

巨大衝突ステージにおける 衝突・破壊を考慮した N体シミュレーション

磯谷和秀 (名古屋大 Ta研 M2)
共同研究者 小林浩

目次

1. イントロダクション

- ・ 地球型惑星形成と問題点
- ・ 先行研究

2. 研究目的

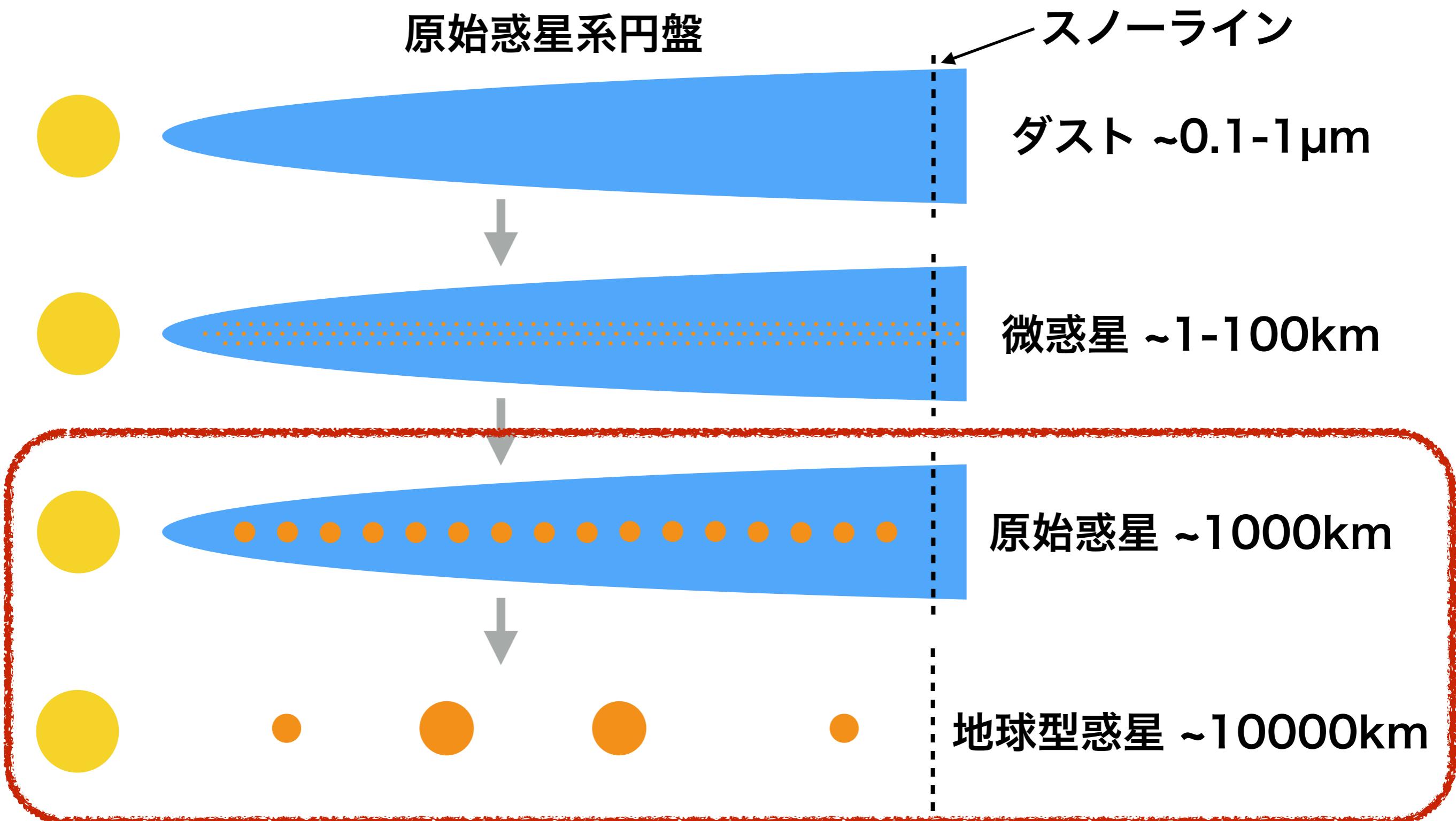
3. 手法

- ・ N体計算と統計的手法のハイブリッド
- ・ 破壊の取り扱い方

4. 結果

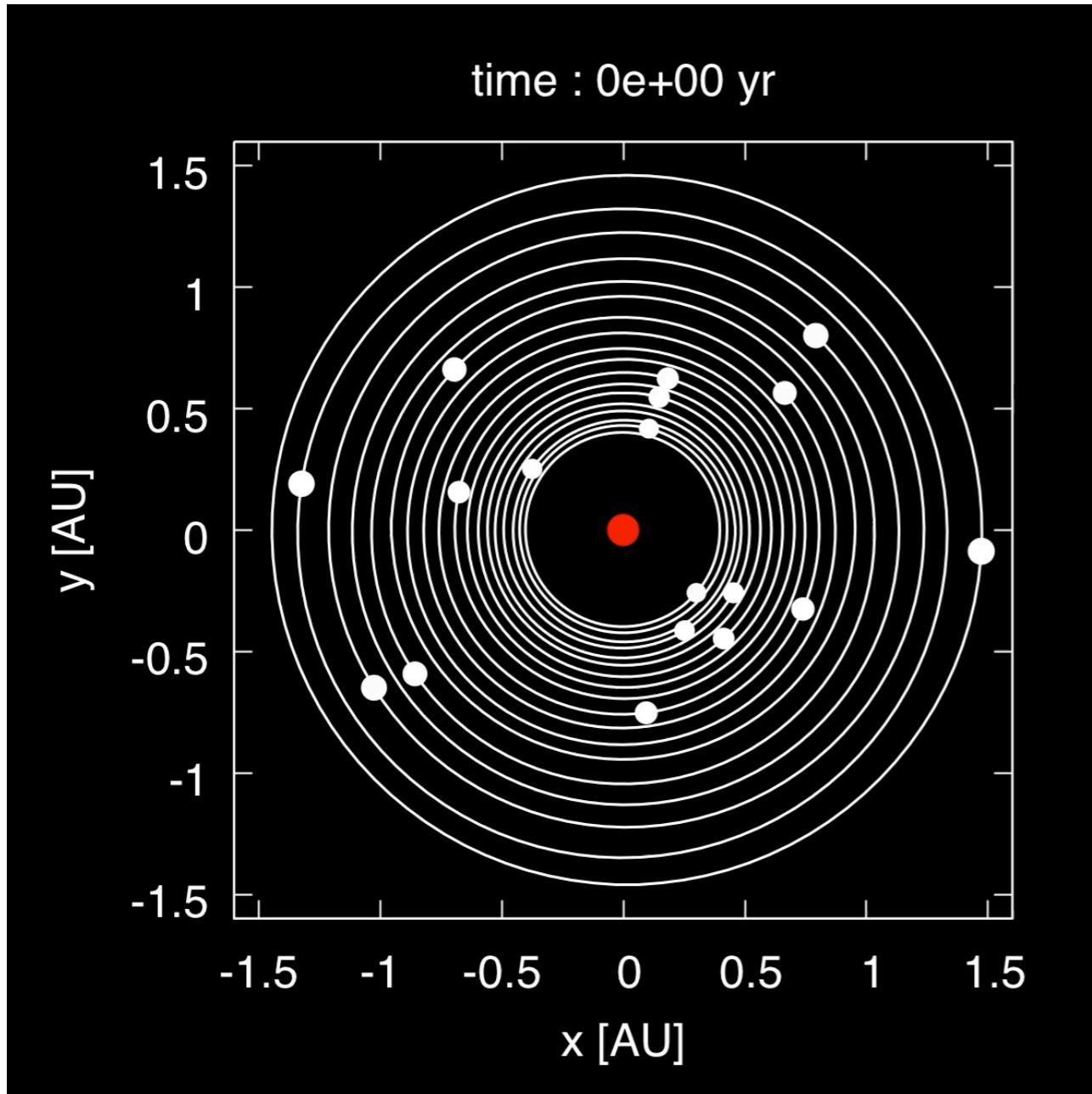
5. まとめと今後の課題

地球型惑星形成（標準モデル）



巨大衝突ステージ：地球型惑星の軌道・質量を特徴付ける

N体計算による原始惑星の衝突成長



初期条件

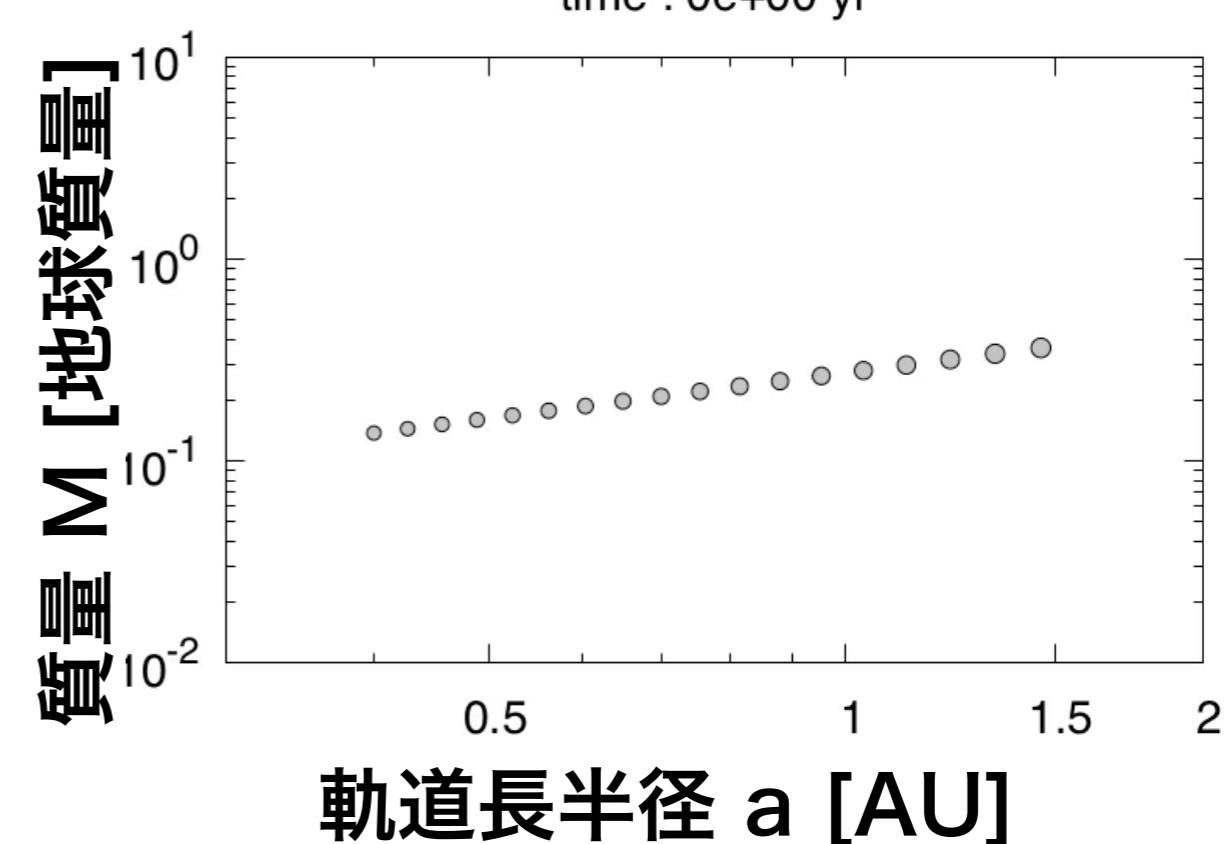
2MMSN

$e=0.01$

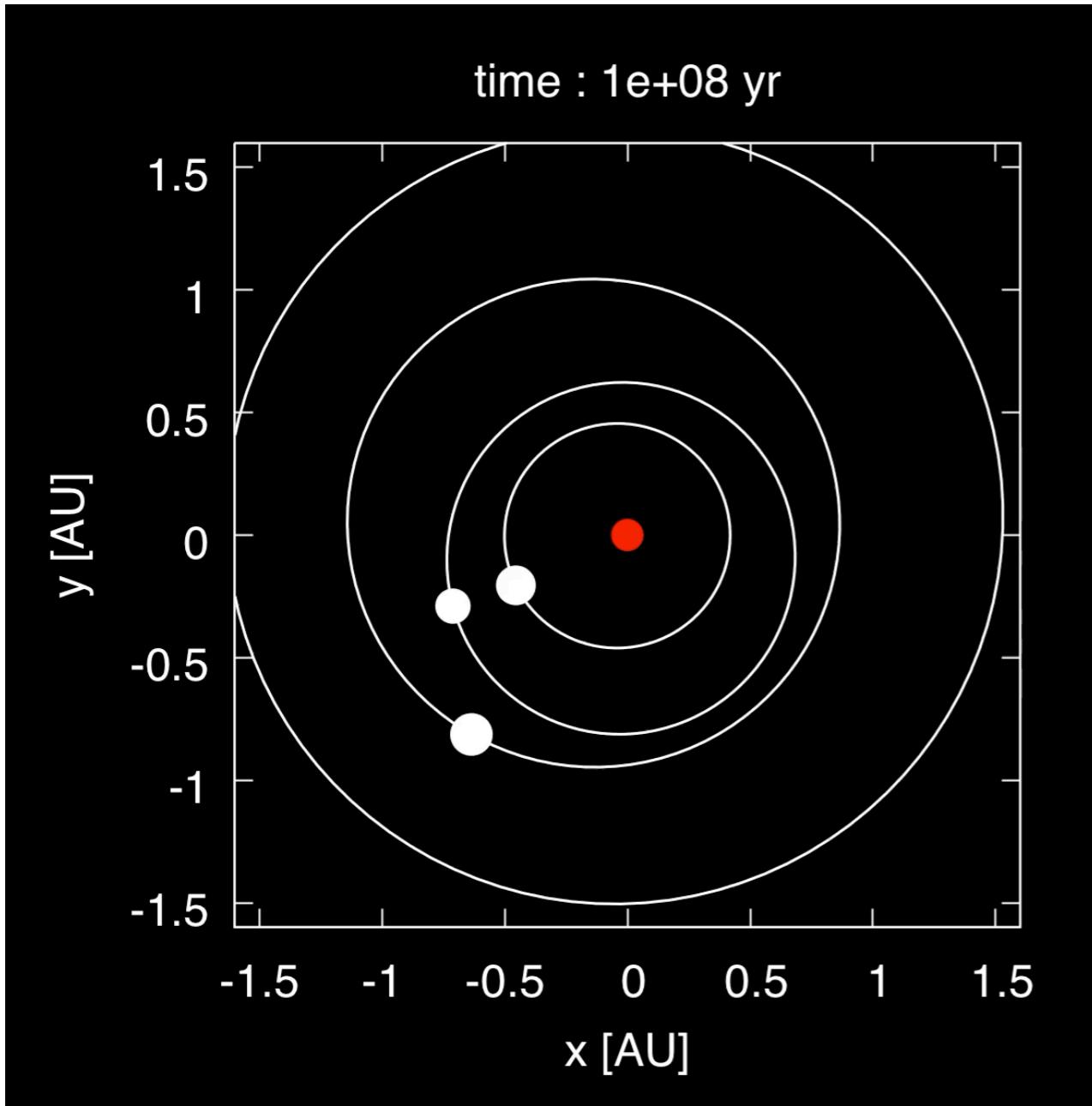
$a=0.4-1.5\text{AU}$

$i=0.005$

$\Delta a=10R_{H,M}$



N体計算による原始惑星の衝突成長



初期条件

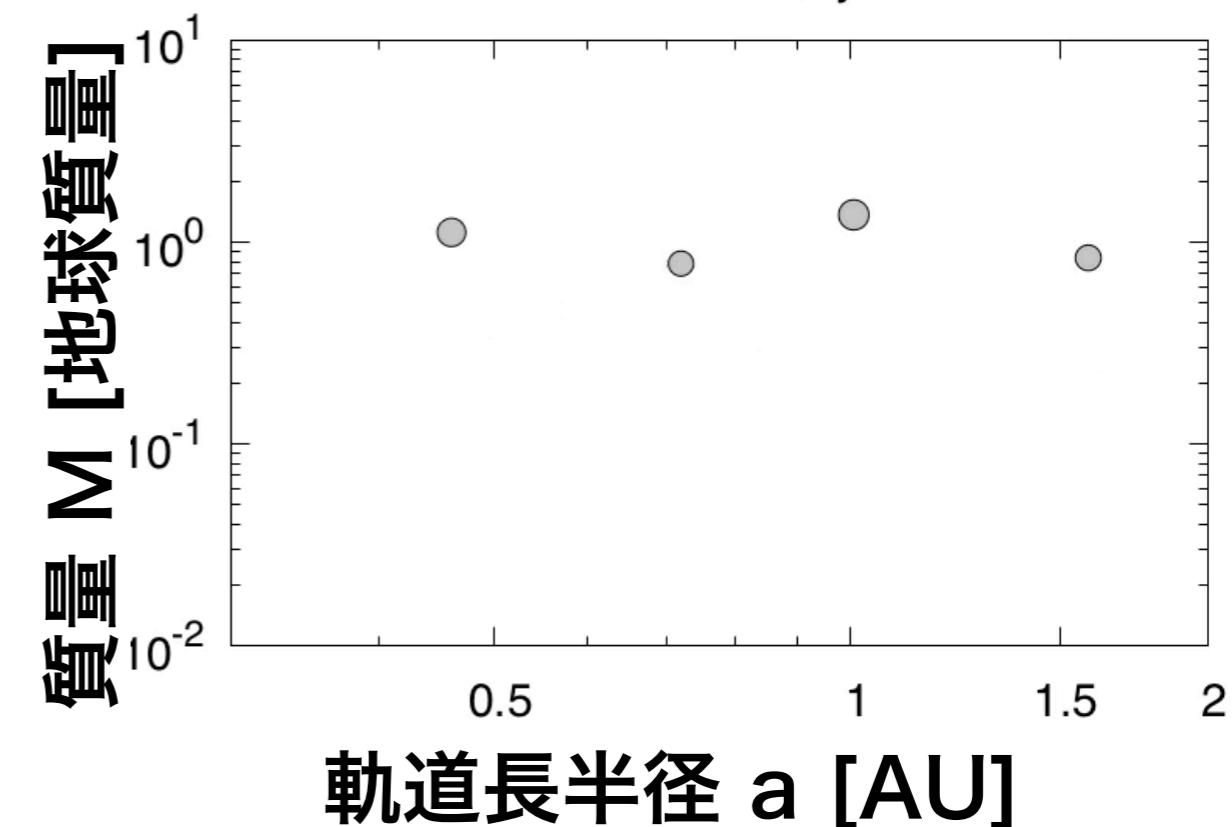
2MMSN

$e=0.01$

$a=0.4-1.5\text{AU}$

$i=0.005$

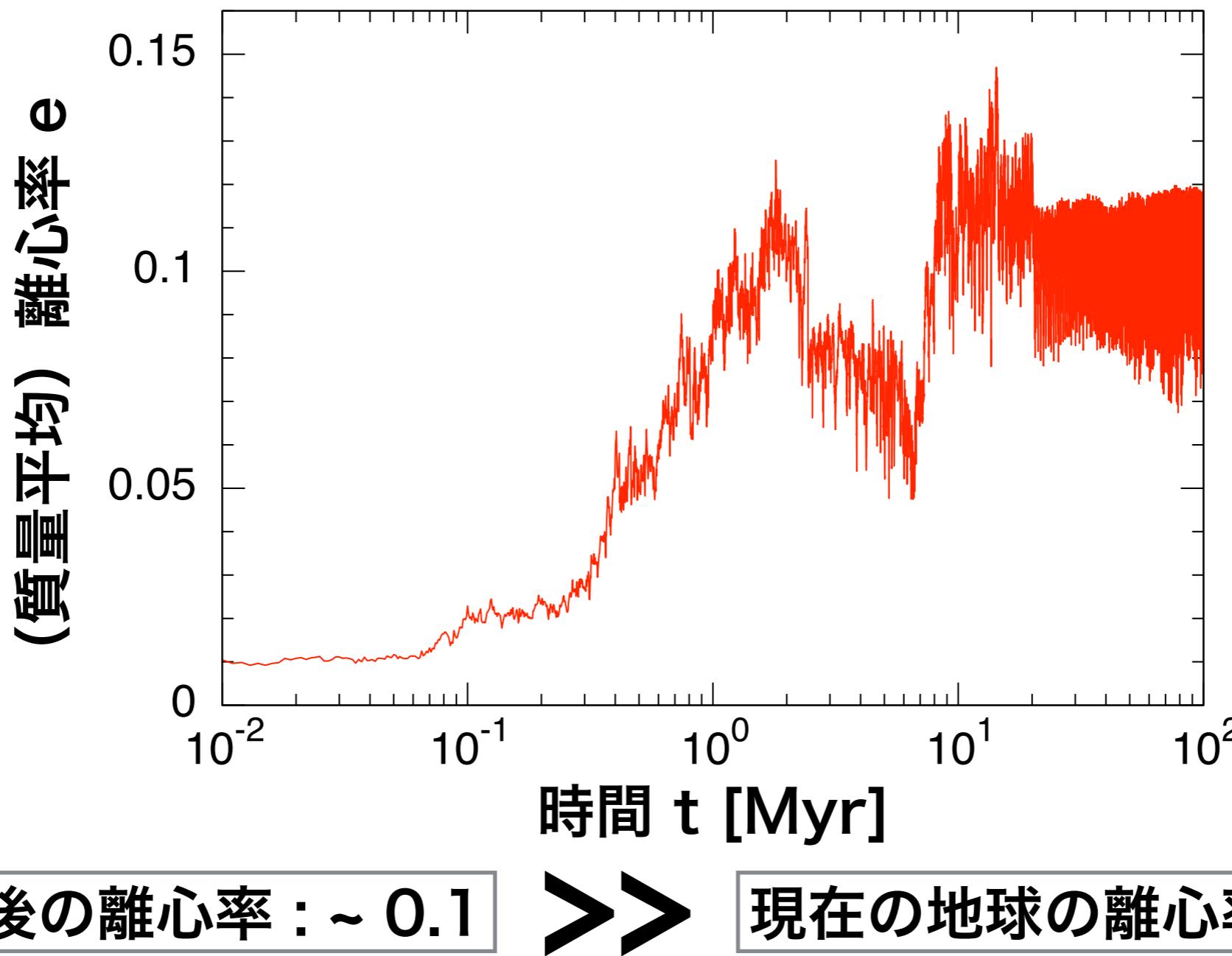
$\Delta a=10R_{H,M}$



1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

(e.g., Chambers & Wetherill 1998; Agnor et al. 1999;
Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

問題点：離心率上昇

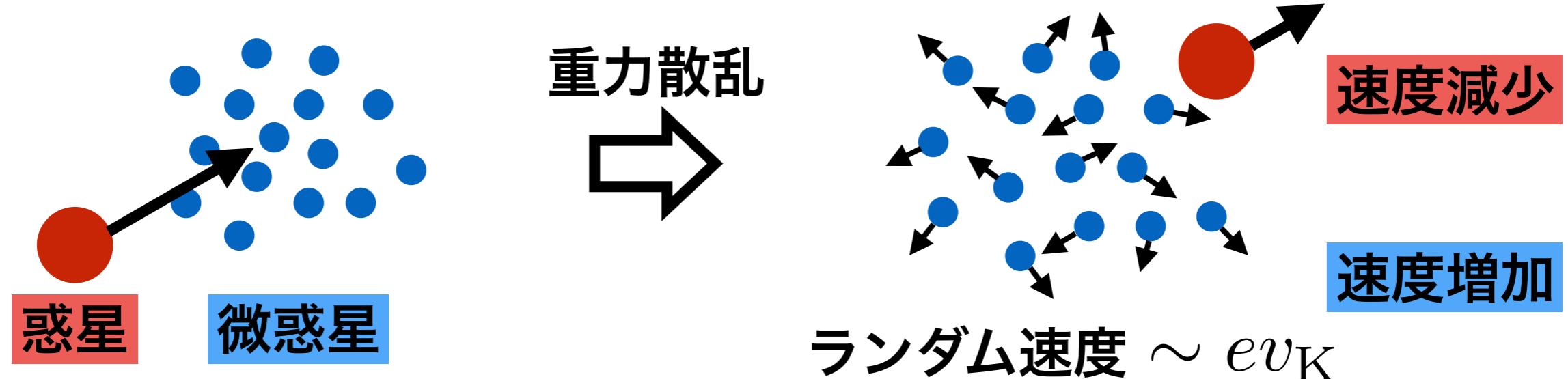


離心率が大きくなりすぎてしまう
→ 離心率を下げるメカニズムが必要

離心率を下げるメカニズム

残存微惑星との力学的摩擦

e.g., O'Brien et al. 2006;
Morishima et al. 2010



平均離心率の変化率の解析解 (e.g., Ohtsuki et al. 2002)

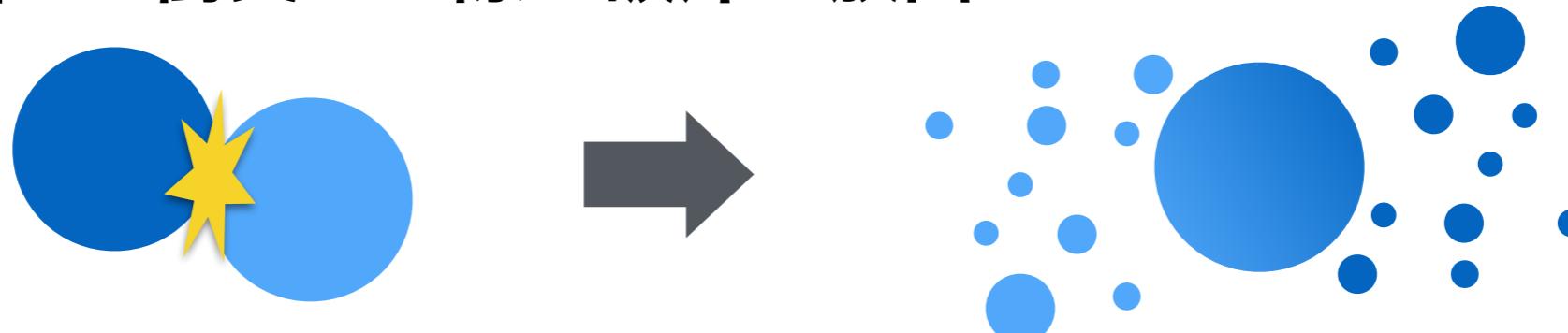
$$\left(\frac{d\langle e_{\text{惑}}^2 \rangle}{dt} \right)_{\text{df}} \propto - \frac{\sum_{\text{微}} (M \langle e_{\text{惑}}^2 \rangle - m \langle e_{\text{微}}^2 \rangle)}{\text{面密度 エネルギー等分配}} \quad (\tau_{\text{df}} \propto 1/\text{面密度})$$

残存微惑星との力学的摩擦により 地球型惑星の離心率は下がる !

