって生じる様々なサイズの微惑星は  $10^{35}$  個以上にもなり、純粹な  $N$  体計算では非常に困難である。このような多数の粒子には統計力学に基づいた統計的手法が有効であるが、重力相互作用による非軸対称な面密度分布の取り扱いができない。そこで本研究では、 $N$  体計算と統計的手法を組み合わせ、軌道進化と破壊を同時に扱うことができるハイブリッドコードの開発を行った。そしてこのコードを用いた計算により、巨大衝突ステージにおいて残存微惑星が存在する場合に、微惑星同士の衝突・破壊現象を考慮すると、予想通りに地球型惑星と微惑星間の力学的摩擦の効率が落ちてしまうことを実際に確かめた。また力学的摩擦と破壊のタイムスケールの比較を行い、最大微惑星のサイズ依存性を導出したところ、地球型惑星の離心率を下げるためには、最大微惑星が 100km サイズ以上の残存微惑星円盤が必要であることがわかった。

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	6
1.1	地球型惑星形成理論と問題点	6
1.2	離心率を下げるメカニズム	12
1.3	残存微惑星同士の衝突・破壊	13
1.4	本研究の目的	13
<b>第 2 章</b>	<b>手法</b>	15
2.1	N 体計算	16
2.1.1	4 次のエルミート法	16
2.1.2	独立タイムステップ	17
2.1.3	階層化タイムステップ	18
2.1.4	重力相互作用のテスト	19
2.1.5	衝突・合体	23
2.2	統計的手法	24
2.2.1	微惑星同士の破壊による微惑星円盤面密度の減少	25
2.2.2	円環内の総質量進化の解析解	26
2.2.3	トレーサーの質量とその時間変化	27
2.2.4	面密度と相対速度の求め方	27
2.2.5	扇型領域の大きさと精度	28
<b>第 3 章</b>	<b>地球型惑星形成後期のシミュレーション</b>	31
3.1	破壊なしの場合の力学的摩擦	31
3.2	破壊を考慮した場合の力学的摩擦	37
3.2.1	最大微惑星が 10km サイズの場合	38

3.2.2 最大微惑星が 1km サイズの場合	43
3.3 破壊が力学的摩擦に与える影響	48
<b>第 4 章 議論</b>	<b>51</b>
4.1 力学的摩擦のタイムスケール	51
4.2 面密度減少のタイムスケール	52
4.3 2 つのタイムスケールの比較	54
4.4 100km サイズ以上の微惑星の起源	55
4.5 巨大衝突時の放出破片円盤による力学的摩擦	57
<b>第 5 章 結論</b>	<b>64</b>
<b>付録 A 平均や不確かさなどの定義</b>	<b>66</b>
<b>付録 B 相互ヒル半径</b>	<b>67</b>
<b>付録 C 破壊に必要なエネルギー</b>	<b>68</b>
<b>付録 D 輻射圧で系外へ吹き飛ばされる破片のサイズ</b>	<b>70</b>
<b>付録 E 天体力学の基礎知識</b>	<b>71</b>
E.1 2 体問題	71
E.1.1 運動方程式	71
E.1.2 軌道と速度	74
E.1.3 平均近点離角と離心近点離角	78
E.1.4 ケプラー軌道要素	81
E.2 制限 3 体問題	87
E.2.1 運動方程式	87
E.2.2 ヤコビ積分	91
E.2.3 ヒル半径	94

付録 F	破壊による面密度減少の解析解	96
F.1	基礎方程式	96
F.2	破壊のモデル	98
F.3	質量フラックス	101
F.4	面密度減少のタイムスケール	103

# 第1章

## 序論

### 1.1 地球型惑星形成理論と問題点

太陽系の惑星は、原始惑星系円盤と呼ばれるガスとダストからなる円盤の中で形成されたと考えられている。特に、地球のような岩石惑星（水星、金星、地球、火星）は地球型惑星と呼ばれ、大きく分けて3つのステージを経て形成される。

1つ目のステージは、ダスト ( $0.1\mu\text{m}$  サイズ) から微惑星 (km サイズ) の形成である (e.g., Goldreich & Ward, 1973; Youdin & Shu, 2002)。原始惑星系円盤内のダストは、中心星重力と遠心力のつりあいによって円盤赤道面上に沈殿し、面密度が上がると自己重力不安定によって合体成長していく。近年の理論研究では、ダストの凝集体（アグリゲイト）は空隙を保ちながら直接合体し、 $10^{-4}\text{g/cm}^3$  ほどの超低密度となることで、微惑星までの成長が促進されることがわかっている (Okuzumi et al., 2012; Kataoka et al., 2013)。

2つ目のステージは、微惑星 (km サイズ) から原始惑星 (1000km サイズ) の形成である (e.g., Wetherill, 1985; Kokubo & Ida, 1998)。まず km サイズの微惑星は、微惑星同士の衝突・合体により 100km サイズまで秩序的に成長する。100km サイズを越えると、相対速度よりも表面脱出速度の方が速くなり、質量が重いほど衝突断面積が大きくなるため、大きい微惑星が暴走的に成長する。そして比較的大きく成長した微惑星によって周りの小さな微惑星は重力的に散乱され、今度は大きな微惑星の表面脱出速度より相対速度が速くなり、大きな微惑星の成長が遅くなる。すると大きな微惑星は小さな微惑星を集積しながら寡占的にゆっくり成長し、周りの微惑星を集積し尽くすと原始惑星となる。このときの原始惑星の質量は孤立質量 (Kokubo & Ida, 2000, 2002) と呼ばれ、以下のようにか

ける。

$$M_{\text{iso}} \simeq 2\pi a \cdot b R_{\text{H,M}} \cdot \Sigma \quad (1.1)$$

$$= 2\pi a^2 b \left( \frac{2M_{\text{iso}}}{3M_*} \right)^{1/3} \Sigma \quad (1.2)$$

ここで  $a$  は軌道長半径、 $b$  は相互ヒル半径  $R_{\text{H,M}}$ （付録 B 参照）の何倍かを表す無次元量、 $\Sigma = \Sigma_0(a/1\text{AU})^{-\alpha}$  は固体面密度、 $M_*$  は中心星質量であり、地球型惑星領域では最小質量円盤モデル (Hayashi, 1981) によると  $\Sigma_0 = 7.1\text{g/cm}^2$ ,  $\alpha = 3/2$  である。よって太陽系での孤立質量は

$$M_{\text{iso}} = 0.096 \left( \frac{b}{10} \right)^{3/2} \left( \frac{\Sigma_0}{7.1\text{g/cm}^2} \right)^{3/2} \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{3/2(2-\alpha)} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-1/2} M_\oplus \quad (1.3)$$

となり、火星質量程度である。

3つ目のステージは、原始惑星（1000km サイズ）から地球型惑星（10000km サイズ）の形成である (e.g., Chambers & Wetherill, 1998; Agnor et al., 1999)。このステージは特に巨大衝突ステージと呼ばれ、地球型惑星の軌道や質量などを特徴付ける重要な時期である。このとき数十個の火星質量程度の原始惑星は相互ヒル半径の 10 倍の間隔を保っている (Kokubo & Ida, 1998) が、原始惑星同士の重力相互作用によって無秩序な長期軌道不安定が起こり、離心率が上昇する。そして軌道交差が起こるほど離心率が大きくなると、巨大衝突が起きて合体成長する。これを繰り返し地球型惑星が形成される。巨大衝突ステージでは少数の原始惑星が無秩序な軌道不安定を起こすため、 $N$  体計算による長時間シミュレーションが必要である。これまでの先行研究により、数億年程度で現在の太陽系の地球型惑星のようないくつかの地球質量の惑星が形成されることがわかっている (e.g., Chambers & Wetherill, 1998; Agnor et al., 1999; Kominami & Ida, 2002; Kokubo et al., 2006)。また巨大衝突のうち、衝突後に 2 つに別れて離れてしまうような “hit-and-run” 衝突である確率は 40 % ほどであり (Genda et al., 2012)、このような不完全な合体の場合でも形成される地球型惑星の質量、軌道、衝突・合体のタイムスケールはさほど変わらないが、自転角速度は完全合体の場合より 30 % 遅くなる (Kokubo & Genda, 2010)。このような巨大衝突も含めると、平均で合計質量の 10 % 程度が破片として放出される (Agnor & Asphaug, 2004; Genda et al., 2012)。

確認のため、最小質量円盤モデル (Hayashi, 1981) の 2 倍の固体面密度で、 $0.4 - 1.5\text{AU}$  の範囲に 18 個の原始惑星を離心率 0.01、軌道傾斜角 0.005 として相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、完全合体を仮定して地球型惑星までの合体成長を 3 次元  $N$  体計算したところ、1 億年で確かに地球質量の惑星がいくつか形成された（図 1.1-1.5 参照）。

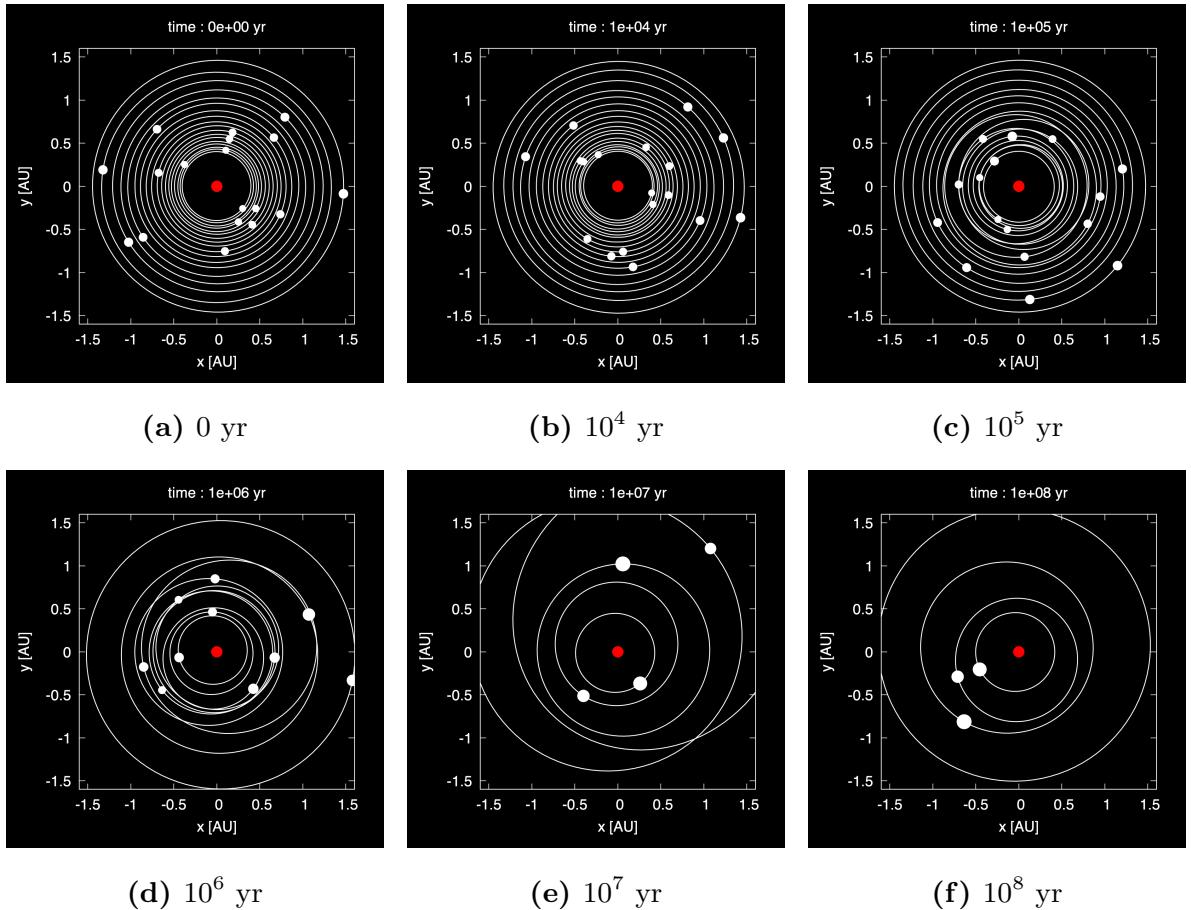


図 1.1 原始惑星の位置と軌道の各時刻でのスナップショット。白丸は原始惑星の位置であり、丸の大きさは天体半径に比例している。また白線はそれぞれの天体の軌道を表している。(a) のような初期配置から計算を始めると、(c) :  $10^5$  年ほどで軌道が交差しはじめ、衝突・合体が起きると軌道間隔が開いていき、(f) :  $10^8$  年経つと軌道間隔が十分開き、軌道交差は起きなくなる。

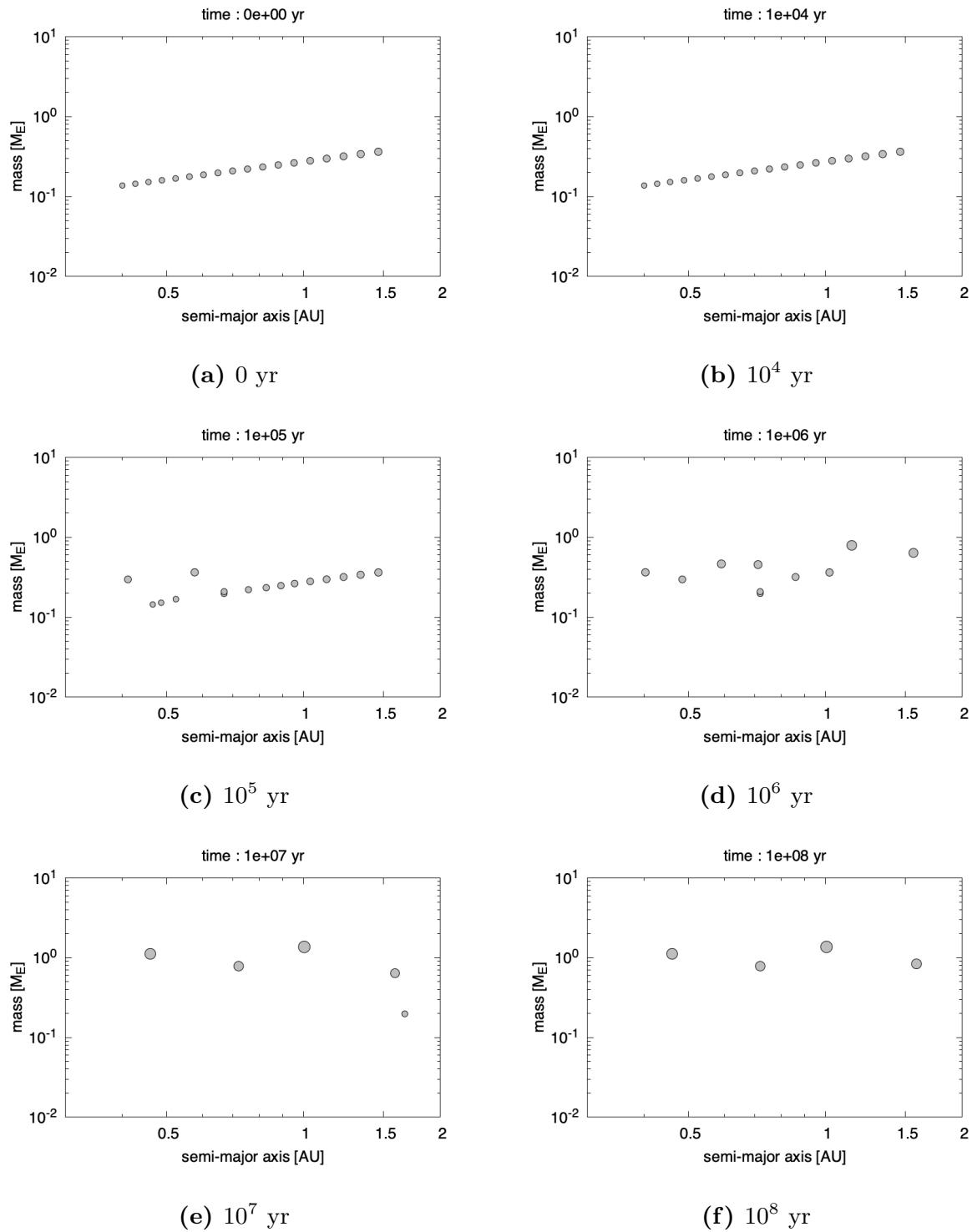
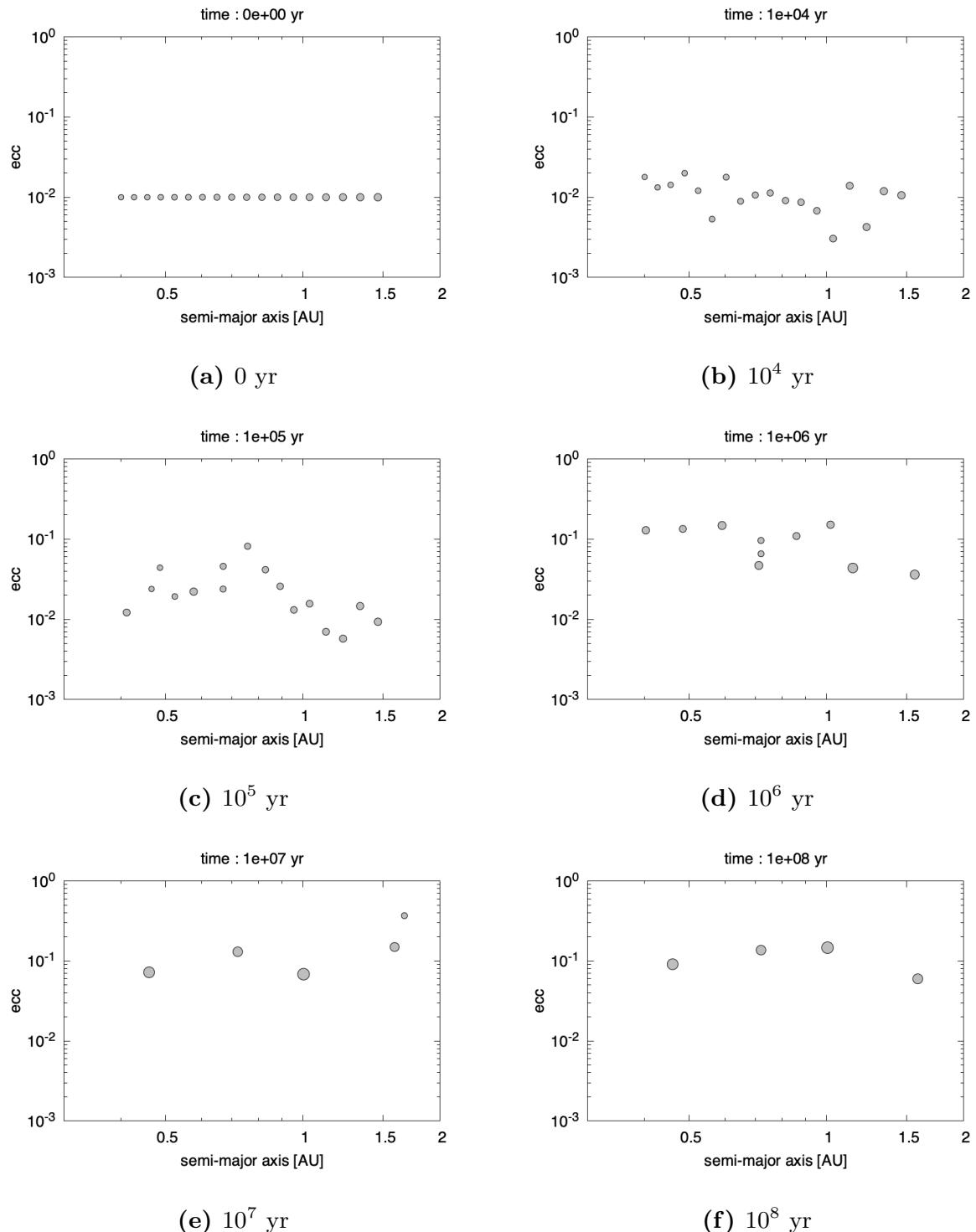


図 1.2 原始惑星の軌道長半径と質量の各時刻でのスナップショット。灰色の丸は原始惑星であり、丸の大きさは天体半径に比例している。(a) のような初期配置から計算を始めると、(c) :  $10^5$  年で衝突・合体が起きており、(f) :  $10^8$  年経つと地球質量の惑星が 4 つ存在している。



**図 1.3** 原始惑星の軌道長半径と離心率の各時刻でのスナップショット。灰色の丸は原始惑星であり、丸の大きさは天体半径に比例している。**(a)** のように全ての原始惑星の離心率を 0.01 とすると、**(c)** :  $10^5$  年から全体的に離心率が上がり始め、**(f)** :  $10^8$  年経つと平均の離心率は 0.1 程度に落ち着いている。

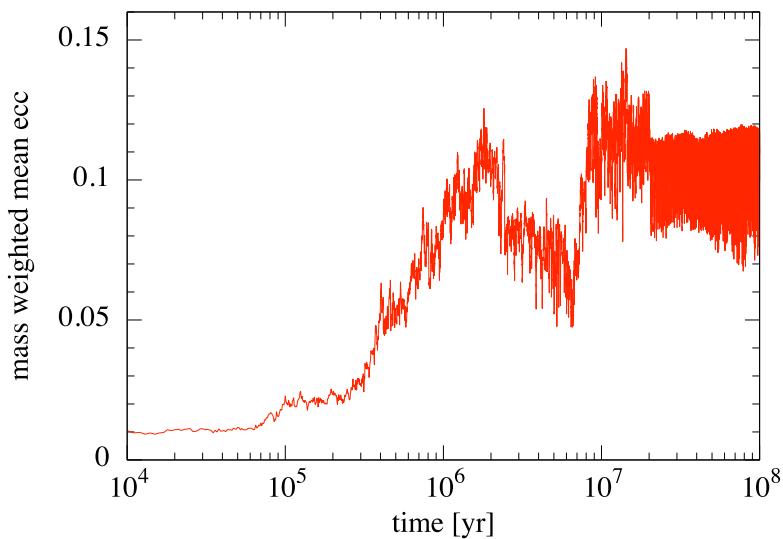


図 1.4 原始惑星の質量平均離心率の時間変化。初期に離心率は 0.01 であるが、 $10^8$  年経つと 0.1 程度になってしまふ。

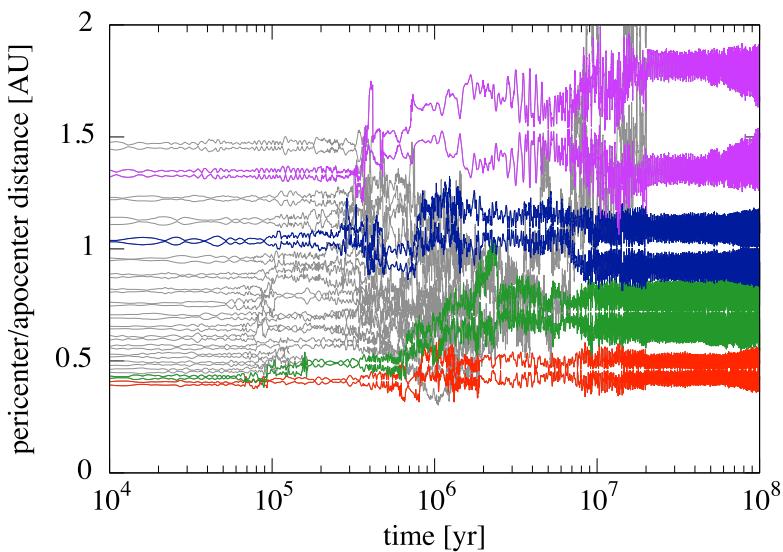


図 1.5 原始惑星の近日点距離と遠日点距離の時間変化。最終的に形成された地球型惑星を内側から赤線、緑線、青線、紫線で表し、灰色はそれ以外の合体していなくなった原始惑星を表している。近日点距離と遠日点距離は他の原始惑星からの摂動によって共に  $10^3 - 10^4$  年周期で振動している。

このように、原始惑星同士の衝突・合体によって地球質量の惑星が形成されるのは数値的に解明されている。しかし、原始惑星同士が軌道交差を起こすほど軌道が歪んだ状態で衝突・合体が起きるため、最終的に形成される地球型惑星の離心率は0.1程度になってしまふ。現在の太陽系の地球の離心率が0.0167、金星が0.00677であることを考えると、この大きすぎる離心率は現在の地球型惑星形成理論における大きな問題の1つである。

## 1.2 離心率を下げるメカニズム

現在の地球や金星の離心率は比較的小さいことから、地球型惑星が形成された後に離心率を下げる何らかのメカニズムが存在したはずである。この候補として、2つのメカニズムが提唱されている。1つは残存微惑星 (Chambers, 2001; O'Brien et al., 2006; Raymond et al., 2006, 2009; Morishima et al., 2008)、もう1つは残存ガス円盤 (Agnor & Ward, 2002; Kominami & Ida, 2002, 2004; Nagasawa et al., 2005; Ogiara et al., 2007; Thommes et al., 2008) によるものである。しかし残存ガス円盤が存在する場合、I型惑星移動 (Ward, 1986; Tanaka et al., 2002) と呼ばれる内側への移動が起こる。これは火星サイズの原始惑星は内側前方と外側後方に密度波を形成し、一般に外側後方の密度波からの重力トルクの方が強いため、原始惑星の角運動量が失われるため起こる現象である。I型惑星移動を考慮したN体計算により、地球型惑星形成に必要な総質量を残せるような円盤の消失タイムスケールは～1Myrであることがわかっている (McNeil et al., 2005)。一方、地球型惑星の形成後に残存微惑星が存在するならば、惑星と微惑星との力学的摩擦によって地球型惑星の離心率を下げることが可能である (e.g., Chambers, 2001; O'Brien et al., 2006; Morishima et al., 2010)。力学的摩擦とはエネルギー等分配のことを表し、残存微惑星の面密度が大きいほど効率的に地球型惑星の離心率を下げることができる。そこで本研究では、ガス円盤は完全に消失しており、残存微惑星が存在する場合を考える。

### 1.3 残存微惑星同士の衝突・破壊

一方、力学的摩擦の反作用や地球型惑星からの摂動によって残存微惑星の離心率は上がり相対速度は速くなるが、微惑星同士の衝突時に大規模（catastrophic）な破壊が起こるほど速い相対速度となる（付録 C 参照）。衝突・破壊の際に放出される破片は様々なサイズをもち、それらは破壊された微惑星として残存微惑星円盤へ供給される。破壊された微惑星（破片）はそれら同士でも衝突・破壊を次々に起こし、微惑星はどんどん小さくなっていく（衝突カスケード）。そのなかでも小さな微惑星は数が多く衝突が頻繁に起きており、破壊のタイムスケールが短い。破壊された微惑星（破片）が  $\mu\text{m}$  サイズまで小さくなると、中心星の輻射圧により吹き飛ばされることで系から速やかに取り除かれる。その結果、残存微惑星円盤の総質量は減少していく（e.g., [Tanaka et al., 1996](#)）。このとき、微惑星の減少のタイムスケールは、残存微惑星の中で最大の微惑星が衝突によって壊れるタイムスケールになるため、比較的簡単に解析的に表現できる（[Kobayashi & Tanaka, 2010](#)）。このように微惑星同士の破壊を考慮すると、残存微惑星は地球型惑星の周りからどんどんなくなってしまうため、力学的摩擦の効率が落ちてしまうと予想されるが、このことは未だ研究されていない。

### 1.4 本研究の目的

微惑星同士の破壊を考慮した場合に力学的摩擦へ与える影響を調べるためにには、原始惑星の無秩序な長期的軌道進化と、微惑星同士の衝突・破壊を同時に扱うシミュレーションが必要である。軌道進化を扱うには  $N$  体計算が有効であるが、破壊によって生じる様々なサイズの微惑星は  $10^{35}$  個以上にもなり、純粋な  $N$  体計算では非常に困難である。このような多数の粒子を扱うには、一つ一つの粒子を取り扱うのではなく、統計力学に基づいた統計的手法が有効であるが、重力相互作用による非軸対称な面密度分布の取り扱いができない。すなわち  $N$  体計算と統計的手法を同時に用いると、軌道進化と破壊を同時に考慮した計算を行うことができる。

そこで本研究では、 $N$  体計算と統計的手法を組み合わせ、軌道進化と破壊を同時に扱うことができるハイブリッドコードの開発を行う（第 2 章参照）。そして、巨大衝突ステージにおいて残存微惑星が存在する場合に、微惑星同士の衝突・破壊現象を考慮すると、地球型惑星と微惑星間の力学的摩擦の効率が落ちるのかをこのコードを用いて確かめる（第 3 章参照）。また力学的摩擦と面密度減少のタイムスケールの比較を行い、地球型惑星の離心率を下げるために必要な残存微惑星の特徴とその起源について議論する（第 4 章参照）。最後に第 5 章にて本研究をまとめる。

## 第 2 章

# 手法

衝突破壊の際に放出される様々なサイズの微惑星の数は  $10^{35}$  個以上にもなり、個々の微惑星を  $N$  体計算で扱うことは計算コスト的に非常に困難である。そこで本研究では、ほぼ同じ軌道上を運動する複数の微惑星を 1 つの粒子（トレーサーと呼ぶ）として表現するスーパー粒子近似を用いる。

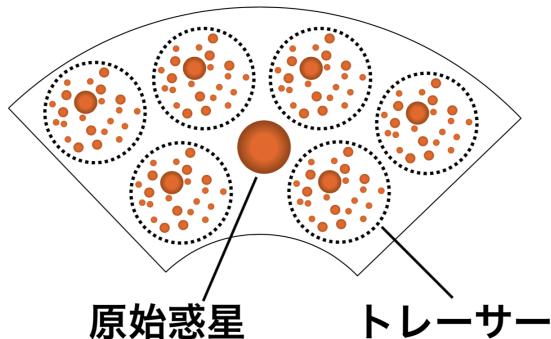


図 2.1 原始惑星とトレーサーの違い。トレーサーは、ほぼ同じ軌道上を運動する様々なサイズの微惑星をまとめた粒子である。

1 つのトレーサー内に存在する様々なサイズの微惑星は、同じトレーサーや他のトレーサーの微惑星と衝突を繰り返し、より小さな微惑星となっていく。微惑星は  $1\mu\text{m}$  程度になると中心星の輻射圧により吹き飛ばされ、系から取り除かれる。このような衝突の繰り返しによる衝突力スケードと輻射圧による吹き飛ばしが起こると微惑星の総質量は減少していく。減少率は、微惑星の面密度と微惑星間の衝突速度の関数で与えられる (Kobayashi & Tanaka, 2010)。トレーサーの軌道分布からこれらを導出し、軌道進化と衝突進化を同時に解く方法をこの章で説明する。