残存微惑星の面密度は変わらないのか ?

微惑星同士の衝突・破壊の効果

「衝突・破壊」…衝突した際に破片を放出



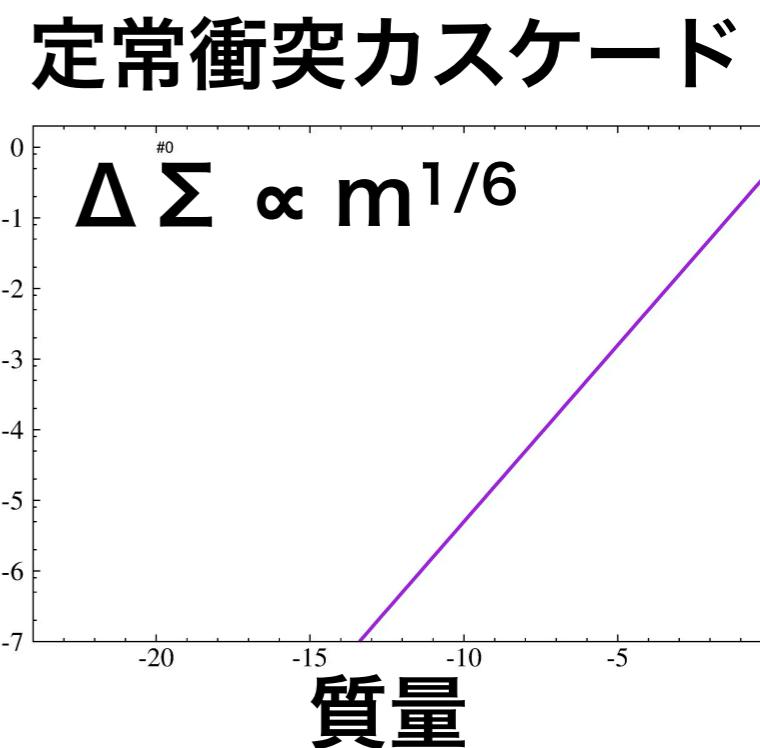
- ・ 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる（衝突力スケード）
- ・ $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる

➡ 微惑星円盤の面密度は減少する

Kobayashi & Tanaka 2010

- ・ 破片の面密度はべき一定のまま減少
- ・ 面密度減少のタイムスケール
 $\propto 1/\text{面密度}$

の
面
密度
減少
質量



研究目的

先行研究（残存微惑星説）の問題点：微惑星の破壊を考慮していない

破壊を考慮すると…

微惑星円盤の面密度が減少 (KT10)

➡ 残存微惑星による力学的摩擦の効率低下

➡ 地球型惑星の離心率を下げられるか？

破壊が力学的摩擦に与える影響を調べるため

微惑星同士の衝突・破壊を考慮した

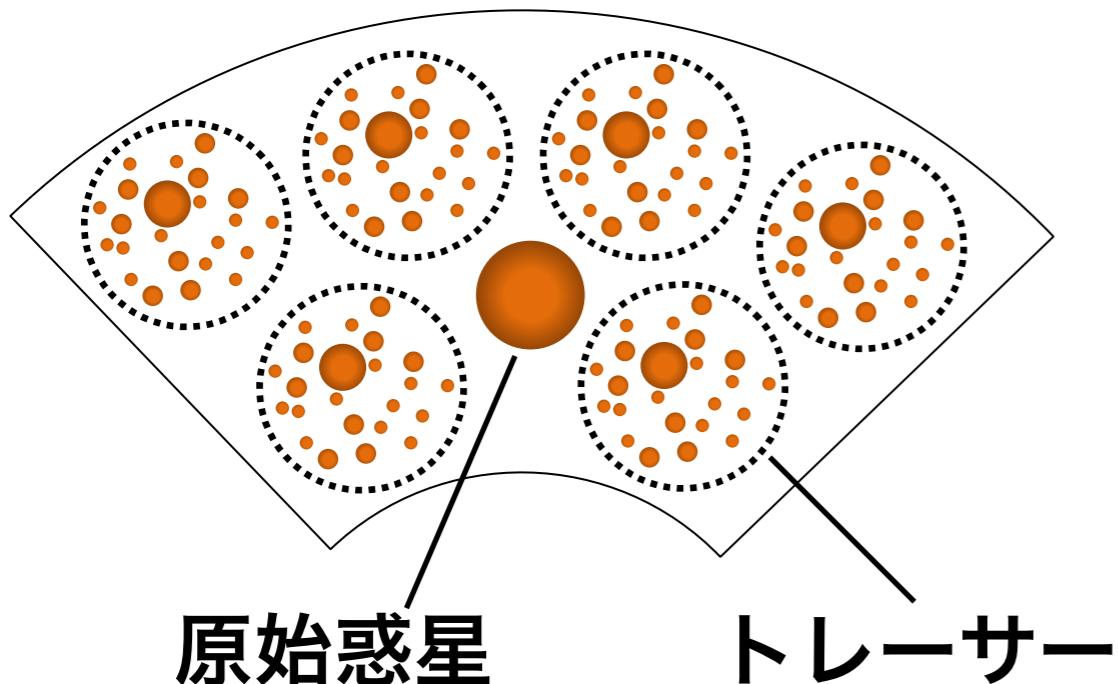
N体シミュレーションコードを開発する

手法

ハイブリッドコード

純粋なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(∴破壊に伴う破片~ 10^{35} 個)



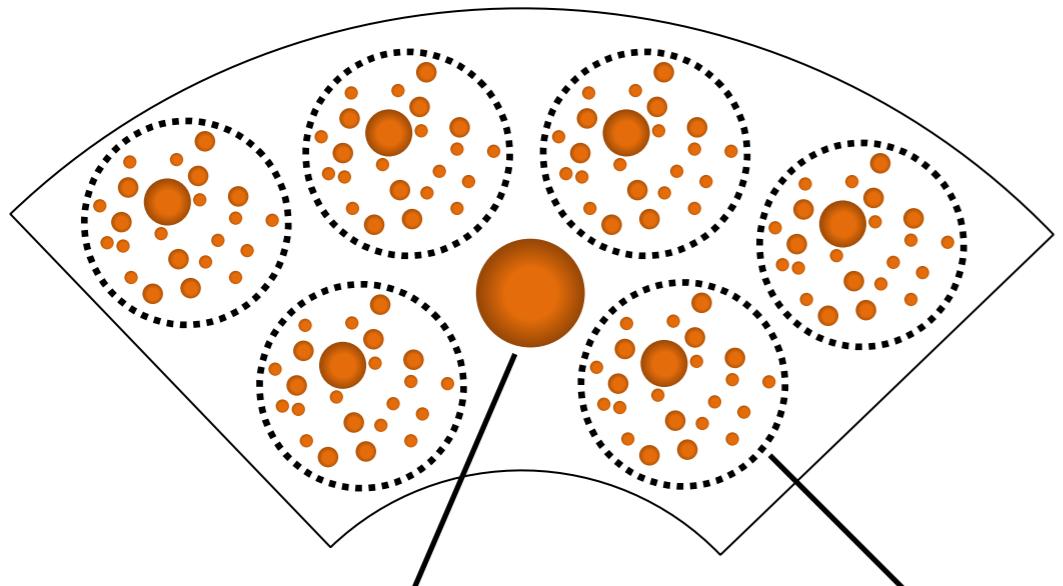
複数の微惑星を1つの粒子とみなす
(スーパー粒子近似)

➡ N体計算のコストを削減

ハイブリッドコード

純粋なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(∴破壊に伴う破片～ 10^{35} 個)



複数の微惑星を1つの粒子とみなす
(スーパー粒子近似)

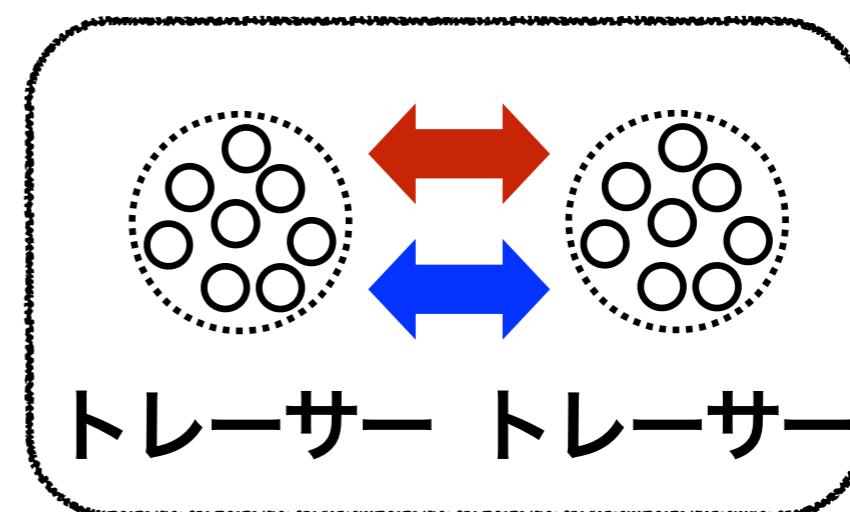
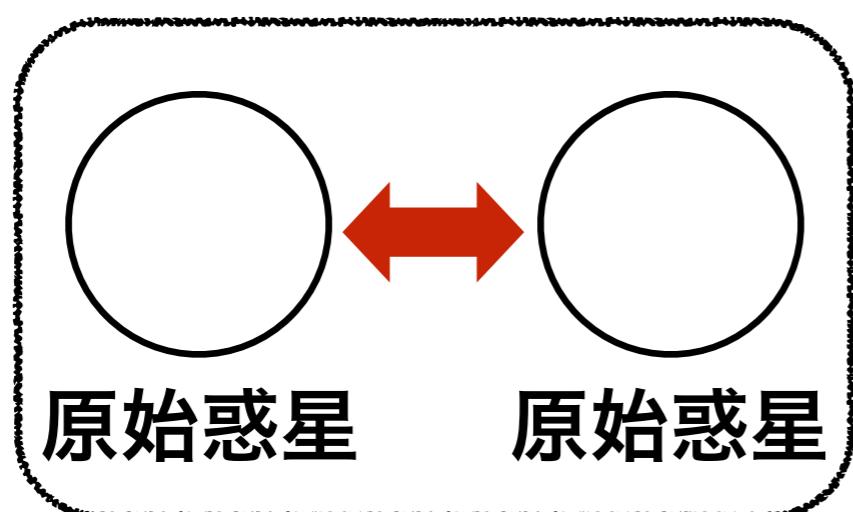
➡ N体計算のコストを削減

N体計算 (4次のエルミート法)

重力相互作用を取り扱う

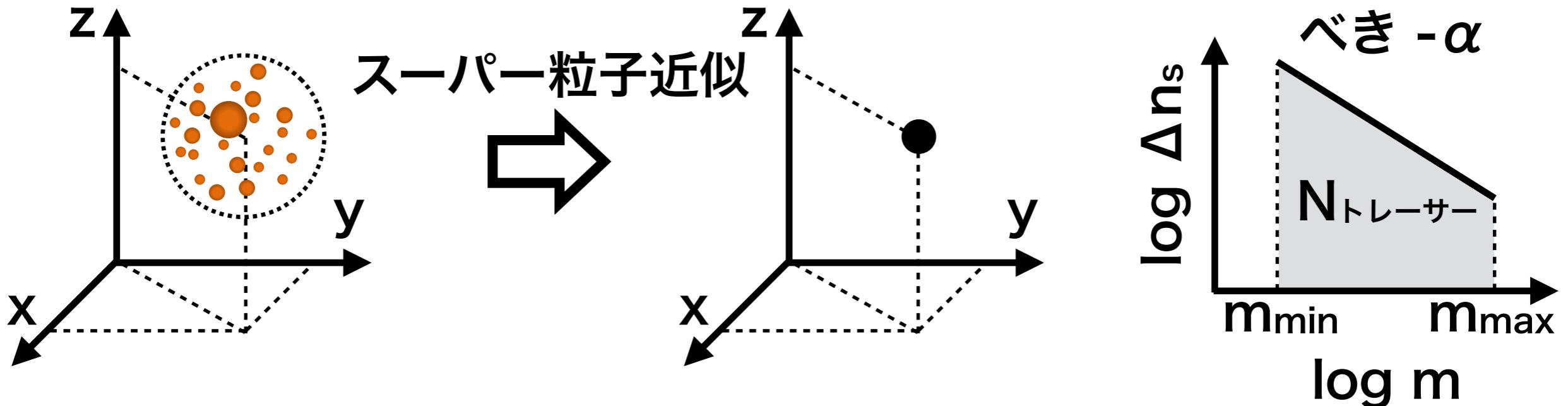
+ 統計的計算

衝突・破壊を取り扱う

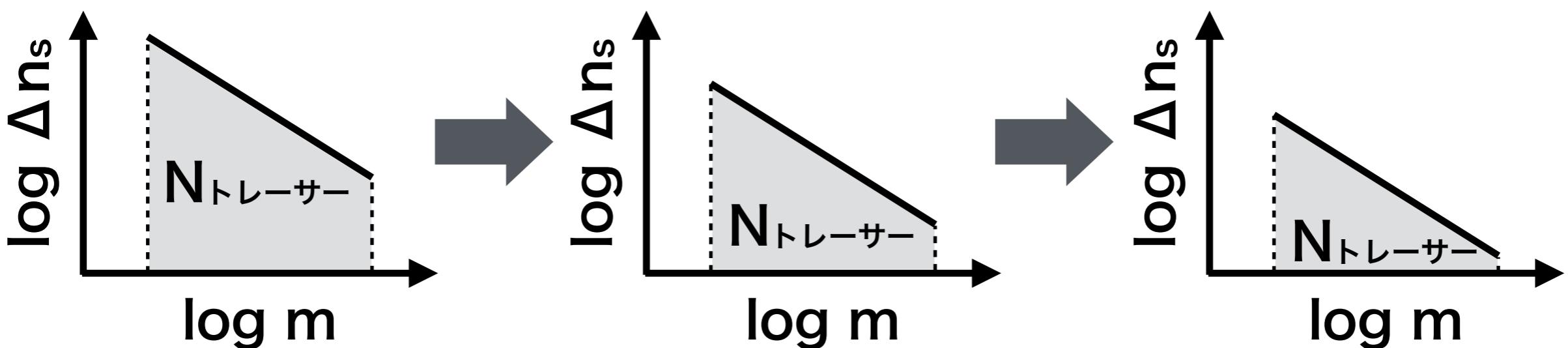


衝突・破壊を扱う粒子：トレーサー

- トレーサー … 計算上は質点、質量はべき分布（定常衝突力スケード）



- トレーサー内の微惑星の個数分布進化



べき一定のまま $N_{\text{トレーサー}}$ が減少 = トレーサーの質量が減少

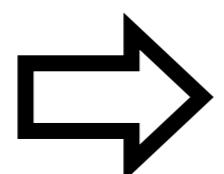
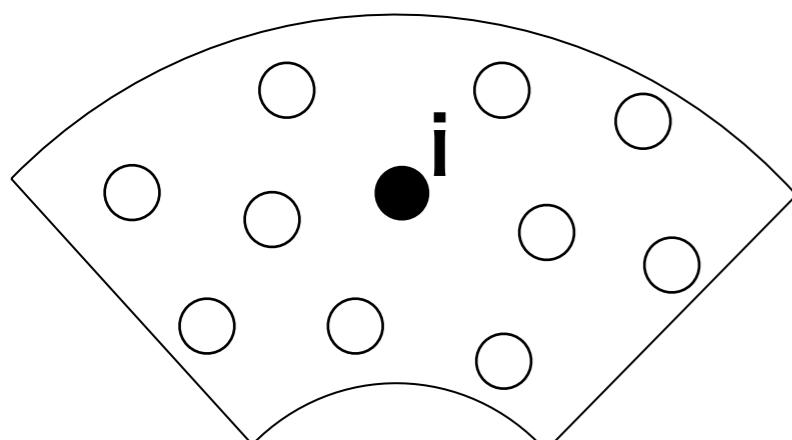
破壊の取り扱い方：統計的手法

トレーサー内の微惑星の個数 $N_{\text{トレーサー}}$ の進化

KT10

$$\frac{dN_{\text{tracer},i}}{dt} = -C N_{\text{tracer},i} \left(\frac{\Sigma_i}{m_{\max}} \Omega_K \pi R_{\max}^2 \right) \left(\frac{v_i (m_{\max})^2}{2Q_D^*(m_{\max})} \right)^{\alpha-1}$$

定数 軌道分布に依存
 m_{\max} 同士の衝突頻度 低質量・高速度衝突



面密度 Σ_i 、衝突速度 v_i が重要

ハイブリッドコードでは軌道がわかるため、

近傍トレーサーの分布・相対速度から計算可能

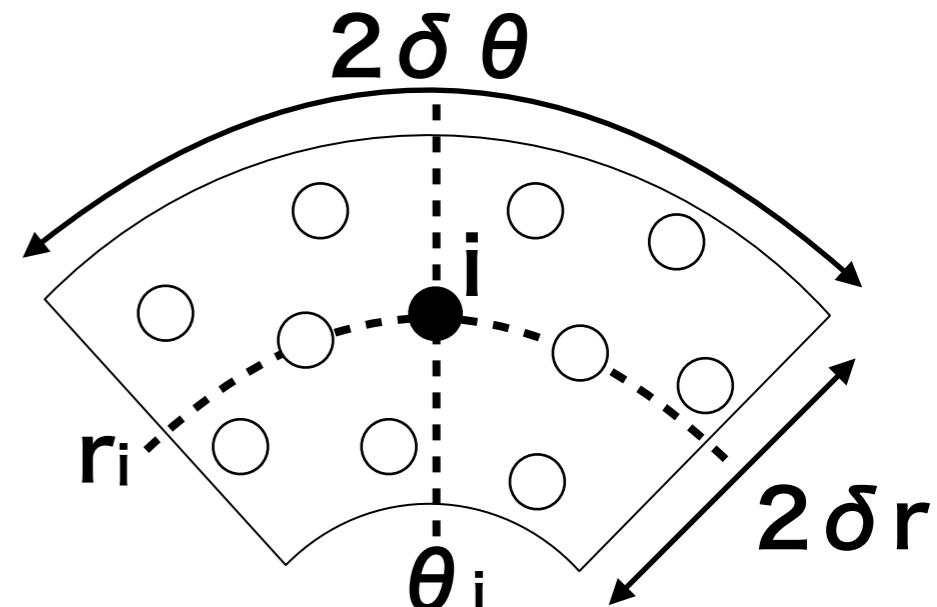
面密度と衝突速度

step1：トレーサー i のまわりに扇形領域 i を作る Morishima 2015

step2：この領域の面密度を
トレーサー i の面密度 Σ_i とする

$$\Sigma_i = \frac{m_i + \sum_j^N m_j}{4r_i \delta r \delta \theta}$$

j ：領域 i 内の
トレーサー
 N ： j の総和



step3： i と j の相対速度をランダム速度で近似

ランダム速度 $\sqrt{e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2} v_{K,i}$

$e_{i,j}$ ：相対離心率
 $i_{i,j}$ ：相対軌道傾斜角
 $v_{K,i}$ ： i のケプラー速度

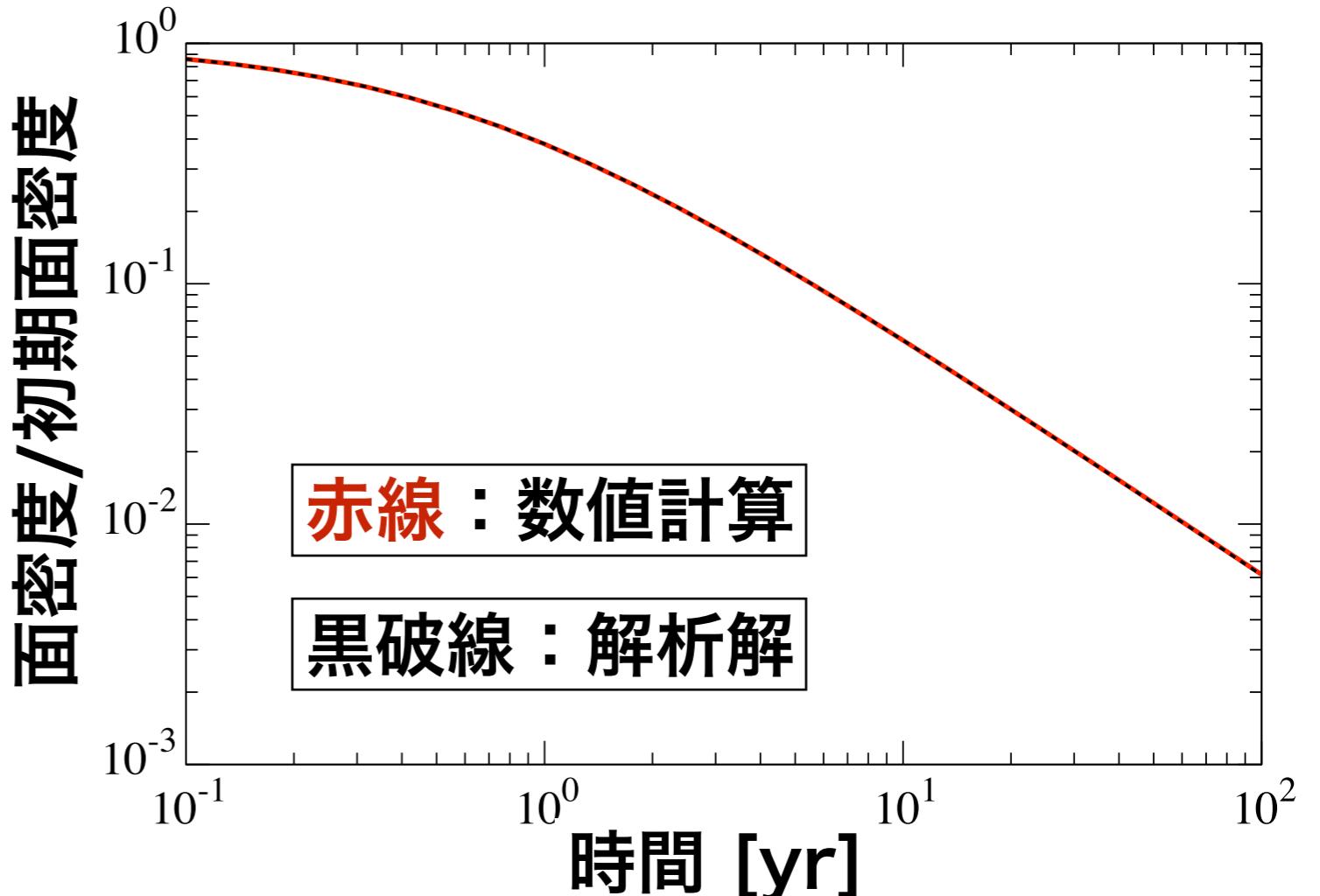
step4：相対速度の2乗平均平方根を i の衝突速度 $v_{\text{imp},i}$ だとみなす

$$v_{\text{imp},i} = \sqrt{\frac{\sum_j^N (e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2) v_{K,i}^2}{N}}$$

破壊計算のテスト

破壊による微惑星円盤の面密度減少をテスト

- ・ 微惑星2000体
- ・ $1 \pm 0.025 \text{AU}$
- ・ 総質量 = 10地球質量
- ・ 離心率 = 0.01
- ・ $m_{\max} = 10^{16} \text{ g}$
- ・ 重力相互作用なし



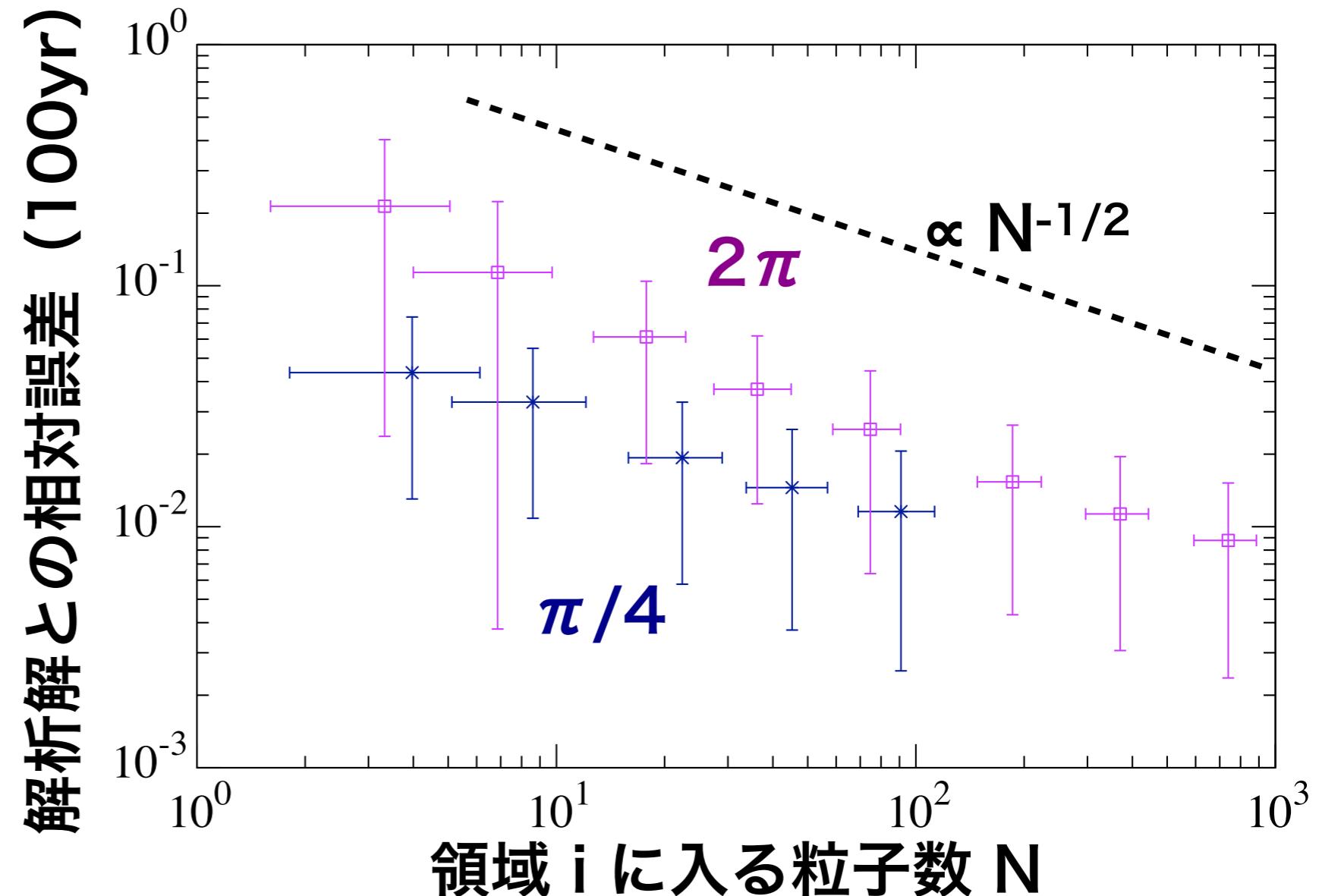
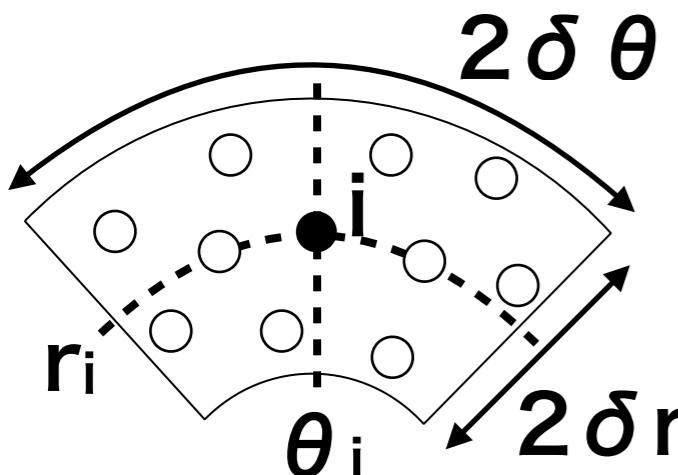
解析解 (KT10)

$$\frac{\Sigma(t)}{\Sigma_0} = \frac{1}{1 + t/\tau_{\text{dep}}}$$

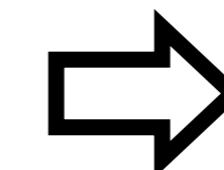
$$\begin{aligned}\tau_{\text{dep}} = & 0.617 \left(\frac{M_{\text{tot}}}{10M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{m}{10^{16} \text{g}} \right)^{0.641} \left(\frac{a}{1 \text{AU}} \right)^{4.18} \\ & \times \left(\frac{\Delta a/a}{0.05} \right) \left(\frac{e}{0.01} \right)^{-1.36} \left(\frac{Q_0}{5.07 \times 10^6 \text{erg/g}} \right)^{0.679} \text{yr}\end{aligned}$$

破壊計算の精度と粒子数の関係

- 微惑星の個数：
 $\{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000\}$ 体
- $2\delta\theta = 2\pi, \pi/4$
- $2\delta r = 0.02\text{AU}$



$\pi/4$ は時間経過で粒子が入れ替わるため、
 2π に比べ約8倍の粒子平均が取れている



約√8倍誤差が小さい

力学的摩擦のテスト

惑星-微惑星の力学的摩擦

$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$

初期条件

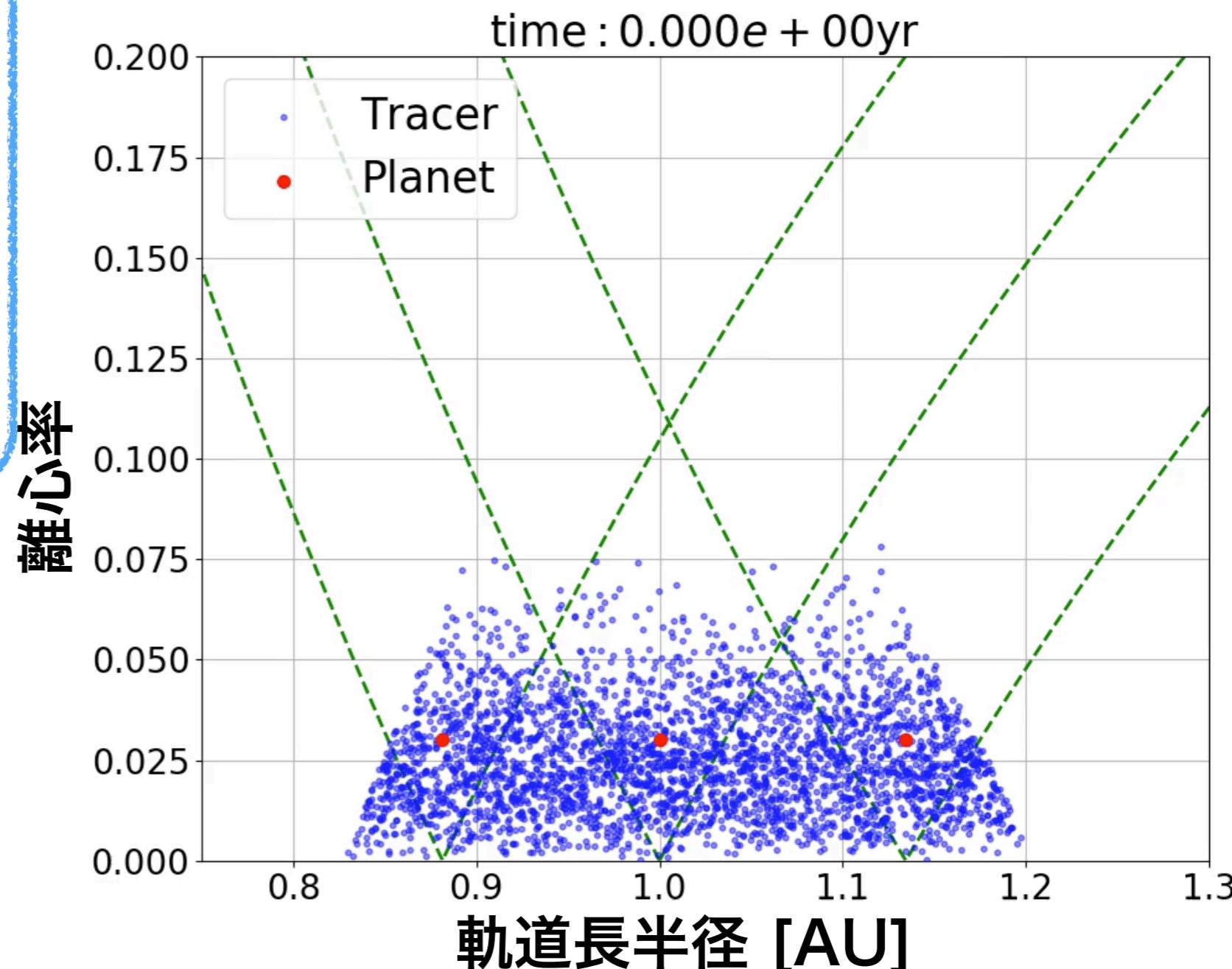
- 質量 $1M_E$ の惑星3体
- 総質量 $30M_E$ の微惑星
3000体
- 円盤の幅~30相互ヒル
半径
- 破壊なし、集積あり

計算結果

- 惑星の離心率は減少
- 微惑星の離心率は上昇

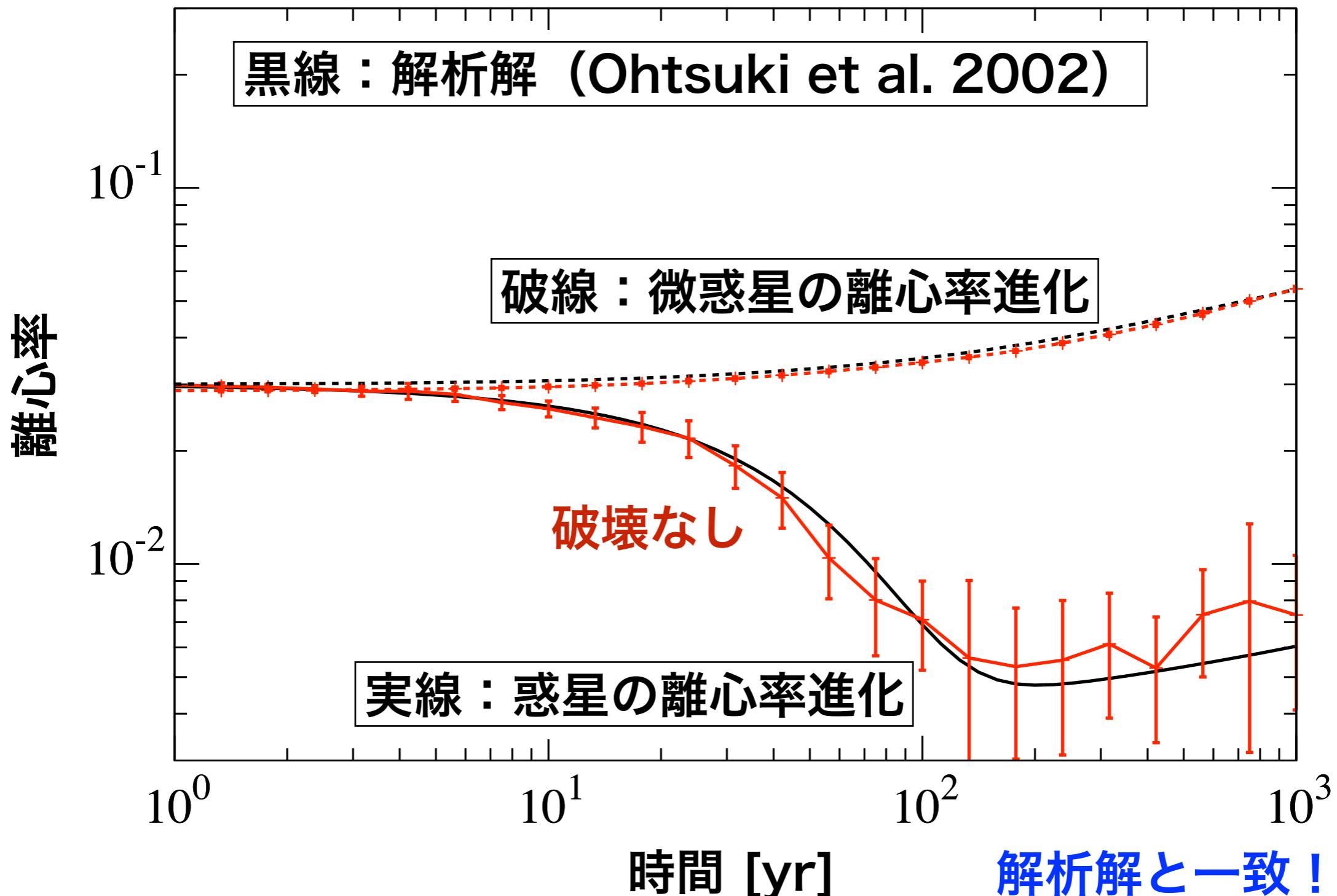
赤点：惑星 青点：微惑星

緑破線：等ヤコビエネルギー線



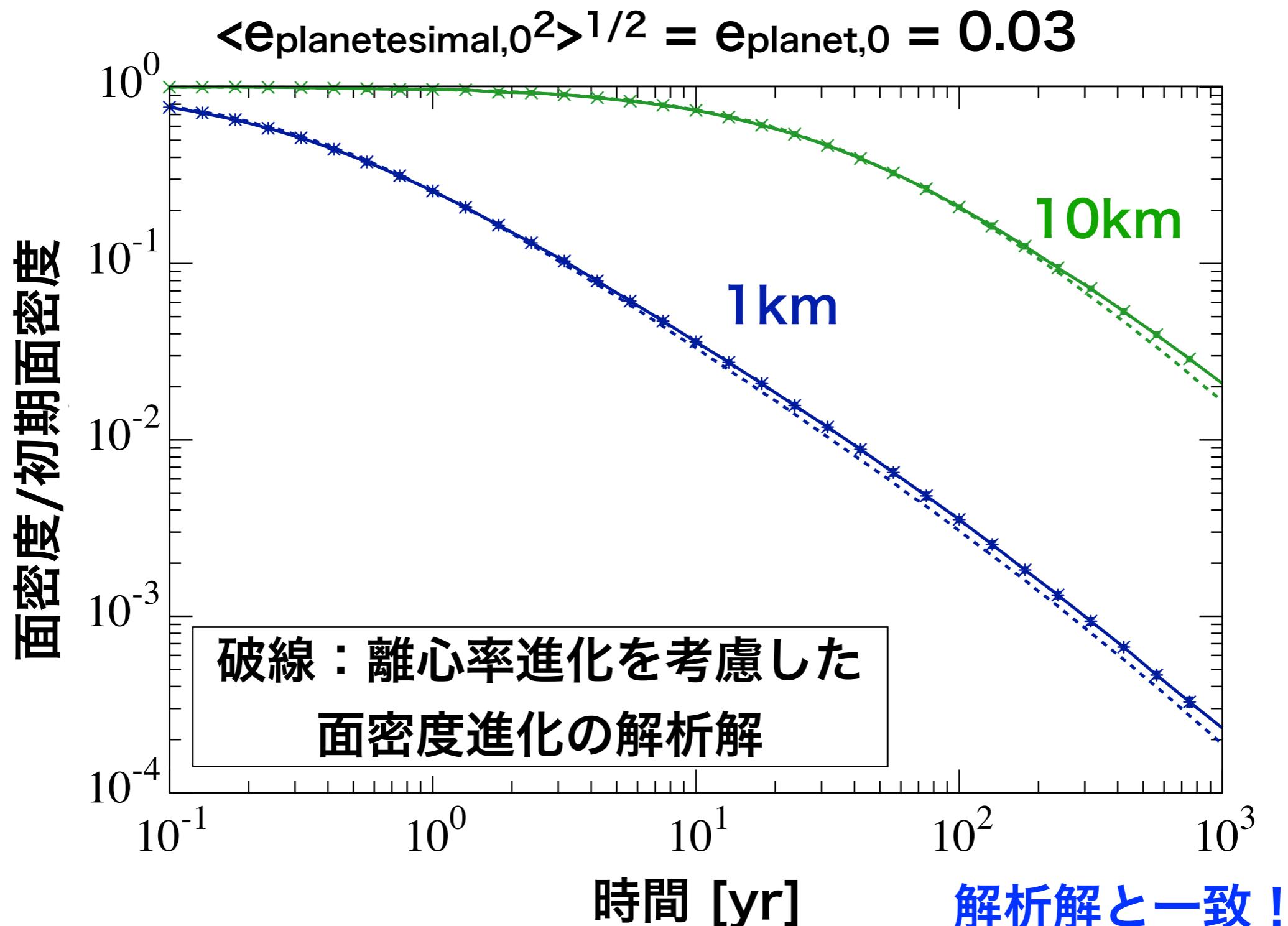
破壊がない場合の離心率進化

破壊なし、集積あり $\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$



破壊による微惑星円盤の面密度進化

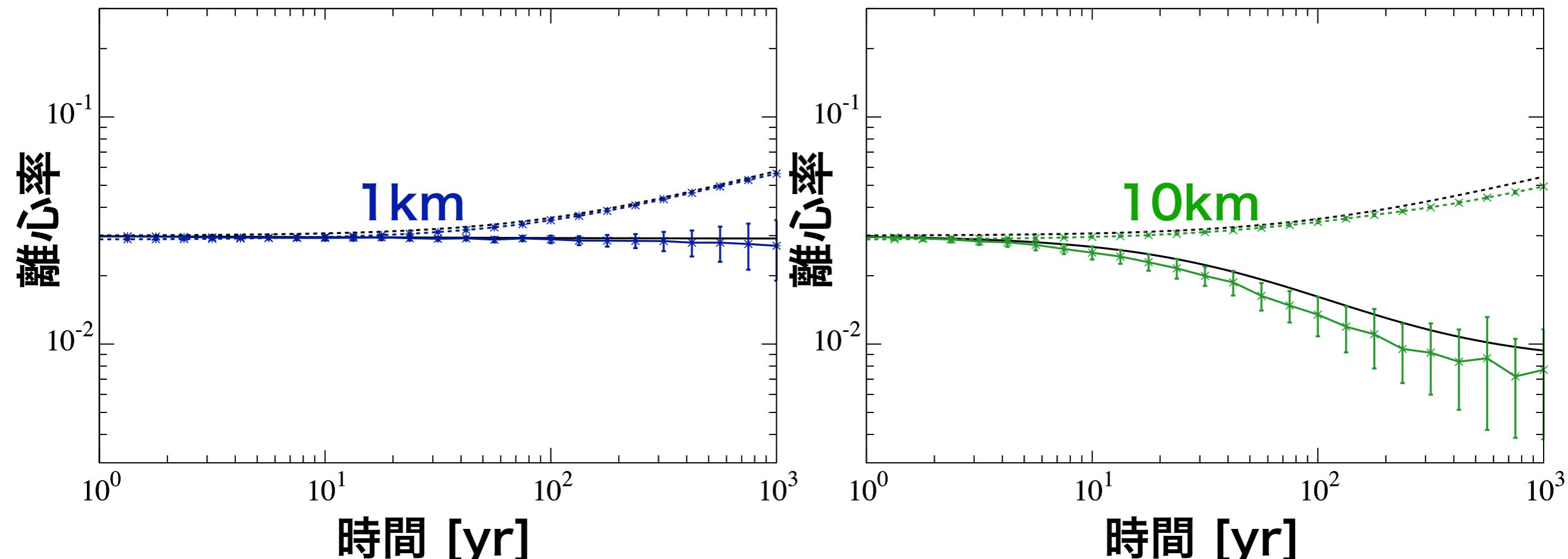
最大微惑星の質量 m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km)と $10^{19}g$ (~10km)に設定



破壊を考慮した時の離心率進化

最大微惑星の質量 m_{\max} を $10^{16}g(\sim 1km)$ と $10^{19}g(\sim 10km)$ に設定

$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$



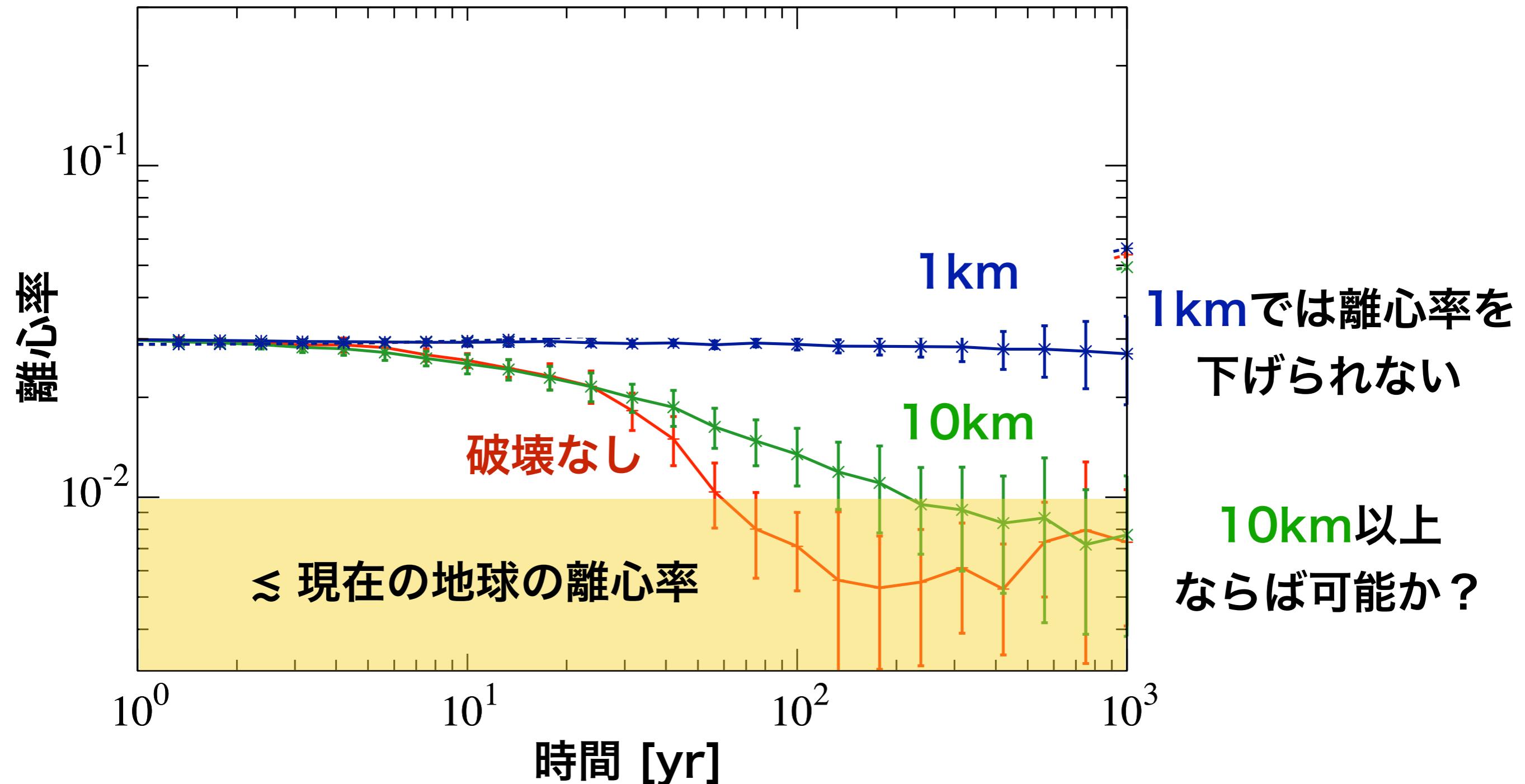
黒線：面密度進化を考慮した
離心率進化の解析解

解析解と一致！

破壊が力学的摩擦に与える影響

最大微惑星の質量 m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$



議論： m_{\max} とタイムスケール

- m_{\max} が $10^{19}g$ ($\sim 10\text{km}$) の場合における
破壊と力学的摩擦のタイムスケールの比

※初期離心率0.03

$$\frac{\tau_{\text{破壊}}}{\tau_{\text{力学的摩擦}}} \simeq 0.681 \left(\frac{m_{\max}}{10^{19} \text{ g}} \right)^{0.641}$$