## 2.1 N 体計算

本研究では、以下で述べる 4 次のエルミート法 (Makino & Aarseth, 1992) と階層化タイムステップを用いて軌道進化を計算する。

### 2.1.1 4 次のエルミート法

まず時間  $t$  での位置と速度 ( $\mathbf{x}_{0,j}, \mathbf{v}_{0,j}$ )、加速度とその時間微分 ( $\mathbf{a}_{0,j}, \dot{\mathbf{a}}_{0,j}$ ) から、時間  $t + \Delta t$  における 2 次精度の位置と速度 ( $\mathbf{x}_{p,j}, \mathbf{v}_{p,j}$ ) へと予測する。

$$\mathbf{x}_{p,j} = \mathbf{x}_{0,j} + \Delta t \mathbf{v}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{\mathbf{a}}_{0,j} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}_{p,j} = \mathbf{v}_{0,j} + \Delta t \mathbf{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{\mathbf{a}}_{0,j} \quad (2.2)$$

これらを予測子と呼ぶ。

次に予測子を使って、時間  $t + \Delta t$  での加速度とその時間微分 ( $\mathbf{a}_{1,j}, \dot{\mathbf{a}}_{1,j}$ ) を求める。

$$\mathbf{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \frac{\mathbf{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \left[ \frac{\mathbf{v}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{r}_{jk}) \mathbf{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \quad (2.4)$$

ここで、

$$\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{x}_{p,j} - \mathbf{x}_{p,k} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{p,j} - \mathbf{v}_{p,k} \quad (2.6)$$

であり、また  $\epsilon$  は計算上の発散を抑えるためのソフトニングパラメータである。

続いて、時間  $t$  から  $t + \Delta t$  間の加速度の時間変化を、時間  $t$  における加速度の 2 階と 3 階の時間導関数 ( $\mathbf{a}_{0,j}^{(2)}, \mathbf{a}_{0,j}^{(3)}$ ) を用いた 3 次のエルミート補間多項式で近似する。

$$\mathbf{a}_{1,j} = \mathbf{a}_{0,j} + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{1,j} = \dot{\mathbf{a}}_{0,j} + \Delta t \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \quad (2.8)$$

$(\mathbf{a}_{0,j}^{(2)}, \mathbf{a}_{0,j}^{(3)})$  について逆に解くと、

$$\mathbf{a}_{0,j}^{(2)} = \frac{-6(\mathbf{a}_{0,j} - \mathbf{a}_{1,j}) - \Delta t(4\dot{\mathbf{a}}_{0,j} + 2\ddot{\mathbf{a}}_{1,j})}{\Delta t^2} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a}_{0,j}^{(3)} = \frac{12(\mathbf{a}_{0,j} - \mathbf{a}_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{\mathbf{a}}_{0,j} + \dot{\mathbf{a}}_{1,j})}{\Delta t^3} \quad (2.10)$$

となる。そしてこの  $(\mathbf{a}_{0,j}^{(2)}, \mathbf{a}_{0,j}^{(3)})$  を使って、時間  $t + \Delta t$  における予測子を 4 次精度の位置と速度  $(\mathbf{x}_{c,j}, \mathbf{v}_{c,j})$  へ修正する。

$$\mathbf{x}_{c,j} = \mathbf{x}_{p,j} + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^5}{120} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}_{c,j} = \mathbf{v}_{p,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \quad (2.12)$$

これらを修正子と呼ぶ。

さらに、修正子を使って新たな加速度とその時間微分  $(\mathbf{a}_{1,j}^{\text{new}}, \dot{\mathbf{a}}_{1,j}^{\text{new}})$  を計算する。これらは式 (2.3)、(2.4) で

$$\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{x}_{c,j} - \mathbf{x}_{c,k} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{c,j} - \mathbf{v}_{c,k} \quad (2.14)$$

とすれば求まる。最後に、 $(\mathbf{a}_{1,j}^{\text{new}}, \dot{\mathbf{a}}_{1,j}^{\text{new}})$  を  $(\mathbf{a}_{1,j}, \dot{\mathbf{a}}_{1,j})$  とし、 $(\mathbf{a}_{0,j}^{(2)}, \mathbf{a}_{0,j}^{(3)})$  を求め直してから再び位置と速度を修正する。この修正を 2 回程度繰り返すことで値が収束する。

### 2.1.2 独立タイムステップ

粒子ごとに力学的タイムスケールが大きく異なるような系を効率的に時間積分する方法として、独立タイムステップがある。独立タイムステップでは、粒子  $j$  ごとに別々の時間  $t_j$  とタイムステップ  $\Delta t_j$  を持たせ、別々に時間発展させる。

タイムステップの計算には以下の表式を用いる (Aarseth, 1985)。

$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\mathbf{a}_{1,j}| |\mathbf{a}_{1,j}^{(2)}| + |\dot{\mathbf{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\mathbf{a}}_{1,j}| |\mathbf{a}_{1,j}^{(3)}| + |\mathbf{a}_{1,j}^{(2)}|^2}} \quad (2.15)$$

これは 4 次スキームでは非常に効率が良いことが分かっている (Makino, 1991)。ここで、 $\eta$  は積分の精度を決めるパラメータであり、本研究では  $\eta = 0.01$  を用いた。また時間

$t + \Delta t$  における加速度の 2 階と 3 階の時間導関数 ( $\mathbf{a}_{1,j}^{(2)}, \mathbf{a}_{1,j}^{(3)}$ ) については、

$$\mathbf{a}_{1,j}^{(2)} = \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \Delta t_j \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{a}_{1,j}^{(3)} = \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \quad (2.17)$$

のように見積もる。一方、初期 ( $t = 0$ ) には ( $\mathbf{a}_{1,j}^{(2)}, \mathbf{a}_{1,j}^{(3)}$ ) は計算されていないため、以下のような初期用のタイムステップを用いる。

$$\Delta t_j = \eta \frac{|\mathbf{a}_{0,j}|}{|\dot{\mathbf{a}}_{0,j}|} \quad (2.18)$$

系全体の時間  $t_{\text{sys}}$  は、 $t_j + \Delta t_j$  が最小になる粒子  $j_{\text{sys}}$  を探し、 $t_{\text{sys}} = t_{j_{\text{sys}}} + \Delta t_{j_{\text{sys}}}$  のように決定する。そして  $t_{\text{sys}}$  における全ての粒子の予測子を計算し、粒子  $j_{\text{sys}}$  のみ修正し、時間も  $t_{j_{\text{sys}}}$  のみ  $\Delta t_{j_{\text{sys}}}$  だけ進める。その後粒子  $j_{\text{sys}}$  以外の予測子は捨て、次のステップの  $t_{\text{sys}}$  を決定する。これを繰り返して時間発展させる。

### 2.1.3 階層化タイムステップ

独立タイムステップでは、 $t_j + \Delta t_j$  が最小になる粒子は必ず 1 個であり、この 1 個の粒子のために他の  $N - 1$  個の粒子についての予測子を毎回計算する必要がある。予測子の計算コストは  $\mathcal{O}(N)$  になってしまいますが、これを減らす方法として階層化タイムステップが有効である。階層化タイムステップは、粒子ごとのタイムステップを 2 のべき乗に離散化することで、複数の粒子に同じ時間を共有させる。すると、 $t_j + \Delta t_j$  が最小になる粒子は複数個存在することとなり、予測子の計算コストを抑えることができる。ここで、平均的に約  $N^{2/3}$  個の粒子の時間がそろうことがわかっている。

初期 ( $t_j = 0$ ) については、粒子  $j$  のタイムステップの候補  $\Delta t_j^*$  を式 (2.18) で計算し、

$$2^{-k} \leq \Delta t_j^* < 2^{-k+1} \quad (2.19)$$

を満たす自然数  $k$  を求めタイムステップ  $\Delta t_j$  を

$$\Delta t_j = 2^{-k} \quad (2.20)$$

のように設定する。

初期以外の通常の手順では、時間  $t_j$  での粒子  $j$  が直前まで使っていたタイムステップを  $\Delta t_{j,\text{old}}$ 、式 (2.15) で計算した次のタイムステップの候補を  $\Delta t_{j,\text{new}}^*$  とすると、

$$\Delta t_{j,\text{new}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta t_{j,\text{old}} & (\Delta t_{j,\text{new}}^* < \Delta t_{j,\text{old}}) \\ 2\Delta t_{j,\text{old}} & (\Delta t_{j,\text{new}}^* > 2\Delta t_{j,\text{old}} \text{ and } t_j \bmod 2\Delta t_{j,\text{old}} = 0) \\ \Delta t_{j,\text{old}} & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.21)$$

のようにタイムステップを決定する。

#### 2.1.4 重力相互作用のテスト

質量が異なる 2 種類の微惑星  $m_1, m_2 (\ll M_\odot)$  の集団がケプラー運動するとき、微惑星同士の重力相互作用によってランダム速度が上昇する。微惑星集団の平均ランダム速度  $v_{\text{rand},j}$  は

$$v_{\text{rand},j} \sim \sqrt{\langle e_j^2 \rangle + \langle i_j^2 \rangle} v_K \quad (2.22)$$

のように、離心率  $e$  と軌道傾斜角  $i$  の二乗平均を用いて表すことができる。ここで、 $v_K$  はケプラー速度であり、記号  $\langle \rangle$  は粒子のアンサンブル平均を表す。

つまり微惑星同士の重力相互作用によって、微惑星集団の平均の離心率と軌道傾斜角は時間変化する。この平均の変化率については、“particle in a box” 近似と呼ばれる、Hill 座標系における重力散乱を軌道積分した結果を用い、解析的に詳しく調べられている (e.g., Ida, 1990; Ohtsuki, 1999; Ohtsuki et al., 2002)。

例えば、 $m_1$  の離心率と軌道傾斜角の変化率はそれぞれ式 (2.23), (2.24) のようになる (Ohtsuki et al., 2002)。

$$\frac{d \langle e_1^2 \rangle}{dt} = a_0^2 \Omega_K \sum_{j=1,2} \left[ N_{sj} \frac{h_{1j}^4 m_j}{(m_1 + m_j)^2} \left\{ m_j \langle P_{\text{VS}} \rangle_{1j} + \frac{m_j \langle e_j^2 \rangle - m_1 \langle e_1^2 \rangle}{\langle e_1^2 \rangle + \langle e_j^2 \rangle} \langle P_{\text{DF}} \rangle_{1j} \right\} \right] \quad (2.23)$$

$$\frac{d \langle i_1^2 \rangle}{dt} = a_0^2 \Omega_K \sum_{j=1,2} \left[ N_{sj} \frac{h_{1j}^4 m_j}{(m_1 + m_j)^2} \left\{ m_j \langle Q_{\text{VS}} \rangle_{1j} + \frac{m_j \langle i_j^2 \rangle - m_1 \langle i_1^2 \rangle}{\langle i_1^2 \rangle + \langle i_j^2 \rangle} \langle Q_{\text{DF}} \rangle_{1j} \right\} \right] \quad (2.24)$$

ここで、 $a_0$  は軌道長半径、 $\Omega_K$  はケプラー角速度、 $N_{sj}$  は微惑星  $j$  の面数密度であり、また  $h_{1j}$  は

$$h_{1j} = \left( \frac{m_1 + m_j}{3M_\odot} \right)^{1/3} \quad (2.25)$$

のように定義される。さらに、 $\langle P_{\text{VS}} \rangle_{1j} (\langle Q_{\text{VS}} \rangle_{1j})$  は離心率（軌道傾斜角）に対するビスカス・ステアリング率、 $\langle P_{\text{DF}} \rangle_{1j} (\langle Q_{\text{DF}} \rangle_{1j})$  は離心率（軌道傾斜角）に対する力学的摩擦率である。

$m_1, m_2$  それぞれの離心率と軌道傾斜角がレイリー分布に従うとき、ビスカス・ステアリング率と力学的摩擦率は式 (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) のように表される。

$$\langle P_{\text{VS}} \rangle = 73 \frac{\ln(10\Lambda^2 / \langle \tilde{e}^2 \rangle + 1)}{10\Lambda^2 / \langle \tilde{e}^2 \rangle} + \frac{72I_{\text{PVS}}(\beta)}{\pi \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2} \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2}} \ln(\Lambda^2 + 1) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{\text{VS}} \rangle &= \left( 4 \langle \tilde{i}^2 \rangle + 0.2 \langle \tilde{e}^2 \rangle^{3/2} \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2} \right) \frac{\ln(10\Lambda^2 \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2} + 1)}{10\Lambda^2 \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2}} \\ &\quad + \frac{72I_{\text{QVS}}(\beta)}{\pi \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2} \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2}} \ln(\Lambda^2 + 1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\langle P_{\text{DF}} \rangle = 10 \langle \tilde{e}^2 \rangle \frac{\ln(10\Lambda^2 + 1)}{10\Lambda^2} + \frac{576I_{\text{PDF}}(\beta)}{\pi \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2} \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2}} \ln(\Lambda^2 + 1) \quad (2.28)$$

$$\langle Q_{\text{DF}} \rangle = 10 \langle \tilde{i}^2 \rangle \frac{\ln(10\Lambda^2 + 1)}{10\Lambda^2} + \frac{576I_{\text{QDF}}(\beta)}{\pi \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2} \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2}} \ln(\Lambda^2 + 1) \quad (2.29)$$

ここで、 $\tilde{e}_j, \tilde{i}_j$  は式 (2.25) を用いて

$$\tilde{e}_j = e_j/h_{12} \quad \text{and} \quad \tilde{i}_j = i_j/h_{12} \quad (2.30)$$

のように規格化された値であり、 $\langle \tilde{e}^2 \rangle, \langle \tilde{i}^2 \rangle$  は

$$\langle \tilde{e}^2 \rangle = \langle \tilde{e}_1^2 \rangle + \langle \tilde{e}_2^2 \rangle \quad \text{and} \quad \langle \tilde{i}^2 \rangle = \langle \tilde{i}_1^2 \rangle + \langle \tilde{i}_2^2 \rangle \quad (2.31)$$

のように  $\langle \tilde{e}_j^2 \rangle, \langle \tilde{i}_j^2 \rangle$  を用いて定義される。また  $\beta$  は

$$\beta = \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2} / \langle \tilde{e}^2 \rangle^{1/2} \quad (2.32)$$

のように離心率と軌道傾斜角の比で定義され、 $\Lambda$  は

$$\Lambda = \frac{1}{12} (\langle \tilde{e}^2 \rangle + \langle \tilde{i}^2 \rangle) \langle \tilde{i}^2 \rangle^{1/2} \quad (2.33)$$

のように  $\langle \tilde{e}^2 \rangle, \langle \tilde{i}^2 \rangle$  を用いて定義される。さらに、 $I_{\text{PVS}}, I_{\text{QVS}}, I_{\text{PDF}}, I_{\text{QDF}}$  は  $\beta$  の関数であり

$$I_{\text{PVS}}(\beta) = \int_0^1 \frac{5K\left(\sqrt{3(1-\lambda^2)}/2\right) - \frac{12(1-\lambda^2)}{1+3\lambda^2}E\left(\sqrt{3(1-\lambda^2)}/2\right)}{\beta + (\beta^{-1} - \beta)\lambda^2} d\lambda \quad (2.34)$$

$$I_{\text{QVS}}(\beta) = \int_0^1 \frac{K\left(\sqrt{3(1-\lambda^2)}/2\right) - \frac{12\lambda^2}{1+3\lambda^2}E\left(\sqrt{3(1-\lambda^2)}/2\right)}{\beta + (\beta^{-1} - \beta)\lambda^2} d\lambda \quad (2.35)$$

$$I_{\text{PDF}}(\beta) = \int_0^1 \frac{\frac{1-\lambda^2}{1+3\lambda^2}E\left(\sqrt{3(1-\lambda^2)}/2\right)}{\beta + (\beta^{-1} - \beta)\lambda^2} d\lambda \quad (2.36)$$

$$I_{\text{QDF}}(\beta) = \int_0^1 \frac{\frac{\lambda^2}{1+3\lambda^2}E\left(\sqrt{3(1-\lambda^2)}/2\right)}{\beta + (\beta^{-1} - \beta)\lambda^2} d\lambda \quad (2.37)$$

のように定義され、また  $K(k), E(k)$  はそれぞれ

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (2.38)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (2.39)$$

のように定義される第 1 種、第 2 種完全楕円積分である。

$N$  体計算のテストとして、Ohtsuki et al. (2002) の FIG. 4 と同じシミュレーションを行った。図 2.2 では等質量の微惑星同士の重力相互作用、図 2.3 では大小 2 種類の微惑星同士の重力相互作用のチェックを行った。

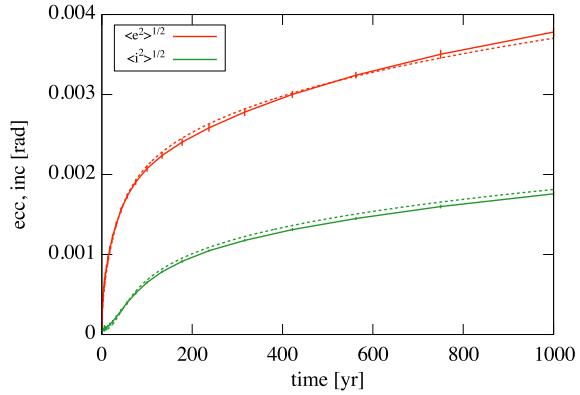


図 2.2 等質量 ( $m = 1 \times 10^{24}$  g) の微惑星 1000 体の離心率・軌道傾斜角進化。初期条件として、微惑星は中心星  $M_{\odot}$  から 1 AU の位置に面密度  $\Sigma = 10$  g cm $^{-2}$  で分布し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e^2 \rangle^{1/2} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\langle i^2 \rangle^{1/2} = 5 \times 10^{-5}$  rad である。実線は初期経度を変えた  $N$  体計算 40run の二乗平均平方根とその不確かさ、破線は式 (2.23), (2.24) を数値積分した解析解を表し、赤と緑はそれぞれ離心率と軌道傾斜角を表している。

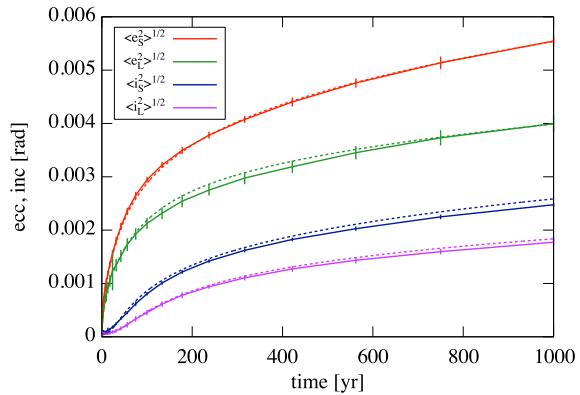


図 2.3  $m_S = 1 \times 10^{24}$  g の小さい微惑星 800 体と  $m_L = 4 \times 10^{24}$  g の大きい微惑星 200 体の離心率・軌道傾斜角進化。初期条件として、微惑星中心星  $M_{\odot}$  から 1 AU の位置に面密度  $\Sigma = 10$  g cm $^{-2}$  で分布し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e^2 \rangle^{1/2} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\langle i^2 \rangle^{1/2} = 5 \times 10^{-5}$  rad である。実線は初期経度を変えた  $N$  体計算 40run の二乗平均平方根とその不確かさ、破線は式 (2.23), (2.24) を数値積分した解析解を表し、赤と青は小さい微惑星の離心率と軌道傾斜角、緑と紫は大きい微惑星の離心率と軌道傾斜角を表している。

### 2.1.5 衝突・合体

円盤ガスが晴れた巨大衝突ステージでは、微惑星同士の相対速度はより大きな原始惑星からの重力摂動によって決まり、ケプラー速度に離心率を掛けた値程度になる。つまり、地球型惑星が形成される領域において離心率 0.1 程度の微惑星は数 km/s の衝突速度でぶつかっている。この衝突のエネルギーは微惑星の破壊に必要なエネルギーよりも十分大きいため、本研究では微惑星同士の衝突・合体は考慮していない。

しかし原始惑星同士、または惑星-微惑星の衝突・合体は取り扱う。本研究では簡単のため完全合体を仮定する。衝突の判定から合体までの取り扱いの手順は以下のようになる。

1. 予測子を使って粒子  $i, j$  間の距離  $r_{i,j}$  を計算する。
2.  $r_{i,j}$  がそれぞれの粒子半径の和  $r_{p,i} + r_{p,j}$  より小さいとき、衝突が起こったとする。
3. すべての粒子の修正子を計算する。
4. 新しい合体粒子  $k$  を作る。
  - 質量 … 粒子  $i, j$  の質量の和

$$m_k = m_i + m_j \quad (2.40)$$

- 位置 … 粒子  $i, j$  の重心

$$\mathbf{x}_k = \frac{m_i \mathbf{x}_i + m_j \mathbf{x}_j}{m_i + m_j} \quad (2.41)$$

- 速度 … 粒子  $i, j$  の運動量を保存させる

$$\mathbf{v}_k = \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j}{m_i + m_j} \quad (2.42)$$

5. 合体により粒子の個数が減るため、新しい粒子  $k$  を粒子  $i$  に置き換え、粒子  $j$  を最後尾の粒子  $N$  と交換し、総粒子数  $N$  を  $N - 1$  に設定する。
6. 合体の際に  $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}$  は不連続的に変化するため、すべての粒子の  $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}$  を計算する。
7. 次のタイムステップを計算する。このとき  $t = 0$  の時と同様に式 (2.18) を用いて計算する。

一方、衝突・合体では軌道運動のエネルギーが天体の内部エネルギーへと散逸するが、主に次の 3 つの原因で散逸する。

- 粒子  $i, j$  が衝突したとき、相対速度を 0 として新しい合体粒子  $k$  を作るため、相対運動エネルギーが熱となって散逸する。

$$\Delta E_{\text{heat}} = -\frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 \quad (2.43)$$

ここで  $\mathbf{v}$  は衝突時の速度。

- 2 天体間の距離  $r_{i,j}$  に対応する相互重力エネルギーが消える。 $(r_{i,j}$  は衝突判定の誤差により必ずしも 2 天体の半径の和にはならないことに注意する。)

$$\Delta E_{\text{grav}} = \frac{G m_i m_j}{r_{i,j}} \quad (2.44)$$

- 中心星から 2 天体の重心までの距離  $r_{g,ij}$  に対応する中心星重力エネルギーが変わること。

$$\Delta E_c = GM_c \left[ -\frac{m_i + m_j}{r_{g,ij}} + \frac{m_j}{r_i} + \frac{m_j}{r_j} \right] \quad (2.45)$$

よって全エネルギー変化  $\Delta E$  は

$$\Delta E = E_{\text{after}} - E_{\text{before}} = \Delta E_{\text{heat}} + \Delta E_{\text{grav}} + \Delta E_c \quad (2.46)$$

のようになる。

## 2.2 統計的手法

1 つのトレーサー粒子の中には、様々なサイズを持った複数の微惑星が存在し、ほぼ同じ軌道上を運動している。本研究では、トレーサーの質量とはトレーサーに含まれる複数の微惑星の総質量のことであり、トレーサーの軌道は複数の微惑星を代表したものとする。

### 2.2.1 微惑星同士の破壊による微惑星円盤面密度の減少

付録 F より、微惑星の円盤が存在するとき、その面密度  $\Sigma$  と微惑星間の相対速度  $v$  が決まると、微惑星円盤の面密度の変化率は以下のように与えられる (Kobayashi & Tanaka, 2010)。

$$\frac{d\Sigma}{dt} = - \frac{(2-\alpha)^2}{m_{\max}^{1/3}} \Sigma^2 \Omega_K h_0 \left( \frac{v(m_{\max})^2}{2Q_D^*(m_{\max})} \right)^{\alpha-1} \times \left[ \left( -\ln \varepsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1 + s_2 + s_3 \right] \quad (2.47)$$

ここで、 $b, \varepsilon$  は無次元パラメータ、 $h_0, s_1, s_2, s_3$  は定数、 $\Omega_K$  はケプラー角速度、 $Q_D^*$  は破壊に必要な衝突体質量あたりのエネルギー、そして  $\alpha$  は微惑星の面数密度のべき ( $n_s(m)dm \propto m^{-\alpha} dm$ ) である。 $v(m)^2/Q_D^*(m) \propto m^p$  のように質量に依存するとき、すなわち破壊のモデルが非自己相似の場合、定常衝突カスケードにおいて、 $\alpha$  は以下のように与えられる (Kobayashi & Tanaka, 2010)。

$$\alpha = \frac{11+3p}{6+3p} \quad (2.48)$$

式 (2.47) の微分方程式を、相対速度  $v$  が時間変化しない場合について解くと、

$$\Sigma(t) = \frac{\Sigma(t_0)}{1 + (t - t_0)/\tau_{\text{dep}}(t_0)} \quad (2.49)$$

となる。ここで、面密度減少タイムスケール  $\tau_{\text{dep}}(t_0)$  は以下の式で定義され、式 (2.47) を用いて値は求められる。

$$\tau_{\text{dep}}(t_0) = \frac{\Sigma(t_0)}{|d\Sigma/dt(t_0)|} \quad (2.50)$$

$$= \frac{m_{\max}^{1/3}}{(2-\alpha)^2 \Sigma(t_0) h_0 \Omega_K} \left( \frac{v(m_{\max})^2}{2Q_D^*(m_{\max})} \right)^{-\alpha+1} \times \left[ \left( -\ln \varepsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1(\alpha) + s_2(\alpha) + s_3(\alpha) \right]^{-1} \quad (2.51)$$

### 2.2.2 円環内の総質量進化の解析解

中心星から軌道長半径  $a$  だけ離れた位置での面密度進化は式 (2.49) より

$$\Sigma(a, t) = \frac{\Sigma(a, t_0)}{1 + (t - t_0)/\tau_{\text{dep}}(a, t_0)} \quad (2.52)$$

のようにかける。しかし、 $N$  体計算などの数値計算では有限個の粒子を扱うことになるため、ある  $a$  での面密度を厳密に求めることはできない。その代わりに、幅  $\Delta a$  の円環内の総質量進化  $M_{\text{tot}}(a, t)$  を求ることはできる。

$$M_{\text{tot}}(a, t) = \int_{a-\Delta a/2}^{a+\Delta a/2} \Sigma(a', t) 2\pi a' da' \quad (2.53)$$

$$= 2\pi \int_{a-\Delta a/2}^{a+\Delta a/2} \frac{\Sigma(a', t_0) a'}{1 + (t - t_0)/\tau_{\text{dep}}(a', t_0)} da' \quad (2.54)$$

また、初期 ( $t = t_0$ ) の  $a$  依存性が

$$\Sigma(a, t_0) \propto a^\beta \quad (2.55)$$

$$e(a, t_0) \propto a^\gamma \quad (2.56)$$

$$\tau_{\text{dep}}(a, t_0) \propto a^\lambda \quad (2.57)$$

であるとすると、式 (2.51) より

$$\lambda = -\beta + \frac{3}{2} + 2 \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) (-\alpha + 1) \quad (2.58)$$

となり、 $M_{\text{tot}}(a, t)$  はさらに

$$M_{\text{tot}}(a, t) = \frac{M_{\text{tot}}(a, t_0)}{1 + (t - t_0)/\tau_{\text{dep}}(a, t_0)} \Phi(t - t_0, \tau_{\text{dep}}(a, t_0), \beta, \lambda, \Delta \tilde{a}) \quad (2.59)$$

のように、式 (2.52) の面密度進化の解析解の表式に補正因子

$$\begin{aligned} \Phi(t - t_0, \tau_{\text{dep}}(a, t_0), \beta, \lambda, \Delta \tilde{a}) &= \left( 1 + \frac{t - t_0}{\tau_{\text{dep}}(a, t_0)} \right) \\ &\times \int_{1-\Delta \tilde{a}/2}^{1+\Delta \tilde{a}/2} \frac{(\tilde{a}')^{\beta+1}}{1 + (\tilde{a}')^{-\lambda}(t - t_0)/\tau_{\text{dep}}(a, t_0)} d\tilde{a}' \end{aligned} \quad (2.60)$$

を掛けた形に変形できる。ここでアクセント~は  $a$  で規格化したことを表している。

### 2.2.3 トレーサーの質量とその時間変化

トレーサーは様々なサイズの微惑星をまとめた粒子であり、それらの微惑星の総質量をトレーサーの質量と定義する。トレーサー  $i$  の質量変化は、面密度減少の解析解と同様に、

$$m_i(t) = \frac{m_i(t_{0,i})}{1 + (t - t_{0,i}) / \tau_{\text{dep},i}(t_{0,i})} \quad (2.61)$$

のように計算する。 $\tau_{\text{dep},i}(t_{0,i})$  は面密度変化に依存するため、軌道進化のタイムスケールとは独立して適切に更新する必要がある。この更新間隔の目安である  $\Delta t_{0,i}$  は、無次元量  $\xi \ll 1$  を用いて

$$\Delta t_{0,i} = \xi \tau_{\text{dep},i}(t_{0,i}) \quad (2.62)$$

とする。本研究では  $\xi = 0.01$  とした。

以下の手順を繰り返すことで、トレーサー  $i$  周りの面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep},i}(t_{0,i})$  を適切に更新することができる。

1.  $t > t_{0,i} + \Delta t_{0,i}$  となる場合、 $t_{0,i}$  を  $t$  に更新する ( $t_{0,i} \rightarrow t$ )。
2.  $\tau_{\text{dep},i}(t_{0,i})$  を計算して更新する。
3.  $\Delta t_{0,i}$  を計算して更新する。

### 2.2.4 面密度と相対速度の求め方

トレーサー  $i$  周りの面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep},i}(t_{0,i})$  は、トレーサー  $i$  周辺の微惑星の面密度と相対速度を求める必要がある。そこで、まずトレーサー  $i$  の位置を 2 次元極座標  $(r_i, \theta_i)$  に射影し、動径方向に  $r_i \pm \Delta r/2$ 、方位角方向に  $\theta_i \pm \Delta\theta/2$  の広がりをもった扇形領域  $i$  を形成する (図 2.4 参照)。

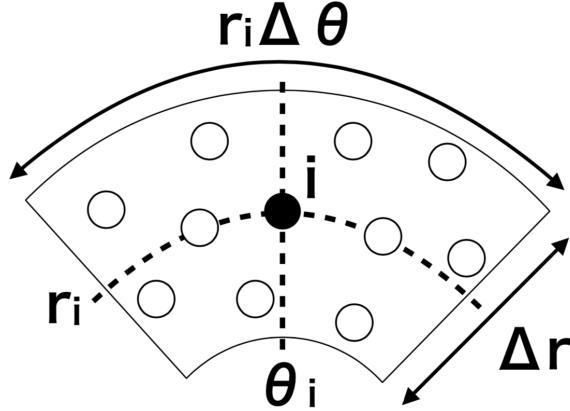


図 2.4 トレーサー  $i$  周りに扇型領域  $i$  を形成し、面密度や相対速度を計算する (Morishima, 2015)。

この領域  $i$  に入っている他のトレーサーを  $j$  とし、 $j$  の総数を  $N$  とする。面密度は  $i$  自身と  $j$  の質量の総和を領域  $i$  の面積で割り、

$$\Sigma_i = \frac{m_i + \sum_j^N m_j}{r_i \Delta r \Delta \theta} \quad (2.63)$$