$\tau_{\text{破壊}} > \tau_{\text{力学的摩擦}}$ となる条件は $m_{\max} > 1.83 \times 10^{19} \text{ g}$
 $(\sim 11.3\text{kmサイズ})$

現在の地球の離心率程度 (~ 0.01) まで離心率を下げるには
残存微惑星による力学的摩擦を効率良く効かせるために
~10kmサイズ以上の残存微惑星が必要である

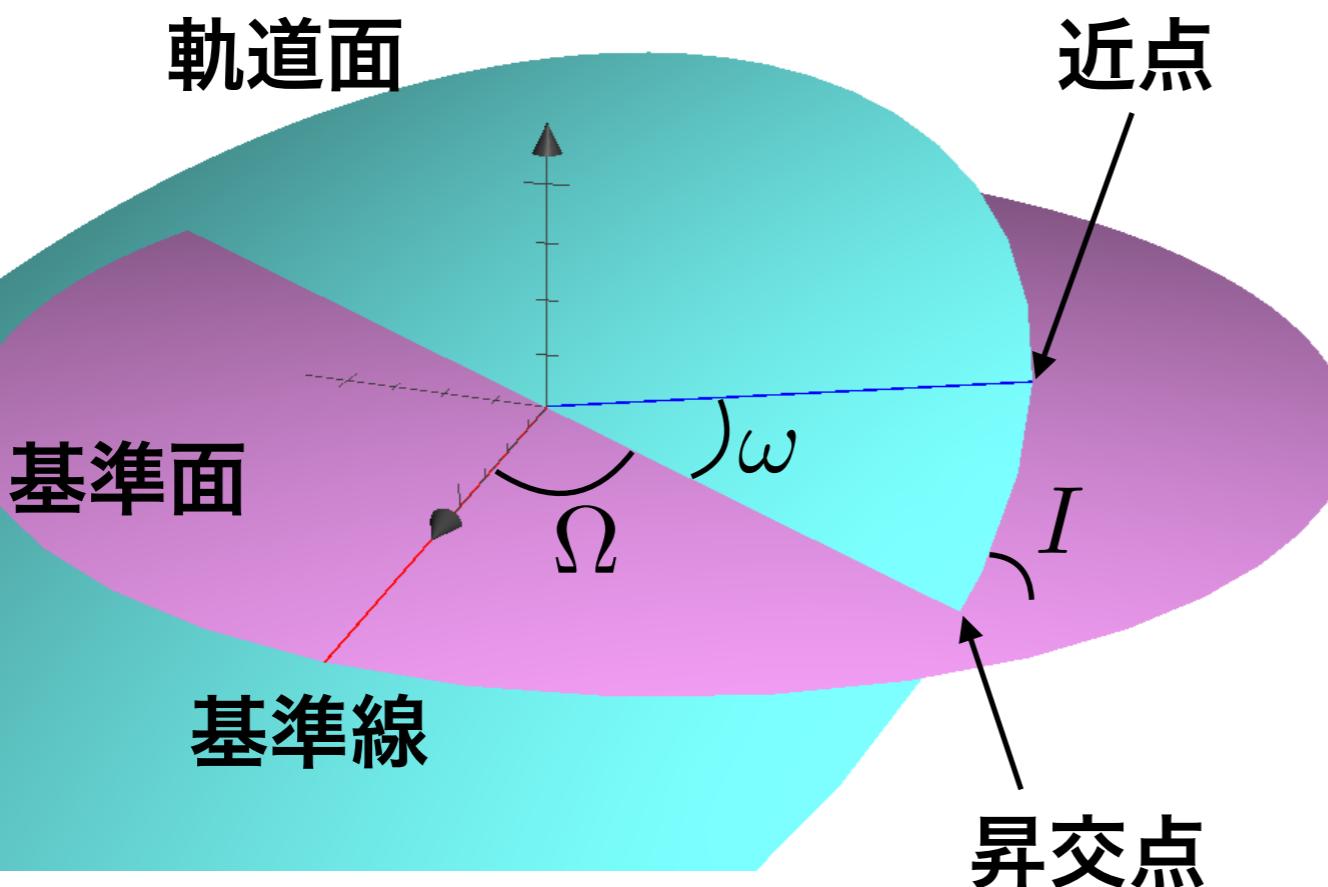
まとめと今後の課題

- ・ 微惑星同士の衝突・破壊による面密度減少を考慮すると、力学的摩擦の効率が下がる。
- ・ 現在の地球の離心率程度 (~0.01) まで離心率を下げるには、10kmサイズ以上の残存微惑星が必要である。
- ・ $\tau_{\text{破壊}} \lesssim \tau_{\text{力学的摩擦}}$ である場合には、残存微惑星円盤の面密度減少が当然起こるため、本研究のハイブリッドコードを用いる必要がある。
- ・ 今後は、残存微惑星や巨大衝突時の破片の衝突・破壊を考慮し10⁷年分計算できるよう、時間積分法やタイムステップを見直す予定である。

Appendix

軌道要素

橢円軌道の場合



位置と速度の6変数



軌道要素6つ

橢円の形を決定：

軌道長半径

a

離心率

e

軌道面の位置を決定：

昇交点経度

Ω

近点引数

ω

軌道傾斜角

I

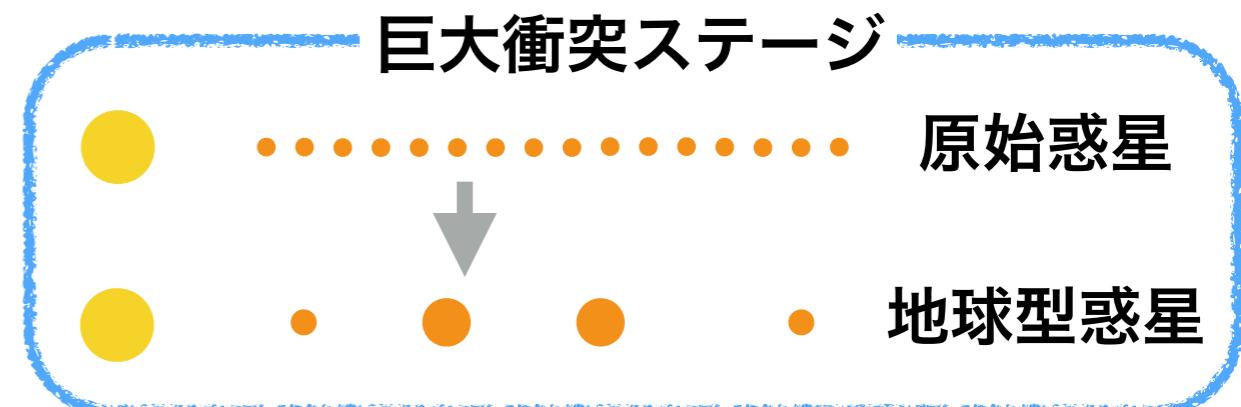
天体の位置を決定：

近点通過時刻

T

地球型惑星形成における問題点

- 原始惑星の衝突合体をN体計算



1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

(e.g., Chambers & Wetherill 1998; Agnor et al. 1999;
Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

- しかし問題点として

1億年後の離心率 : ~ 0.1 >> 現在の地球の離心率 : 0.0167

離心率が大きくなりすぎてしまう

- 離心率を下げるメカニズムの候補

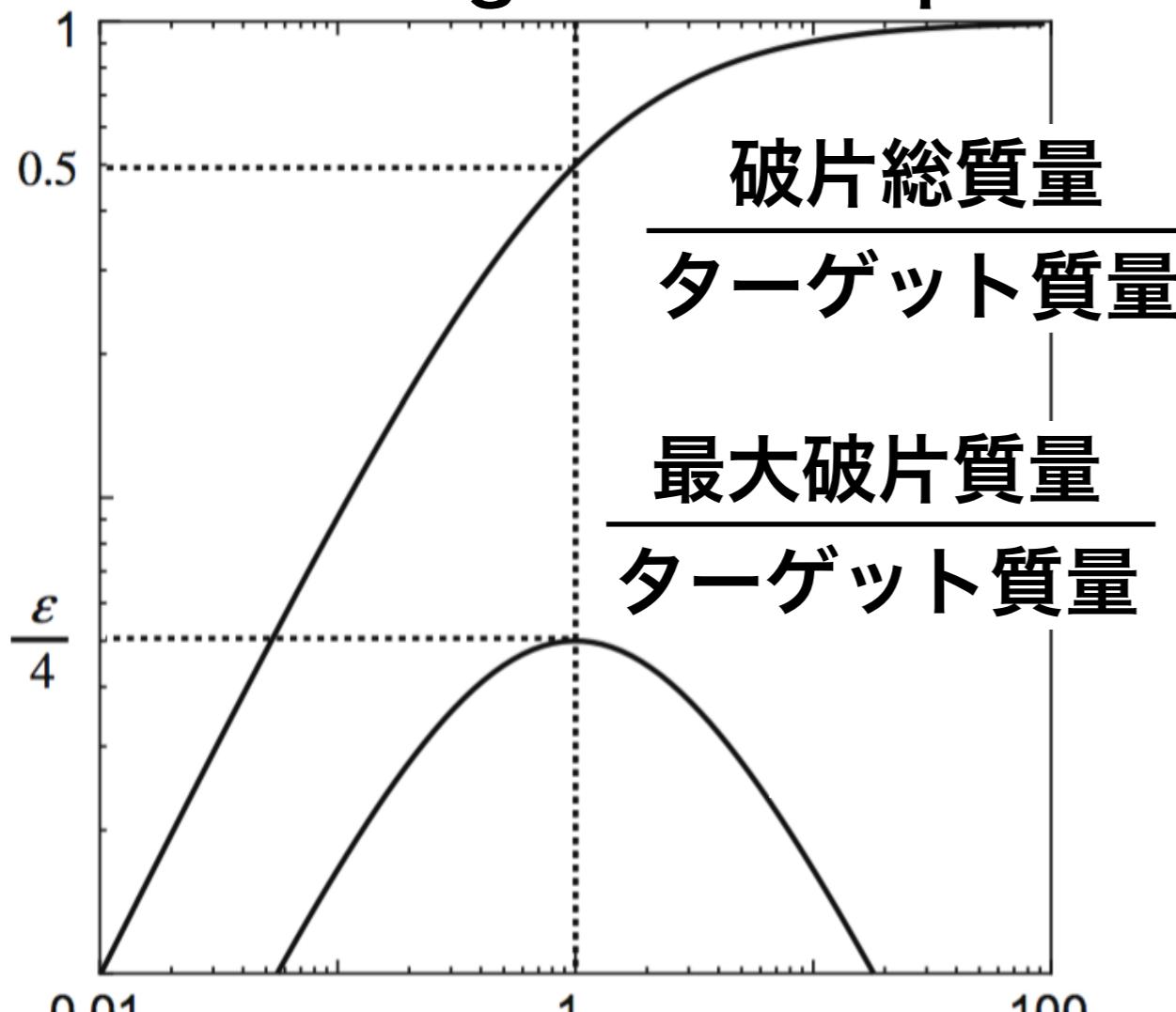
残存微惑星との力学的摩擦が有力

(e.g., O'Brien et al. 2006; Morishima et al. 2010)

先行研究3：衝突・破壊のモデル

Kobayashi & Tanaka 2010

cratering catastrophic



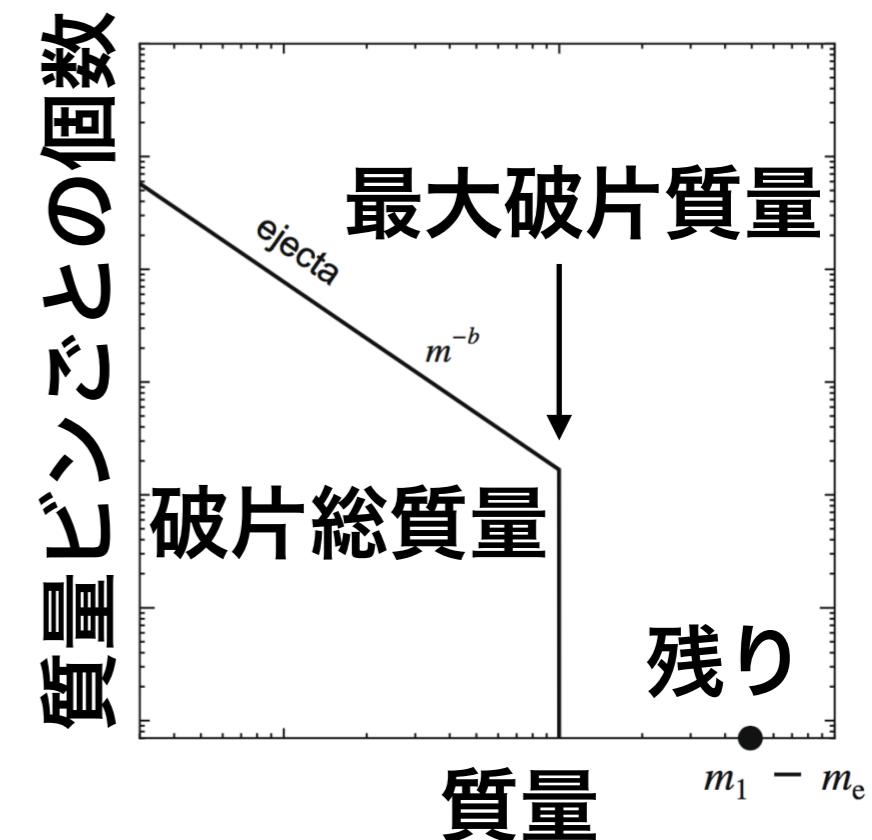
$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} = \phi$$

$$\frac{\text{破片総質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\phi}{1 + \phi}$$

$$\frac{\text{最大破片質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\varepsilon\phi}{(1 + \phi)^2}$$

$\phi=1$ のときターゲット
質量の半分が吹き飛ぶ

Q_D^* の定義



破壊を起こす衝突速度

$$\frac{v_{\text{esc}}^2}{Q_{\text{D}}^*} = 1.23 \times 10^{-2} \left(\frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.213} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.213}$$

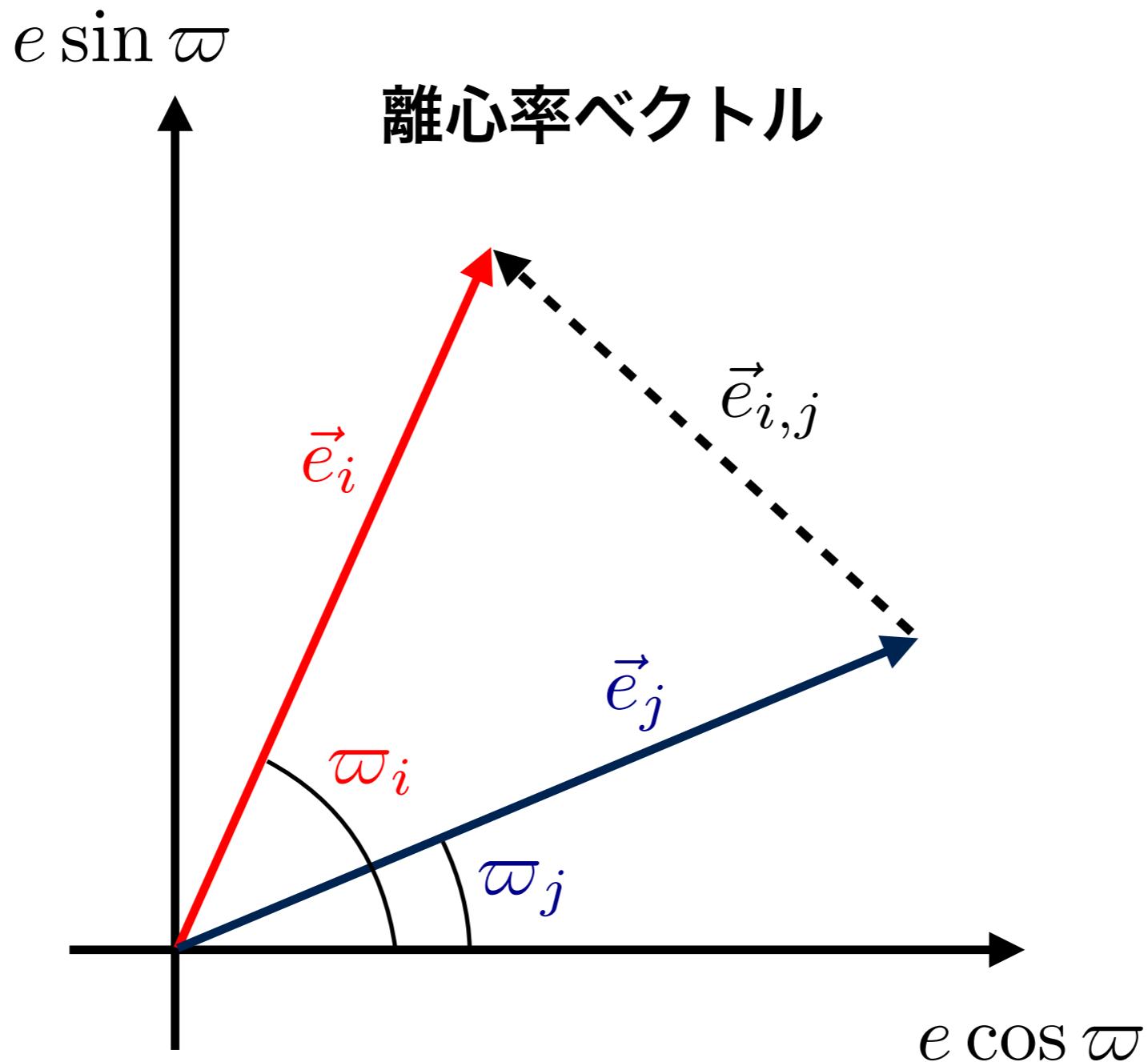
脱出速度の約10倍で衝突すれば破壊が起こる

$$\frac{(e^2 + i^2)v_{\text{K}}^2}{Q_{\text{D}}^*} = 948 \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.547} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453} \left(\frac{M_*}{\text{M}_\odot} \right)$$

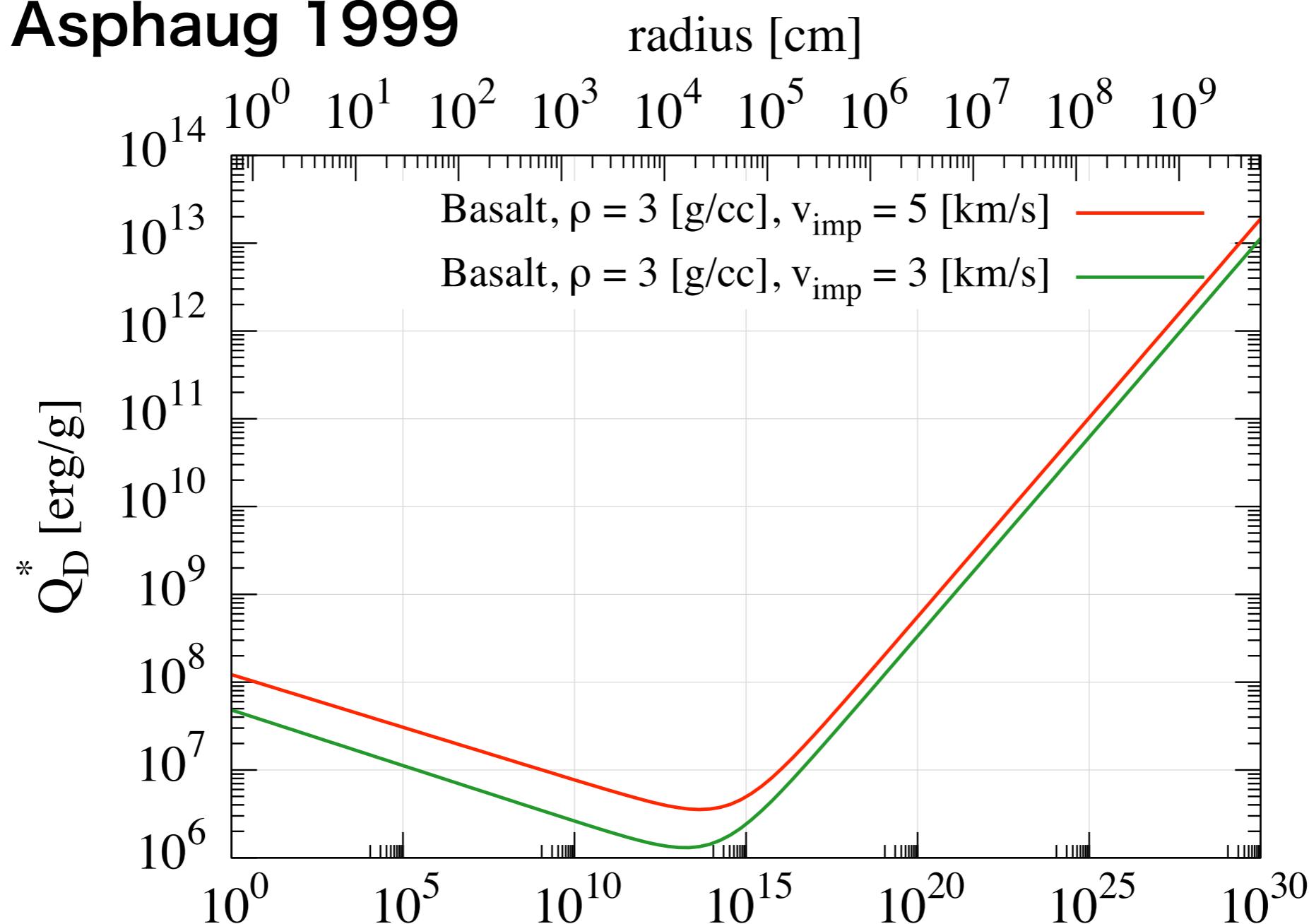
離心率が0.1のときには破壊に必要なエネルギーの1000倍で衝突する

相対離心率

$$e_{i,j}^2 = e_i^2 + e_j^2 - 2e_i e_j \cos(\varpi_i - \varpi_j) \quad \varpi : \text{近点経度}$$



Benz & Asphaug 1999

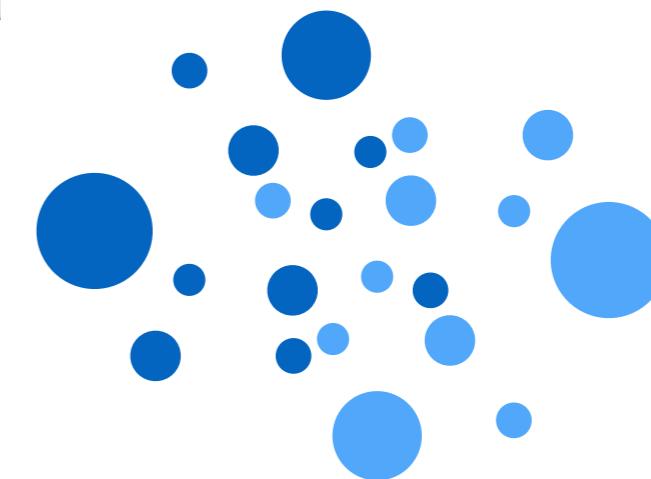
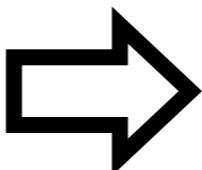
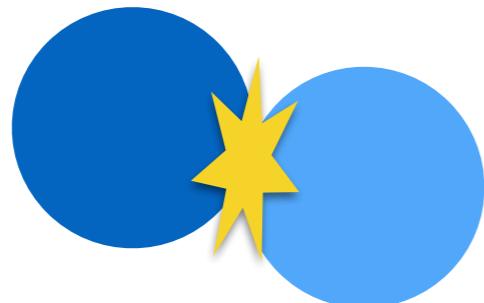


Basalt, 3km/s

$$Q_D^* \simeq 1.16 \times 10^8 \left(\frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{0.547} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.453} \text{erg/g}$$

微惑星同士の衝突・破壊の効果

「衝突・破壊」…衝突した際に破片を放出



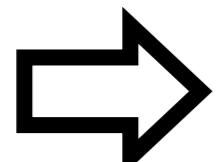
衝突速度 $\sim ev_K$

様々なサイズの破片

$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} \sim 10^3 \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453}$$

破壊は当然起こる！

- ・ 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる（衝突力スケード）
- ・ $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる



微惑星円盤の面密度は減少する

N体計算の手法

4次のエルミート法

Makino & Aarseth 1992

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

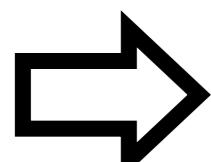
step3：加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算（4次精度）

&

独立タイムステップ

粒子は別々の時間とタイムステップを持つ

加速度 大 → タイムステップ 小



近接遭遇を精度よく効率的に解くことができる

物理半径を用いた衝突合体（惑星への集積）も取り扱っている

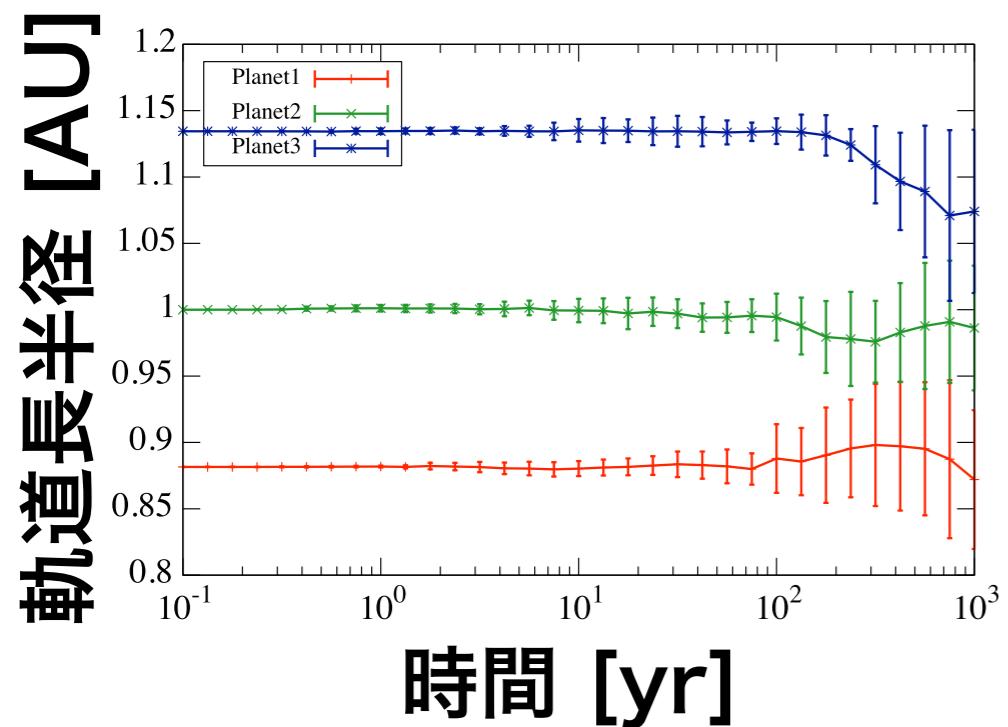
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

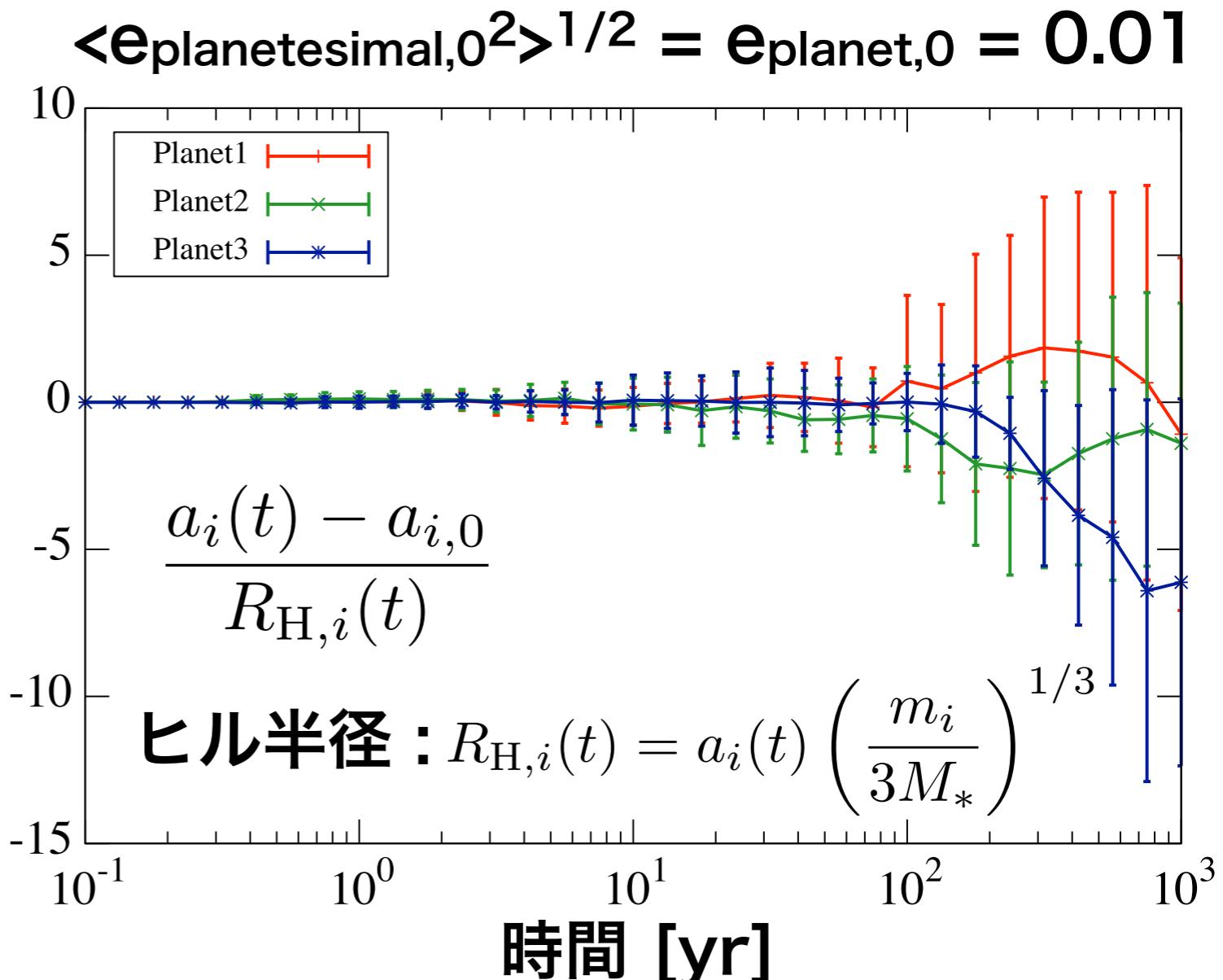


点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差 σ

確かに、真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

ここからは真ん中の惑星の離心率に注目する



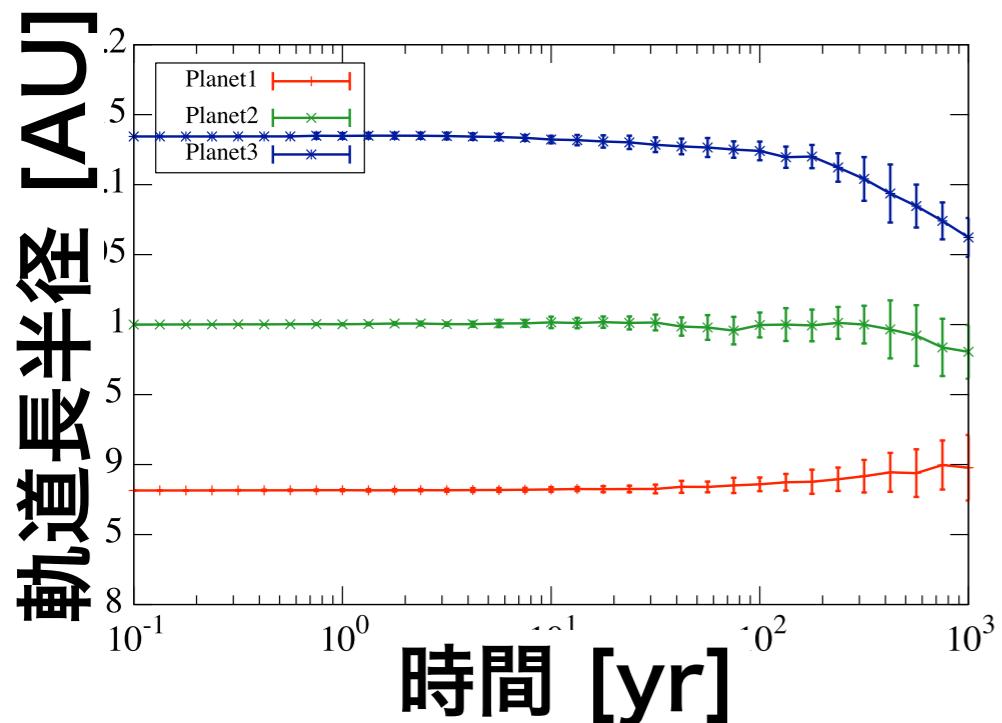
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

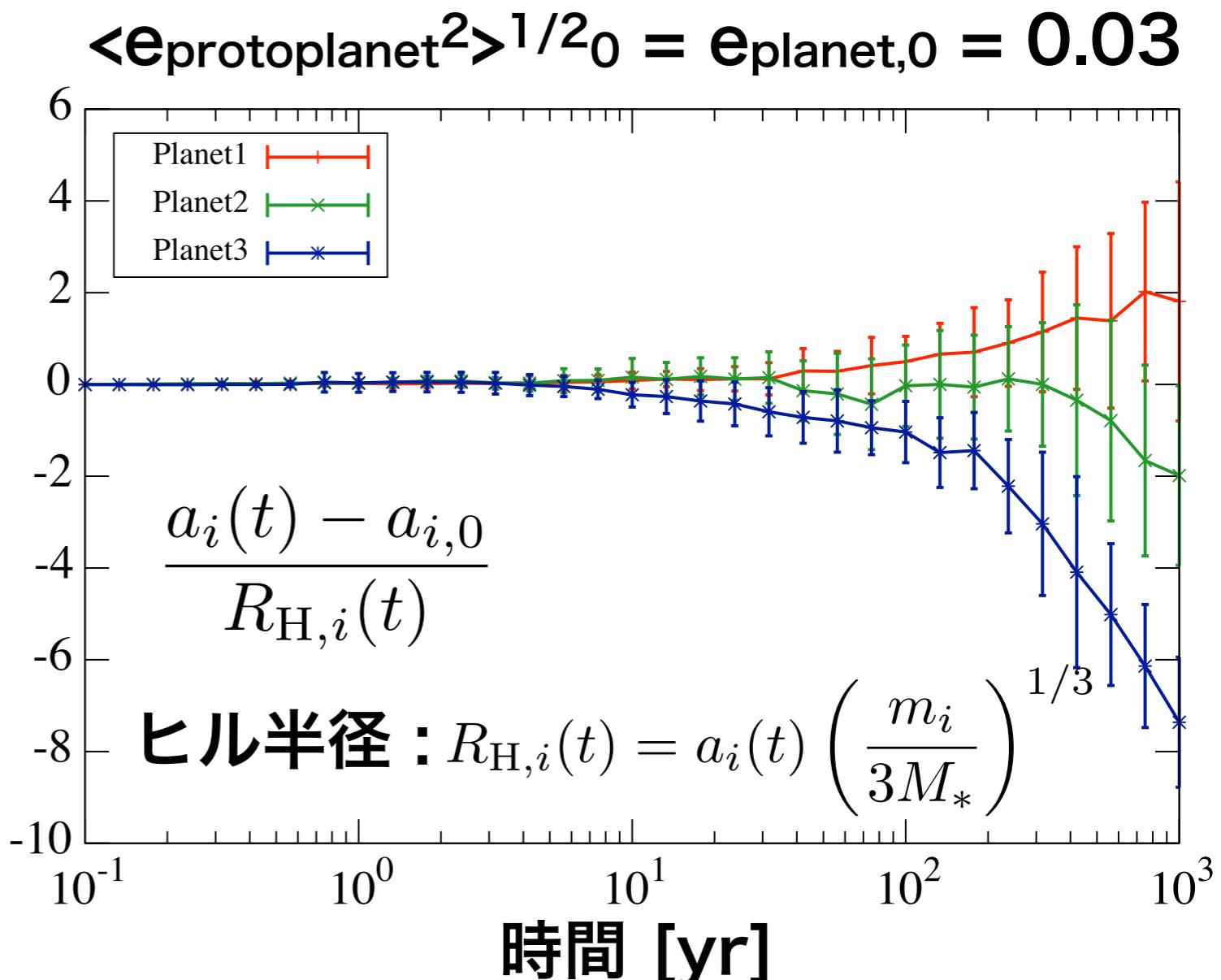
破壊なし、集積なし



点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差 σ

規格化した移動距離



確かに、真ん中の惑星は移動量が少なくなっている

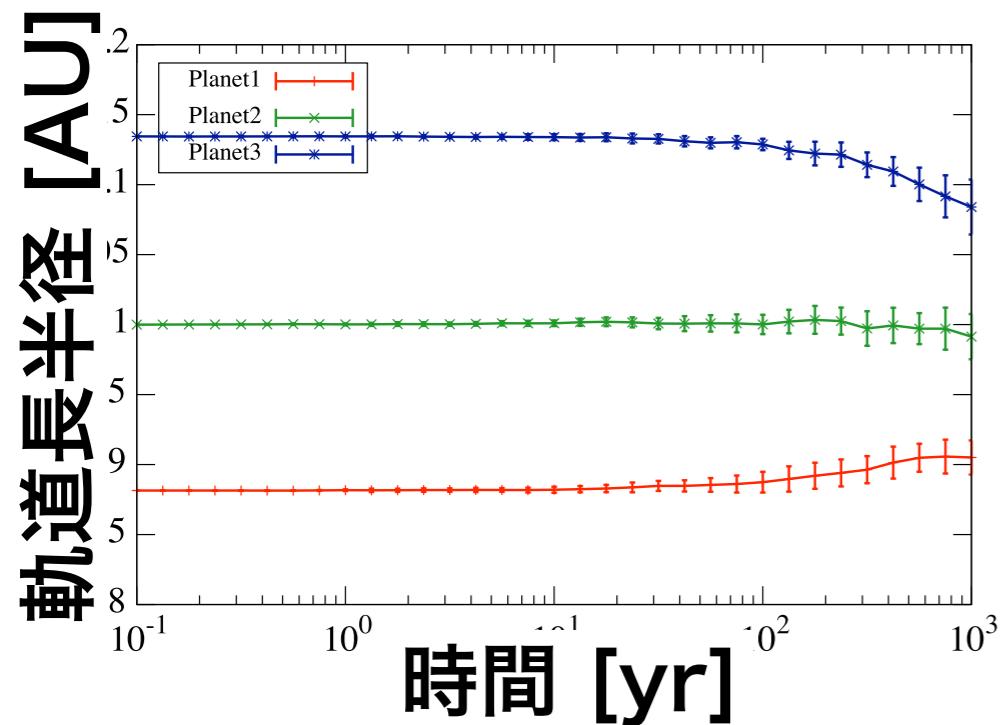
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