のように計算する。次にトレーサー  $i$  と  $j$  の相対速度は、ランダム速度  $\sqrt{e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2} v_{K,i}$  で近似する。ここで、 $e_{i,j}$  と  $i_{i,j}$  はそれぞれ相対離心率と相対軌道傾斜角を表し、

$$e_{i,j}^2 = e_i^2 + e_j^2 - 2e_i e_j \cos(\varpi_i - \varpi_j) \quad (2.64)$$

$$i_{i,j}^2 = i_i^2 + i_j^2 - 2i_i i_j \cos(\Omega_i - \Omega_j) \quad (2.65)$$

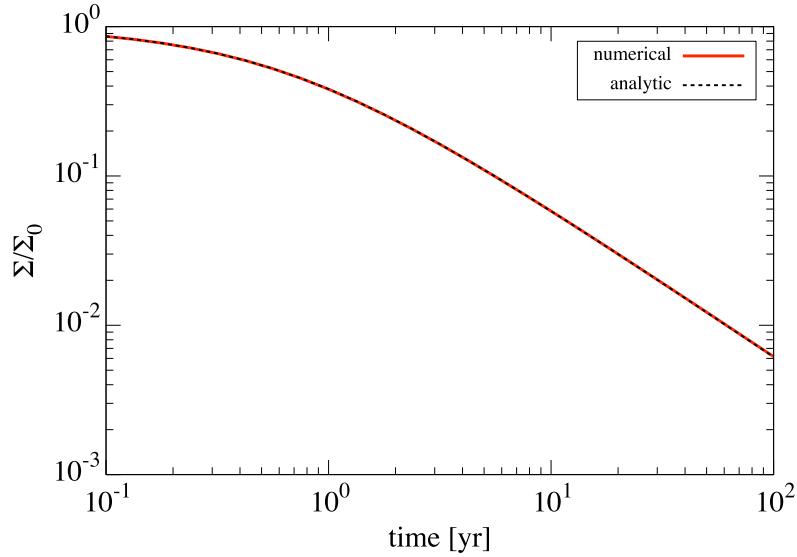
のように定義される。また  $\varpi$  は近点経度、 $\Omega$  は昇交点経度であり、 $v_{K,i}$  は  $i$  のケプラー速度である。そして  $j$  についてランダム速度の二乗平均平方根をとり、それを衝突速度とみなす。

$$v_i = \sqrt{\frac{\sum_j^N (e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2) v_{K,i}^2}{N}} \quad (2.66)$$

## 2.2.5 扇型領域の大きさと精度

$\Delta r, \Delta\theta$  は調べたい物理現象に必要となる解像度に応じて決めることができるが、領域内に含まれる粒子数が少なすぎると統計的に平均をとることができない。微惑星円盤を模

擬したテスト計算を行い、面密度減少の解析解と数値計算との相対誤差を調べたところ、領域内に 10 個程度あれば誤差は 10% 以下になることがわかった（図 2.6 参照）。



**図 2.5** 初期面密度で規格化した面密度進化の計算結果（赤線）と解析解（黒破線）。初期条件として、総質量  $10M_{\oplus}$  のトレーサー 2000 体を中心星  $M_{\odot}$  から  $a = 1\text{AU}$ 、幅  $\Delta a = 0.05$  の領域に面密度  $\Sigma(a) \propto a^{-1}$  となるように分布させた。また離心率と軌道傾斜角は、相対速度の  $a$  依存性をなくすため、 $e(a) = 0.01(a/1\text{AU})^{1/2}$ ,  $i(a) = 0.005(a/1\text{AU})^{1/2}\text{rad}$  とした。さらに、トレーサーに含まれる最大微惑星の質量を  $m_{\max} = 10^{16}\text{g}$  (1km サイズ) とした。このテスト計算では、トレーサー同士の重力相互作用を解かずに 100 年分計算を行ったため、相対速度は時間進化しない。扇型領域の大きさは  $\Delta r = 0.02\text{AU}$ ,  $\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}$  に設定している。初期配置を変えた同様の計算を 40run 行っており、データはそれらの標本平均である。面密度の数値解は、幅  $\Delta a$  の円環内に含まれるトレーサーの質量を全て足し上げた総質量を円環の面積  $2\pi a \Delta a$  で割ったものである。一方、面密度の解析解は、式 (2.59) で求めた幅  $\Delta a$  の円環内の総質量の解析解  $M_{\text{tot}}(a, t)$  を円環の面積  $2\pi a \Delta a$  で割ったものである。したがって、この面密度進化は円環内の総質量進化に対応している。

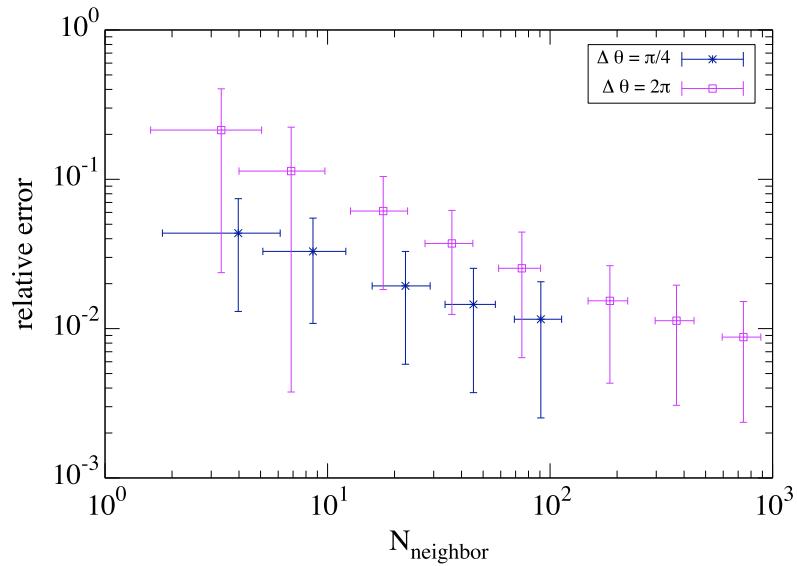


図 2.6 面密度の計算結果（100 年後）と解析解の相対誤差と、扇型領域に含まれる粒子数の関係。

図 2.5 と同様の計算を、トレーサーの個数を  $\{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000\}$  にした場合でも行った。扇型領域の大きさは、 $\Delta r$  はどちらとも 0.02AU に設定しており、青点と紫点は  $\Delta\theta$  をそれぞれ  $\pi/4, 2\pi$  rad に設定したものに対応している。初期配置を変えた同様の計算をそれぞれ 40run 行っており、データ点は標本平均、エラーバーは不偏標準偏差を表している。

## 第3章

# 地球型惑星形成後期のシミュレーション

ガス円盤が晴れた巨大衝突ステージにおいて、原始惑星同士の衝突・合体によって形成された地球型惑星の離心率 ( $\sim 0.1$ ) を、現在の地球や金星の離心率程度 ( $\sim 0.01$ ) までどのように下げるかについては、残存する微惑星と地球型惑星との力学的摩擦説が有力である (Morishima et al., 2010)。しかし、形成された地球型惑星からの重力摂動によって離心率が上昇した残存微惑星は、微惑星同士の衝突・破壊によって面密度が減少する (Kobayashi & Tanaka, 2010)。すると力学的摩擦の効率が低下してしまうため、本当に地球型惑星の離心率を下げることができるのかという問題が新たに生じる。このような、微惑星同士の破壊現象が力学的摩擦に与える影響を調べるために、本研究では  $N$  体計算と統計的手法を組み合わせたハイブリッドコードを開発した。

この章では本研究で開発したハイブリッドコードを用いて、巨大衝突ステージ後期に残存微惑星が存在する場合を模擬してシミュレーションを複数回行い、破壊がない場合に力学的摩擦が本当に効くのか、また破壊がある場合に力学的摩擦の効率はどの程度落ちるのかについて調べた。

### 3.1 破壊なしの場合の力学的摩擦

まずは、微惑星同士の衝突・破壊が全く起こらないと仮定した場合を考え、残存微惑星との力学的摩擦による地球型惑星の離心率進化を調べる。図 3.1a, 3.2a のような初期条件で軌道長半径  $a$  や離心率  $e$ 、軌道傾斜角  $i$  を決定する。一方、初期経度（近点経度  $\varpi$  や昇

交点経度  $\Omega$ 、離心近点離角  $E$ ) は  $[0 : 2\pi]$  の範囲からランダムに選び決定する。重力  $N$  体計算は初期配置によって結果が変わるようなカオス的な計算であるため、初期経度を変えた同様の計算を 13run 行い、離心率や軌道傾斜角については二乗平均平方根をとることで傾向を得ることにした。

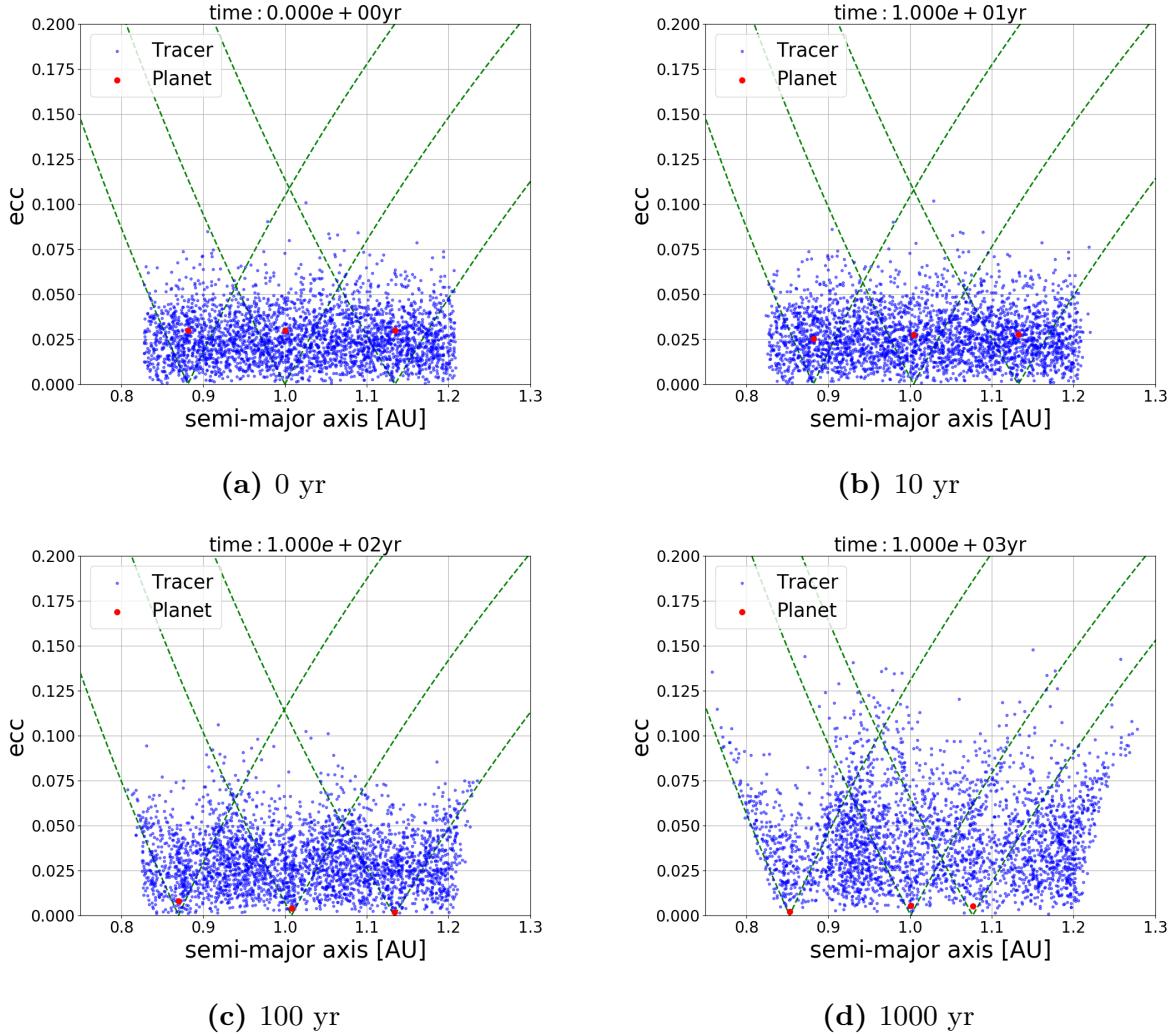


図 3.1 縦軸：離心率、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 3 体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、3 体とも離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $0.01 M_{\oplus}$ ) 3000 体を、最内側惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から最外側惑星の相互ヒル半径の 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015 \text{ rad}$  とした。緑破線は各惑星が完全な円軌道だと仮定したときの等ヤコビエネルギー線である。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。

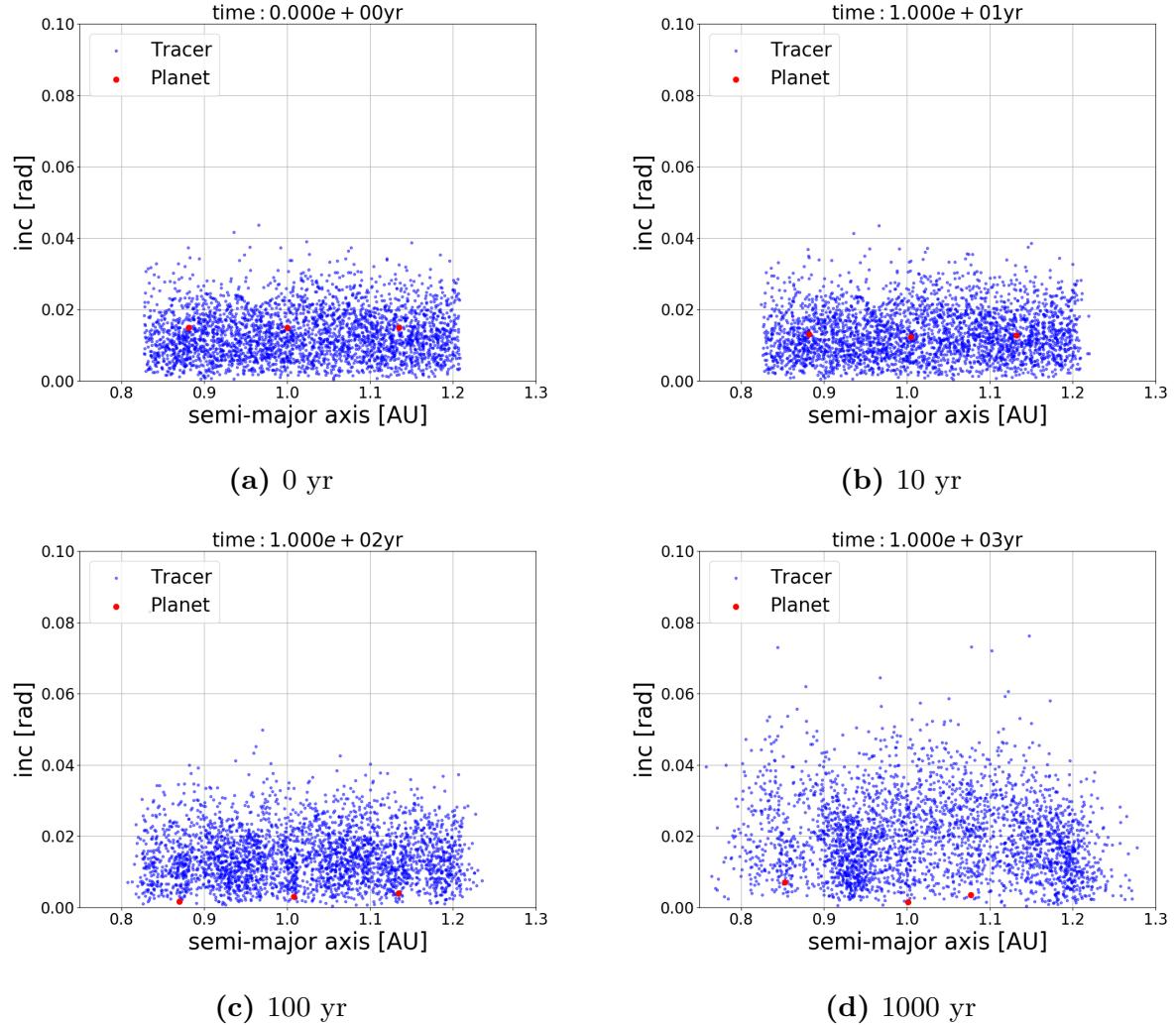
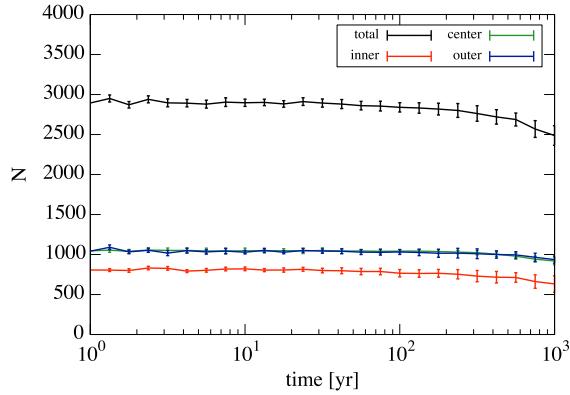
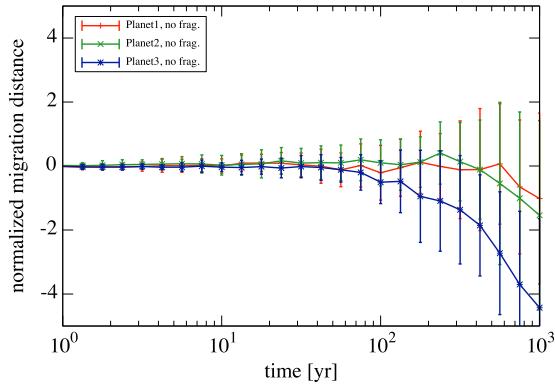


図 3.2 縦軸：軌道傾斜角、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 3 体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、3 体とも離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $0.01 M_{\oplus}$ ) 3000 体を、最内側惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から最外側惑星の相互ヒル半径の 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015 \text{ rad}$  とした。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。



**図 3.3** トレーサー粒子の個数の時間進化。総粒子数を黒線、真ん中の惑星の近傍（惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から 5 倍外側までの範囲）の粒子数を緑線、その範囲より内側、外側にいる粒子数をそれぞれ赤線、青線で表し、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の平均と不偏標準偏差をプロットしている。トレーサー粒子は惑星に重力散乱されるため内側、外側へ移動するが、真ん中の惑星は隣の惑星からトレーサー粒子を供給されるため、真ん中の惑星の近傍の粒子数は変化しにくい。また惑星に衝突すると集積されるため総粒子数が減っていく。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。



**図 3.4** それぞれの惑星のヒル半径で規格化した軌道長半径の時間変化。内側の惑星を赤線、真ん中の惑星を緑線、外側の惑星を青線で表し、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の平均と不偏標準偏差をプロットしている。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。

図 3.3, 3.4 より、真ん中の惑星は微惑星円盤の内側境界と外側境界の影響を受けていないと思われる。そのためここからは、3 つのうち真ん中の惑星の離心率と軌道傾斜角を考える。

図 3.1, 3.2 より、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサーの離心率と軌道傾斜角が時間経過とともに上昇する代わりに、惑星の離心率と軌道傾斜角が時間経過とともに減少していることがわかる。この傾向は力学的摩擦と一致する。この傾向が本当に力学的摩擦によって離心率と軌道傾斜角が変化したのかを確かめるため、式 (2.23), (2.24) で表される平均離心率（軌道傾斜角）の変化率の解析解 (Ohtsuki et al., 2002) を数値積分し、13run の二乗平均平方根と比較を行った（図 3.5 参照）。

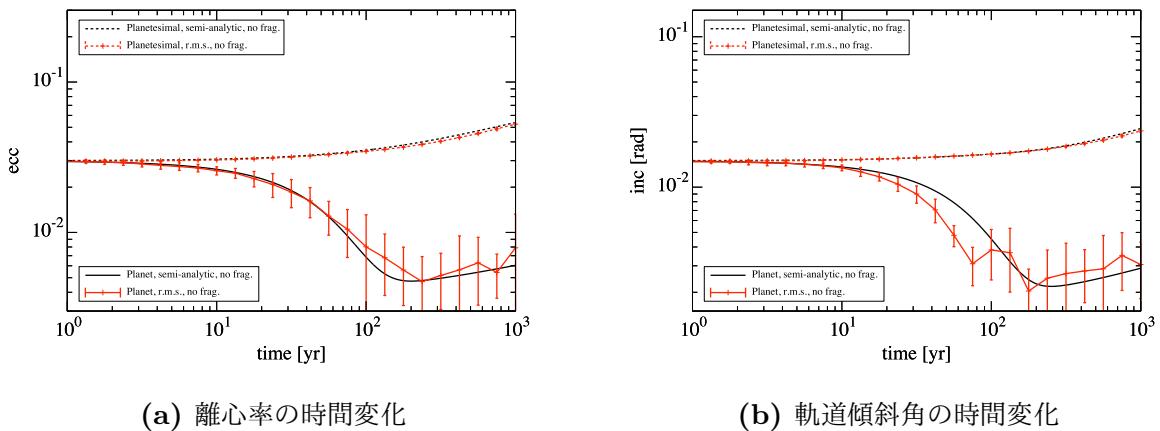


図 3.5 図 3.1a, 3.2a のような初期条件から計算したときの離心率 (a) と軌道傾斜角 (b) の時間進化。赤実線は 3 体のうち真ん中の惑星、赤破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子であり、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の二乗平均平方根とその不確かさをプロットしている。また、黒線は式 (2.23), (2.24) を数値積分した解析解であり、黒実線は惑星、黒破線は微惑星である。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。

図 3.5 より、不確かさの範囲において、惑星の離心率と軌道傾斜角は力学的摩擦によって減少していることがわかる。さらにこの図から、平均離心率（軌道傾斜角）の変化率の解析解は、離心率が  $0.01 < e < 0.1$  のような比較的大きい範囲でも重力相互作用を非常に良く記述できることがわかる。

## 3.2 破壊を考慮した場合の力学的摩擦

続いて、微惑星同士の衝突・破壊が起こる場合を考える。衝突・破壊の際に放出される破片は、衝突カスケードによって小さくなていき、 $1\mu\text{m}$  サイズになると中心星からの輻射圧によって系外に吹き飛ばされ、その結果残存微惑星の面密度は減少する。形成された地球型惑星からの重力摂動によって微惑星の離心率（軌道傾斜角）は上昇し、微惑星同士の相対速度も上昇する。この微惑星の離心率（軌道傾斜角）の時間変化の効果を、式 (2.23),(2.24) で表される平均離心率（軌道傾斜角）の変化率の解析解 (Ohtsuki et al., 2002) を用いて、式 (2.47) で表される面密度変化率の解析解 (Kobayashi & Tanaka, 2010) と共に数値積分を行うことにより、面密度進化の解析解（図 3.6 参照）と離心率（軌道傾斜角）進化の解析解（図 3.11,3.16 参照）を求めることができる。

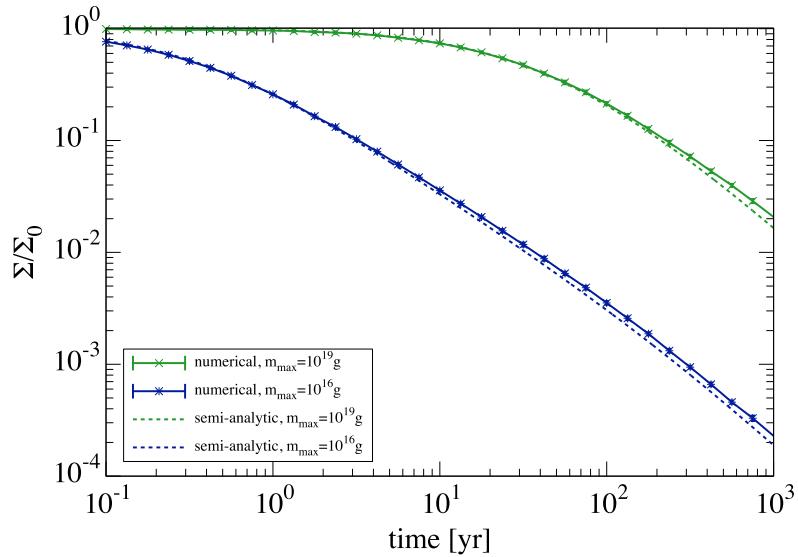


図 3.6 微惑星の離心率（軌道傾斜角）進化を考慮したときの微惑星同士の衝突・破壊による面密度進化。実線は、図 3.7a,3.8a のような初期条件の下で、初期経度を変えた 13run の標本平均と不偏標準偏差である。また破線は相対速度の時間変化を考慮した面密度進化の解析解である。そして緑線と青線はそれぞれ最大微惑星質量を  $m_{\max} = 10^{19}\text{g}, 10^{16}\text{g}$  にした場合に対応している。

### 3.2.1 最大微惑星が 10km サイズの場合

最大微惑星の質量  $m_{\max} = 10^{19}\text{g}$  (10km サイズ) の場合の残存微惑星との力学的摩擦による地球型惑星の離心率進化を調べる。

図 3.7a,3.8a のような初期条件で軌道長半径  $a$  や離心率  $e$ 、軌道傾斜角  $i$  を決定する。一方、初期経度（近点経度  $\varpi$  や昇交点経度  $\Omega$ 、離心近点離角  $E$ ）は  $[0 : 2\pi]$  の範囲からランダムに選び決定する。重力  $N$  体計算は初期配置によって結果が変わらるようなカオス的な計算であるため、初期経度を変えた同様の計算を 13run 行い、離心率や軌道傾斜角については二乗平均平方根をとることで傾向を得ることにした。

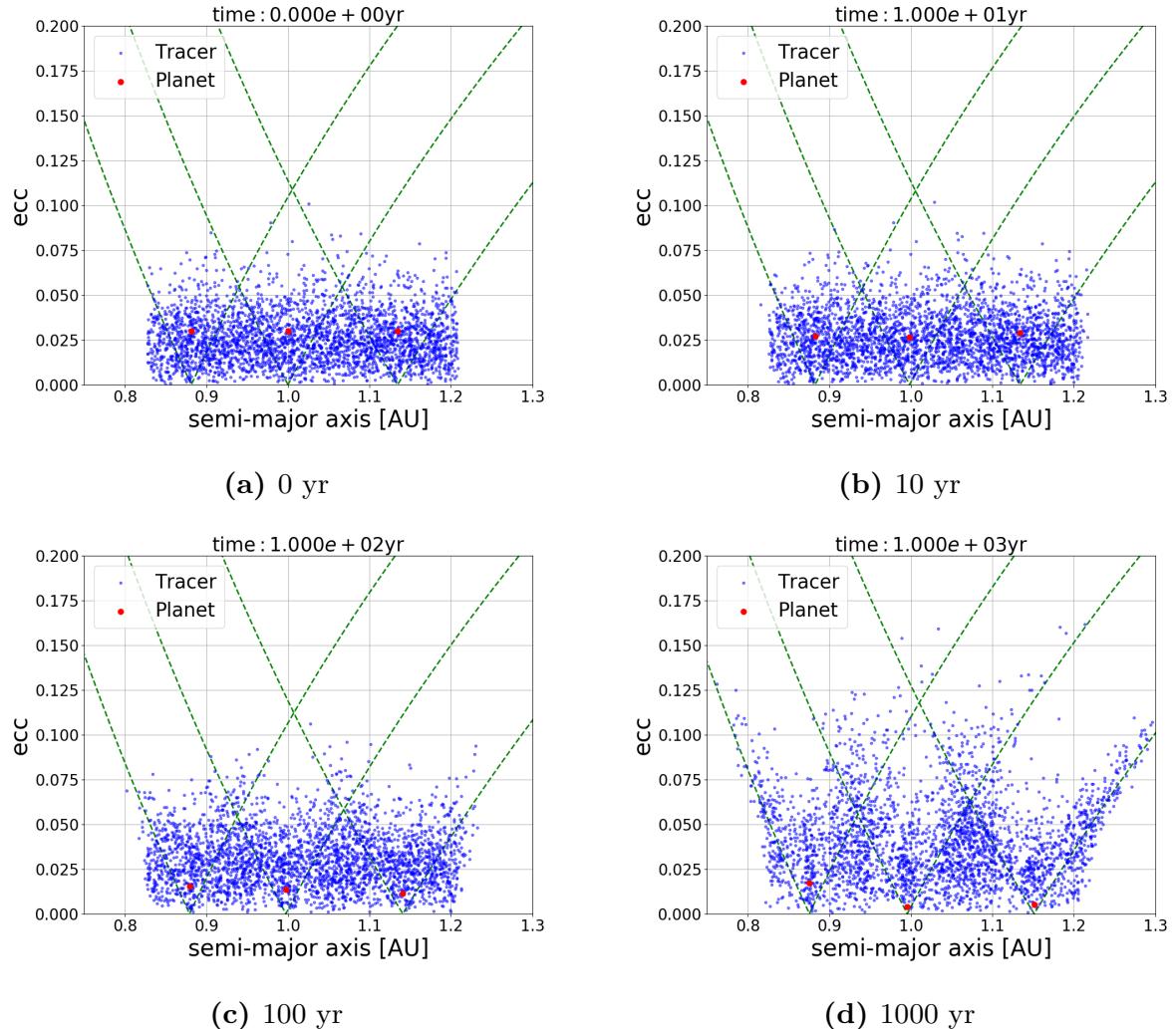


図 3.7 縦軸：離心率、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 3 体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、3 体とも離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $0.01 M_{\oplus}$ ) 3000 体を、最内側惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から最外側惑星の相互ヒル半径の 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015 \text{ rad}$  とした。緑破線は各惑星が完全な円軌道だと仮定したときの等ヤコビエネルギー線である。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{19} \text{ g}$  (10km サイズ) とした。

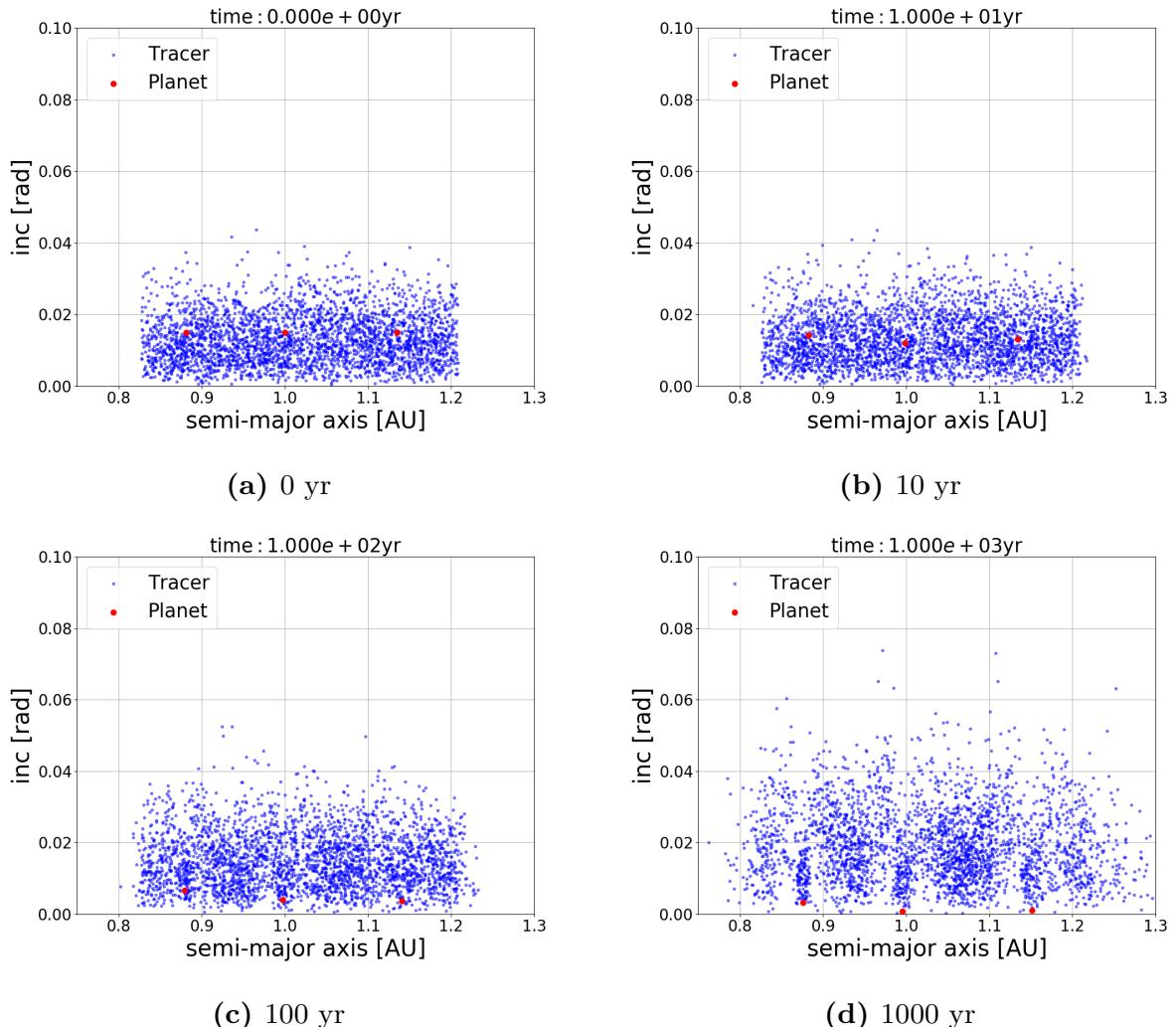
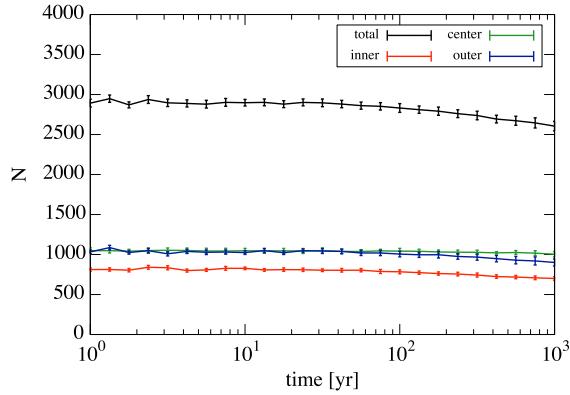
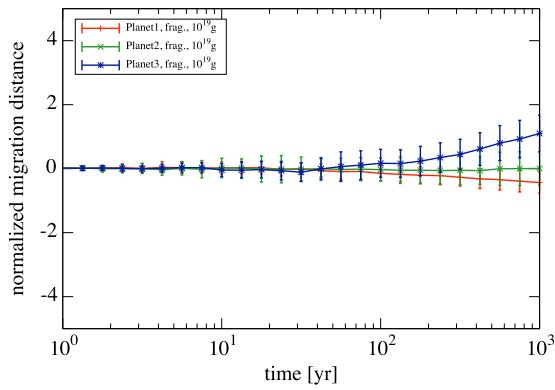


図 3.8 縦軸：軌道傾斜角、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 3 体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、3 体とも離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $0.01 M_{\oplus}$ ) 3000 体を、最内側惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から最外側惑星の相互ヒル半径の 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015 \text{ rad}$  とした。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{19} \text{ g}$  (10km サイズ) とした。



**図 3.9** トレーサー粒子の個数の時間進化。総粒子数を黒線、真ん中の惑星の近傍（惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から 5 倍外側までの範囲）の粒子数を緑線、その範囲より内側、外側にいる粒子数をそれぞれ赤線、青線で表し、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の平均と不偏標準偏差をプロットしている。トレーサー粒子は惑星に重力散乱されるため内側、外側へ移動するが、真ん中の惑星は隣の惑星からトレーサー粒子を供給されるため、真ん中の惑星の近傍の粒子数は変化しにくい。また惑星に衝突すると集積されるため総粒子数が減っていく。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{19}$  g (10km サイズ) とした。



**図 3.10** それぞれの惑星のヒル半径で規格化した軌道長半径の時間変化。内側の惑星を赤線、真ん中の惑星を緑線、外側の惑星を青線で表し、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の平均と不偏標準偏差をプロットしている。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{19}$  g (10km サイズ) とした。

図 3.9, 3.10 より、真ん中の惑星は微惑星円盤の内側境界と外側境界の影響を受けていないと思われる。そのためここからは、3 つのうち真ん中の惑星の離心率と軌道傾斜角を考

える。

図 3.7, 3.8 より、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサーの離心率と軌道傾斜角が時間経過とともに上昇する代わりに、惑星の離心率と軌道傾斜角が時間経過とともに減少していることがわかる。この傾向は力学的摩擦と一致する。この傾向が本当に力学的摩擦によって離心率と軌道傾斜角が変化したのかを確かめるため、面密度進化を考慮した離心率（軌道傾斜角）進化の解析解と、13run の二乗平均平方根との比較を行った（図 3.11 参照）。

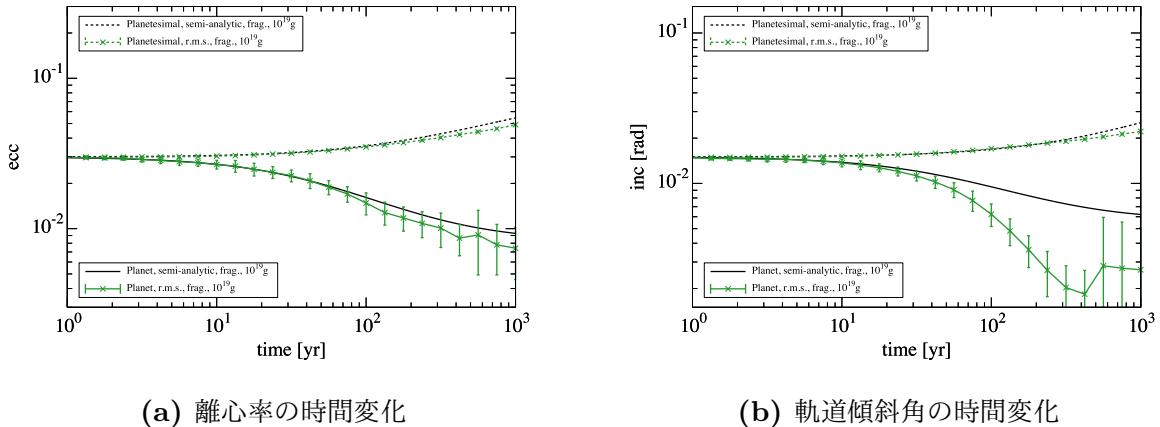


図 3.11 図 3.7a, 3.8a のような初期条件から計算したときの離心率 (a) と軌道傾斜角 (b) の時間進化。緑実線は 3 体のうち真ん中の惑星、緑破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子であり、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の二乗平均平方根とその不確かさをプロットしている。また、黒線は式 (2.23), (2.24) と (2.47) を共に数値積分した、微惑星同士の破壊による面密度減少を考慮した解析解であり、黒実線は惑星、黒破線は微惑星である。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{19}$  g (10km サイズ)とした。

図 3.11a より、不確かさの範囲において、惑星の離心率は力学的摩擦によって減少していることがわかる。一方図 3.11b では、惑星の軌道傾斜角は力学的摩擦の解析解よりも急激に減少している。この傾向は破壊なしの場合の軌道傾斜角進化である図 3.5b でも見られるため、おそらく式 (2.24) で表される平均軌道傾斜角の変化率の解析解が、面密度が変化する場合を考慮して定式化されたものではないこと、または惑星を 3 つ配置する初期条

件が原因であると考えられる。しかし相対速度の見積もり ( $\sim (\langle e^2 \rangle + \langle i^2 \rangle)^{1/2} v_K$ ) にはほとんど影響しないため、ここでは無視する。

### 3.2.2 最大微惑星が 1km サイズの場合

最大微惑星の質量  $m_{\max} = 10^{16} \text{g}$  (1km サイズ) の場合の残存微惑星との力学的摩擦による地球型惑星の離心率進化を調べる。

図 3.12a, 3.13a のような初期条件で軌道長半径  $a$  や離心率  $e$ 、軌道傾斜角  $i$  を決定する。一方、初期経度（近点経度  $\varpi$  や昇交点経度  $\Omega$ 、離心近点離角  $E$ ）は  $[0 : 2\pi]$  の範囲からランダムに選び決定する。重力  $N$  体計算は初期配置によって結果が変わらるようなカオス的な計算であるため、初期経度を変えた同様の計算を 13run 行い、離心率や軌道傾斜角については二乗平均平方根をとることで傾向を得ることにした。

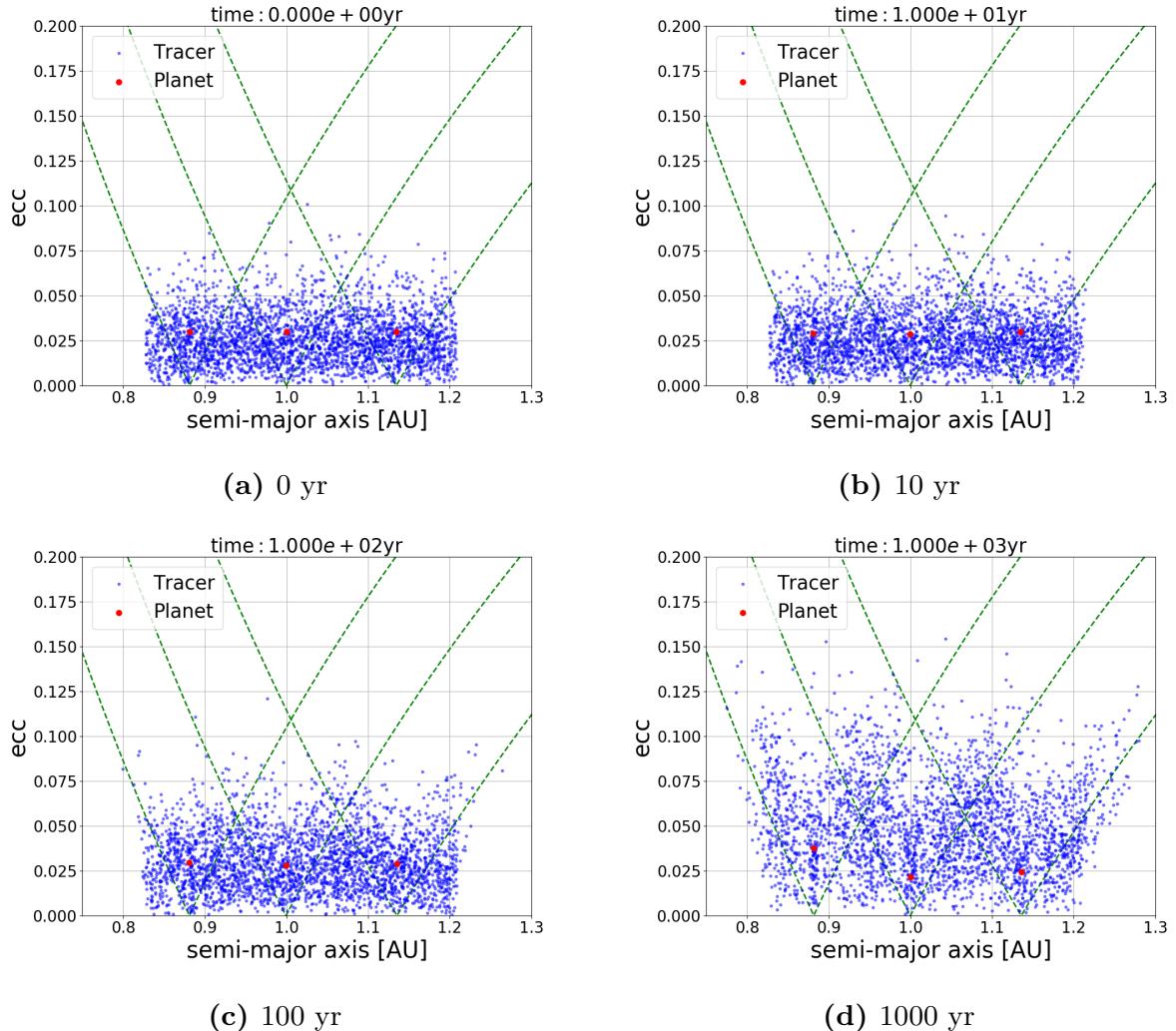
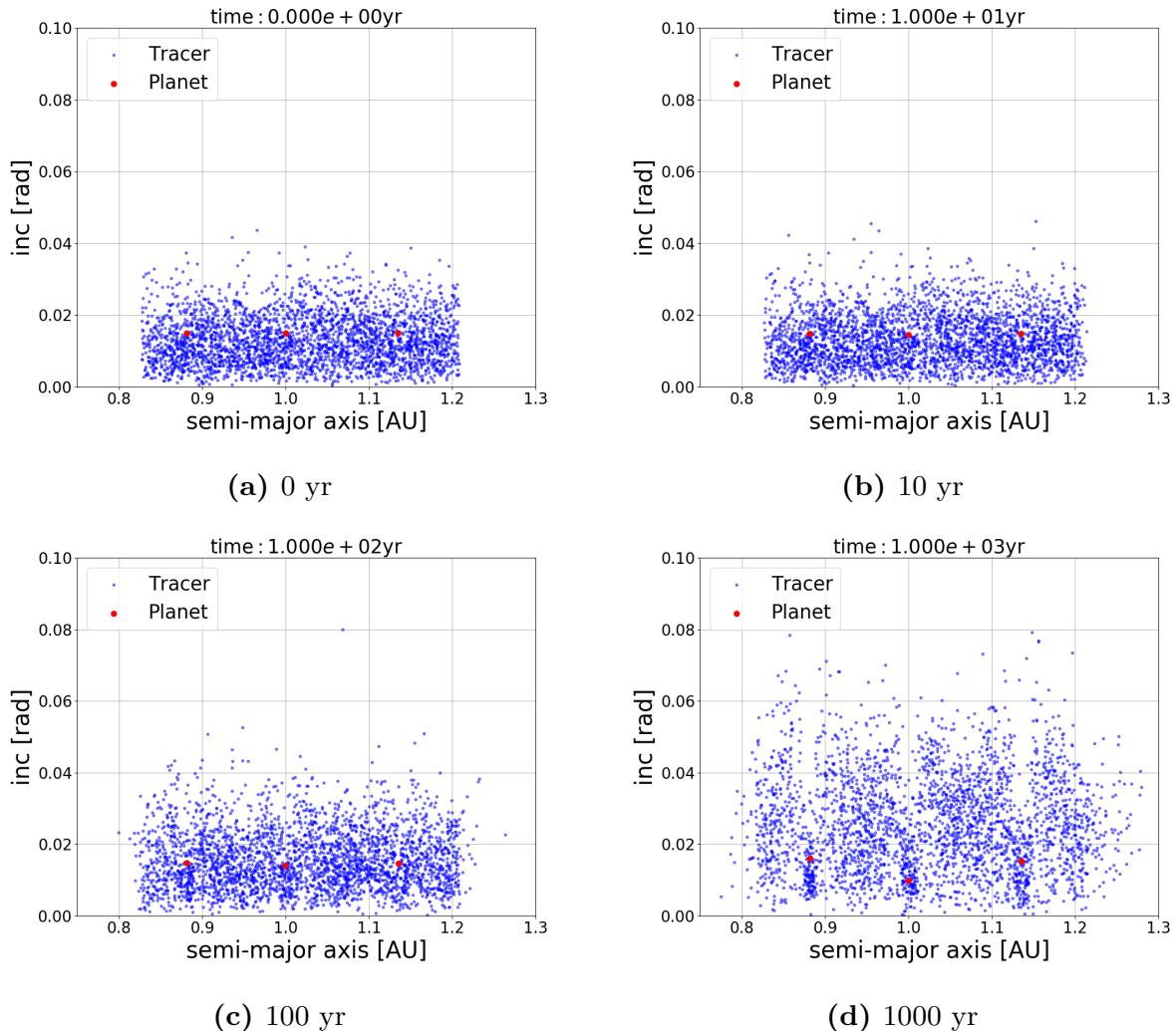


図 3.12 縦軸：離心率、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 3 体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、3 体とも離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $0.01 M_{\oplus}$ ) 3000 体を、最内側惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から最外側惑星の相互ヒル半径の 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015 \text{ rad}$  とした。緑破線は各惑星が完全な円軌道だと仮定したときの等ヤコビエネルギー線である。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{16} \text{ g}$  (1km サイズ) とした。



**図 3.13** 縦軸：軌道傾斜角、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 3体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に相互ヒル半径の 10 倍間隔で配置し、3 体とも離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $0.01 M_{\oplus}$ ) 3000 体を、最内側惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から最外側惑星の相互ヒル半径の 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015 \text{ rad}$  とした。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{16} \text{ g}$  (1km サイズ) とした。

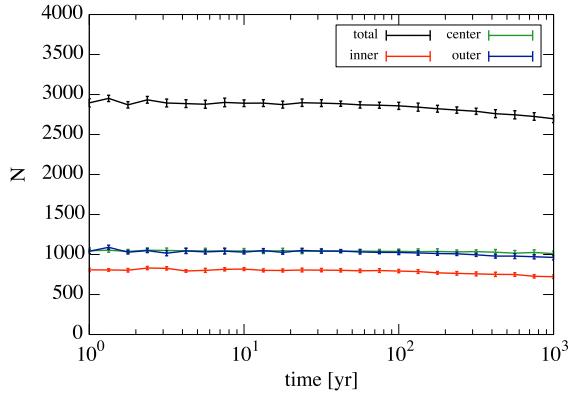


図 3.14 トレーサー粒子の個数の時間進化。総粒子数を黒線、真ん中の惑星の近傍（惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から 5 倍外側までの範囲）の粒子数を緑線、その範囲より内側、外側にいる粒子数をそれぞれ赤線、青線で表し、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の平均と不偏標準偏差をプロットしている。トレーサー粒子は惑星に重力散乱されるため内側、外側へ移動するが、真ん中の惑星は隣の惑星からトレーサー粒子を供給されるため、真ん中の惑星の近傍の粒子数は変化しにくい。また惑星に衝突すると集積されるため総粒子数が減っていく。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{16}$  g (1km サイズ) とした。

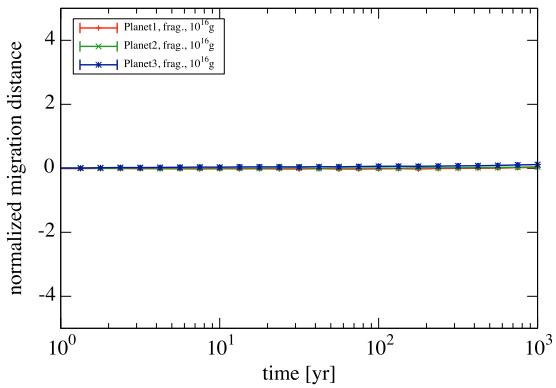


図 3.15 それぞれの惑星のヒル半径で規格化した軌道長半径の時間変化。内側の惑星を赤線、真ん中の惑星を緑線、外側の惑星を青線で表し、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の平均と不偏標準偏差をプロットしている。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{16}$  g (1km サイズ) とした。

図 3.14,3.15 より、真ん中の惑星は微惑星円盤の内側境界と外側境界の影響を受けてい

ないと思われる。そのためここからは、3つのうち真ん中の惑星の離心率と軌道傾斜角を考える。

図 3.12,3.13 より、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサーの離心率と軌道傾斜角が時間経過とともに上昇しているが、惑星の離心率と軌道傾斜角はあまり変化していない。これは微惑星の面密度減少によって、力学的摩擦が効かなくなつたことを表していると考えられる。この傾向が力学的摩擦の効率低下によるものなのかを確かめるため、面密度進化を考慮した離心率（軌道傾斜角）進化の解析解と、13run の二乗平均平方根との比較を行った（図 3.16 参照）。

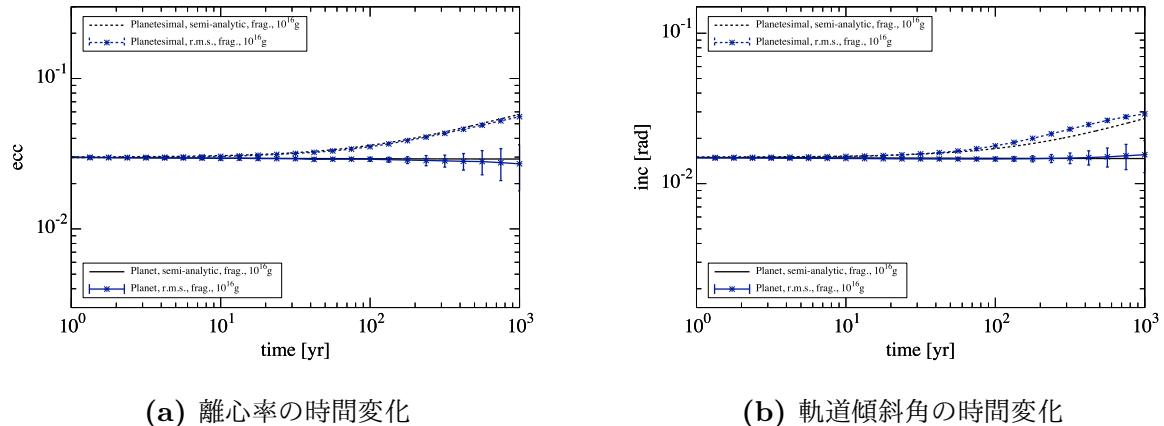


図 3.16 図 3.12a, 3.13a のような初期条件から計算したときの離心率 (a) と軌道傾斜角 (b) の時間進化。青実線は 3 体のうち真ん中の惑星、青破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子であり、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の二乗平均平方根とその不確かさをプロットしている。また、黒線は式 (2.23), (2.24) と (2.47) を共に数値積分した、微惑星同士の破壊による面密度減少を考慮した解析解であり、黒実線は惑星、黒破線は微惑星である。この計算では微惑星同士の破壊を考慮し、最大微惑星を  $10^{16}$  g (1km サイズ)とした。

図 3.16 より、不確かさの範囲において、惑星の離心率と軌道傾斜角は力学的摩擦の解析解と一致しており、微惑星の面密度減少によって力学的摩擦の効率が低下した結果、ほとんど時間変化していないことがわかる。

### 3.3 破壊が力学的摩擦に与える影響

初期に惑星の離心率  $e_p = 0.03$ 、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサーの離心率  $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$  という場合のみを紹介したが、 $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.01, 0.05$  の場合も同様の計算を行った。この節では、破壊を考慮する場合としない場合における離心率（軌道傾斜角）の時間変化の違いを比べ、その初期離心率（軌道傾斜角）依存性についても簡単に調べる。

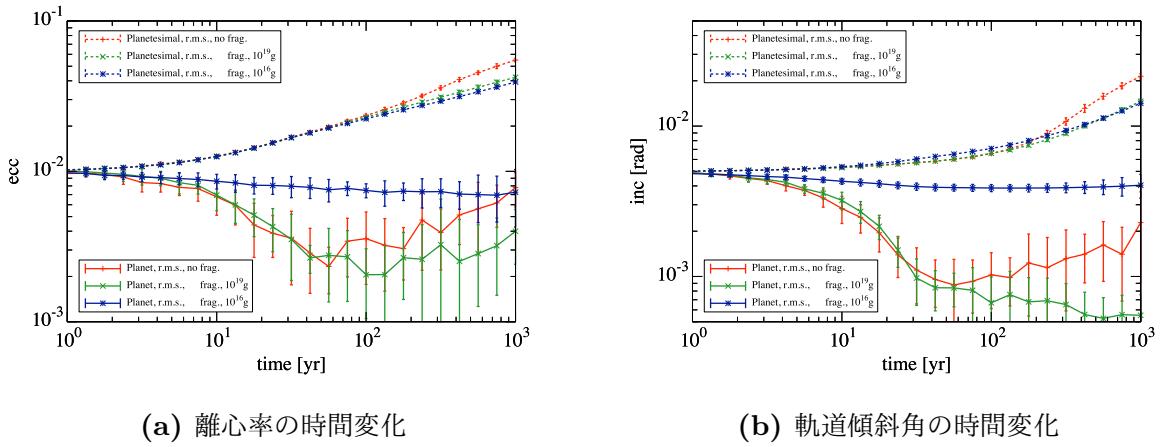


図 3.17 初期に  $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.01, i_p = \langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.005$  で配置したときの、破壊を考慮する場合としない場合における離心率 (a) と軌道傾斜角 (b) の時間進化の違い。実線は 3 体のうち真ん中の惑星、破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子であり、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の二乗平均平方根とその不確かさをプロットしている。また赤線は破壊なしの場合、緑線は破壊ありかつ  $m_{\text{max}} = 10^{19} \text{ g}$  の場合、青線は破壊ありかつ  $m_{\text{max}} = 10^{16} \text{ g}$  の場合に対応している。

図 3.17 より、初期に  $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.01, i_p = \langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.005$  の場合、

- 破壊ありかつ最大微惑星が  $10^{19} \text{ g}$  (10km サイズ) のものは、破壊なしのものと離心率（軌道傾斜角）の下がり方が似ており、力学的摩擦は十分効いている。
- 破壊ありかつ最大微惑星が  $10^{16} \text{ g}$  (1km サイズ) のものは、微惑星による力学的摩擦の効率が落ち、惑星の離心率（軌道傾斜角）を下げる事がほとんどできてい

ない。

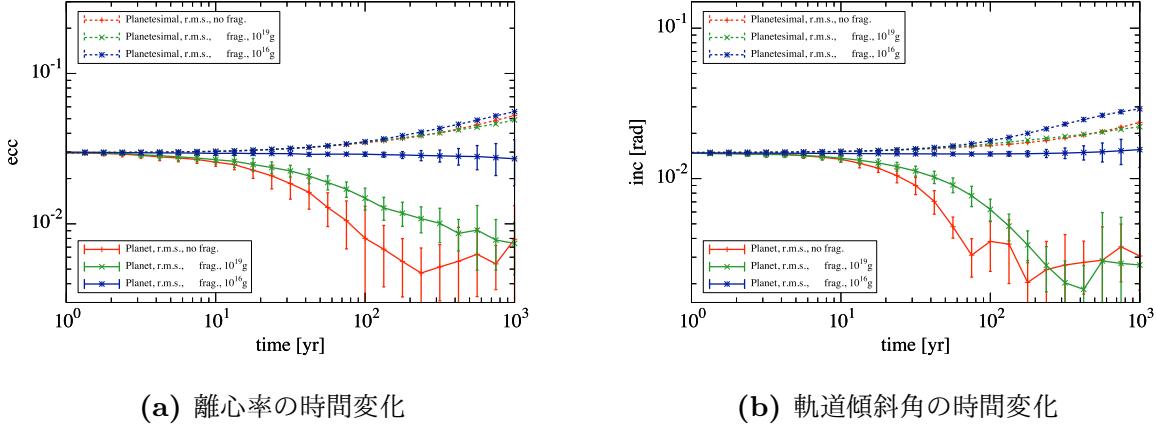
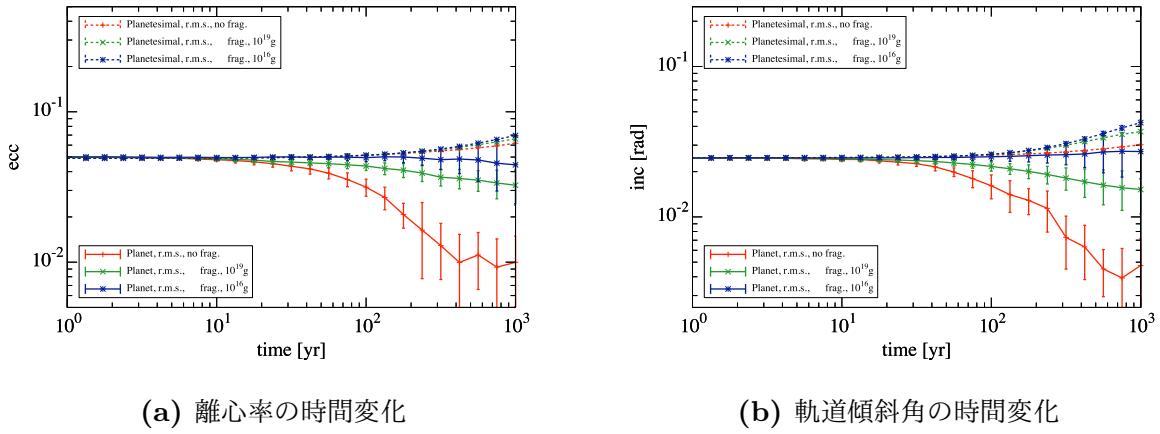


図 3.18 初期に  $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $i_p = \langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015$  で配置したときの、破壊を考慮する場合としない場合における離心率 (a) と軌道傾斜角 (b) の時間進化の違い。実線は3体のうち真ん中の惑星、破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子であり、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の二乗平均平方根とその不確かさをプロットしている。また赤線は破壊なしの場合 (図 3.5)、緑線は破壊ありかつ  $m_{\text{max}} = 10^{19}\text{g}$  の場合 (図 3.11)、青線は破壊ありかつ  $m_{\text{max}} = 10^{16}\text{g}$  の場合 (図 3.16) に対応している。

図 3.18 より、初期に  $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.03$ ,  $i_p = \langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.015$  の場合、

- 破壊ありかつ最大微惑星が  $10^{19}\text{g}$  (10km サイズ) のものは、破壊なしのものよりも離心率 (軌道傾斜角) の下がり方が緩やかになり、力学的摩擦の効率がやや落ちている。
- 破壊ありかつ最大微惑星が  $10^{16}\text{g}$  (1km サイズ) のものは、微惑星による力学的摩擦の効率が落ち、惑星の離心率 (軌道傾斜角) を下げることがほとんどできていない。



**図 3.19** 初期に  $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.05$ ,  $i_p = \langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.025$  で配置したときの、破壊を考慮する場合としない場合における離心率 (a) と軌道傾斜角 (b) の時間進化の違い。実線は3体のうち真ん中の惑星、破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子であり、初期経度を変えた  $N$  体計算 13run の二乗平均平方根とその不確かさをプロットしている。また赤線は破壊なしの場合、緑線は破壊ありかつ  $m_{\text{max}} = 10^{19}\text{g}$  の場合、青線は破壊ありかつ  $m_{\text{max}} = 10^{16}\text{g}$  の場合に対応している。

**図 3.19** より、初期に  $e_p = \langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.05$ ,  $i_p = \langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.025$  の場合、