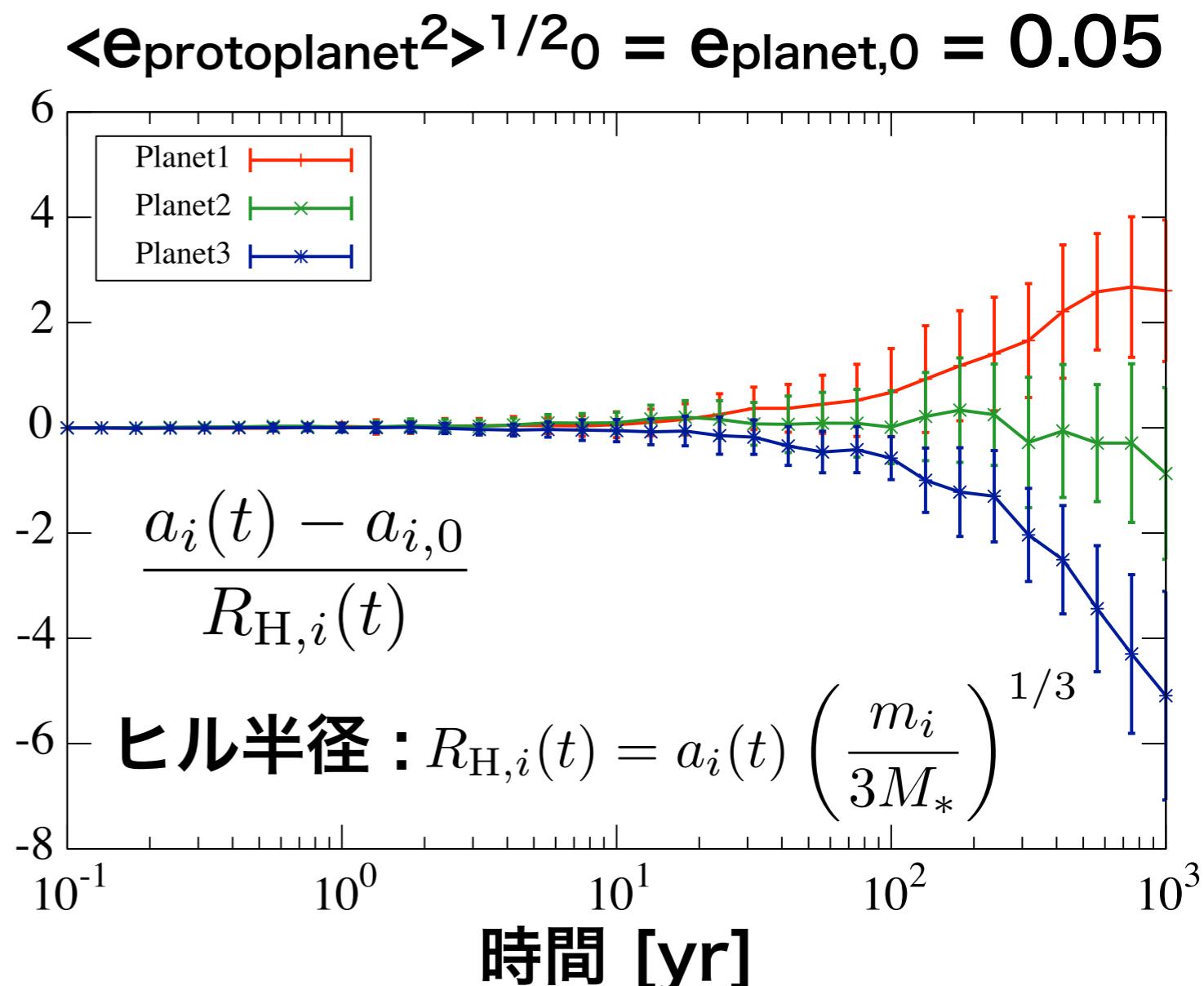
破壊なし、集積なし



点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差 σ

規格化した移動距離



確かに、真ん中の惑星は移動量が少なくなっている

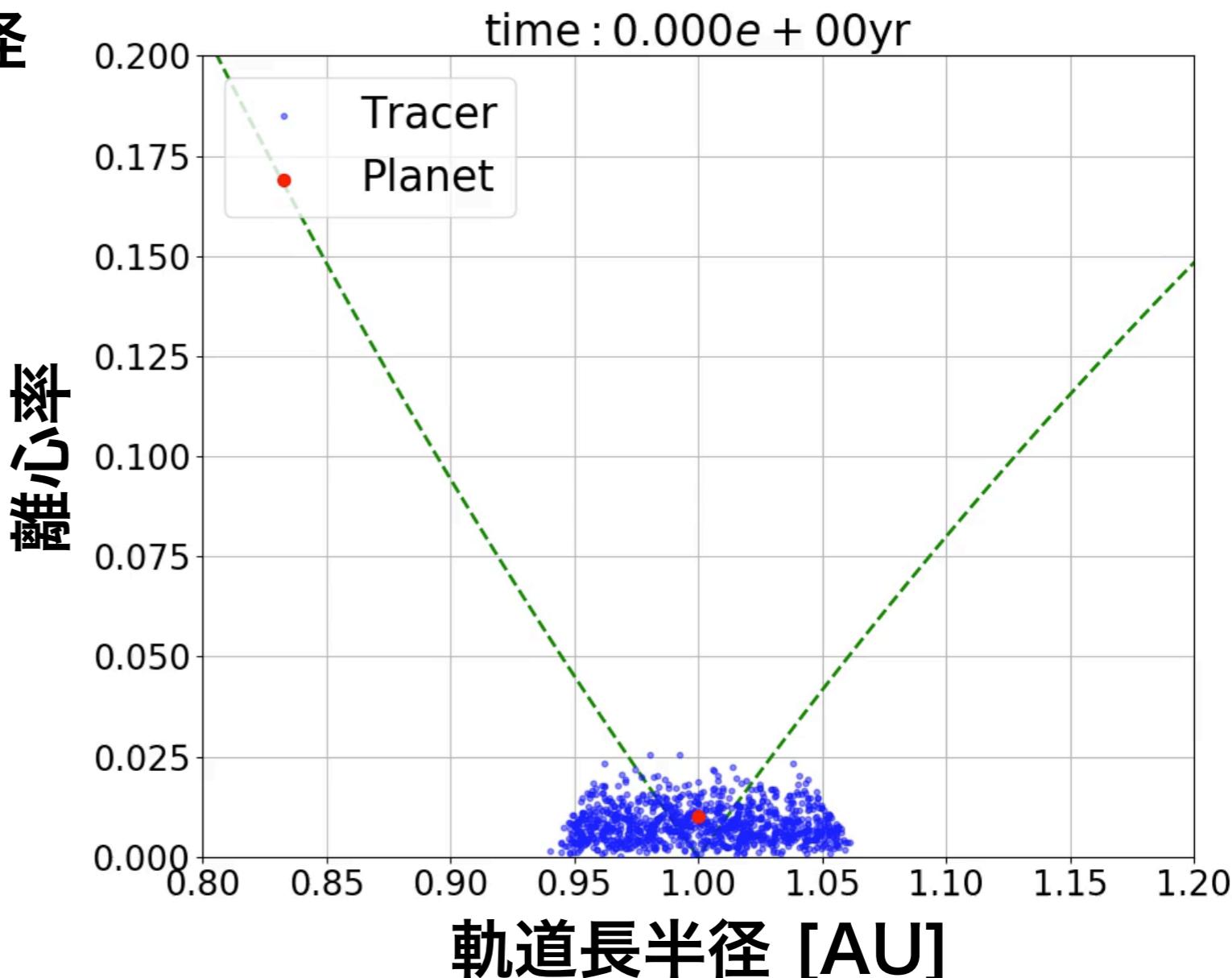
力学的摩擦のテスト1

初期条件

- ・ 質量 $1M_E$ の惑星1体
- ・ 総質量 $10M_E$ の微惑星1000体
- ・ 円盤の幅~10相互ヒル半径
- ・ 破壊なし、集積なし

赤点：惑星 青点：微惑星

緑破線：等ヤコビエネルギー線

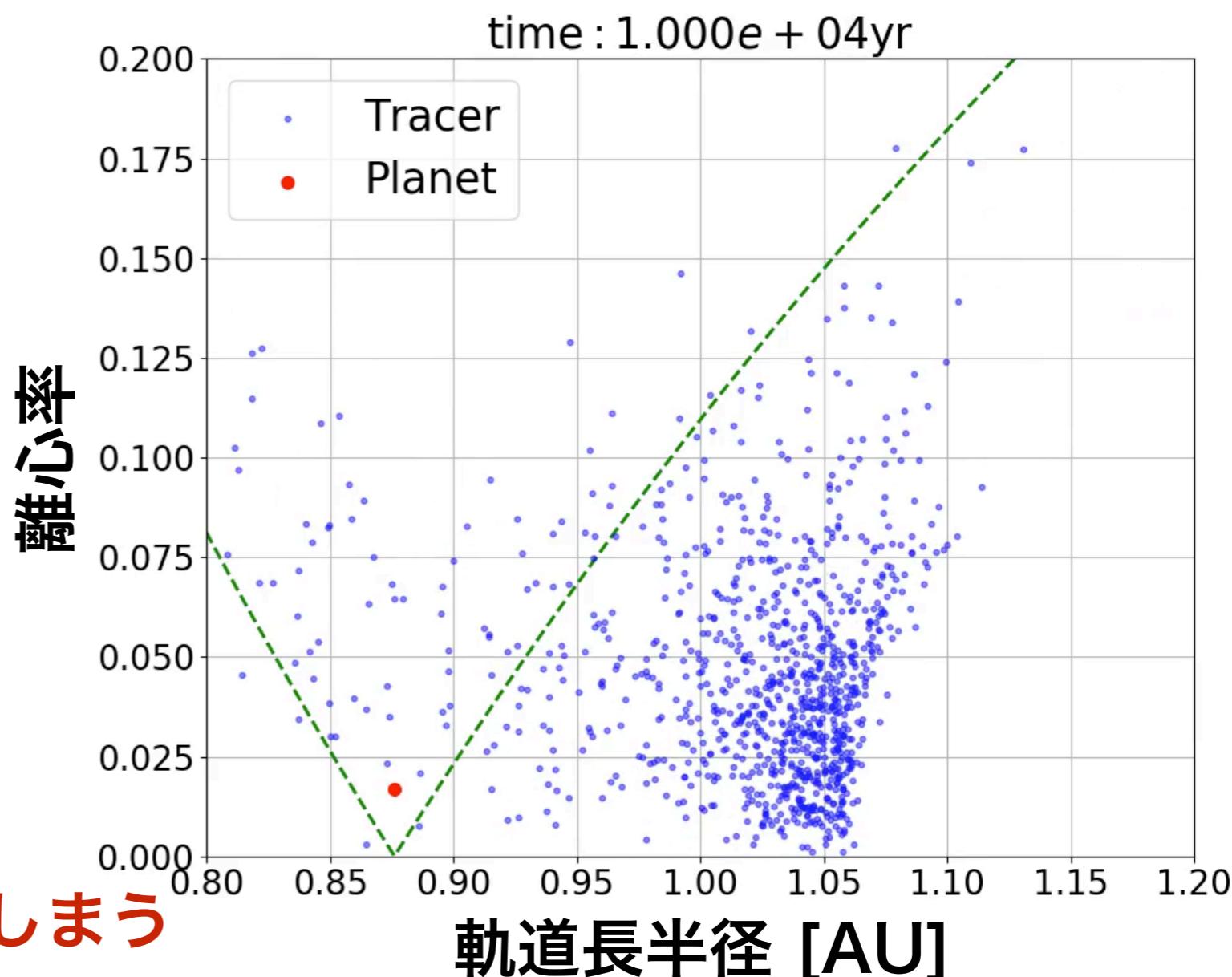


力学的摩擦のテスト1

結果

- ・惑星の離心率は減少
- ・等ヤコビエネルギー線に沿って微惑星の離心率は上昇
- ・微惑星駆動惑星移動(Planetesimal-Driven Migration)による内側移動
(e.g., Ida et al. 2000; Kirsh et al. 2009)

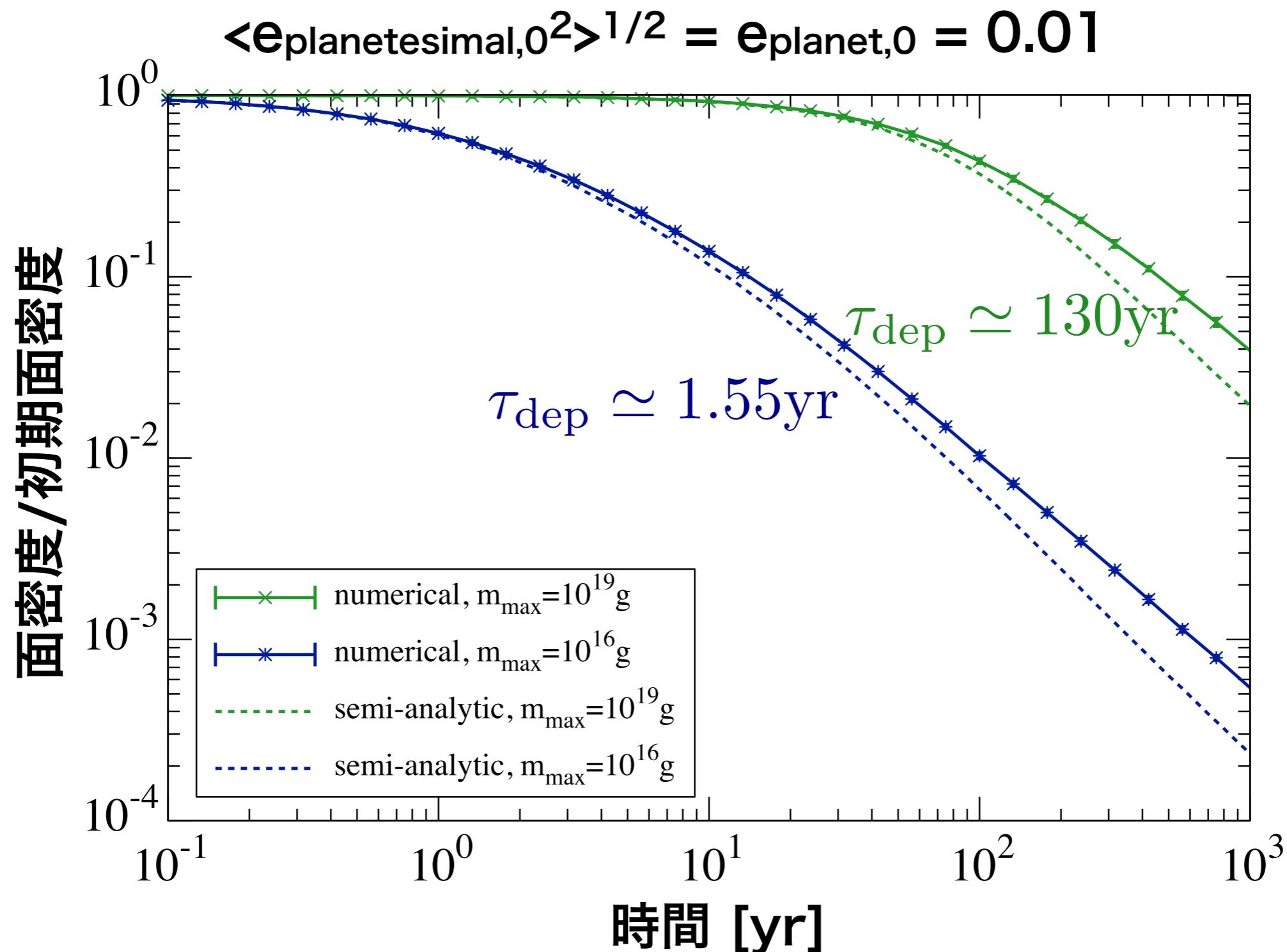
赤点：惑星 青点：微惑星
緑破線：等ヤコビエネルギー線



円盤の外へ惑星が移動してしまう
この初期条件では比較・議論できない

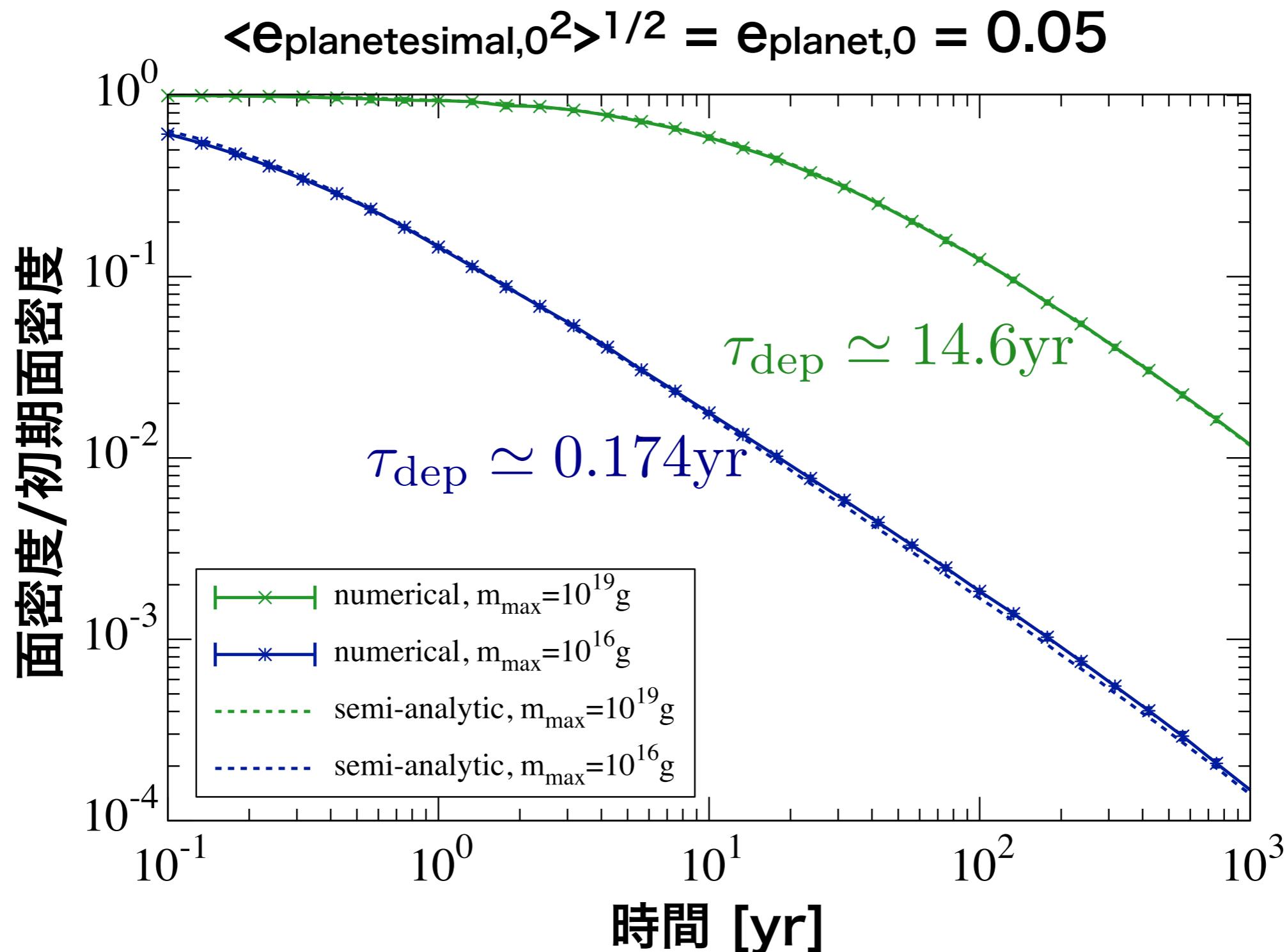
面密度進化 (離心率0.01)

m_{\max} を $10^{16}\text{g}(\sim 1\text{km})$ と $10^{19}\text{g}(\sim 10\text{km})$ に設定



面密度進化 (離心率0.05)

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定



離心率の平均値の変化率（解析解）

質量 M_1 の粒子集団1と質量 M_2 の粒子集団2の重力相互作用を考える

(Ida 1990; Ohtsuki et al. 1993; Stewart & Ida 2000)

$$\frac{de_1^2}{dt} \simeq \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \frac{e^2}{t_{g,12}} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

Viscous Stirring

ランダム速度上昇の効果

ヤコビエネルギーの保存より
 $|a_2 - a_1|$ が増えると e, i が増える

Dynamical Friction

エネルギー等分配の効果

粒子あたりのエネルギー
 $\propto M_j e_j^2$ を一定にする働き

$$t_{g,12} = \left(\frac{1}{e^2} \frac{de^2}{dt} \right)^{-1}$$

：相対離心率が変化する
典型的なタイムスケール

$$e^2 = e_1^2 + e_2^2$$

：相対離心率の平均

de_j^2/dt を積分すれば
解析解が求まる！

力学的摩擦の特徴

力学的摩擦の項
$$\left(\frac{de_1^2}{dt} \right)_{\text{df}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

M_1 と M_2 それぞれにエネルギーが等分配されるとき

$$M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2 \approx 0 \quad \rightarrow \quad e_{1,\text{eq}} \approx \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} e_{2,\text{eq}}$$

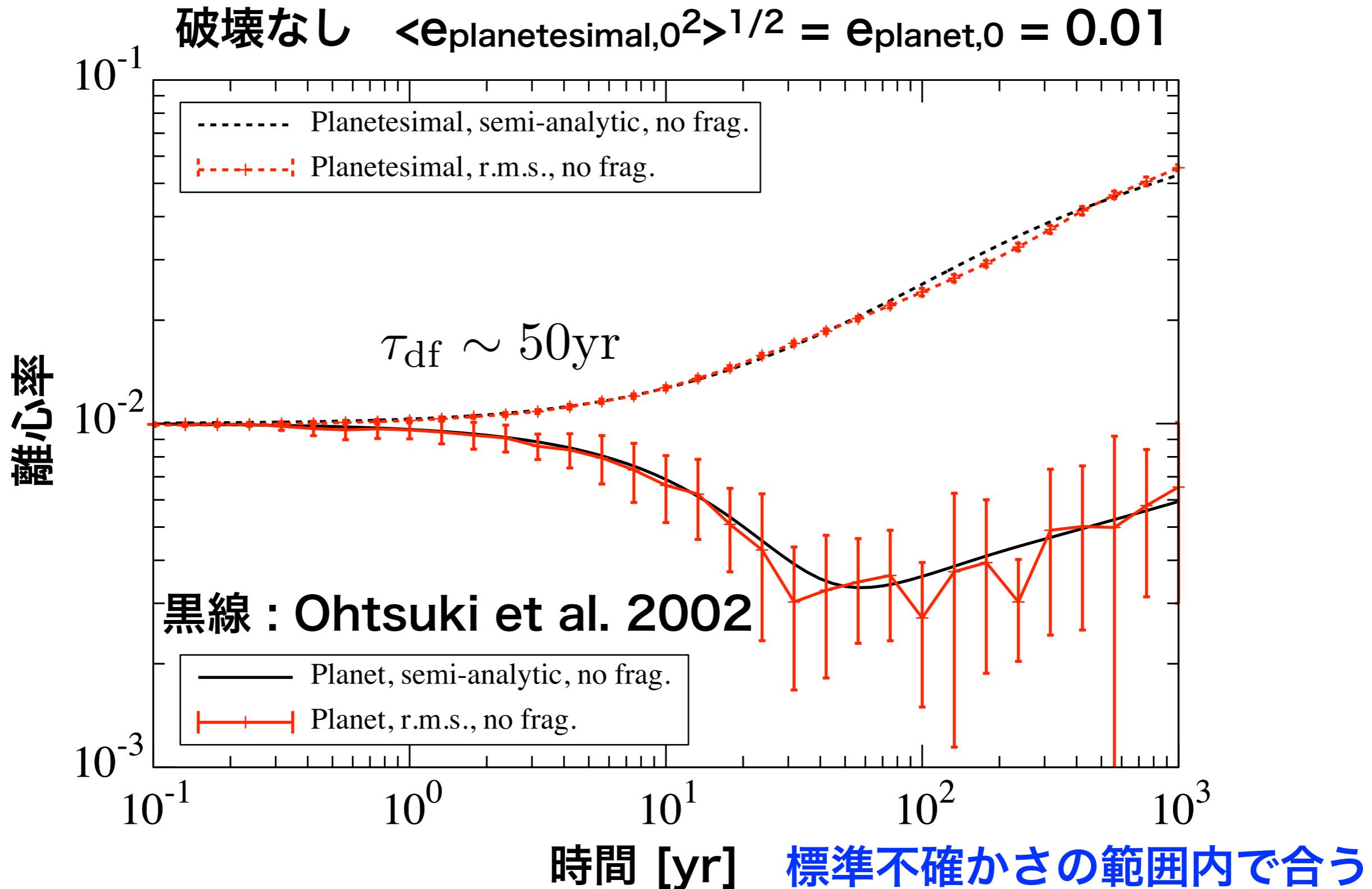
最終的な平衡状態の離心率は M_1 と M_2 の質量比、つまりN体計算では粒子数に大きく依存する

一方、力学的摩擦のタイムスケールは、 $M_1 \gg M_2$ かつ $e_1 \sim e_2$ とすると

$$\tau_{\text{df}} \simeq 16 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta a/a}{0.126} \right) \left(\frac{e}{0.01} \right)^4 \left(\frac{\ln \Lambda}{5} \right)^{-1} \left(\frac{M_1}{M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{tot},2}}{10M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{3/2} \text{yr}$$

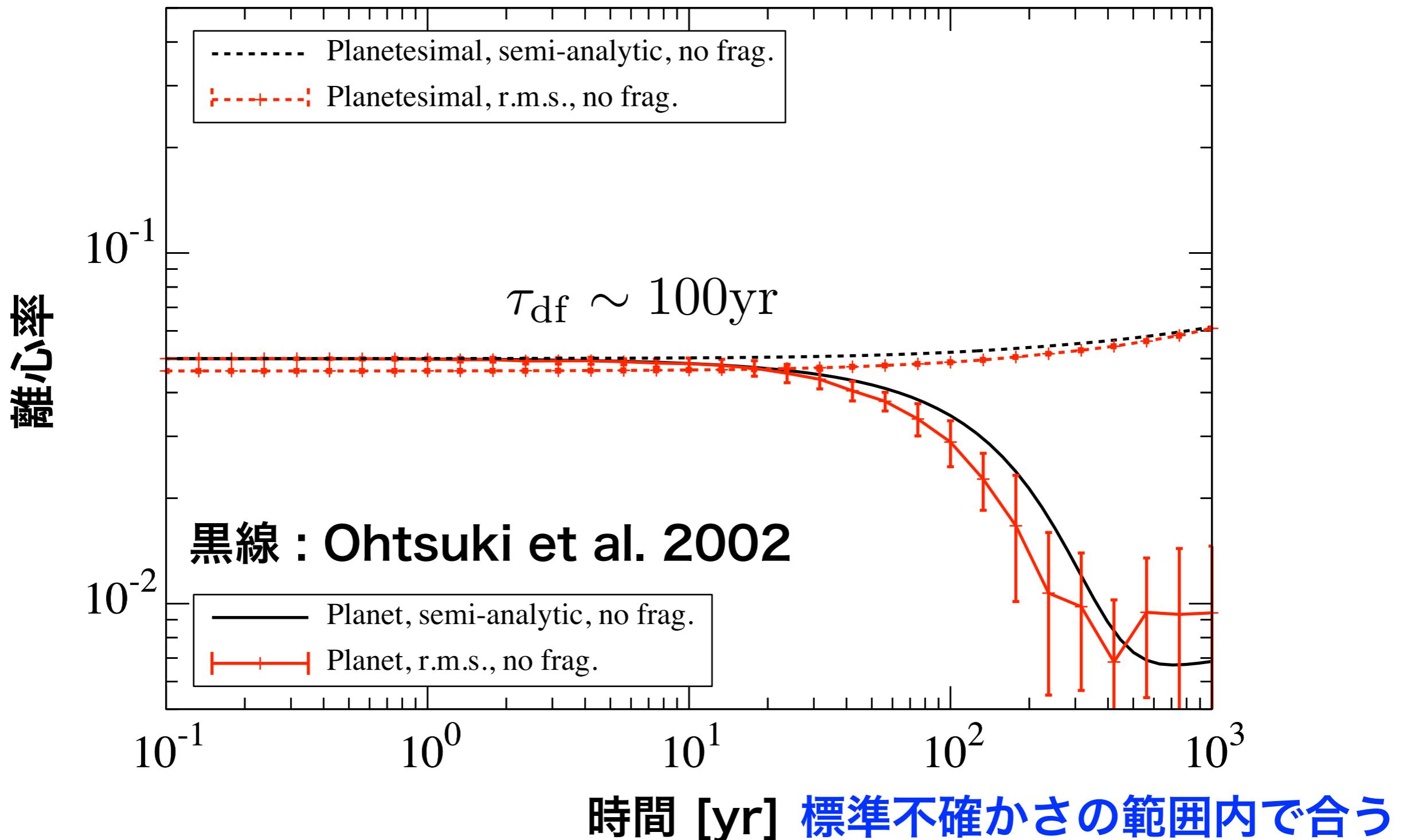
それぞれの M_2 に依存せず、集団2の総質量 $M_{\text{tot},2}$ が重要