- 破壊ありかつ最大微惑星が  $10^{19}\text{g}$  (10km サイズ) のものは、微惑星による力学的摩擦の効率が落ち、惑星の離心率 (軌道傾斜角) を下げることがあまりできていない。
- 破壊ありかつ最大微惑星が  $10^{16}\text{g}$  (1km サイズ) のものは、微惑星による力学的摩擦の効率が落ち、惑星の離心率 (軌道傾斜角) を下げることがほとんどできていない。

以上より、破壊を考慮する場合としない場合における離心率 (軌道傾斜角) の時間変化を比較すると、初期離心率 (軌道傾斜角) が大きいほど、そして最大微惑星のサイズが小さいほど力学的摩擦の効率が落ちることがわかった。

# 第 4 章

## 議論

ここでは力学的摩擦と面密度減少のタイムスケールの比較を行い、力学的摩擦の効率の初期離心率依存性と最大微惑星のサイズ依存性を導出する。また残存微惑星の起源を議論する。

### 4.1 力学的摩擦のタイムスケール

中心星  $M_{\odot}$  から  $a$  の位置を基準としてケプラー運動する惑星  $m_1$  と微惑星  $m_2$  の 2 つの集団を考える。面数密度  $N_{s2}$  の微惑星  $m_2$  との力学的摩擦による惑星  $m_1$  の平均離心率  $\langle e_1^2 \rangle$  の変化率は、 $m_1 \gg m_2$ ,  $\langle e_1^2 \rangle^{1/2} = \langle e_2^2 \rangle^{1/2}$  とすると、式 (2.23) の第 2 項より

$$\left( \frac{d\langle e_1^2 \rangle}{dt} \right)_{df} = a\Omega_K N_{s2} \frac{h_{12}^4 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_2 \langle e_2^2 \rangle - m_1 \langle e_1^2 \rangle}{\langle e_1^2 \rangle + \langle e_2^2 \rangle} \langle P_{DF} \rangle_{12} \quad (4.1)$$

$$\simeq -a\Omega_K \Sigma \left( \frac{m_1}{3M_{\odot}} \right)^{4/3} \frac{1}{m_1^2} \frac{m_1 \langle e_1^2 \rangle}{2\langle e_1^2 \rangle} \langle P_{DF} \rangle_{12} \quad (4.2)$$

$$\propto -a^{1/2} \Sigma m_1^{1/3} \langle P_{DF} \rangle_{12} \quad (4.3)$$

のようにかける。したがって、力学的摩擦のタイムスケール  $\tau_{df}$  は

$$\tau_{df} = \left| \frac{\langle e_1^2 \rangle}{d\langle e_1^2 \rangle/dt} \right| \quad (4.4)$$

$$\propto a^{-1/2} \Sigma^{-1} m_1^{-1/3} \langle e_1^2 \rangle \langle P_{DF} \rangle_{12}^{-1} \quad (4.5)$$

となり、微惑星の面密度  $\Sigma$  に反比例する。 $\tau_{df}$  の離心率依存性については、式 (2.28) から  $\langle P_{DF} \rangle_{12}$  を計算すると図 4.1 のようになった。

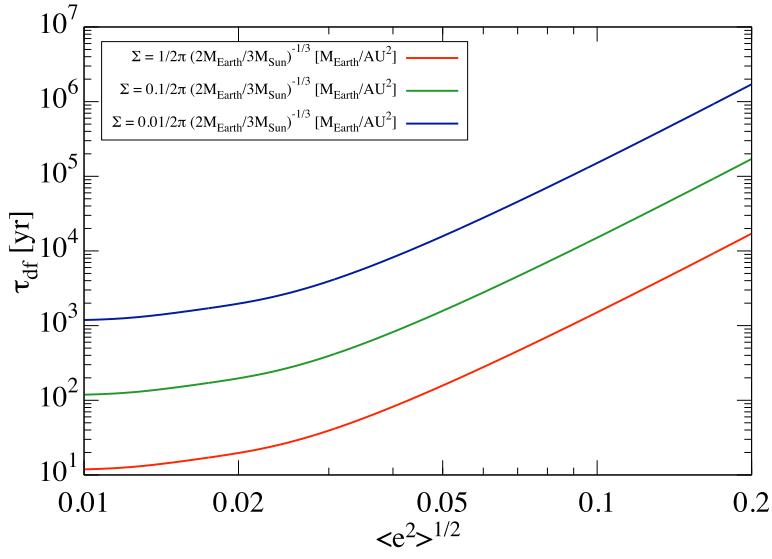


図 4.1 力学的摩擦のタイムスケール  $\tau_{df}$  の離心率依存性。中心星  $M_{\odot}$  から 1AU の位置をケプラー運動する惑星  $M_{\oplus}$  は、 $1AU \pm 5R_{H,M}$  の範囲内に総質量  $10M_{\oplus}$  (赤線)、 $1M_{\oplus}$  (緑線)、 $0.1M_{\oplus}$  (青線) だけ存在するような面密度  $\Sigma$  をもつ微惑星集団と力学的摩擦を起こし、 $\tau_{df}$  程度の時間で惑星の離心率が減少する。ここで  $R_{H,M}$  は惑星  $M_{\oplus}$  の相互ヒル半径である。この図から、初期離心率が大きいほど力学的摩擦のタイムスケール  $\tau_{df}$  は長くなることがわかる。

## 4.2 面密度減少のタイムスケール

中心星  $M_{\odot}$  から  $a$  の位置をケプラー運動する、最大微惑星  $m_{max}$  を含む様々なサイズからなる微惑星集団を考える。微惑星の面密度は  $\Sigma$  であり、微惑星同士の衝突・破壊によって面密度は減少する。この面密度減少のタイムスケール  $\tau_{dep}$  は、式 (2.51) より

$$\tau_{dep} = \frac{m_{max}^{1/3}}{(2-\alpha)^2 \Sigma h_0 \Omega_K} \left( \frac{v(m_{max})^2}{2Q_D^*(m_{max})} \right)^{-\alpha+1} \times \left[ \left( -\ln \varepsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1(\alpha) + s_2(\alpha) + s_3(\alpha) \right]^{-1} \quad (4.6)$$

$$\propto a^{\alpha+1/2} \Sigma^{-1} m_{max}^{1/3+p(\alpha-1)} \langle e^2 \rangle^{-\alpha+1} \rho^{2/3+q(\alpha-1)} \quad (4.7)$$

のようにかける。ここで、 $b, \varepsilon$  は無次元パラメータ、 $h_0, s_1, s_2, s_3$  は定数、 $\Omega_K$  はケプラー角速度、 $Q_D^*$  は破壊に必要な衝突体質量あたりのエネルギー、そして  $\alpha$  は微惑星の面数

密度のべき ( $n_s(m)dm \propto m^{-\alpha}dm$ ) である。また、付録 F より  $h_0 \propto \rho^{-2/3}$  のような物質密度  $\rho$  の依存性がある。さらに、付録 C より  $Q_D^* \propto \rho^q m^p$  とかけ、Benz & Asphaug (1999) の結果から本研究では  $q = 0.547, p = 0.453$  を採用する。このとき、定常衝突力スケードにおいて、 $\alpha = (11 + 3p)/(6 + 3p) = 1.68$  のように与えられる (Kobayashi & Tanaka, 2010)。これらの定数を式 (4.7) に代入すると

$$\tau_{\text{dep}} \propto a^{2.18} \Sigma^{-1} m_{\text{max}}^{0.641} \left( \langle e^2 \rangle^{1/2} \right)^{-1.36} \rho^{1.04} \quad (4.8)$$

となる。したがって、前節の力学的摩擦のタイムスケール  $\tau_{\text{df}}$  と同様に、面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep}}$  は微惑星の面密度  $\Sigma$  に反比例する。離心率依存性は図 4.2 のようになった。

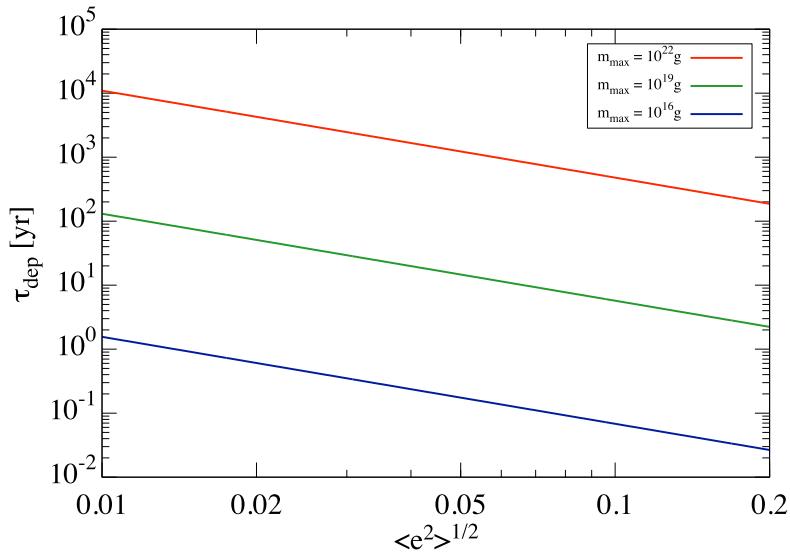


図 4.2 面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep}}$  の離心率依存性。中心星  $M_\odot$  から 1AU の位置をケプラー運動する、 $1\text{AU} \pm 5R_{\text{H,M}}$  の範囲内に総質量  $10M_\oplus$  だけ存在するような面密度  $\Sigma$  をもつ微惑星集団は、微惑星集団に含まれる最大微惑星  $m_{\text{max}}$  を  $10^{22}\text{g}$  (100km サイズ、赤線)、 $10^{19}\text{g}$  (10km サイズ、緑線)、 $10^{16}\text{g}$  (1km サイズ、青線) に設定した場合、 $\tau_{\text{dep}}$  程度の時間で面密度が減少する。ここで  $R_{\text{H,M}}$  は地球質量  $M_\oplus$  の惑星の相互ヒル半径である。この図から、初期離心率が大きいほど面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep}}$  は短くなることがわかる。

## 4.3 2つのタイムスケールの比較

式(4.5)と式(4.7)の比をとると

$$\frac{\tau_{\text{dep}}}{\tau_{\text{df}}} \propto a^{\alpha+1} m_1^{1/3} m_{\max}^{1/3+p(\alpha-1)} \rho^{2/3+q(\alpha-1)} \langle e^2 \rangle^{-\alpha} \langle P_{\text{DF}} \rangle_{12} \quad (4.9)$$

のようになり、微惑星の面密度  $\Sigma$  には依存しない。離心率依存性は図4.2のようになった。

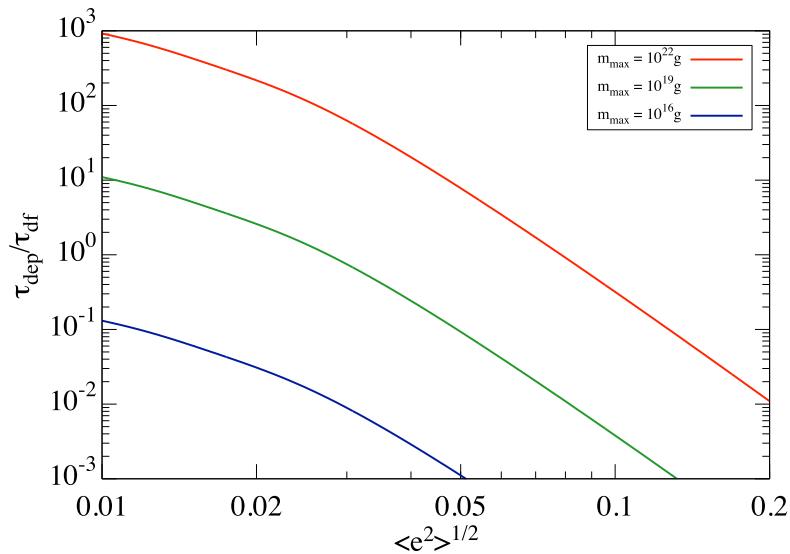


図4.3 力学的摩擦のタイムスケール  $\tau_{\text{df}}$  と面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep}}$  の比  $\tau_{\text{dep}}/\tau_{\text{df}}$  の離心率依存性。中心星  $M_{\odot}$  から 1AU の位置をケプラー運動する惑星  $M_{\oplus}$  は、微惑星集団に含まれる最大微惑星  $m_{\max}$  を  $10^{22} \text{ g}$  (100km サイズ、赤線)、 $10^{19} \text{ g}$  (10km サイズ、緑線)、 $10^{16} \text{ g}$  (1km サイズ、青線) に設定した場合、 $\tau_{\text{dep}}/\tau_{\text{df}} > 1$  の範囲では力学的摩擦が効くことで離心率が下がる。一方  $\tau_{\text{dep}}/\tau_{\text{df}} < 1$  の範囲では力学的摩擦の効率が落ちてしまい離心率が下がらない。ここで  $R_{H,M}$  は地球質量  $M_{\oplus}$  の惑星の相互ヒル半径である。この図から、初期離心率が大きいほど、また最大微惑星が小さいほど力学的摩擦の効率が落ちやすくなることがわかる。

図4.3では、 $\tau_{\text{dep}}/\tau_{\text{df}} > 1$ の領域では力学的摩擦が効き、 $\tau_{\text{dep}}/\tau_{\text{df}} < 1$ の領域では効かなくなる。ここで、微惑星の物質密度を  $3 \text{ g/cm}^3$  とおき、 $\tau_{\text{dep}}/\tau_{\text{df}} = 1$ を満たすような最大微惑星半径を  $R^*$  と定義すると、 $R^*$  の離心率依存性は図4.4のようになった。

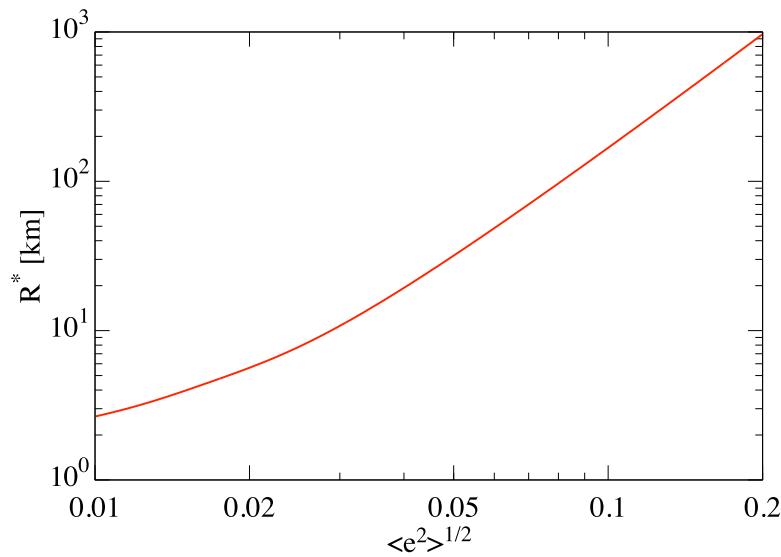


図 4.4 力学的摩擦のタイムスケール  $\tau_{\text{df}}$  と面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep}}$  が等しくなる最大微惑星半径  $R^*$  の離心率依存性。赤線より上側の領域であれば力学的摩擦が効く。

図 4.4 から、初期の惑星の平均離心率  $\langle e_1^2 \rangle^{1/2}$  と微惑星の平均離心率  $\langle e_2^2 \rangle^{1/2}$  が  $\langle e_1^2 \rangle^{1/2} = \langle e_2^2 \rangle^{1/2} = 0.1$  の場合、最大微惑星の大きさが 100km サイズ以上であれば、惑星と微惑星の力学的摩擦が効率的に働き、惑星の平均離心率  $\langle e_1^2 \rangle^{1/2}$  が下がり始めることがわかる。

## 4.4 100km サイズ以上の微惑星の起源

現在の太陽系には、火星と木星の軌道の間に小惑星帯と呼ばれる小天体が数多く集まっている領域がある。これらの小天体は、地球型惑星形成の際に取り残された残存微惑星、または微惑星や原始惑星の衝突・破壊の際に生じた破片であると考えられている。この小惑星帯のサイズ分布は図 4.5 のようになり、100km サイズ以上の天体は数十個存在することが観測からわかっている。

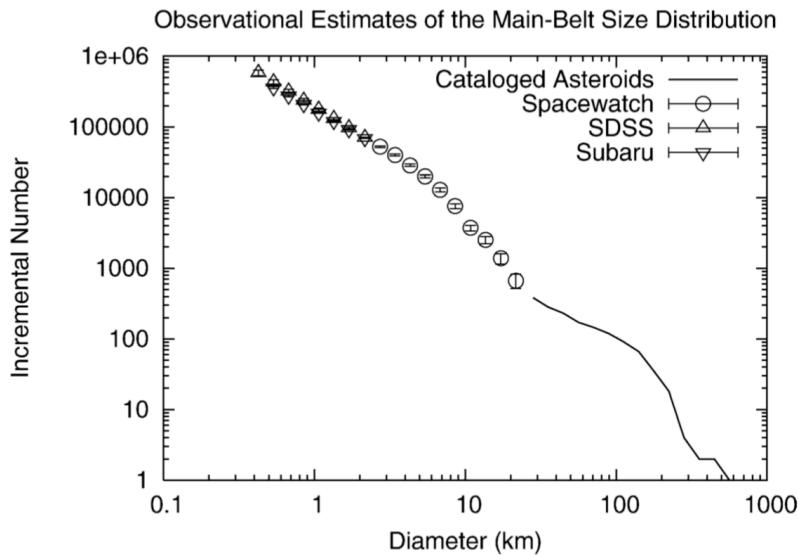


図 4.5 観測による小惑星帯のサイズ分布 (O'Brien & Greenberg, 2005)。横軸は天体の直径、縦軸はその直径以上の天体の累積個数である。

ただし小惑星帯は 2 – 3.5AU の領域に存在している。一方、地球型惑星形成領域 ( $\sim 1\text{AU}$ ) には地球近傍小惑星 (NEA) が存在し、流星・火球・隕石として無数に地球に降り注いでいる。この NEA 天体の直径は大きくても 10km である。つまり、巨大衝突ステージにおいて地球型惑星形成領域に 100km サイズの残存微惑星がいたという証拠は残っていない。

しかし、原始惑星同士の巨大衝突では平均で合計質量の 10 % 程度が破片として放出され、100km サイズ以上の破片も含まれることが SPH 法による数値計算からわかっている (図 4.6 参照)。

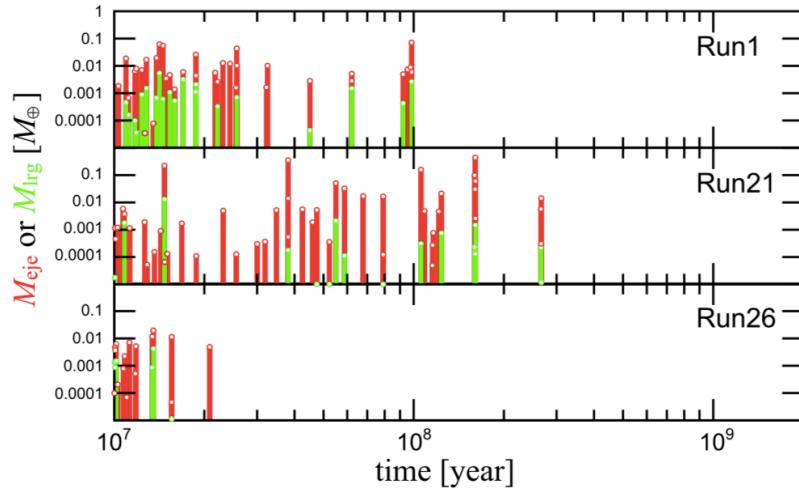


図 4.6 巨大衝突の際に放出される破片の総質量  $M_{\text{eje}}$  と最大破片質量  $M_{\text{lrg}}$  (Genda et al., 2015)。

Kokubo & Genda (2010) の軌道計算 50run を初期条件とする高解像度な SPH 計算によって得られた、一連の巨大衝突の際に放出される破片総質量の合計のうち、Run1 は平均的、Run21 は最大、Run26 は最小な場合である。最大破片質量  $M_{\text{lrg}}$  に注目すると、 $10^{-4} M_{\oplus}$  (360km サイズ) の破片はほぼ全ての衝突で放出され、 $10^{-3} M_{\oplus}$  (780km サイズ) 以上の破片が放出されることも多く、中には  $10^{-2} M_{\oplus}$  (1700km サイズ) の破片も存在する。

したがって原始惑星同士の巨大衝突により、地球型惑星形成領域に 100km サイズ以上の破片が供給されると考えられる。そしてこの破片は、巨大衝突した 2 天体の合計質量の 10 % 程度の総質量をもつ残存微惑星円盤として、地球型惑星と力学的摩擦を起こし、地球型惑星の離心率を下げる可能性がある。

## 4.5 巨大衝突時の放出破片円盤による力学的摩擦

これまでの力学的摩擦のシミュレーションでは、地球型惑星の周りに 10 倍の総質量の微惑星円盤がいるような、非常に重たい円盤を考えていた。また、式 (2.23), (2.24) のような平均離心率の変化率の解析解 (Ohtsuki et al., 2002) は、微惑星の面密度が大きく  $\langle e^2 \rangle^{1/2}, \langle i^2 \rangle^{1/2} \ll 1$  のときに良く成り立つ式である。そこで、巨大衝突の際に放出される破片の円盤のような、比較的軽い総質量の微惑星円盤であっても本当に力学的摩擦を起こすのかについて確かめる。最後の巨大衝突によって中心星  $M_{\odot}$  から 1AU の位置に形成

された地球型惑星の質量を  $1M_{\oplus}$  とし、その衝突で放出される破片の総質量を  $0.1M_{\oplus}$  とする。また、このときの破片が地球型惑星の周りに相互ヒル半径の 10 倍の幅を持つ微惑星円盤を形成し、惑星の離心率が 0.1、微惑星の平均離心率が 0.1 だと考えると、初期に見積もられる力学的摩擦のタイムスケールは図 4.1 より  $10^5$  年程度となる。長時間の軌道進化を考える場合、式 (2.23),(2.24) の第 1 項のような地球型惑星と微惑星円盤のランダム速度が時間とともに上昇する効果（ビスカス・ステアリング）が無視できなくなり、離心率の減少のタイムスケールはこの見積もりよりも長くなる。実際に式 (2.23),(2.24) を数値積分すると、図 4.9 の黒実線のように離心率（軌道傾斜角）が下がるタイムスケールは  $10^8$  年程度になった。一方、上記のような初期条件で破壊を考慮しない場合、計算コスト削減のため微惑星をまとめたトレーサー粒子の個数を 100 体として 1run だけ長時間ミュレーションを行うと、図 4.9 の赤線のようになった。

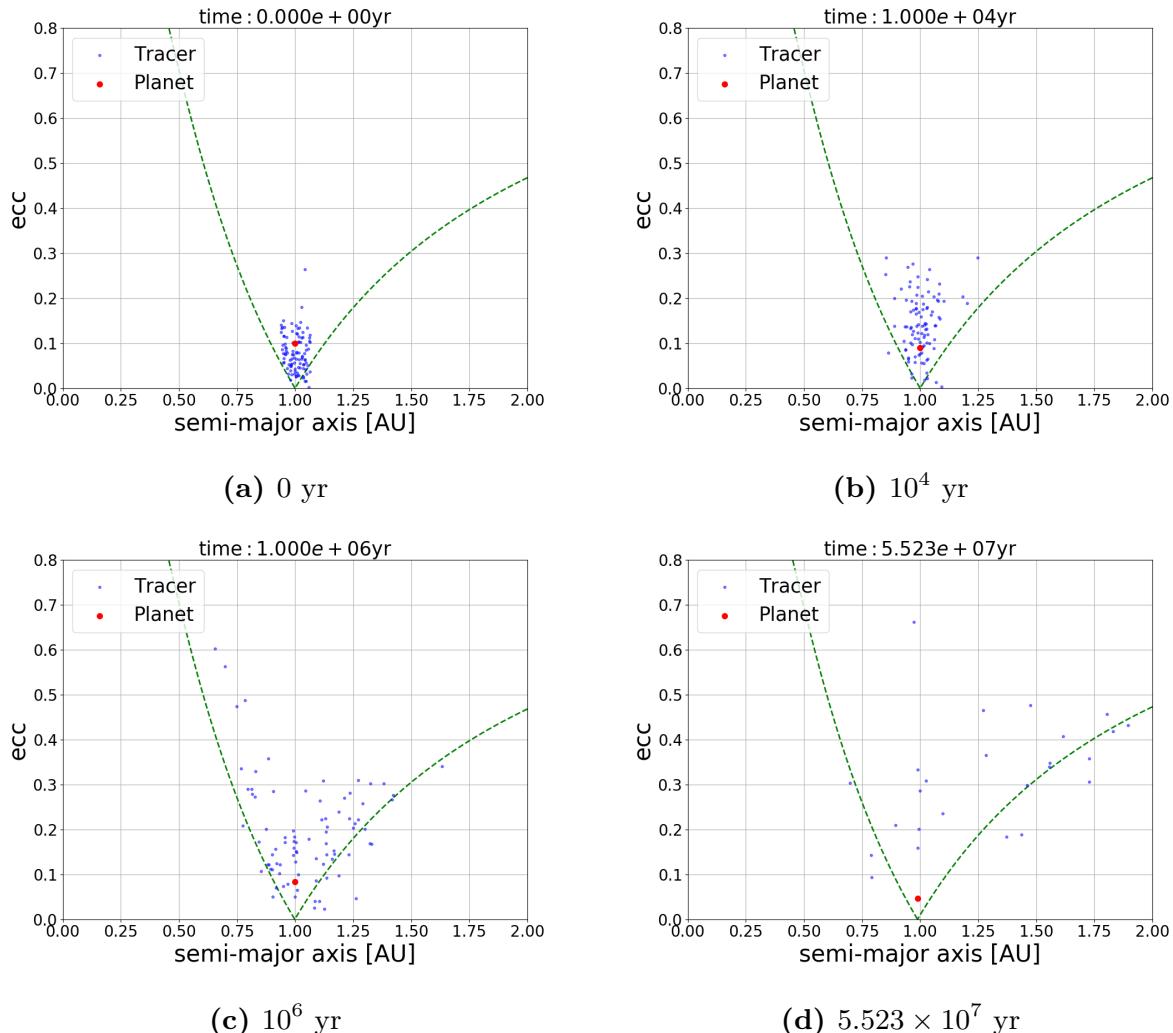


図 4.7 縦軸：離心率、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 1 体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に配置し、離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $10^{-3} M_{\oplus}$ ) 100 体を、惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.1$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.05 \text{ rad}$  とした。緑破線は惑星が完全な円軌道だと仮定したときの等ヤコビエネルギー線である。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。

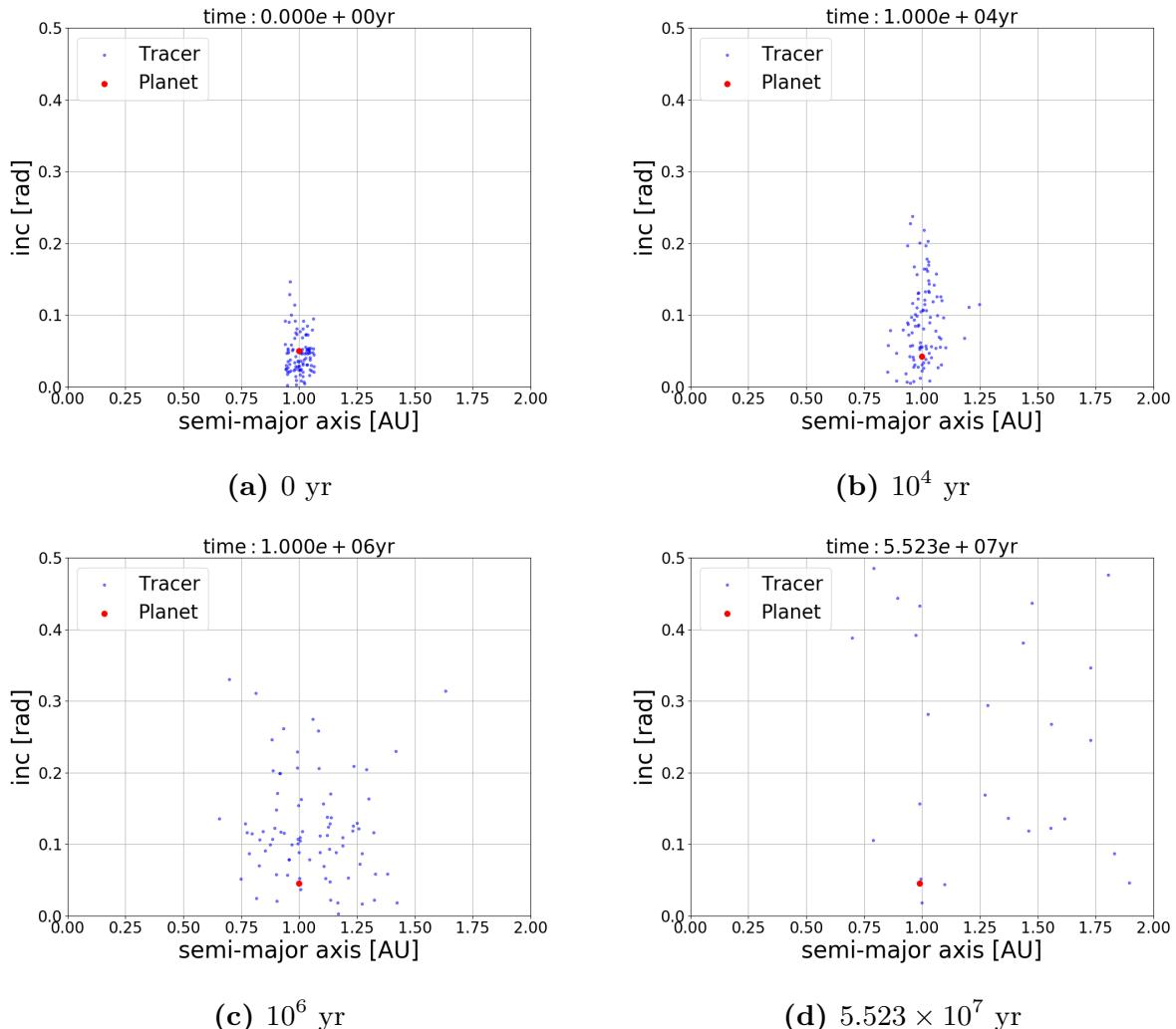


図 4.8 縦軸：軌道傾斜角、横軸：軌道長半径としたときの惑星（赤点）と微惑星（青点）の各時刻でのスナップショット。惑星 ( $M_{\oplus}$ ) 1体を中心星 ( $M_{\odot}$ ) から 1 AU の位置に配置し、離心率は  $e_p = 0.03$ 、軌道傾斜角は  $i_p = 0.015 \text{ rad}$  とした。また、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子 ( $10^{-3} M_{\oplus}$ ) 100 体を、惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から 5 倍外側までの範囲に面密度  $\Sigma \propto a^{-1}$  となるように配置し、また離心率と軌道傾斜角は共にレイリー分布に従い、 $\langle e_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.1$ ,  $\langle i_{\text{tr}}^2 \rangle^{1/2} = 0.05 \text{ rad}$  とした。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。

図 4.7, 4.8 より、様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサーの離心率と軌道傾斜角が時間経過とともに上昇する代わりに、惑星の離心率が減少していることがわかる。この傾向は力学的摩擦と一致する。この傾向が本当に力学的摩擦によって離心率が変化したのか

を確かめるため、式(2.23),(2.24)で表される平均離心率（軌道傾斜角）の変化率の解析解(Ohtsuki et al., 2002)を数値積分し、シミュレーション結果との比較を行った(図4.9参照)。

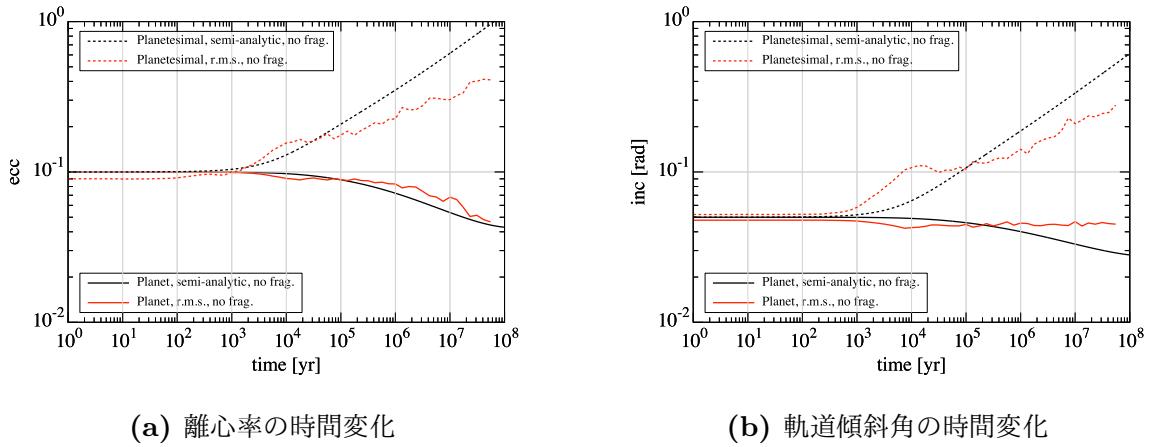


図4.9 図4.7a, 4.8aのような初期条件から計算したときの離心率(a)と軌道傾斜角(b)の時間進化。赤実線は惑星、赤破線は様々なサイズの微惑星をまとめたトレーサー粒子である。また、黒線は式(2.23),(2.24)を数値積分した解析解であり、黒実線は惑星、黒破線は微惑星である。この計算では微惑星同士の破壊は考慮していない。

図4.9aより、惑星の離心率は力学的摩擦とビスカス・ステアリングの解析解に近い下がり方をしており、初期の半分である0.05まで下がった。しかし図4.9bより、惑星の軌道傾斜角についてはほとんど下がっていない。したがって惑星の離心率を下げた効果の原因として、力学的摩擦以外の現象も寄与した可能性がある。一方、この計算は初期にトレーサー粒子100体で行なったが、惑星からの重力散乱、惑星への集積によって惑星近傍には粒子がほとんどなくなっている(図4.10参照)。

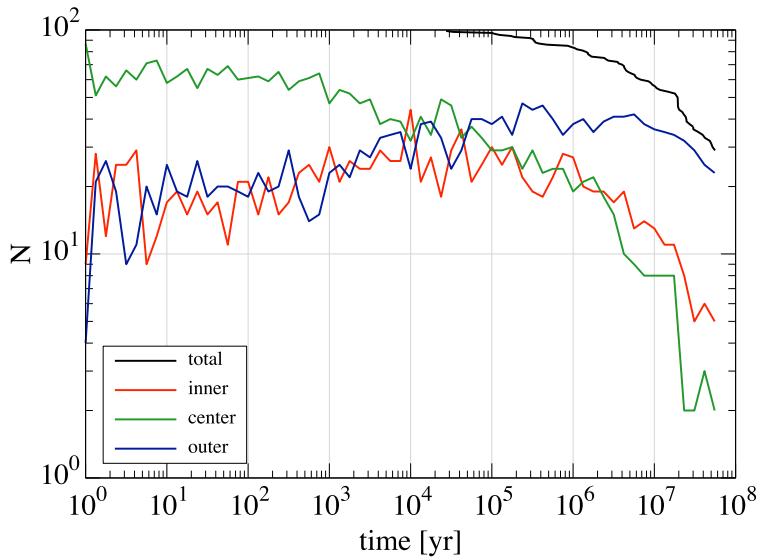


図 4.10 トレーサー粒子の個数の時間進化。総粒子数を黒線、惑星近傍（惑星の相互ヒル半径の 5 倍内側から 5 倍外側までの範囲）の粒子数を緑線、その範囲より内側、外側にいる粒子数をそれぞれ赤線、青線で表している。トレーサー粒子は惑星に重力散乱されるため内側、外側へ移動し、惑星近傍の粒子数は減っていく。また惑星に衝突すると集積されるため総粒子数が減っていく。

トレーサー粒子の離心率は 0.1 を超えており、内側・惑星近傍・外側にいる粒子は常に入れ替わっている。ここで、 $10^5$  年を超えたあたりから内側の粒子数が減る一方、外側の粒子数は変化しない状況が続いている。集積前のトレーサー粒子の軌道は、惑星のヒル圏に入ると複雑であるため解析的に理解することは難しいが、内側にいた粒子との近接遭遇や衝突が惑星の離心率に影響を与えたのではないかと考えられる。このような、惑星の内側が外側に比べ圧倒的に少なくなる現象は、微惑星面密度が比較的軽い場合に長時間のシミュレーションを行なって初めて得られた結果であり、統計的な検証を通して解析的に理解していく必要がある。

さらに、微惑星面密度が比較的軽い場合はビスカス・ステアリングの効果によって図 4.1 で求めたような力学的摩擦のタイムスケールでは離心率の下がるタイムスケールを説明できなくなり、そして少なくとも離心率が下がるタイムスケールは見積もりよりも長いことがわかった。

ここで、式(4.9)より

$$\frac{\tau_{\text{dep}}}{\tau_{\text{df}}} \propto m_{\max}^{1/3+p(\alpha-1)} \propto R_{\max}^{1+3p(\alpha-1)} \quad (4.10)$$

$$\therefore R^* \propto \left( \frac{\tau_{\text{dep}}}{\tau_{\text{df}}} \right)^{-1/(1+3p(\alpha-1))} \quad (4.11)$$

である。この関係から、破壊を考慮しないときの力学的摩擦のタイムスケールの見積もりが  $10^5$  年だったのに対して、実際に離心率が下がるタイムスケールは  $10^8$  年であったように、見積もりを 1000 倍小さく間違えていた場合には、 $R^*$  は  $10^{3/(1+3p(\alpha-1))} = 36$  倍大きくなる。

ここで、付録 C の図 C.1 より、100km サイズを超えると表面脱出速度 10 倍程度で衝突するエネルギーで  $Q_D^*$  は決まる。したがって、1-10km サイズで成り立つような  $Q_D^*$  の質量依存性のべき  $p = 0.453$  で見積もられた  $36 \times 100\text{km}$  サイズは、天体の大きさを約 3 倍過大評価していることになる。

したがって、巨大衝突の際に放出される破片の円盤のような比較的軽い総質量の微惑星円盤の場合、初期に惑星と微惑星円盤の平均離心率がともに 0.1 あるとすると、離心率を下げることができるような最大微惑星の大きさは 1000km サイズとなる。図 4.6 より、1000km サイズの最大破片は比較的放出されており、放出破片の円盤によって地球型惑星の離心率を下げるることはできると考えられる。

## 第 5 章

### 結論

本研究では、 $N$  体計算と統計的手法を組み合わせ、軌道進化と破壊を同時に扱うことができるハイブリッドコードの開発を行った。そしてこのコードを用いた計算により、巨大衝突ステージにおいて残存微惑星が存在する場合に、微惑星同士の衝突・破壊現象を考慮すると微惑星面密度が減少するため、地球型惑星と微惑星間の力学的摩擦の効率が落ちてしまうことを実際に確かめた。また力学的摩擦と面密度減少のタイムスケールの比較を行い、最大微惑星のサイズ依存性を導出したところ、地球型惑星の離心率を下げるためには、最大微惑星が 100km サイズ以上の残存微惑星円盤が必要であることがわかった。このような残存微惑星の起源については巨大衝突の際に放出される破片が有力である。ここで、衝突する 2 天体の質量の 10 % 程度のような比較的軽い総質量の微惑星円盤は、ビスマス・ステアリングの効果も考慮すると、惑星の離心率が下がるタイムスケールは 1 億年程度となって非常に長い。確認のため破壊を考慮しない長時間シミュレーションを行ったところ、惑星の離心率は実際に 1 億年で半分程度下がった。そして、微惑星の破壊を考慮した場合に、このような放出破片の円盤によって地球型惑星の離心率を下げることができる最大微惑星の大きさは 1000km サイズ以上であることがわかった。この結果は、巨大衝突の際に 1000km 以上の破片が放出されるという SPH 計算と整合的である。

# 謝辞

本修士論文には、筆者が名古屋大学大学院理学研究科素粒子宇宙物理学専攻理論宇宙物理学研究室（Ta 研）に在籍中の研究成果をまとめています。本研究の計算には国立天文台天文シミュレーションプロジェクトの計算機（Cray XC30, XC50）を利用しました。

本研究活動を進めるにあたって、指導教員として直接のご指導を頂いた同研究室助教の小林浩先生には大変お世話になりました。いくつもの学会や研究会にて口頭発表の機会を与えてくださいり、また就職活動の時期には精神面でも支えてくださった小林浩先生に深謝の意を表します。同研究室教授の犬塚修一郎先生には研究室内コロキウムの発表にて大変有益な議論をして頂きました。また同研究室准教授の井上剛志先生には議論に加え天文台計算機の利用申請書の添削をして頂きました。さらに同研究室特任助教の藤井悠里さん、博士研究員の高棹真介さん、黒崎健二さん、ドリス・アズーマニアンさんとは昼食や夕食をご一緒することが多く、研究活動に対して日頃から暖かい激励を頂きました。そして同研究室、C 研、 $\Omega$  研の先輩・同期・後輩の皆様には、研究活動・就職活動に関する議論や相談を通じ、様々な場面で助けていただきました。この場を借りて感謝の意を表します。

## 付録 A

### 平均や不確かさなどの定義

$N_{\text{run}}$  個の標本  $x$  について、標本平均  $\bar{x}$  と不偏標準偏差  $u$  を次のように定義した。

$$\bar{x} = \frac{1}{N_{\text{run}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{run}}} x_k \quad (\text{A.1})$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{run}} - 1} \sum_{k=1}^{N_{\text{run}}} (x_k - \bar{x})^2} \quad (\text{A.2})$$

一方、 $N_{\text{run}}$  個の標本  $x^2$  の標本平均  $\overline{x^2}$  と不偏標準偏差  $u_2$  を

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N_{\text{run}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{run}}} x_k^2 \quad (\text{A.3})$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{run}} - 1} \sum_{k=1}^{N_{\text{run}}} (x_k^2 - \overline{x^2})^2} \quad (\text{A.4})$$

のように定義すると、

$$(\overline{x^2} \pm u_2)^{1/2} = \sqrt{\overline{x^2}} \left( 1 \pm \frac{u_2}{\sqrt{\overline{x^2}}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

$$\simeq \sqrt{\overline{x^2}} \pm \frac{1}{2} \frac{u_2}{\sqrt{\overline{x^2}}} \quad (\text{A.6})$$

のようになりますため、二乗平均平方根  $x_{\text{rms}}$  とその不確かさ  $\Delta x_{\text{rms}}$  を次のように定義した。

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{x^2}} \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta x_{\text{rms}} = \frac{1}{2} \frac{u_2}{x_{\text{rms}}} \quad (\text{A.8})$$

## 付録 B

### 相互ヒル半径

相互ヒル半径は

$$R_{\text{H,M}}^{i,i+1} = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \left( \frac{m_i + m_{i+1}}{3M_\odot} \right)^{1/3} \quad (\text{B.1})$$

のように定義される。例えば、相互ヒル半径の  $b$  倍間隔を空けて外側に隣の粒子を配置する場合、

$$a_{i+1} - a_i = b R_{\text{H,M}}^{i,i+1} \quad (\text{B.2})$$

のようにかける。式 (B.1), (B.2) を連立させて  $a_{i+1}$  について解くと、

$$a_{i+1} = \Gamma(b, m_i, m_{i+1}) a_i \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma(b, m_i, m_{i+1}) \equiv \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{2} \left( \frac{m_i + m_{i+1}}{3M_\odot} \right)^{1/3}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{2} \left( \frac{m_i + m_{i+1}}{3M_\odot} \right)^{1/3}} \quad (\text{B.4})$$

を満たす数列として考えることができる。具体的な値として、

$$\Gamma(10, M_\oplus, M_\oplus) \simeq 1.134 \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma(10, 0.1M_\oplus, 0.1M_\oplus) \simeq 1.060 \quad (\text{B.6})$$

などとなる。

## 付録 C

# 破壊に必要なエネルギー

衝突・破壊現象が大規模 (catastrophic) な破壊、あるいは小規模 (cratering) な破壊なのかは、 $Q_D^*$  と呼ばれる、衝突体の質量の半分が破片として放出されるような衝突体質量あたりの臨界衝突エネルギーを境界として分けることが多い。密度  $3\text{g}/\text{cm}^3$  の玄武岩を相対速度  $3\text{km}/\text{s}$  で衝突させた数値実験 (Benz & Asphaug, 1999) によると、衝突体が  $100\text{m}-1\text{km}$  サイズ以上の場合、 $Q_D^*$  は主に重力再集積できるかどうかで決定され (図 C.1 参照)、 $10\text{km}$  サイズ ( $\sim 10^{19}\text{g}$ ) の小天体を破壊するのに必要なエネルギーは

$$Q_D^* = 1.30 \times 10^8 \left( \frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right) \left( \frac{R}{10\text{km}} \right)^{1.36} \text{erg/g} \quad (\text{C.1})$$

$$= 1.17 \times 10^8 \left( \frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{0.547} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.453} \text{erg/g} \quad (\text{C.2})$$

となる。

仮に小天体同士が自身の表面脱出速度に等しい相対速度で衝突する場合、衝突エネルギーと破壊に必要なエネルギーの比を計算すると

$$\frac{v_{\text{esc}}^2}{2Q_D^*} = 6.44 \times 10^{-3} \left( \frac{R}{10\text{km}} \right)^{0.640} \quad (\text{C.3})$$

$$= 6.14 \times 10^{-3} \left( \frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.213} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.213} \quad (\text{C.4})$$

となり、大規模な破壊は起こらない。またこの結果から、 $10\text{km}$  サイズ ( $\sim 10^{19}\text{g}$ ) の小天体を破壊するためには表面脱出速度の 10 倍以上の衝突速度が必要であることがわかる。

一方、中心星  $M_\odot$  から  $1\text{AU}$  の位置で離心率  $0.1$  のケプラー運動をする  $10\text{km}$  サイズ ( $\sim 10^{19}\text{g}$ ) の小天体同士が衝突する場合、衝突速度をランダム速度  $\sim ev_K$  で近似すると、

衝突エネルギーと破壊に必要なエネルギーの比は

$$\frac{e^2 v_K^2}{2Q_D^*} = 342 \left( \frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-1} \left( \frac{R}{10\text{km}} \right)^{-1.36} \left( \frac{e}{0.1} \right)^2 \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right) \quad (\text{C.5})$$

$$= 379 \left( \frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-0.547} \left( \frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453} \left( \frac{e}{0.1} \right)^2 \left( \frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right) \quad (\text{C.6})$$

のようになり、衝突したら必ず大規模な破壊を起こす。

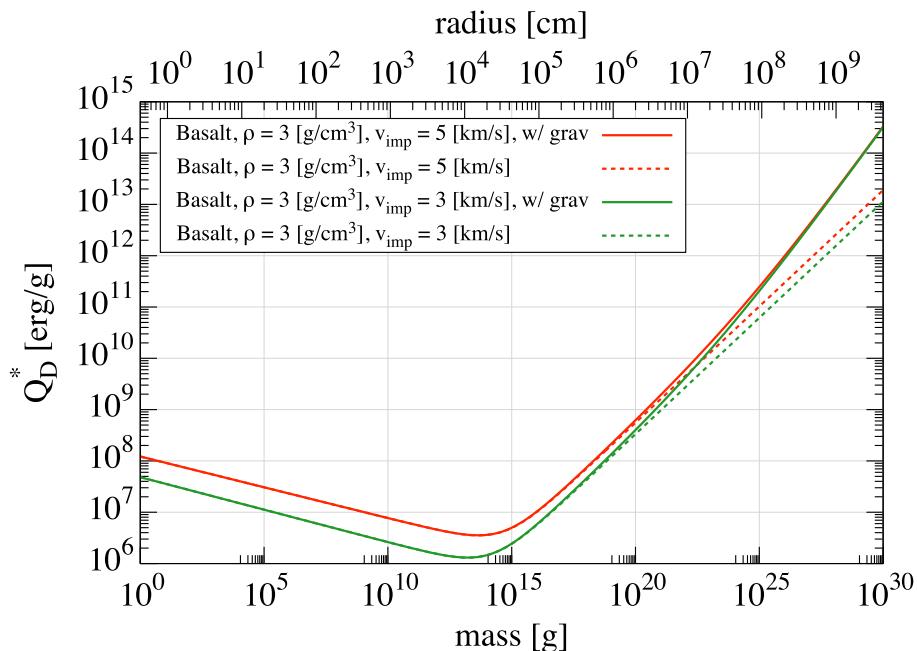


図 C.1  $Q_D^*$  の衝突体質量（半径）依存性 (Benz & Asphaug, 1999; Kobayashi et al., 2010)。 $Q_D^*$  の値は、密度  $3\text{g/cm}^3$  の玄武岩を相対速度  $5\text{km/s}$  (赤線) と  $3\text{km/s}$  (緑線) で衝突させた数値実験により得られた結果である。1km サイズより小さい場合には物質強度、1km サイズより大きい場合は重力再集積できるかどうかで衝突体質量（半径）依存性が決定される（破線）。さらに、100km サイズを超えると表面脱出速度 10 倍程度で衝突するエネルギーで  $Q_D^*$  は決まり、べきがさらに大きくなる（実線）。

## 付録 D

# 輻射圧で系外へ吹き飛ばされる破片 のサイズ

中心星  $M_*$  と破片  $m$  の間の距離を  $r$  とおく。破片に働く中心星からの重力と輻射圧のつりあいより

$$\frac{GM_*m}{r^2} = \frac{L_*\sigma}{4\pi r^2 c} \quad (\text{D.1})$$

とかける。ここで  $G$  は重力定数、 $L_*$  は中心星の光度、 $c$  は光速、 $\sigma$  は破片の断面積である。破片を半径  $R$ 、密度  $\rho$  の球体とし、断面積を  $\sigma = \pi R^2$  とすると、式 (D.1) は

$$R = \frac{3L_*}{16\pi GM_*c\rho} \quad (\text{D.2})$$

$$= 1.9 \times 10^{-7} \left( \frac{L_*}{\text{L}_\odot} \right) \left( \frac{M_*}{\text{M}_\odot} \right)^{-1} \left( \frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-1} \text{m} \quad (\text{D.3})$$

となり、 $\sim 0.2\mu\text{m}$  である。

## 付録 E

# 天体力学の基礎知識

## E.1 2 体問題

2 体問題とは、万有引力の法則で記述される 2 つの質点の相互作用による運動を考える問題である。2 体問題は太陽系力学の中で最も単純で、かつ解析的に解くことができる。また、太陽系には様々な質量の物体があるが、2 体問題に近似して考えることができる場面が多く、通常 3 体目の天体との相互作用は 2 体の系に対する摂動として扱う。

### E.1.1 運動方程式

2 体問題の例として、質量がそれぞれ  $m_1, m_2$  の 2 つの質点を考える。各点の位置ベクトルは  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  である。また、 $m_1$  を基準とした  $m_2$  の相対ベクトルは  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  と書ける（図 E.1）。2 つの質点の運動方程式は以下のように書ける。

$$\mathbf{F}_1 = +G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (\text{E.1})$$

$G = 6.67260 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$  は重力定数。これらから、

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (\text{E.2})$$

が求まる。

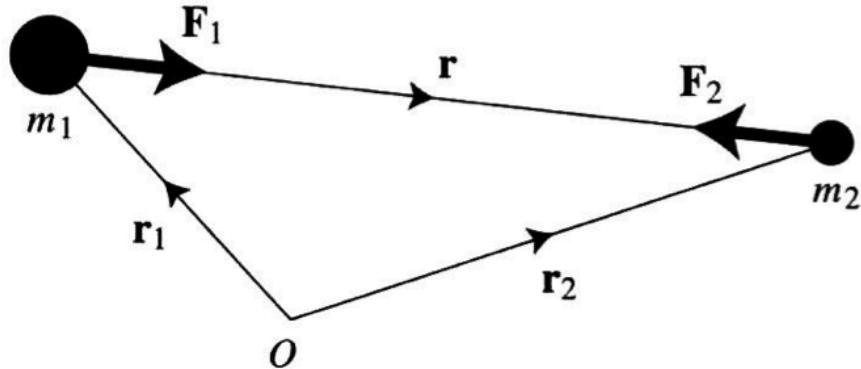


図 E.1 位置ベクトル  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  にある 2 つの質点  $m_1, m_2$  に働く力のベクトル図 (Murray & Dermott, 1999)。

式 (E.2) を両辺 2 階積分する。

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a} \quad \text{and} \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{at} + \mathbf{b} \quad (\text{E.3})$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は定数ベクトル。 $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$  を使って重心の位置ベクトルを表現する。

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{a}}{m_1 + m_2} \quad \text{and} \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{at} + \mathbf{b}}{m_1 + m_2} \quad (\text{E.4})$$

この式から、2 体が互いの重力のみで運動している場合、その重心の運動は静止しているか、等速直線運動を行っているかのどちらかということになる。ここで、相対ベクトル  $\mathbf{r}$  を使って運動方程式を書き直す。 $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$  とすると式 (E.1) は、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (\text{E.5})$$

( $\mu = G(m_1 + m_2)$ ) となり、相対運動の方程式となる。この方程式を解き  $m_2$  の  $m_1$  に対する相対軌道を得るために、相対運動におけるいくつかの定数を求める必要がある。ここではまずそれらの運動の定数の一つである角運動量ベクトルについて述べる。

式 (E.5) の両辺と  $\mathbf{r}$  の外積をとると、 $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ 。さらに両辺積分すると、

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (\text{E.6})$$

$\mathbf{h}$  は角運動量ベクトルであり、 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  に垂直である定数ベクトルである。つまり、 $m_2$  の相対運動は、 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  に垂直な平面内に限定されることがわかる。この平面を軌道平面という。 $m_2 \ll m_1$  とすれば  $h = |\mathbf{h}|$  は単位質量あたりの  $m_2$  の角運動量として近似できる。

ここで、 $\mathbf{r}$  を極座標で表現してみる。座標原点は  $m_1$  とし、 $\theta = 0$  となる基準線は任意の位置でとることとする。また  $m_1, m_2$  の重心は慣性系を運動しているが、 $\theta = 0$  の基準線の方向は一定とする。動径方向の単位ベクトルを  $\hat{\mathbf{r}}$ 、角度方向の単位ベクトルを  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  として、位置、速度、加速度を表現すると以下のようになる。

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{E.7})$$

式 (E.6) に上記の  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  を代入すると、 $\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$  となる。 $\hat{\mathbf{z}}$  は軌道平面に垂直な単位ベクトルであり、向きは  $\mathbf{r}$  から  $\boldsymbol{\theta}$  へ右ねじを回したときに進む方向である。これより、

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (\text{E.8})$$

この式からわることは以下の通りである。

質点  $m_2$  が微小時間  $\delta t$  の間だけ運動したとする。 $t = 0$  のとき  $m_2$  の座標が  $(r, \theta)$  とすれば、 $t = \delta t$  の座標は  $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$  である。その間に動径ベクトルが横切る領域の面積は、

$$\delta A \approx \frac{1}{2}r(r + \delta r)\sin(\delta\theta) \approx \frac{1}{2}r^2\delta\theta \quad (\text{E.9})$$

両辺を  $\delta t$  で割り、 $\delta t \rightarrow 0$  の極限をとると、

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h \quad (\text{E.10})$$

$h$  は定数であるので、動径が一定時間に横切る軌道面の面積は常に一定であることがわかる。つまり式 (E.10) は Kepler の第 2 法則と等価である。しかし、このことは万有引力に對してのみ成り立つ訳ではなく、2 物体の間に引力が働いていれば成り立つ。

### E.1.2 軌道と速度

式 (E.7) の  $\ddot{r}$  を式 (E.5) に代入することで、相対運動のスカラー方程式を求めることができる。 $r$  成分を比べると、

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (\text{E.11})$$

$\theta$  の関数としての  $r$  の解を求めるため、 $u = 1/r$  として代入し、定数  $h = r^2\dot{\theta}$  を使って時間  $t$  を消去する必要がある。 $r$  を時間微分すると、

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} \quad \text{and} \quad \ddot{r} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (\text{E.12})$$

したがって式 (E.11) を書き換えると、

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (\text{E.13})$$

この 2 階線形微分方程式の一般解は、

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \varpi)] \quad (\text{E.14})$$

ここで振幅  $e$ 、位相  $\varpi$  は積分定数。よって  $r$  は、

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (\text{E.15})$$

$p = h^2/\mu$  は半直弦 ( $\theta - \varpi = \pi/2$  における  $r$  の大きさ)、 $e$  は離心率と呼ばれる。この式は円錐曲線と呼ばれる。

円錐曲線から得られる曲線は  $e$  によって区別され、4 種類ある。

$$\text{円: } e = 0, \quad p = a \quad (\text{E.16})$$

$$\text{橙円: } 0 < e < 1, \quad p = a(1 - e^2) \quad (\text{E.17})$$

$$\text{放物線: } e = 1, \quad p = 2q \quad (\text{E.18})$$

$$\text{双曲線: } e > 1, \quad p = a(e^2 - 1) \quad (\text{E.19})$$

$a$  は軌道長半径。放物線の場合は  $p$  を  $q$  (放物線の近点距離) で定義する。

この2体問題の解から、太陽系の惑星の軌道は橢円の形をしており、閉じた軌道を描くと考えられる。したがって Kepler の第1法則は逆2乗則の結果ととらえることができる。

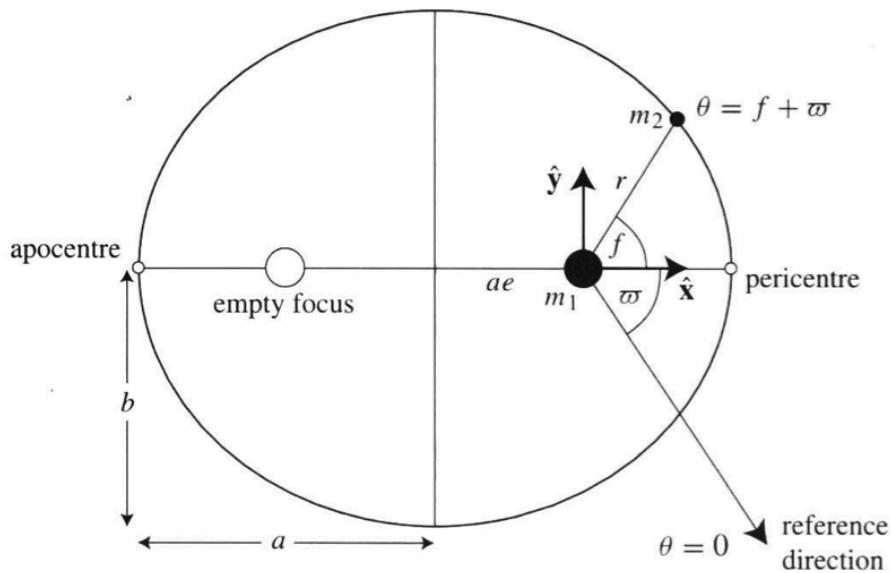


図 E.2 軌道長半径  $a$ 、軌道短半径  $b$ 、離心率  $e$ 、近日点経度  $\varpi$  の橢円の図 (Murray & Dermott, 1999)。

以下の議論では橢円運動に焦点を当てる。橢円運動では  $a, e$  には以下のような関係がある。

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (\text{E.20})$$

ここで  $b$  は軌道短半径である (図 E.2)。また  $r$  は、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (\text{E.21})$$

$\theta$  は黄経 (黄道座標の経度にあたり、春分点を 0 度としている) と呼ばれる。天体力学では、慣性系において固定された基準線からの角度を測るときに、慣習的に黄経を用いる。 $\theta = \varpi, \theta = \varpi + \pi$  のときに、それぞれ  $r$  の最小値  $r_p = a(1 - e)$ 、最大値  $r_a = a(1 + e)$  をとる。これらの点はそれぞれ近点、遠点と呼ばれる。橢円の中心からどちらかの焦点ま

での距離は  $ae$  で与えられる。 $\varpi$  は近日点経度と呼ばれ、近点の黄経である。2 体問題では  $\varpi$  は定数であるが、他の摂動が入る場合は時間とともに変化する。大抵は黄経よりも  $\varpi$  から測った角度の方がより扱いやすく、真近点離角  $f = \theta - \varpi$  を導入する。 $f, \theta$  は  $2\pi$  の周期を持つ。よって  $r$  は、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (\text{E.22})$$

ここで、 $m_1$  を中心として近点方向に  $x$  軸をとる直交座標を考えると、位置ベクトルの成分は、

$$x = r \cos f \quad \text{and} \quad y = r \sin f \quad (\text{E.23})$$

ある軌道周期  $T$  で橿円上を一周するときに位置ベクトルが横切る面積は単純に  $A = \pi ab$  である。式 (E.10) よりこの面積は  $hT/2$  と等しい。ゆえに  $h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2)$  より、

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (\text{E.24})$$

これは Kepler の第 3 法則と等価である。この式から軌道周期  $T$  は離心率  $e$  に依存せず、軌道長半径  $a$  のみに依存することがわかる。

$\theta$  は 1 周期につき  $2\pi$  だけ周期的に変化するため、平均運動  $n$  を次のように定義する。

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{E.25})$$

さらに、式 (E.24) より、

$$\mu = n^2 a^3 \quad \text{and} \quad h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (\text{E.26})$$

平均運動の値は 2 体問題では定数であるが、実際の角速度  $\dot{f}$  は経度の関数である。

運動に関するもう一つの定数を導出するため、 $\dot{r}$  と式 (E.5) の内積をとり、式 (E.7) の  $\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}$  の値を代入すると、

$$\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = 0 \quad (\text{E.27})$$

これを両辺  $t$  で積分すると、

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C \quad (\text{E.28})$$

ここで  $v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  は速度の 2 乗、 $C$  は積分定数である。式 (E.28) はエネルギー積分とも呼ばれ、単位質量あたりの天体のエネルギーが保存することを示している。ここまで得た結果より、2 体問題には 4 つの定数、エネルギー積分  $C$  と角運動量  $\mathbf{h}$  の 3 成分が保存する。[E.1.4](#) 節で導出するが、これらは軌道要素や離心率ベクトルのような別の量で表現することもできる。