離心率進化



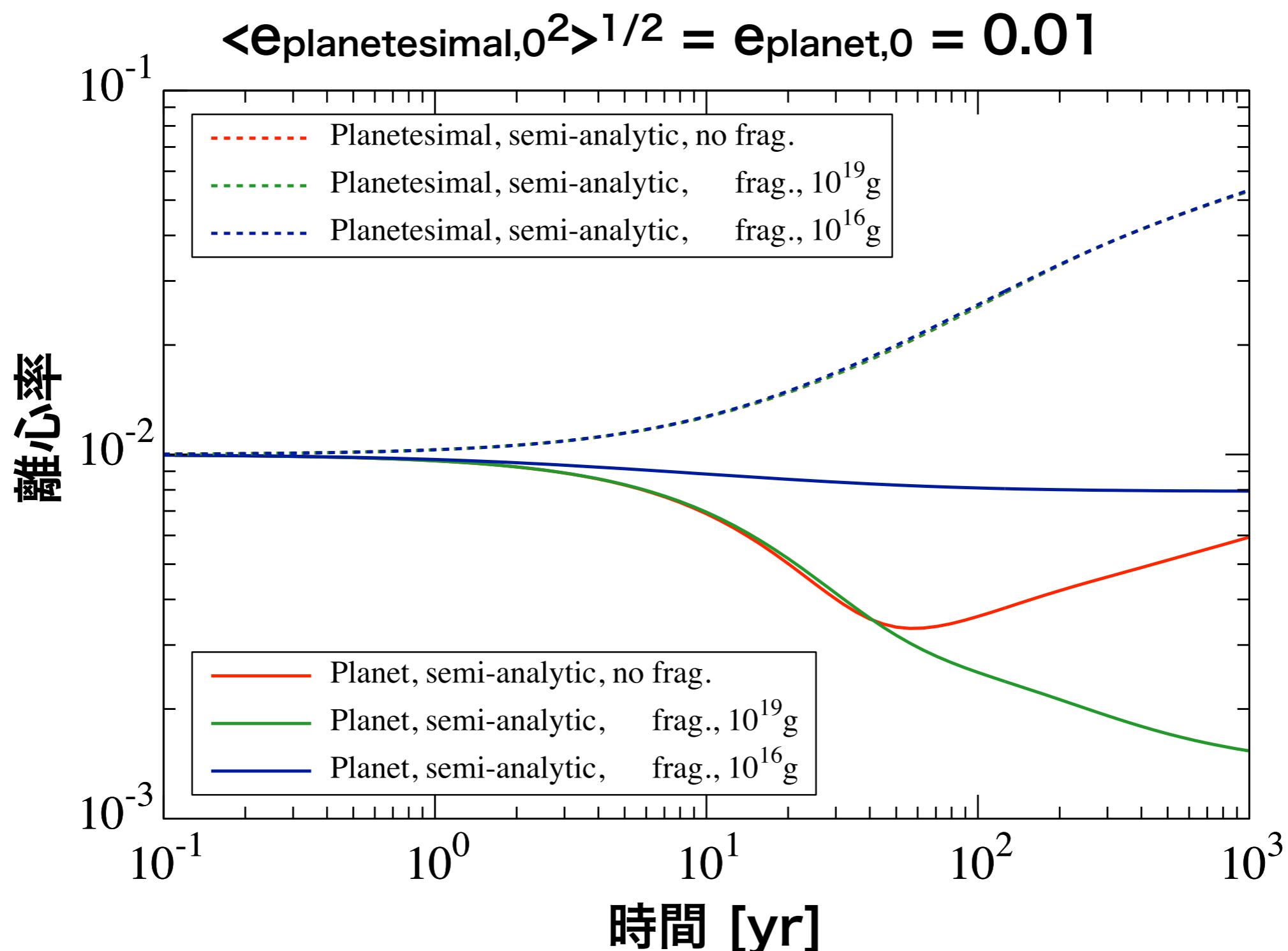
離心率進化

破壊なし $\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.05$



破壊を考慮した時の離心率進化 解析解

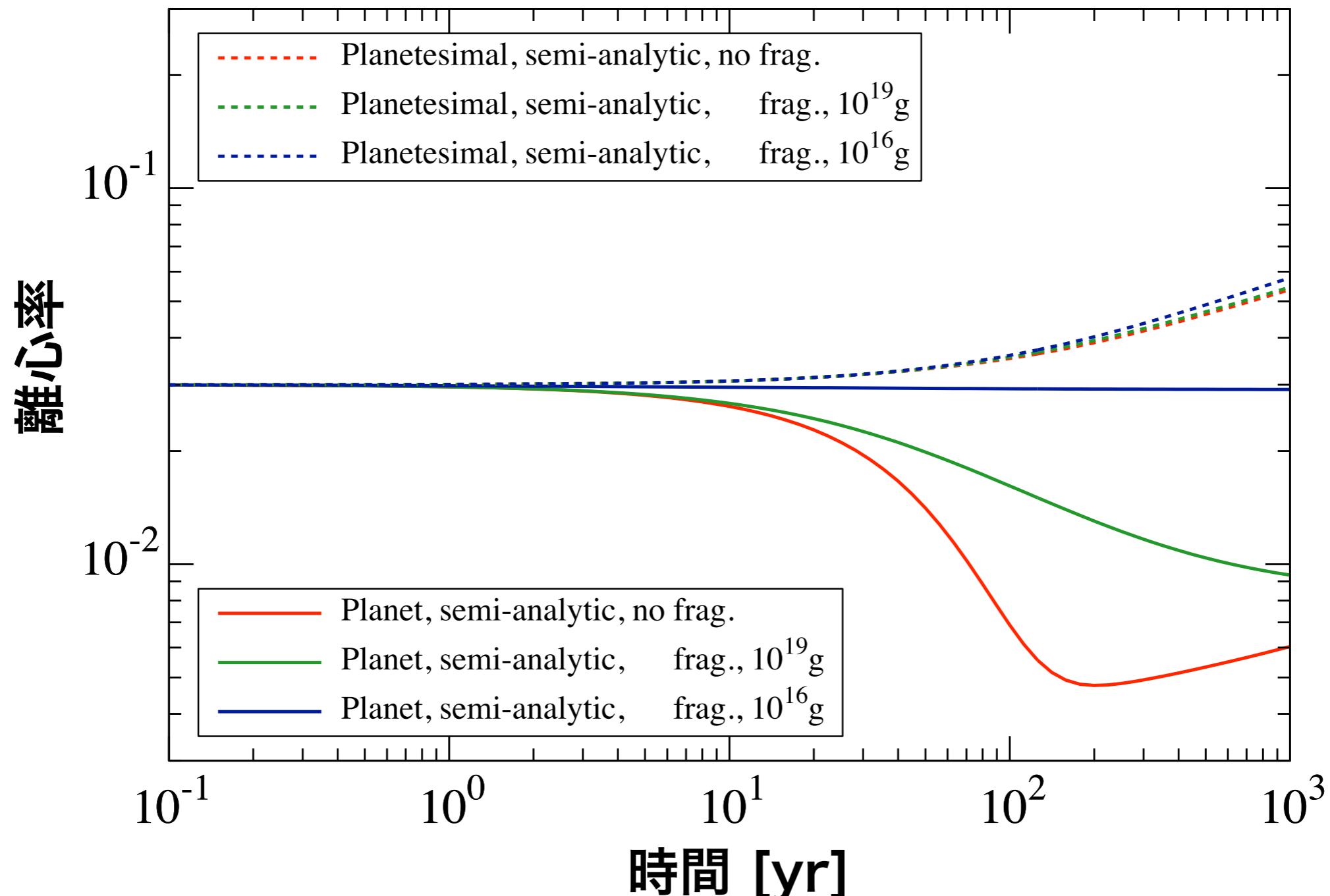
m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定



破壊を考慮した時の離心率進化 解析解

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

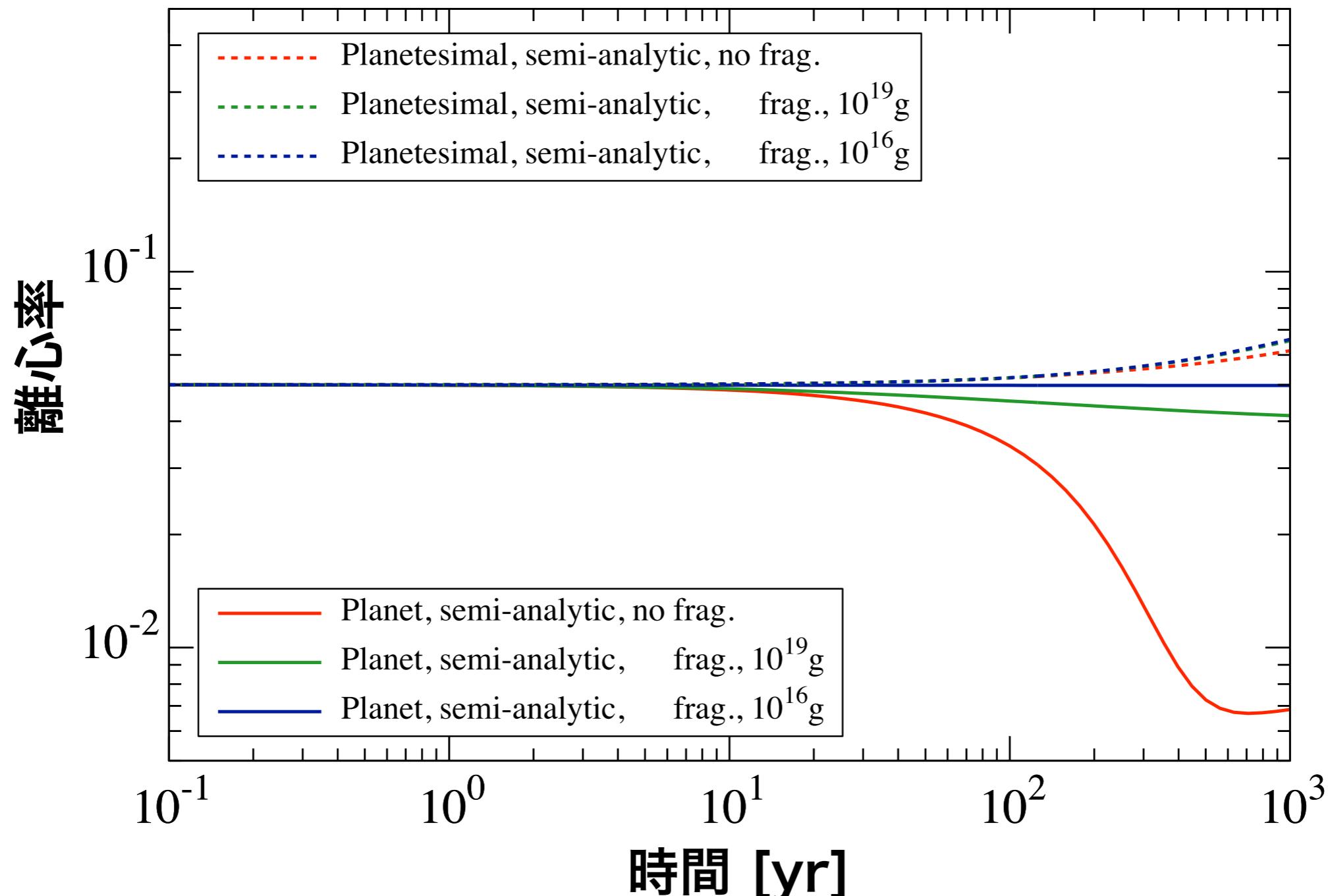
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$



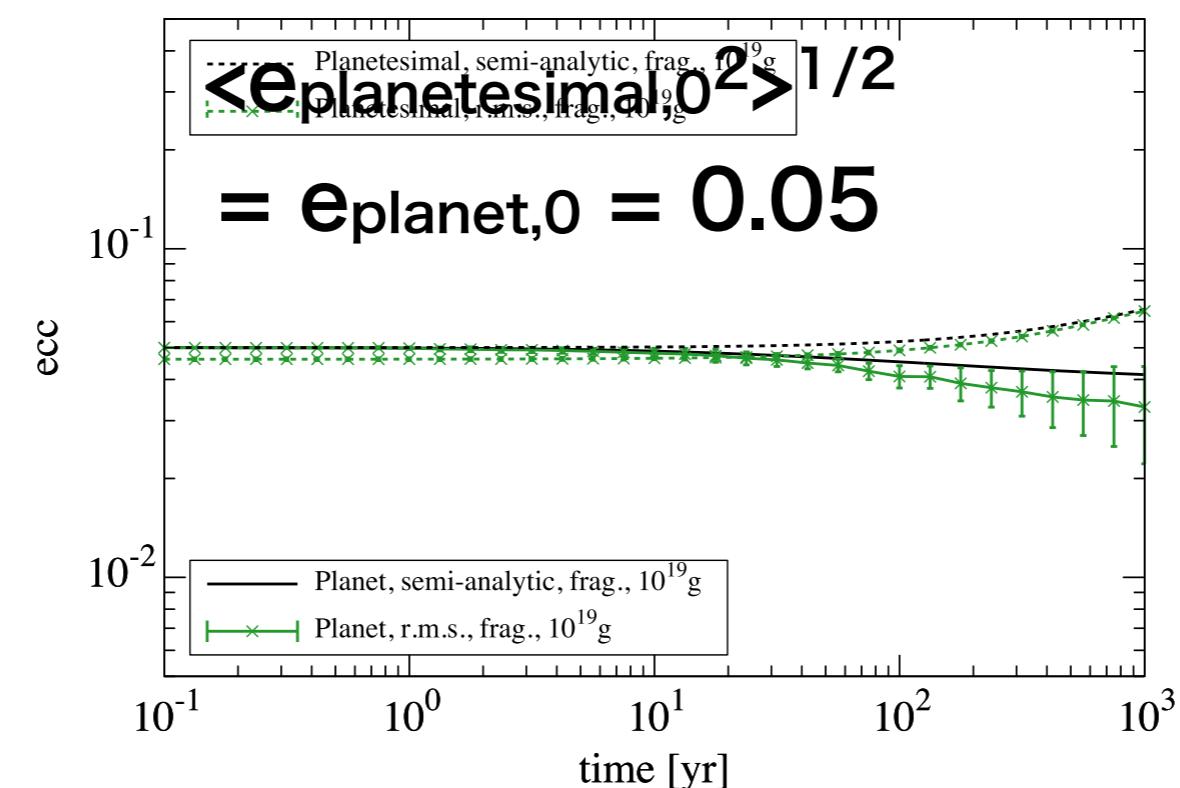
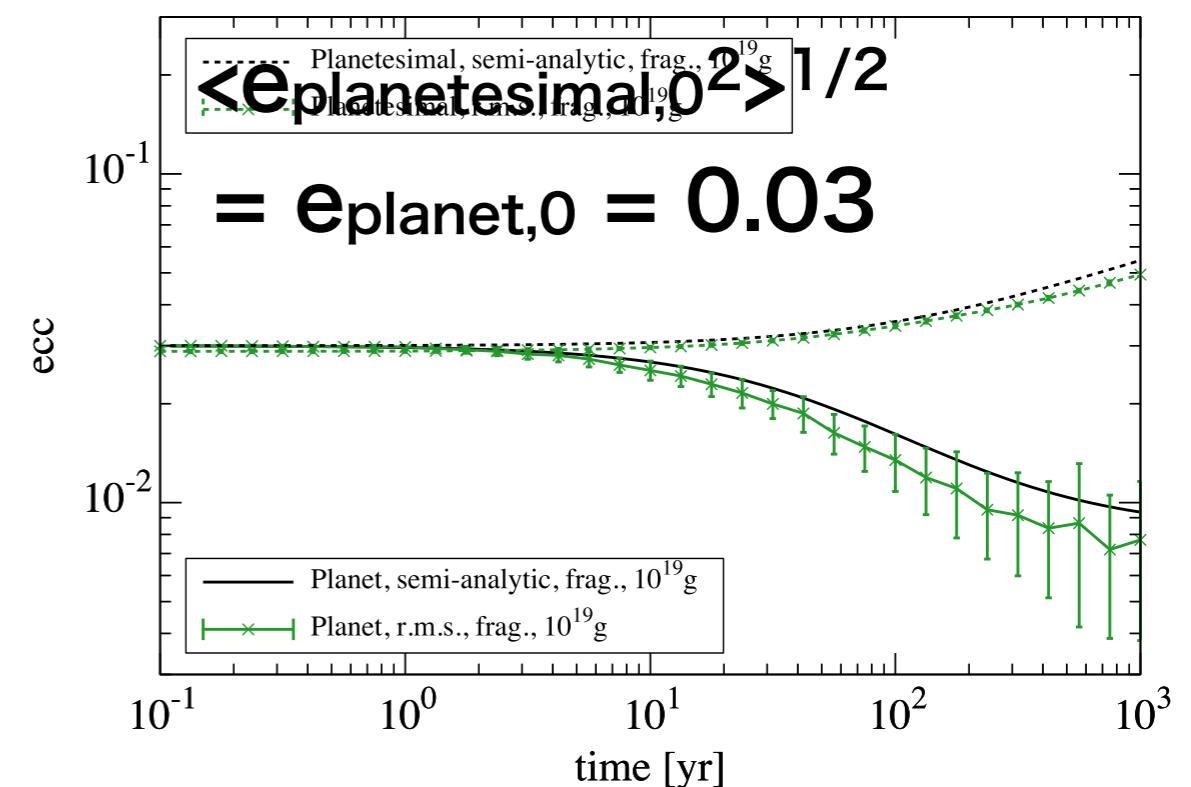
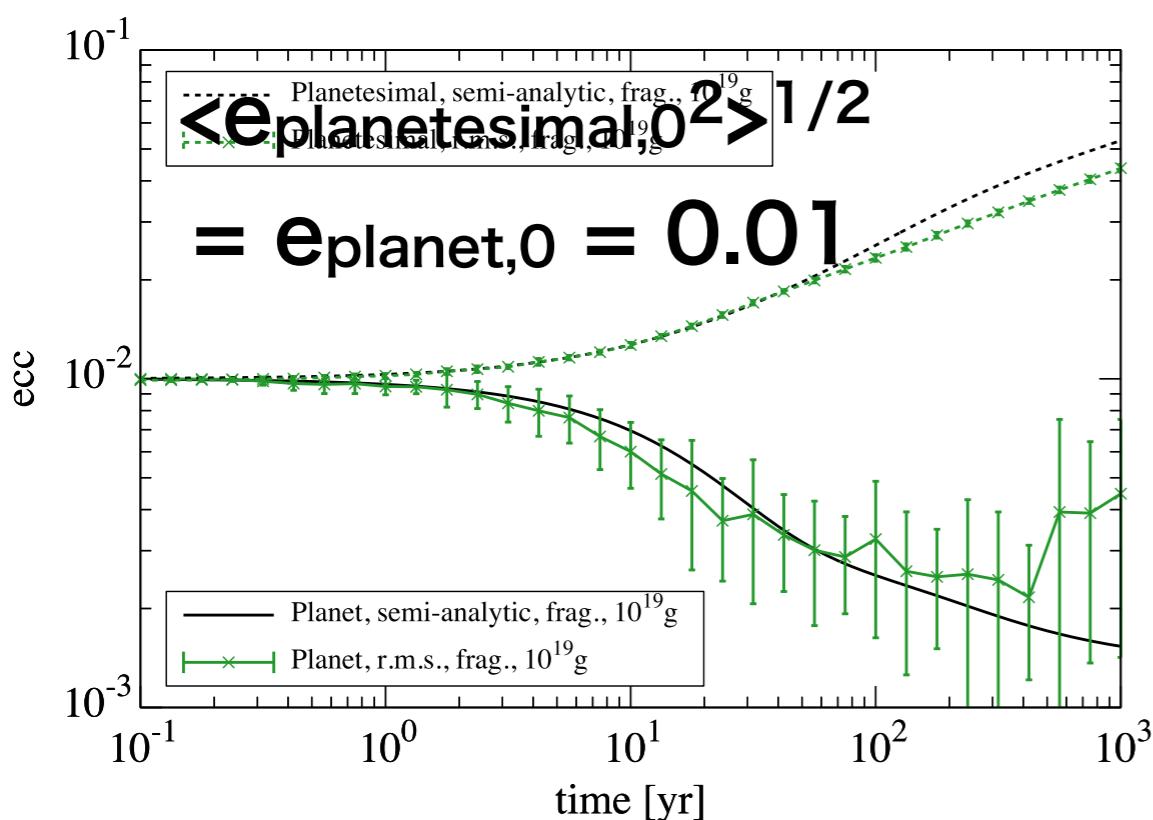
破壊を考慮した時の離心率進化 解析解

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

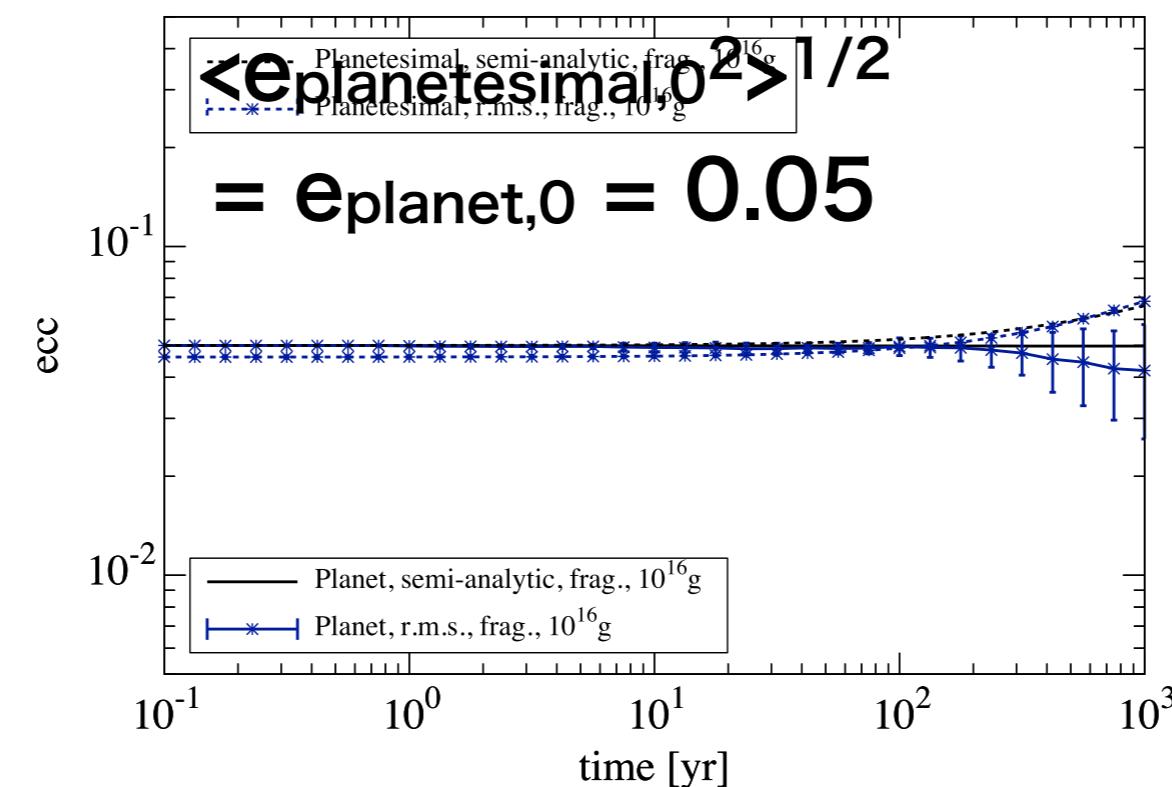
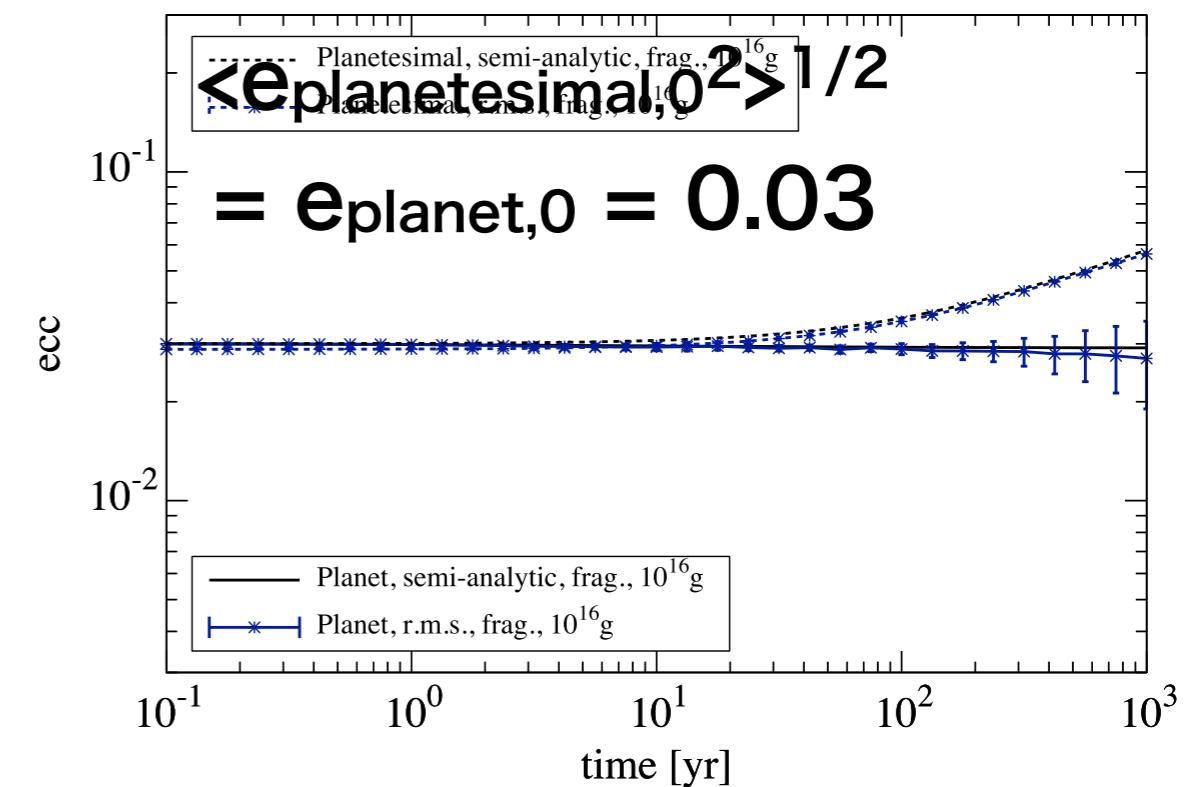
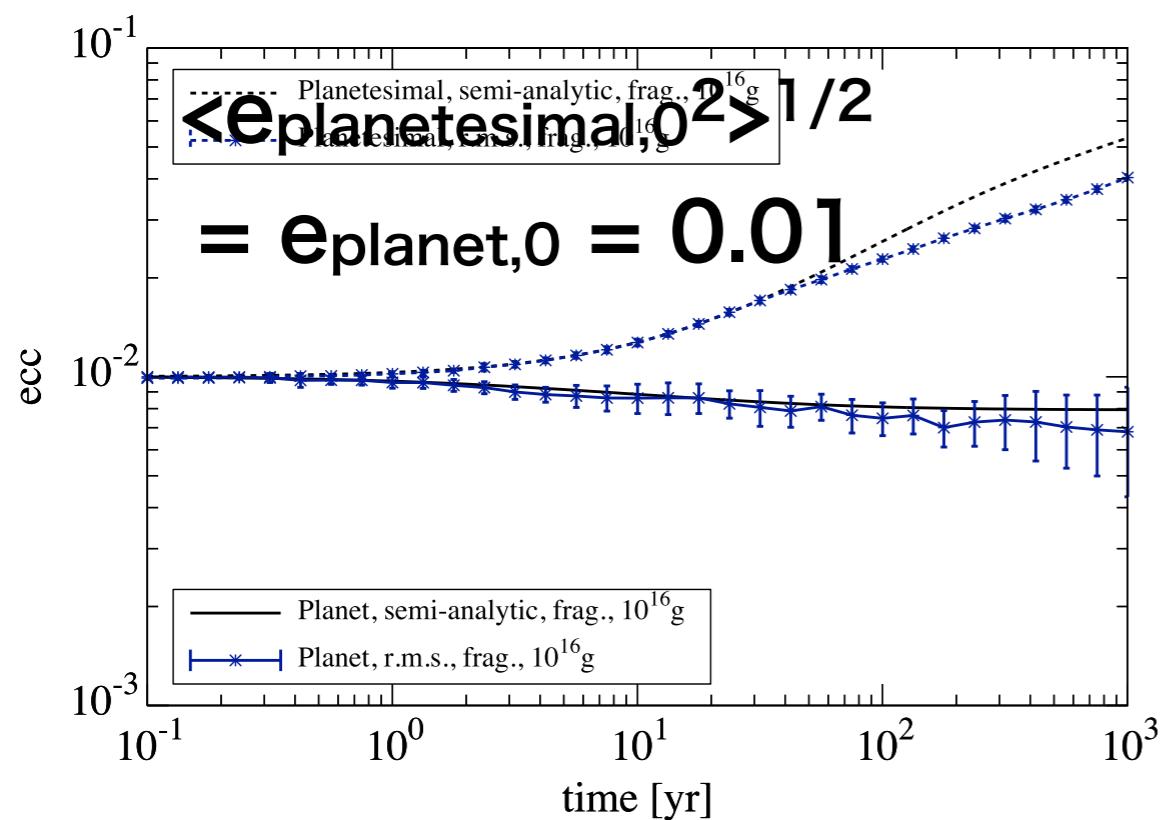
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.05$$