$v^2$  の別の表式を見つけ、 $C$  の別の表式を導出する。 $\varpi$  は固定されているので、 $\dot{\theta} = d(f + \varpi)/dt = \dot{f}$  であり、式 (E.7) の  $\mathbf{r}$  の定義を用いると、

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 \quad (\text{E.29})$$

式 (E.22) を微分すると、

$$\dot{r} = \frac{r \dot{f} e \sin f}{1 + e \cos f} \quad (\text{E.30})$$

$r^2 \dot{f} = h = na^2 \sqrt{1 - e^2}$  を使うと、

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin f \quad (\text{E.31})$$

$$r \dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos f) \quad (\text{E.32})$$

この 2 つの式から式 (E.29) を書き換えると、

$$v^2 = \frac{na^2}{1 - e^2} (1 + 2e \cos f + e^2) = \frac{na^2}{1 - e^2} \left( \frac{2a(1 - e^2)}{r} - (1 - e^2) \right) \quad (\text{E.33})$$

したがって、

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (\text{E.34})$$

この式から、天体の速度は近点 ( $f = 0$ ) で最大値、遠点 ( $f = \pi$ ) で最小値をとる。それぞれの値は、

$$v_p = na \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{and} \quad v_a = na \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (\text{E.35})$$

また、式 (E.23) をそれぞれ時間微分し、式 (E.31), E.32 を代入して、速度の  $x, y$  成分を求めると、

$$\dot{x} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \quad \text{and} \quad \dot{y} = +\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(e^2 + \cos f) \quad (\text{E.36})$$

式 (E.34) と式 (E.28) を比較すると、エネルギー積分  $C$  は以下の形で表される。

$$C = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{E.37})$$

したがって、橙円軌道のエネルギーは軌道長半径のみの関数であり、離心率には依存しない。放物線軌道と双曲線軌道のエネルギーも同様に示すことができる。

$$C_{\text{para}} = 0, \quad \text{and} \quad C_{\text{hyper}} = \frac{\mu}{2a} \quad (\text{E.38})$$

### E.1.3 平均近点離角と離心近点離角

前節において、軌道長半径と離心率がわかっている場合に、真近点離角  $f$  が与えられれば、軌道の距離と速度を計算できることを示した。しかし、通常は任意の時間での天体の位置を計算したいと考えるのが普通である。 $f$  と  $r$  は  $t$  の関数であるが、前節では依存性を示していない。

$2\pi$  周期かつ時間に関して線形な関数である角度を導入する。この角度は、後にさまざまな量の時間平均を計算するときに特に有益となる。式 (E.25) の平均運動  $n$  の定義を用いて、平均近点離角  $M$  を定義する。

$$M = n(t - \tau) \quad (\text{E.39})$$

ここで、 $\tau$  は近点通過時刻。 $M$  は角度の次元であり、平均運動と等しい一定の割合で線形的に増加するが、幾何学的に意味のある値ではない。しかし、 $M$  の定義と式 (E.22) から、 $t = \tau$  (近点を通過) や  $t = \tau + T/2$  (遠点を通過) のとき、それぞれ  $M = f = 0, M = f = \pi$  となることは明らかである。 $t$  が周期の整数倍のときも同様の関係を持つ。

$M$  は幾何学的に意味のある値ではないが、ある角度と関係がある。半径  $a$  の円を、軌道長半径  $a$ 、離心率  $e$  の橙円に外接させ (図 E.3(a))、その橙円のある点から長軸に垂直

な直線を引き、外接円に交差させる。すると、 $f = 0$  の基準線（長軸）と、橿円の中心からその外接円上の交点までを結ぶ直線とのなす角で定義される、離心近点離角  $E$  という角度を決めることができる（図 E.3(b)）。したがって、 $E = 0$  は  $f = 0$  と一致し、 $E = \pi$  は  $f = \pi$  と一致する。

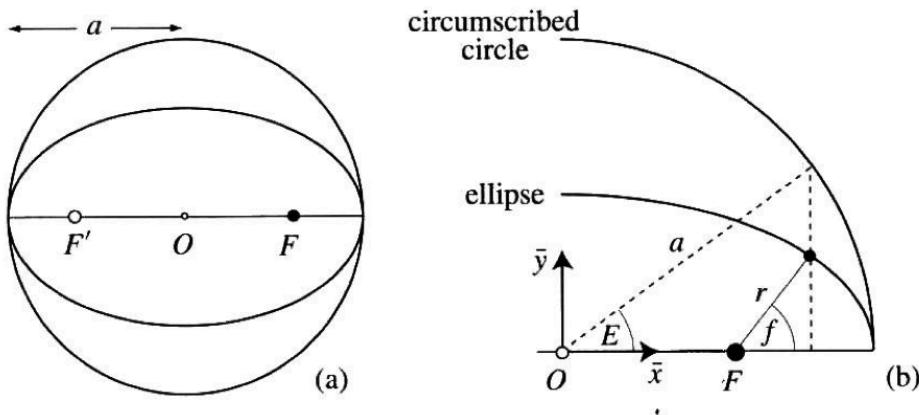


図 E.3 (a): 軌道長半径  $a$  の橿円と、半径  $a$  の外接円。(b): 真近点離角  $f$  と離心近点離角  $E$  の関係 (Murray & Dermott, 1999)。

図 E.3 (b) 中の  $\bar{x}, \bar{y}$  のように橿円中心を原点とする直交座標系での橿円の方程式は、

$$\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 = 1 \quad (\text{E.40})$$

$\bar{x} = e \cos E$  から  $\bar{y}^2 = b^2 \sin^2 E$  が求まり、 $b^2 = a^2(1-e^2)$  の関係から  $\bar{y} = a\sqrt{1-e^2} \sin E$  が求まる。したがって外接円への  $r$  の水平方向と垂直方向の射影は、 $E$  を用いて表すと、

$$x = a(\cos E - e) \quad \text{and} \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (\text{E.41})$$

これらの 2 乗和の平方根をとると、

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (\text{E.42})$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (\text{E.43})$$

さらに、離心近点離角  $E$  と真近点離角  $f$  の関係のより簡単な表式が導出できる。

$$1 - \cos f = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1 - e \cos E}, \quad 1 + \cos f = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1 - e \cos E} \quad (\text{E.44})$$

三角関数の 2 倍角の公式を使えば、

$$2 \sin^2 \frac{f}{2} = \frac{1+e}{1-e \cos E} 2 \sin^2 \frac{E}{2}, \quad 2 \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{1-e}{1-e \cos E} 2 \cos^2 \frac{E}{2} \quad (\text{E.45})$$

ゆえに、

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (\text{E.46})$$

したがって、 $E$  がわかっているとき、式 (E.42) を使えば  $r$  を、式 (E.43) または式 (E.46) を使えば  $f$  を決定することができる。しかし、任意の時間  $t$  における天体の位置を知るには、 $M$  と  $E$  の関係を明らかにする必要がある。

$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2$  と式 (E.32)、式 (E.34) を使うと、

$$\dot{r}^2 = n^2 a^3 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{n^2 a^4 (1-e^2)}{r^2} \quad (\text{E.47})$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2} \quad (\text{E.48})$$

この式は式 (E.42) を用いた以下の置き換えで積分可能となる。

$$r - a = -ae \cos E \quad (\text{E.49})$$

よって式 (E.48) は、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1-e \cos E} \quad (\text{E.50})$$

この式は式 (E.41) をそれぞれ時間微分し、 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = h (= na^2 \sqrt{1-e^2})$  に代入することで求めることができる。式 (E.50) は簡単に積分できて、

$$n(t-\tau) = E - e \sin E \quad (\text{E.51})$$

$t = \tau$  のとき  $E = 0$ 。したがって式 (E.39) は、

$$M = E - e \sin E \quad (\text{E.52})$$

この式は Kepler 方程式と呼ばれ、その解は、任意の時間における軌道上の位置を求める際になくてはならないものである。ある時間が与えられたとき、(i) 式 (E.39) から  $M$  を求め、(ii)  $E$  について式 (E.52) を解き、(iii) 式 (E.41) または式 (E.43) と、式 (E.22) を使って  $r, f$  を決める。

### E.1.4 ケプラー軌道要素

[E.1.1](#) 節では、 $m_1$  に対する  $m_2$  の相対位置ベクトルと速度ベクトルが、常に角運動量ベクトルに垂直な平面上に存在することを示した。 $m_2$  の  $\mathbf{r} = (x, y)$  と  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$  は 3 つの定数  $a, e, \varpi$  と変数  $f$  によって固有の値をもつ。ここまで解析では軌道面上の運動を理解してきた。しかし、太陽系の天体の運動は単一の基準面上で起こるものではなく、ここからは軌道の 3 次元表現を考えていく（図 [E.4](#)）。

任意の位置が位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  で表現される 3 次元直交座標系を考える。3 つの軸が右手系をなすように、 $x$  軸は橢円軌道の長軸上の近点の方向、 $y$  軸は軌道面上の  $x$  軸に垂直な方向、そして  $z$  軸は  $x, y$  軸両方に垂直で  $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$  の方向にとる。

この軌道面から基準面を参照するために、基準面上の基準線の方向を  $X$  軸にとるような別の 3 次元直交座標系を考える。上と同様に 3 つの軸が右手系をなすように、 $Y$  軸は基準面上の  $X$  軸に垂直な方向、そして  $Z$  軸は  $X, Y$  軸両方に垂直で  $\hat{\mathbf{X}} \times \hat{\mathbf{Y}}$  の方向にとる。この座標系の例として、太陽のまわりを回る惑星の運動の場合、日心座標系（太陽を中心とし、基準面を地球軌道面（黄道面）、基準線を地球の赤道面と黄道面の交線に沿った方向、すなわち春分の方向にとる座標系）が慣習的に使われる。注意すべきことは、他の天体による摂動を受けるため、特定の基準面を決めてその基準面は時間変化してしまうことである。

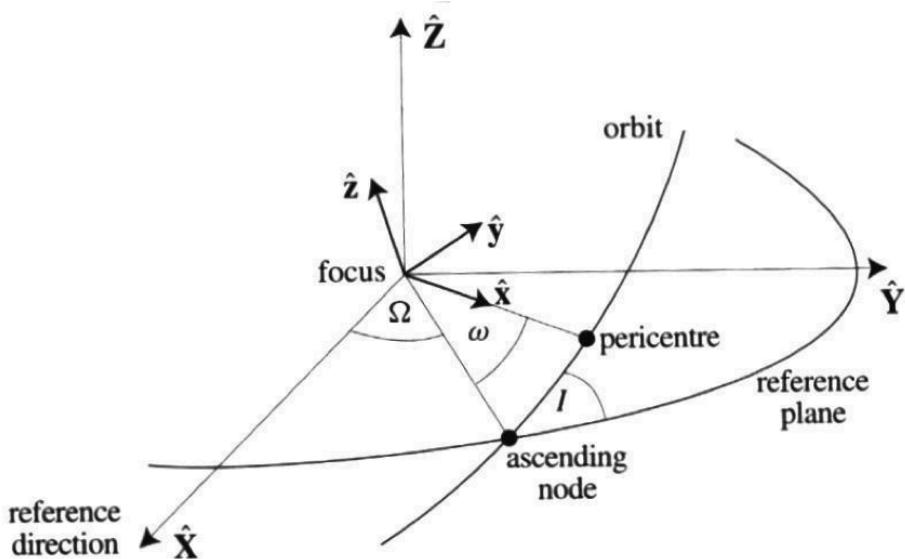


図 E.4 3 次元空間での基準面に対する軌道運動 (Murray & Dermott, 1999)。

一般に軌道面は基準面に対して軌道傾斜角 ( $I$ ) と呼ばれる角度だけ傾いている。軌道面と基準面が交わる線を交線と呼ぶ。基準面に対して下から上に軌道が横切る際の交点を昇交点、基準線と昇交点の動径ベクトルのなす角を昇交点経度 ( $\Omega$ ) と呼ぶ。昇交点の動径ベクトルと近点の方向のなす角を近日点引数 ( $\omega$ ) と呼ぶ。

軌道傾斜角は常に  $0^\circ \leq I \leq 180^\circ$  である。 $I \leq 90^\circ$  の場合は順行、一方  $I \geq 90^\circ$  の場合は逆行と呼ぶ。

$I \rightarrow 0^\circ$  の極限では軌道面は基準面と同一平面上に存在し、

$$\varpi = \Omega + \omega \quad (\text{E.53})$$

ここで  $\varpi$  は近日点経度である。しかし  $\Omega$  と  $\omega$  は異なる平面上で定義される角度にも関わらず、式 (E.53) の  $\varpi$  の定義は軌道が傾いている場合にも使われる。ゆえに、 $\varpi$  は一般に “dogleg” angle とも呼ばれる。

図 E.5 は軌道面の座標系と基準面の座標系の関係を示している。1 つの座標系は、他の座標系を軸に沿って回転させることで表現できることがわかる。

軌道面の座標系  $(x, y, z)$  から基準面の座標系  $(X, Y, Z)$  へ変換するためには、(i)  $x$  軸が交線と一致するように  $z$  軸を中心に  $\omega$  だけ回転させ、(ii) 次に 2 つの平面が一致するよ

うに  $x$  軸を中心に  $I$  だけ回転させ、(iii) 最後に  $z$  軸を中心に  $\Omega$  だけ回転させる（図 E.4, E.5 参照）。

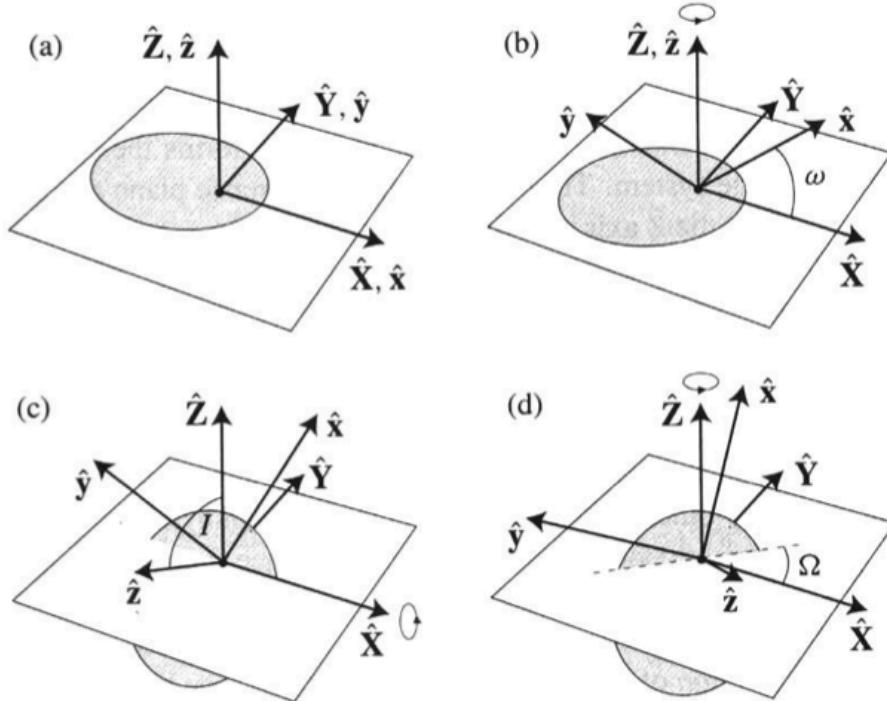


図 E.5 単位ベクトル  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  と角度  $\omega, I, \Omega$  の関係。(a): 近日点の向きを  $\hat{X}$  軸と一致させる。(b): まず  $\hat{Z}$  軸正の向きに  $\omega$  回転させる。(c): 次に  $\hat{X}$  軸正の向きに  $I$  回転させる。(d): 最後に  $\hat{Z}$  軸正の向きに  $\Omega$  回転させる (Murray & Dermott, 1999)。

これらのような 3 次元座標系の変換は、それぞれ  $P_1, P_2, P_3$  のような  $3 \times 3$  回転行列で表現できる。

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.54})$$

これらを使うと、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{E.55})$$

ここで  $P^{-1}$  は  $P$  の逆行列である。すべての回転行列は直交行列であるため、逆行列は転置行列と等しい。便宜上、

$$\begin{aligned} & P_3 P_2 P_1 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I & \sin \Omega \sin I \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I & -\cos \Omega \sin I \\ \sin \omega \sin I & \cos \omega \sin I & \cos I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

と定義する。

軌道面の座標系での位置を基準面の座標系で表すと、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.57})$$

$$= \begin{pmatrix} aP_x(\cos E - e) + a\sqrt{1-e^2}Q_x \sin E \\ aP_y(\cos E - e) + a\sqrt{1-e^2}Q_y \sin E \\ aP_z(\cos E - e) + a\sqrt{1-e^2}Q_z \sin E \end{pmatrix} \quad (\text{E.58})$$

回転変換では長さは保存されるため、 $a, e$  の値は変化しない。

また、式 (E.42), (E.50) から  $\dot{E}$  を変形すると

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\dot{E} \sin E \\ a\sqrt{1-e^2}\dot{E} \cos E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.59})$$

$$= \frac{an}{R} \begin{pmatrix} -a \sin E \\ a\sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.60})$$

となるため、軌道面の座標系での速度を基準面の座標系で表すと、

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \frac{an}{R} \begin{pmatrix} -a \sin E \\ a\sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.61})$$

$$= \frac{an}{R} \begin{pmatrix} -aP_x \sin E + a\sqrt{1-e^2}Q_x \cos E \\ -aP_y \sin E + a\sqrt{1-e^2}Q_y \cos E \\ -aP_z \sin E + a\sqrt{1-e^2}Q_z \cos E \end{pmatrix} \quad (\text{E.62})$$

これで時間  $t$  での橙円運動をする天体の基準面の座標系における位置  $(X, Y, Z)$  と速度  $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$  を、6 つの軌道要素  $a, e, I, \Omega, \omega, E$  で表すことができるようになった。

続いて、軌道要素を基準面の座標系の位置と速度で表すことを考える。

$$\mu = G(m_1 + m_2) \quad (\text{E.63})$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (\text{E.64})$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 \quad (\text{E.65})$$

$$\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} \quad (\text{E.66})$$

$$\mathbf{h} = (Y\dot{Z} - Z\dot{Y}, Z\dot{X} - X\dot{Z}, X\dot{Y} - Y\dot{X}) \quad (\text{E.67})$$

$$\dot{R} = \pm \sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}} \quad (\text{E.68})$$

ここで  $R = r$  は動径ベクトルの長さ、 $\dot{R}$  はその変化率を示している。 $R$  は常に正なので、 $\dot{R}$  の符号は  $\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}$  の符号と一致する。 $\mathbf{h} = (h_X, h_Y, h_Z)$  のそれぞれの成分は、

$$h \cos I = h_Z \quad (\text{E.69})$$

$$h \sin I \sin \Omega = \pm h_X \quad (\text{E.70})$$

$$h \sin I \cos \Omega = \mp h_Y \quad (\text{E.71})$$

ここで、 $h_Z$  の符号が正のとき式 (E.70), (E.71) の上の符号、 $h_Z$  の符号が負のとき下の符号をとる。さらに、式 (E.58), (E.62) を  $P_i, Q_i (i = x, y, z)$  について解くと

$$P_i = \frac{X_i}{R} \cos E - \sqrt{\frac{a}{\mu}} \dot{X}_i \sin E \quad (\text{E.72})$$

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{X_i}{R} \sin E + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \dot{X}_i (\cos E - e) \right) \quad (\text{E.73})$$

軌道要素を求める過程を以下に示す。

1) 式 (E.34), (E.64), (E.65) から  $a$  を求める。

$$a = \left( \frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu} \right)^{-1} \quad (\text{E.74})$$

2) 式 (E.42) より

$$e \cos E = 1 - \frac{R}{a} \quad (\text{E.75})$$

式 (E.42) の時間微分と (E.50) より

$$\dot{R} = ae\dot{E} \sin E \quad (\text{E.76})$$

$$= \frac{\sqrt{\mu a} e \sin E}{R} \quad (\text{E.77})$$

$$\therefore e \sin E = \frac{R \dot{R}}{\sqrt{\mu a}} = \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}}{\sqrt{\mu a}} \quad (\text{E.78})$$

式 (E.75), (E.78) から  $e$  を求める。

$$e = \sqrt{\left(1 - \frac{R}{a}\right)^2 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}})^2}{\mu a}} \quad (\text{E.79})$$

3) 式 (E.75), (E.78), (E.79) から  $\sin E, \cos E$  の形で  $E$  を求める。

$$\cos E = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{R}{a}\right) \quad \text{and} \quad \sin E = \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}}{e \sqrt{\mu a}} \quad (\text{E.80})$$

4) 式 (E.56), (E.72), (E.73) から  $\sin I, \cos I$  の形で  $I$  を求める。

$$\sin I = \sqrt{P_z^2 + Q_z^2} \quad \text{and} \quad \cos I = P_x Q_y - P_y Q_x \quad (\text{E.81})$$

5) 式 (E.56), (E.81), (E.72), (E.73) から  $\sin \omega, \cos \omega$  の形で  $\omega$  を求める。

$$\sin \omega = \frac{P_z}{\sqrt{P_z^2 + Q_z^2}} \quad \text{and} \quad \cos \omega = \frac{Q_z}{\sqrt{P_z^2 + Q_z^2}} \quad (\text{E.82})$$

6) 式 (E.56), (E.82), (E.72), (E.73) から  $\sin \Omega, \cos \Omega$  の形で  $\Omega$  を求める。

$$\sin \Omega = \frac{P_y Q_z - Q_y P_z}{\sqrt{P_z^2 + Q_z^2}} \quad \text{and} \quad \cos \Omega = \frac{P_x Q_z - Q_x P_z}{\sqrt{P_z^2 + Q_z^2}} \quad (\text{E.83})$$

これで 6 つの軌道要素  $a, e, I, \Omega, \omega, E$  を、時間  $t$  での橿円運動をする天体の基準面の座標系における位置  $(X, Y, Z)$  と速度  $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$  で表すことができるようになった。

## E.2 制限 3 体問題

この節では 3 体の物体が重力相互作用をした場合に拡張して考える。特に、3 体目の質量が他の 2 つに比べ無視できるほど小さいときの 3 体目の物体の運動について考える。この問題は「制限 3 体問題」と呼ばれる。特に、1,2 体目の物体がそれらの共通重心を中心に円運動をし、3 体目の物体がそれと同一な平面上を運動する場合、「円制限 3 体問題」と呼ばれる。太陽系の天体の軌道と質量の階層構造（太陽、惑星、衛星、リングなど）は、制限 3 体問題近似によって比較的簡単な解析で定性的に天体の運動の振る舞いを理解できる。

### E.2.1 運動方程式

2 つの質量  $m_1, m_2$  の物体の重力の影響下で、質量が無視できるほど小さい粒子の運動を考える。粒子は 2 つの物体に影響を与えないが、2 つの物体は共通重心を中心に円運動をして粒子に力を及ぼすと仮定する。

$\xi, \eta, \zeta$  の軸を持ち、2 つの物体の重心を原点にとる慣性座標系を考える（図 E.6）。時刻  $t = 0$  で  $m_1$  から  $m_2$  に沿った方向に  $\xi$  軸、軌道平面上で  $\xi$  軸と垂直な方向に  $\eta$  軸、そして  $\xi - \eta$  平面に垂直な、角運動量ベクトルの方向に  $\zeta$  軸をとる。この慣性座標系での 2 つの物体の座標を  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  とし、距離は一定で、同じ角速度で共通重心のまわりを回っているとする。また単位質量を  $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$  となるように選ぶ。 $m_1 > m_2$  と仮定し、

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (E.84)$$

と定義すると、この単位系での 2 つの物体の質量は、

$$\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu} \quad \text{and} \quad \mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu} \quad (E.85)$$

となり、ここで仮定より  $\bar{\mu} < 1/2$  である。単位長さは、2 つの物体間の距離が 1 となるように選ぶ。そうすると共通の平均運動  $n$  も 1 となる。

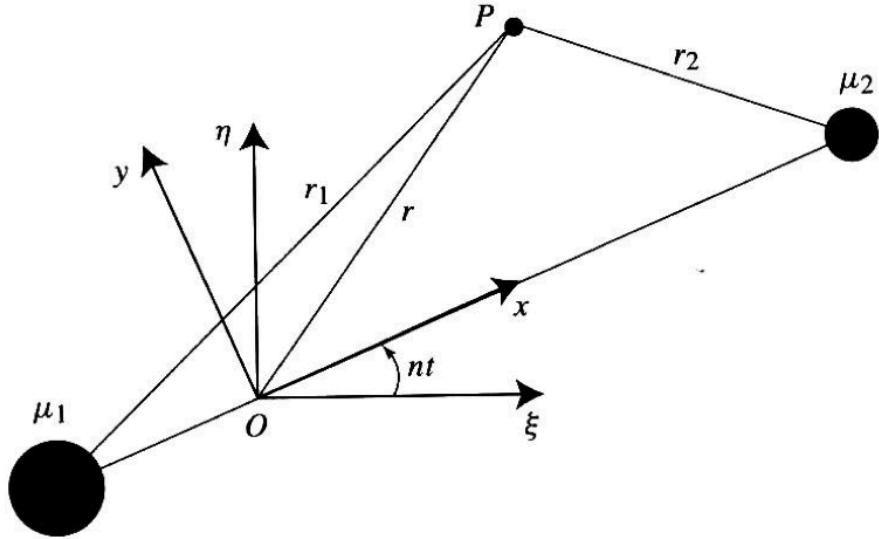


図 E.6 sidereal 座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  と synodic 座標系  $(x, y, z)$  の関係。点  $P$  は粒子。原点  $O$  は 2 つの物体の重心に位置する。 $\zeta$  軸と  $z$  軸は回転軸と一致する。矢印は正の回転の向きを表す (Murray & Dermott, 1999)。

慣性座標系、すなわち sidereal 座標系での粒子の座標を  $(\xi, \eta, \zeta)$  とする。逆 2 乗則のベクトル形式を用いると、粒子の運動方程式は、

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (E.86)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (E.87)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \quad (E.88)$$

となり、ここで図 E.6 より、

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \quad (E.89)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \quad (E.90)$$

これらの方程式は、2 つの物体の軌道の仮定が必要ないため、一般の 3 体問題にも有効である。

2 つの物体が円運動をするとき、それらの距離と平均運動は一定である。このような場合、2 つの物体の位置も固定されるような回転座標系での粒子の運動を考えたほうが自然

である。ここで、 $\xi, \eta$  座標と原点は同じだが、 $\zeta$  軸正の方向に一定の回転速度  $n$  で回転する新たな座標系を考える（図 E.6）。 $x$  軸を 2 つの物体に沿うようにとると、それぞれの座標は  $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$ ,  $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$  である。したがって、式 (E.85) と図 E.6 より、

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{E.91})$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{E.92})$$

となり、ここで  $(x, y, z)$  は回転座標系、すなわち synodic 座標系での粒子の座標である。これらの座標系は次のような単純な回転で関連づけられる。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{E.93})$$

今用いている単位系では  $n = 1$  であるが、方程式中に  $n$  をあえて残しておく。

式 (E.93) を各成分ごとに 2 階微分すると、

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (\text{E.94})$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (\text{E.95})$$

回転座標系に切り替えることによって、 $n\dot{x}, n\dot{y}$  の項（コリオリ力）と  $n^2x, n^2y$  の項（遠心力）が運動方程式に生じる。これらの式を使って式 (E.86), (E.87), (E.88) を書き換えると、

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin nt = \\ \left[ \mu_1 \frac{x_1 - 1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos nt + \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin nt \end{aligned} \quad (\text{E.96})$$

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt = \\ \left[ \mu_1 \frac{x_1 - 1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin nt - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos nt \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z \quad (\text{E.98})$$

式 (E.96) と  $\cos nt$  の積、式 (E.97) と  $\sin nt$  の積の和をとり、また式 (E.96) と  $-\sin nt$  の積、式 (E.97) と  $\cos nt$  の積の和をとると、synodic 座標系での運動方程式は、

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[ \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] \quad (\text{E.99})$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \quad (\text{E.100})$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z \quad (\text{E.101})$$

これらの運動方程式はスカラー関数  $U$  の勾配として書くこともできる。

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{E.102})$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{E.103})$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{E.104})$$

ここで  $U = U(x, y, z)$  は次のように与えられる。

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (\text{E.105})$$

$x^2 + y^2$  の項は遠心力によるポテンシャル、 $1/r_1, 1/r_2$  の項は重力によるポテンシャルであり、それぞれの偏微分をとると運動方程式に遠心力、重力の項が現れる。

式 (E.102), (E.103) の  $-2n\dot{y}$  と  $+2n\dot{x}$  の項はコリオリ項であり、回転座標系での粒子の速度に依存する。コリオリ力は速度方向に対して右側にずれる力であり、ゆえに効かない。

$U$  の定義より符号は正であるが、単に天文学の伝統であり、物理では慣習として符号を負にする。 $U^* = -U$  のように置き換えると運動方程式は、

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = - \frac{\partial U^*}{\partial x} \quad (\text{E.106})$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = - \frac{\partial U^*}{\partial y} \quad (\text{E.107})$$

$$\ddot{z} = - \frac{\partial U^*}{\partial z} \quad (\text{E.108})$$

また、 $U$  は真のポテンシャルではなく、回転座標系での粒子にかかる力のうち全てではないいくつかを得ることができるスカラー関数である。 $U$  は偽ポテンシャルと呼ぶ。

### E.2.2 ヤコビ積分

式 (E.102) と  $\dot{x}$  の積、式 (E.103) と  $\dot{y}$  の積、式 (E.104)) と  $\dot{z}$  の積の和をとると、

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt} \quad (\text{E.109})$$

これは積分できて、

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J \quad (\text{E.110})$$

ここで  $C_J$  は積分定数である。 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$  は回転座標系での速度の 2 乗なので、

$$v^2 = 2U - C_J \quad (\text{E.111})$$

または、式 (E.105) を用いて、

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \quad (\text{E.112})$$

これらのことから、 $2U - C_J$  はこの運動における定数であることがわかる。これはヤコビ積分（ヤコビエネルギー）と呼ばれる。ただし、制限 3 体問題ではエネルギーも角運動量も保存しないので、エネルギー積分ではないことに注意する。ヤコビ積分は単に円制限 3 体問題における積分定数であり、これは一般の場合には 3 体問題は閉じた式で解くことはできないことを意味する。

$C_J$  の表式は、回転していない、sidereal 座標系での粒子の位置と速度を使って書くこともできる。位置ベクトルは、式 (E.93) を用いると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (\text{E.113})$$

速度ベクトルは、式 (E.94) を用いると、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (\text{E.114})$$

しかし、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (\text{E.115})$$

とも書けるため、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (\text{E.116})$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt & 0 \\ -\sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} \sin nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.117})$$

とおくと、式 (E.116) から、

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= (\dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta}) A^T A \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n (\dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta}) A^T B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &\quad - n (\xi \ \eta \ \zeta) B^T A \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + n^2 (\xi \ \eta \ \zeta) B^T B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + n^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2n(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi) \end{aligned} \quad (\text{E.118})$$

ここで、 $A^T, B^T$  は  $A, B$  の転置行列を表す。 $A, B$  はどちらも直交行列なので、逆行列は単純に自身の転置行列である。回転行列を作用させても距離は常に変わらないので、 $x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$  である。このことは、式 (E.93) からも得られる。したがって、sidereal 座標系でのヤコビ積分の表式は、

$$C_J = 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) + 2n(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2 \quad (\text{E.119})$$

となる。これは以下のように書き直せる。

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}C_J \quad (\text{E.120})$$

ここで  $\mathbf{n} = (0, 0, n)$  であり、左辺は粒子の単位質量あたりの全エネルギーである。 $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$  は一定ではないため、制限 3 体問題ではエネルギーが保存しない理由はこの式で説明できる。

各座標系での粒子の位置と速度を測定することで、粒子の運動と関連したヤコビ積分の値を決定することができる。2 体問題では、角運動量とエネルギー積分を使って相対運動を解くことができた。ヤコビ積分は制限 3 体問題の单なる積分定数である。ヤコビ積分を使って運動を厳密に解くことはできないが、粒子が存在できない領域を決定することができる。

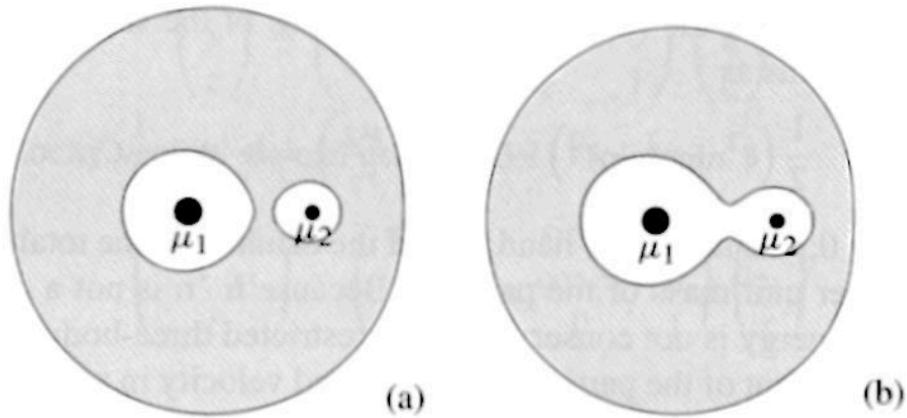


図 E.7  $\mu_2 = 0.2$  の場合のゼロ速度曲線 (Murray & Dermott, 1999)。(a):  $C_J = 3.9$ , (b):  $C_J = 3.7$  に対応している。

粒子の速度が 0 である場所を考えるとヤコビ積分の有用さがわかる。この場合、

$$2U = C_J \quad (\text{E.121})$$

または、

$$n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = C_J \quad (\text{E.122})$$

式 (E.122) はある  $C_J$  の値の曲面を定義している。この曲面はゼロ速度曲面として知られているもので、粒子の運動に制約を与える上で重要な役割を果たす。簡単のため  $x - y$  平面を考えると、ゼロ速度曲面と  $x - y$  平面が交わるところでは、ゼロ速度曲線を形成する。図 E.7 は  $\mu_2 = 0.2, n = 1$  の場合のゼロ速度曲線であり、網掛けの領域は粒子が存在することのできない領域を表している。式 (E.110) から、常に  $2U \geq C_J$  であることは明らかである。ゆえに式 (E.122) は、粒子が運動不可能な領域の境界線を決定する。したがって、制限 3 体問題は積分不可能である（任意の初期状態から粒子の運動を解くことができない）が、ヤコビ積分が存在するため、粒子が存在できない  $x - y$  平面の領域を見つけることができる。この結果は簡単に 3 次元に拡張できる。

### E.2.3 ヒル半径

中心星  $m_1$  の周りを運動する小さな粒子にとって、主な摂動は摂動源である伴星  $m_2$  に接近したときにのみ生じる。つまり粒子の運動はほぼケプラー運動である。この節では、伴星近傍での粒子の運動を考える際に重要な距離であるヒル（Hill）半径を導出する。

質量比が小さいとき ( $\mu_1 \approx 1$ ) の  $x - y$  平面での運動方程式は、式 (E.99), (E.100) より

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{x}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - 1}{r_2^3} \quad (\text{E.123})$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \quad (\text{E.124})$$

となる。ここで、伴星を原点とするように座標変換 ( $x \rightarrow 1 + x$ ) をし、また  $\Delta = r_2$  とする。伴星近傍での運動を考えているため、 $x, y, \Delta$  は  $\mathcal{O}(\mu_2^{1/3})$  の微小量と仮定することができる。 $\mu_2$  の高次の項を無視すると、 $r_1 \approx (1 + 2x)^{1/2}$  のように近似できる。よって式 (E.123), (E.124) は以下のように書き直せる。

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x = \frac{\partial U_H}{\partial x} \quad (\text{E.125})$$

$$\ddot{y} - 2\dot{x} = -\frac{\mu_2}{\Delta^3}y = \frac{\partial U_H}{\partial y} \quad (\text{E.126})$$

ここで、

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \quad \text{and} \quad \Delta^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{E.127})$$

である。式 (E.125), (E.126) はヒル方程式と呼ばれている。

式 (E.125) より、 $3\Delta^3 = \mu_2$  のとき動径方向 ( $x$  軸方向) に働く力は消えるが、これは潮汐力と重力相互作用が釣り合うことを表している。このことから、伴星の周りにヒル圏を定義することができ、その半径

$$\Delta_H = \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{1/3} \quad (\text{E.128})$$

を無次元ヒル半径と呼ぶ。 $\mu = G(m_1 + m_2) = n^2 a^3 = 1$  の規格化を解き、 $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2) \approx m_2/m_1$  の近似を用いることで、

$$R_H = \left( \frac{m_2}{3m_1} \right)^{1/3} a \quad (\text{E.129})$$

のようにヒル半径が定義される。

## 付録 F

# 破壊による面密度減少の解析解

微惑星のような小天体の衝突・破壊現象は、現在の太陽系に存在する小惑星帯やカイペーベルト、土星のリング、さらに太陽系外で観測されているデブリ円盤などにおいて非常に重要な物理である。破壊によって放出された破片は、破片同士で繰り返し衝突を起こすことできさらに小さくなり、質量空間における定常な負の質量フラックスが形成される(e.g., [Tanaka et al., 1996](#))。この現象は衝突カスケードと呼ばれている。繰り返しの衝突によって小さくなつた破片は、中心星からの輻射圧によって系外へ吹き飛ばされ、小天体の面密度は減少する。衝突カスケードによって定常な質量フラックスが実現される場合、小天体の面密度減少のタイムスケールは、小天体の集団の中で最大の天体が衝突・破壊するタイムスケールと、その衝突・破壊でどのくらい破片を放出するのかで決定される。この章では、[Kobayashi & Tanaka \(2010\)](#) によって求められた、破壊によって生じる質量フラックスと面密度減少の解析解を導出する。

### F.1 基礎方程式

細い円環上をケプラー運動をする小天体の集団の質量分布を考える。衝突後に合体または破壊することによって、この質量分布は時間進化する。質量が  $[m, m + dm]$  の範囲にある小天体の面数密度を  $n_s(m)dm$  として定義すると、質量保存の式より

$$\frac{\partial mn_s(m)}{\partial t} + \frac{\partial F(m)}{\partial t} = 0 \quad (\text{F.1})$$

が成り立つ。ここで  $F(m)$  は質量  $m$  を通過する質量フラックスである。質量が  $[m_1, m_1 + dm_1]$  と  $[m_2, m_2 + dm_2]$  の範囲にある 2 つの小天体の集団同士が衝突する単位面積当た

りのタイムスケールは

$$\Omega_K n_s(m_1) dm_1 n_s(m_2) dm_2 P_{\text{col}} \quad (\text{F.2})$$

で与えられる。ここで、 $\Omega_K$  はケプラー角速度、 $P_{\text{col}}$  は面積の次元をもつ衝突確率である。衝突確率は、重力フォーカシングが無視できるような高速度衝突の場合、3 体問題の効果を考慮すると

$$P_{\text{col}} = \pi (R_1 + R_2)^2 \frac{\mathcal{F}(I)}{2\pi^2} = h_0 m_1^{2/3} \left(1 + y^{1/3}\right)^2 \quad (\text{F.3})$$

$$h_0 = 6.1 \times 10^{-2} \mathcal{F}(I) \rho^{-2/3} \quad (\text{F.4})$$

のように幾何断面積と補正因子で表される (Greenzweig & Lissauer, 1992; Inaba et al., 2001)。ここで、 $I$  は相対軌道傾斜角と相対離心率の比、 $\rho$  は小天体の物質密度、 $y = m_2/m_1$  である。相対軌道傾斜角と相対離心率の比が 0.5 の場合、 $\mathcal{F}(I = 0.5) = 17.3$  であり (Greenzweig & Lissauer, 1992)、補正因子は  $\mathcal{F}(I = 0.5)/2\pi^2 = 0.88$  となる。

また、 $m_1, m_2$  が衝突する際にどのくらい破片を放出するのかをモデル化するため、Tanaka et al. (1996) では関数  $f(m, m_1, m_2)$  が導入された。 $f(m, m_1, m_2)$  は、 $m_1, m_2$  が衝突する際に  $m_1$  から放出される質量  $m$  以下の破片の総質量を  $m_1$  で規格化したものである。したがって  $m_1$  と  $m_2$  の両方から出る質量  $m$  以下の破片の総質量は

$$m_1 f(m, m_1, m_2) + m_2 f(m, m_2, m_1) \quad (\text{F.5})$$

のようにかける。さらに、質量が  $[m, m + dm]$  の範囲にある破片の個数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} [m_1 f(m + dm, m_1, m_2) - m_1 f(m, m_1, m_2) \\ & \quad + m_2 f(m + dm, m_2, m_1) - m_2 f(m, m_2, m_1)] \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{m} \left[ \frac{m_1 f(m + dm, m_1, m_2) - m_1 f(m, m_1, m_2)}{dm} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m_2 f(m + dm, m_2, m_1) - m_2 f(m, m_2, m_1)}{dm} \right] dm \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} [m_1 f(m, m_1, m_2) + m_2 f(m, m_2, m_1)] dm \quad (\text{F.8})$$

となる。

重力フォーカシングが無視できるような高速度衝突の場合を考えていたので合体を無視すると、質量フラックスは

$$F(m) = - \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \Omega_K m_1 f(m, m_1, m_2) P_{\text{col}} n_s(m_1) n_s(m_2) \quad (\text{F.9})$$

のような積分形でかける。

## F.2 破壊のモデル

ここでは、後述する 3 つのパラメータで決まるようなシンプルな破壊モデルを導入し、 $f(m, m_1, m_2)$  の表式を具体的に求める。

図 F.1 は、 $m_1$  と  $m_2$  が衝突した際に  $m_1$  から放出される  $[m, m + dm]$  の範囲にある破片の個数

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} [m_1 f(m, m_1, m_2)] dm \quad (\text{F.10})$$

の質量依存性をモデル化したものである。この破片の個数分布モデルは、最大破片質量  $m_L$  を境にべき分布と残骸に分けられる。 $m < m_L$  の領域では、破片の個数分布の質量依存性は  $m^{-b}$  であり、破片の総質量  $m_e$  はこの領域の破片の質量を積分したものである。また、残骸の質量は  $m_1 - m_e$  となる。

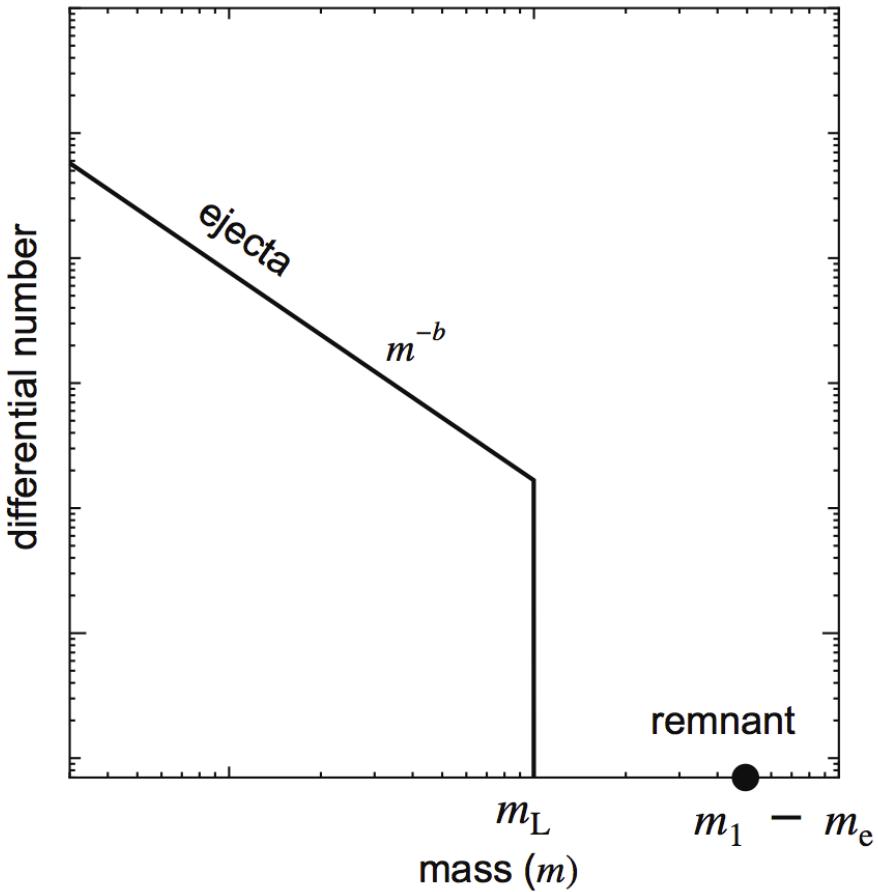


図 F.1  $m_1$  と  $m_2$  が衝突した際に  $m_1$  から放出される破片の個数分布の質量依存性 (Kobayashi & Tanaka, 2010)。 $m < m_L$  の領域では、破片の個数分布の質量依存性は  $m^{-b}$  であり、破片の総質量  $m_e$  はこの領域の破片の質量を積分したものである。また、残骸の質量は  $m_1 - m_e$  となる。

続いて、破片の総質量  $m_e$  と最大破片質量  $m_L$  を、天体を破壊するために必要な衝突体質量当たりのエネルギー  $Q_D^*$  (付録 C 参照) で規格化した衝突エネルギー  $\phi$  の関数としてモデル化する。 $m_1$  と  $m_2$  が相対速度  $v$  で衝突する時の衝突エネルギー  $E_{\text{imp}}$  は

$$E_{\text{imp}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \quad (\text{F.11})$$

である。また  $m_1$  を破壊するために必要なエネルギーは  $m_1 Q_D^*$  と表されるので、

$$\phi(y) = \frac{E_{\text{imp}}}{m_1 Q_D^*} = \frac{v^2}{2Q_D^*} \frac{y}{1+y} \quad (\text{F.12})$$

である。ここで  $y = m_2/m_1$  である。破片の総質量  $m_e$  は、 $\phi = 1$  で  $m_e = m_1/2$  となるような滑らかな増加関数であると考えられるため、ここでは

$$m_e = \frac{\phi}{1 + \phi} m_1 \quad (\text{F.13})$$

とする。最大破片質量  $m_L$  は、無次元パラメータ  $\varepsilon$  を導入し、

$$m_L = \frac{\varepsilon}{1 + \phi} m_e = \frac{\varepsilon \phi}{(1 + \phi)^2} m_1 \quad (\text{F.14})$$

とする。このモデルでは  $\phi \gg 1$  のとき  $m_L \propto 1/\phi$  となるが、これは衝突実験の結果と整合的である (e.g., Paolicchi et al., 1996; Arakawa, 1999)。

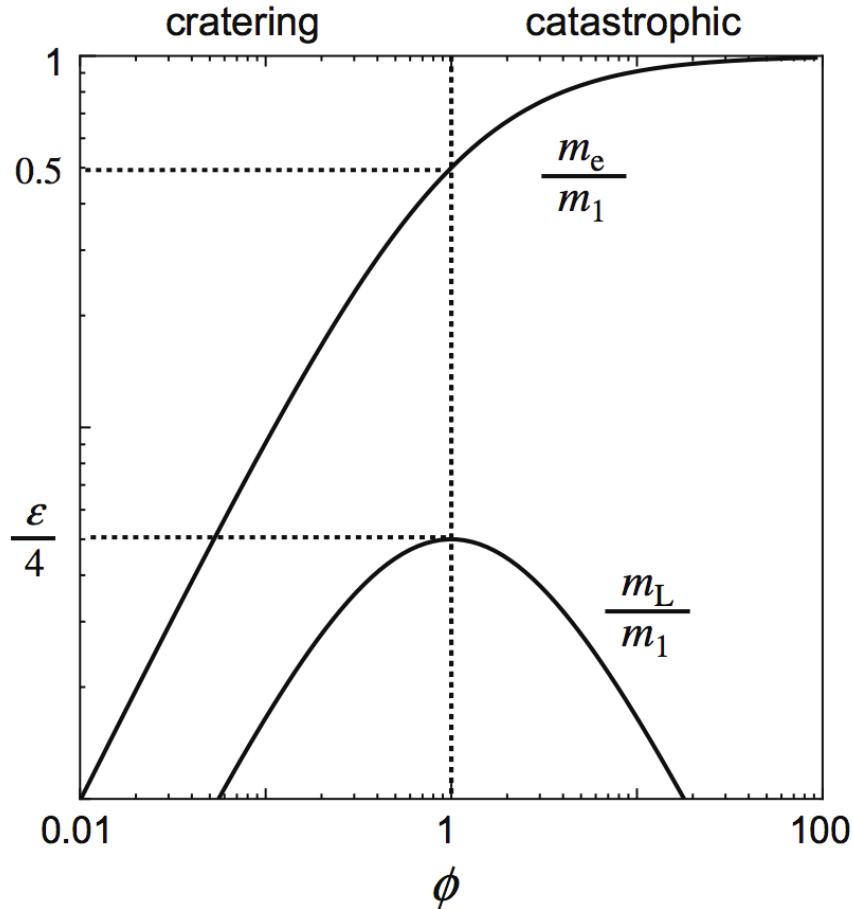


図 F.2 破片の総質量  $m_e$  と最大破片質量  $m_L$  のモデルの  $m_1 Q_D^*$  で規格化した衝突エネルギー  $\phi$  依存性 (Kobayashi & Tanaka, 2010)。 $Q_D^*$  の定義 (付録 C 参照) より、 $\phi < 1$  のとき小規模 (cratering) な破壊、 $\phi > 1$  のとき大規模 (catastrophic) な破壊となる。

以上より、この破壊モデルは  $(b, \varepsilon, v^2/Q_D^*)$  の 3 つのパラメータを用いて破片の放出を計算する。

### F.3 質量フラックス

この破壊モデルを用いて質量フラックスを計算する。

図 F.1 より  $f(m, m_1, m_2)$  を破片部分  $f_{\text{eject}}$  と残骸部分  $f_{\text{rem}}$  の 2 つに分ける。

$$f(m, m_1, m_2) = f_{\text{eject}}(m, m_1, m_2) + f_{\text{rem}}(m, m_1, m_2) \quad (\text{F.15})$$

ここで、

$$m_1 f_{\text{eject}}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} m_e & (m > m_L) \\ m_e \left(\frac{m}{m_L}\right)^{(2-b)} & (m \leq m_L) \end{cases} \quad (\text{F.16})$$

$$m_1 f_{\text{rem}}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} m_1 - m_e & (m \geq m_1 - m_e) \\ 0 & (m < m_1 - m_e) \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

まずは簡単のため、破片の総質量が自己相似的な場合を考える。また新たに無次元変数  $x = m/m_1, y = m_2/m_1$  を導入し、小天体の集団の面数密度が  $n_s(m) = Am^{-\alpha}$  ( $A$  は定数) のようなべき分布だとする。自己相似的な場合、

$$f(m, m_1, m_2) = f(x, y) \quad (\text{F.18})$$

のように書き直すことができ、式 (F.9) より

$$F(m) = -A^2 \Omega_K h_0 m^{\frac{11}{3}-2\alpha} \int_0^1 dx \int_0^\infty dy y^{-\alpha} \left(1 + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 x^{2\alpha-\frac{14}{3}} f(x, y) \quad (\text{F.19})$$

となる。よって、定常 ( $\partial F(m)/\partial m = 0$ ) な場合の面数密度のべき  $\alpha$  は

$$\alpha = \frac{11}{6} \quad (\text{F.20})$$

となる (e.g., Dohnanyi, 1969; Tanaka et al., 1996)。

$F(m)$  も同様に破片部分  $F_{\text{eject}}$  と残骸部分  $F_{\text{rem}}$  の 2 つに分け、 $f(x, y)$  の具体的な表式

を代入すると

$$F_{\text{eject}}(m) = -A^2 \Omega_K h_0 \int_0^\infty dy \frac{y^{-\alpha} \left(1 + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 \phi(y)}{1 + \phi(y)} \quad (\text{F.21})$$

$$\times \left\{ \int_0^{k(y)} x^{2\alpha - \frac{14}{3}} \left[ \frac{x}{k(y)} \right]^{2-b} dx + \int_{k(y)}^1 x^{2\alpha - \frac{14}{3}} dx \right\} \quad (\text{F.22})$$

$$F_{\text{rem}}(m) = -A^2 \Omega_K h_0 \int_0^\infty dy \frac{y^{-\alpha} \left(1 + y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{1 + \phi(y)} \int_{\frac{1}{1+\phi(y)}}^1 x^{2\alpha - \frac{14}{3}} dx \quad (\text{F.23})$$

となる。ここで  $k(y) = \varepsilon \phi(y) / [1 + \phi(y)]^2$  である。さらに、 $\alpha = 11/6$  を代入して  $x$  積分を行うと

$$F_{\text{eject}}(m) = -A^2 \Omega_K h_0 \int_0^\infty dy \frac{y^{-\alpha} \left(1 + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 \phi(y)}{1 + \phi(y)} \times \left[ -\ln \frac{\varepsilon \phi(y)}{[1 + \phi(y)]^2} + \frac{1}{2-b} \right] \quad (\text{F.24})$$

$$F_{\text{rem}}(m) = -A^2 \Omega_K h_0 \int_0^\infty dy \frac{y^{-\alpha} \left(1 + y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{1 + \phi(y)} \ln(1 + \phi(y)) \quad (\text{F.25})$$

となる。

重力フォーカシングが無視できるような高速度衝突  $v^2/Q_D^* \gg 1$  の場合、 $y = m_2/m_1 \ll 1$  の領域、つまり小規模 (cratering) な衝突の寄与が支配的である (Kobayashi & Tanaka, 2010)。このことから、 $(1 + y^{1/3})^2 \approx 1$ ,  $1 + y \approx 1$  と近似し、 $\phi(y) \approx (v^2/2Q_D^*)y$  のように変数変換すると、式 (F.24), (F.25) より

$$\frac{|F(m)|}{A^2 \Omega_K h_0} = \left( \frac{v^2}{2Q_D^*} \right)^{\alpha-1} \int_0^\infty d\phi \left\{ \frac{\phi^{1-\alpha}}{1+\phi} \left[ -\ln \frac{\varepsilon \phi}{(1+\phi)^2} + \frac{1}{2-b} \right] + \frac{\phi^{-\alpha}}{1+\phi} \ln(1+\phi) \right\} \quad (\text{F.26})$$

$$= \left( \frac{v^2}{2Q_D^*} \right)^{\alpha-1} \left[ \left( -\ln \varepsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1(\alpha) + s_2(\alpha) + s_3(\alpha) \right] \quad (\text{F.27})$$

のように書き直せる。ここで

$$s_1(\alpha) = \int_0^\infty d\phi \frac{\phi^{1-\alpha}}{1+\phi} \quad (\text{F.28})$$

$$s_2(\alpha) = - \int_0^\infty d\phi \frac{\phi^{1-\alpha}}{1+\phi} \ln \frac{\phi}{(1+\phi)^2} \quad (\text{F.29})$$

$$s_3(\alpha) = - \int_0^\infty d\phi \frac{\phi^{-\alpha}}{1+\phi} \ln(1+\phi) \quad (\text{F.30})$$

である。

続いて、 $v(m)^2/Q_D^*(m) \propto m^{-p}$  のように質量依存し、 $f(m, m_1, m_2)$  が非自己相似的な場合を考える。 $v^2/Q_D^* \gg 1$  であれば式 (F.9) は

$$F(m) = - A^2 \Omega_K h_0 m^{\frac{11}{3}-2\alpha} \left( \frac{v(m)^2}{2Q_D^*(m)} \right)^{\alpha-1} \quad (\text{F.31})$$

$$\times \left[ \left( -\ln \varepsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1(\alpha) + s_2(\alpha) + s_3(\alpha) \right] \quad (\text{F.32})$$

のような (F.27) と同じ表式となる。このとき  $F(m) \propto m^{11/3-2\alpha-p(\alpha-1)}$  であるため、定常 ( $\partial F(m)/\partial m = 0$ ) となる  $\alpha$  は

$$\alpha = \frac{11+p}{3+p} \quad (\text{F.33})$$

である。本研究では、こちらの非自己相似的な場合を採用する。

## F.4 面密度減少のタイムスケール

式 (F.32) で求めた質量フラックスを用いて、破壊による小天体の面密度減少のタイムスケールを導出する。

質量フラックス  $F(m)$  の定義より、面密度  $\Sigma$  の時間進化は

$$\frac{d\Sigma}{dt} = F(m) \quad (\text{F.34})$$

のようにかける。また、面密度の定義より

$$\Sigma = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} m n_s dm \simeq \frac{m_{\max}^{2-\alpha}}{2-\alpha} A \quad (\text{F.35})$$

であるため、 $|F(m)| \propto \Sigma^2$  となる。このとき式 (F.34) の微分方程式を解くと、面密度進化の解析解は

$$\Sigma(t) = \frac{\Sigma_0}{1 + t/\tau_{\text{dep},0}} \quad (\text{F.36})$$

となる。ここで  $\Sigma_0$  は初期の面密度、 $\tau_{\text{dep},0}$  は初期状態から見積もった破壊による面密度減少のタイムスケールであり、

$$\begin{aligned} \tau_{\text{dep},0} = & \frac{m_{\max}^{\frac{1}{3}}}{(2 - \alpha)^2 \Sigma_0 h_0 \Omega_K} \left( \frac{v(m_{\max})^2}{2Q_D^*(m_{\max})} \right)^{-\alpha+1} \\ & \times \left[ \left( -\ln \varepsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1(\alpha) + s_2(\alpha) + s_3(\alpha) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

のように定義される。任意の時刻  $t$  での破壊による面密度減少のタイムスケール  $\tau_{\text{dep}}(t)$  は、式 (F.37) の  $\Sigma_0 \rightarrow \Sigma(t)$  に置き換えることで求めることができる。

# 参考文献

- Aarseth, S. J. 1985, in Multiple time scales, p. 377 - 418, ed. J. U. Brackbill & B. I. Cohen, 377–418
- Agnor, C., & Asphaug, E. 2004, ApJ, 613, L157
- Agnor, C. B., Canup, R. M., & Levison, H. F. 1999, Icarus, 142, 219
- Agnor, C. B., & Ward, W. R. 2002, ApJ, 567, 579
- Arakawa, M. 1999, Icarus, 142, 34
- Benz, W., & Asphaug, E. 1999, Icarus, 142, 5
- Chambers, J. E. 2001, Icarus, 152, 205
- Chambers, J. E., & Wetherill, G. W. 1998, Icarus, 136, 304
- Dohnanyi, J. S. 1969, J. Geophys. Res., 74, 2531
- Genda, H., Kobayashi, H., & Kokubo, E. 2015, ApJ, 810, 136
- Genda, H., Kokubo, E., & Ida, S. 2012, ApJ, 744, 137
- Goldreich, P., & Ward, W. R. 1973, ApJ, 183, 1051
- Greenzweig, Y., & Lissauer, J. J. 1992, Icarus, 100, 440
- Hayashi, C. 1981, Progress of Theoretical Physics Supplement, 70, 35
- Ida, S. 1990, Icarus, 88, 129
- Inaba, S., Tanaka, H., Nakazawa, K., Wetherill, G. W., & Kokubo, E. 2001, Icarus, 149, 235
- Kataoka, A., Tanaka, H., Okuzumi, S., & Wada, K. 2013, in Protostars and Planets VI Posters
- Kobayashi, H., & Tanaka, H. 2010, Icarus, 206, 735
- Kobayashi, H., Tanaka, H., Krivov, A. V., & Inaba, S. 2010, Icarus, 209, 836
- Kokubo, E., & Genda, H. 2010, ApJ, 714, L21

- Kokubo, E., & Ida, S. 1998, *Icarus*, 131, 171
- . 2000, *Icarus*, 143, 15
- . 2002, *ApJ*, 581, 666
- Kokubo, E., Kominami, J., & Ida, S. 2006, *ApJ*, 642, 1131
- Kominami, J., & Ida, S. 2002, *Icarus*, 157, 43
- . 2004, *Icarus*, 167, 231
- Makino, J. 1991, *ApJ*, 369, 200
- Makino, J., & Aarseth, S. J. 1992, *PASJ*, 44, 141
- McNeil, D., Duncan, M., & Levison, H. F. 2005, *AJ*, 130, 2884
- Morishima, R. 2015, *Icarus*, 260, 368
- Morishima, R., Schmidt, M. W., Stadel, J., & Moore, B. 2008, *ApJ*, 685, 1247
- Morishima, R., Stadel, J., & Moore, B. 2010, *Icarus*, 207, 517
- Murray, C. D., & Dermott, S. F. 1999, Solar system dynamics
- Nagasawa, M., Lin, D. N. C., & Thommes, E. 2005, *ApJ*, 635, 578
- O'Brien, D. P., & Greenberg, R. 2005, *Icarus*, 178, 179
- O'Brien, D. P., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2006, *Icarus*, 184, 39
- Ogihara, M., Ida, S., & Morbidelli, A. 2007, *Icarus*, 188, 522
- Ohtsuki, K. 1999, *Icarus*, 137, 152
- Ohtsuki, K., Stewart, G. R., & Ida, S. 2002, *Icarus*, 155, 436
- Okuzumi, S., Tanaka, H., Kobayashi, H., & Wada, K. 2012, *ApJ*, 752, 106
- Paolicchi, P., Verlicchi, A., & Cellino, A. 1996, *Icarus*, 121, 126
- Raymond, S. N., O'Brien, D. P., Morbidelli, A., & Kaib, N. A. 2009, *Icarus*, 203, 644
- Raymond, S. N., Quinn, T., & Lunine, J. I. 2006, *Icarus*, 183, 265
- Tanaka, H., Inaba, S., & Nakazawa, K. 1996, *Icarus*, 123, 450
- Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. 2002, *ApJ*, 565, 1257
- Thommes, E. W., Matsumura, S., & Rasio, F. A. 2008, *Science*, 321, 814
- Ward, W. R. 1986, *Icarus*, 67, 164

Wetherill, G. W. 1985, Science, 228, 877

Youdin, A. N., & Shu, F. H. 2002, ApJ, 580, 494