解析解と数値計算の比較 $10^{19}\text{g}(\sim 10\text{km})$



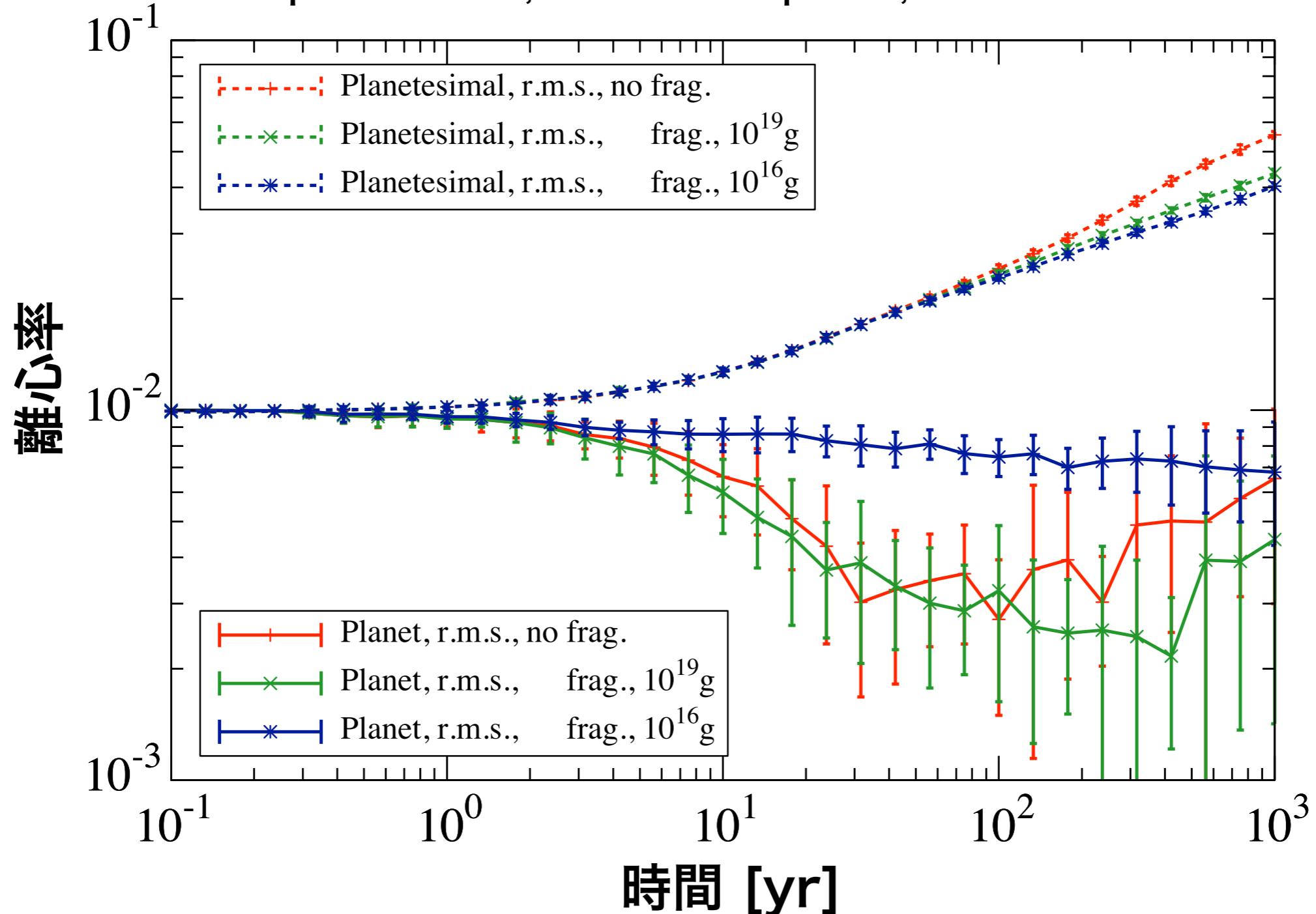
解析解と数値計算の比較 $10^{16}\text{g}(\sim 1\text{km})$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

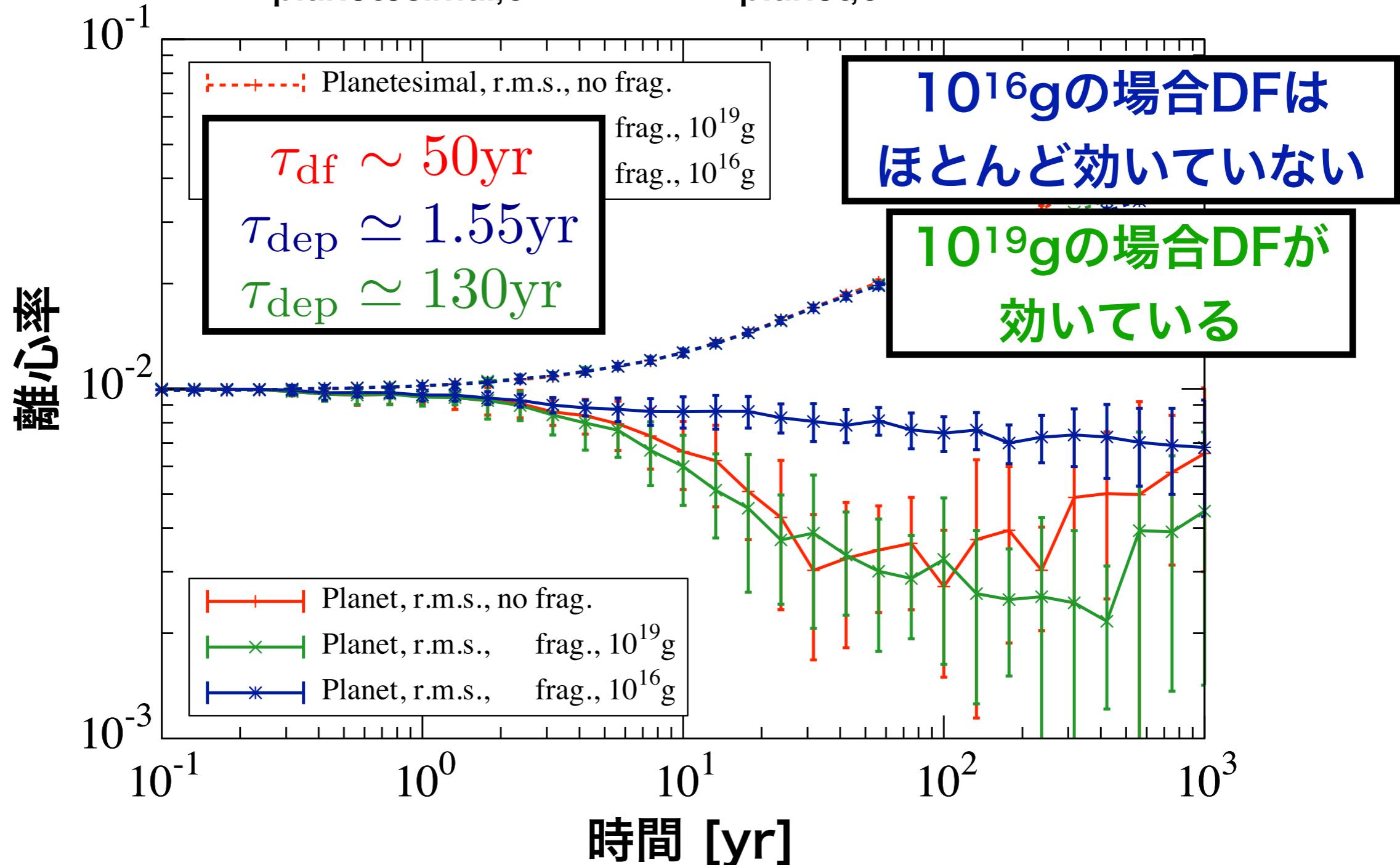
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.01$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

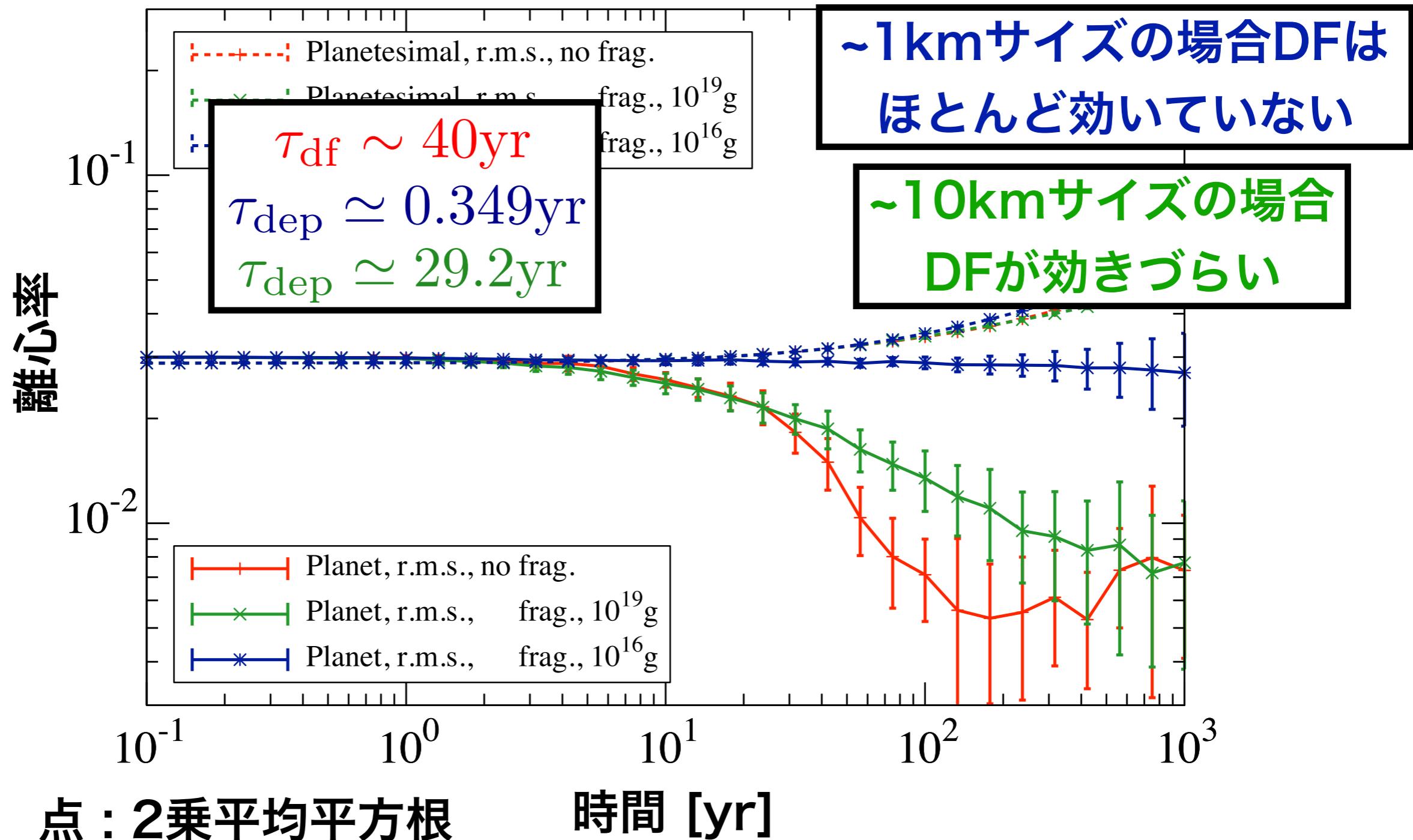
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.01$$



破壊を考慮した時の離心率進化

最大微惑星の質量 m_{\max} を $10^{16}\text{g}(\sim 1\text{km})$ と $10^{19}\text{g}(\sim 10\text{km})$ に設定

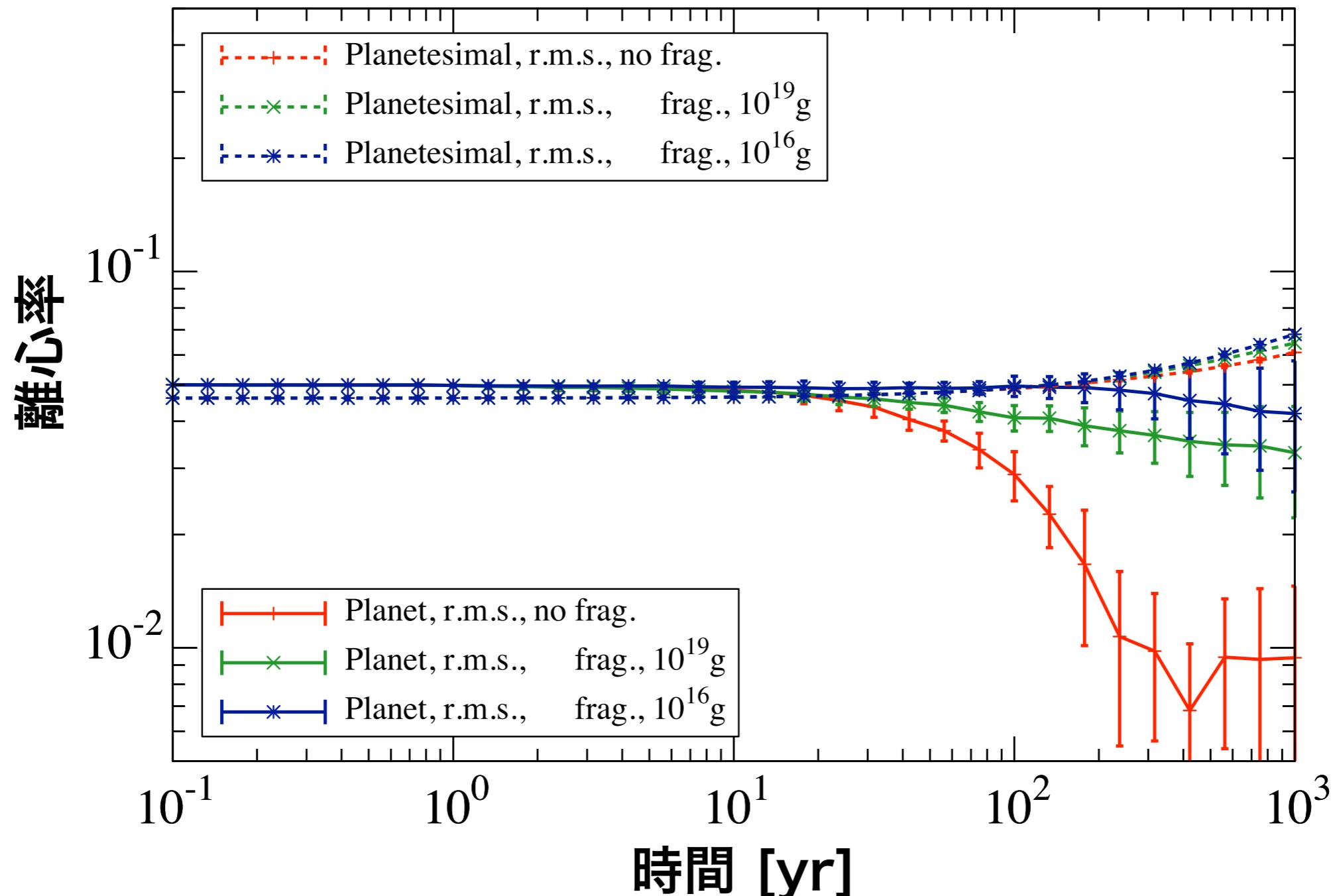
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

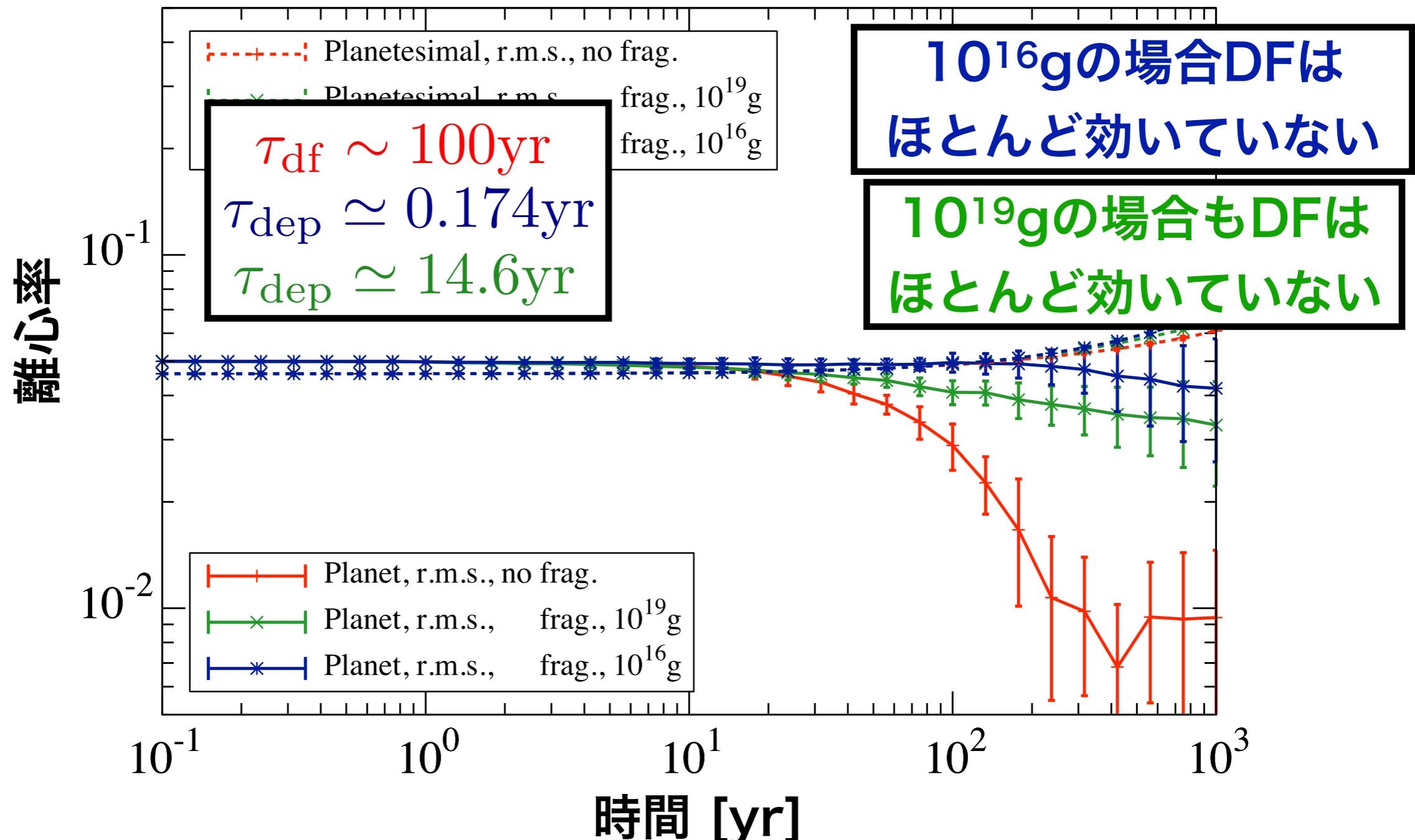
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.05$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.05$$



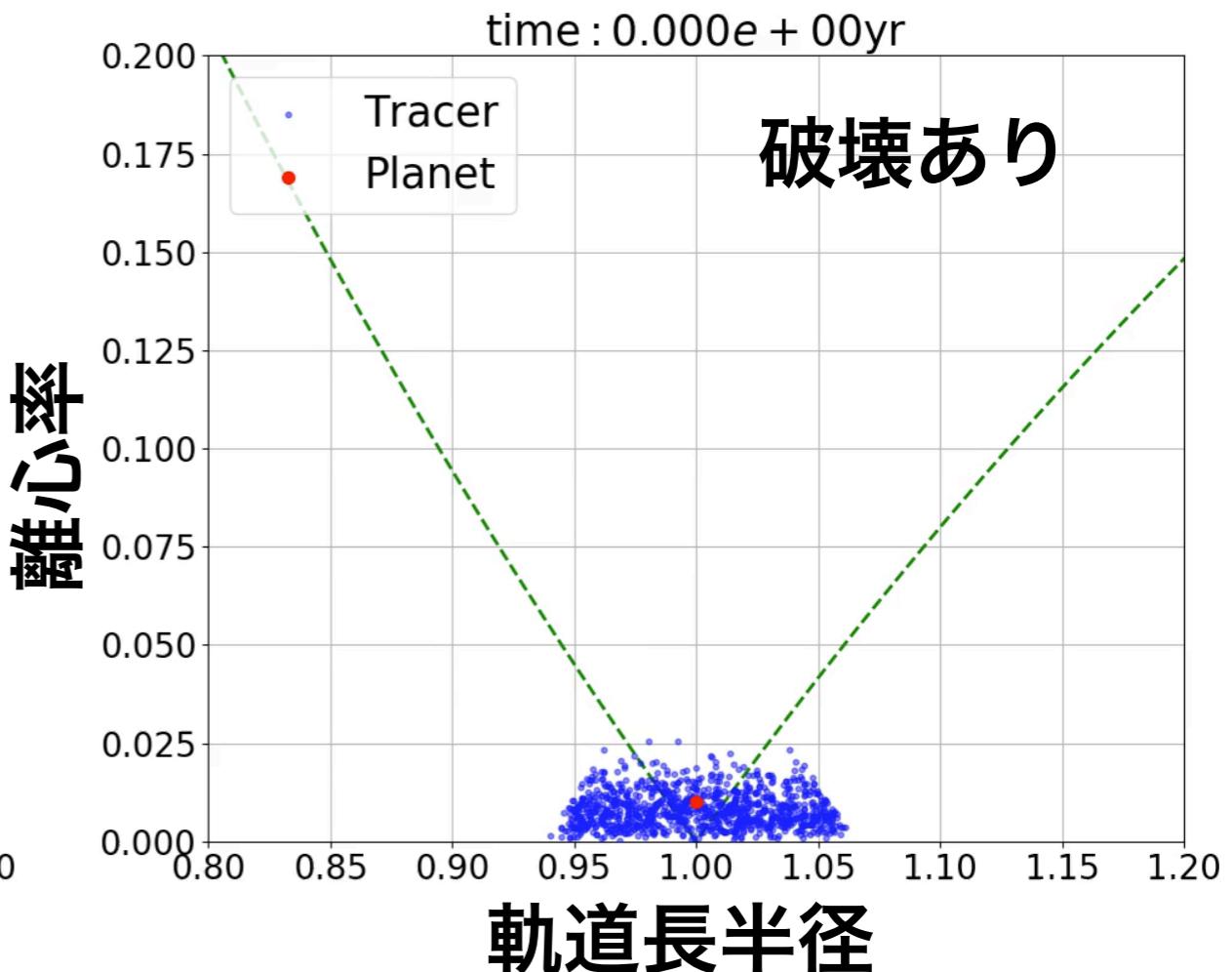
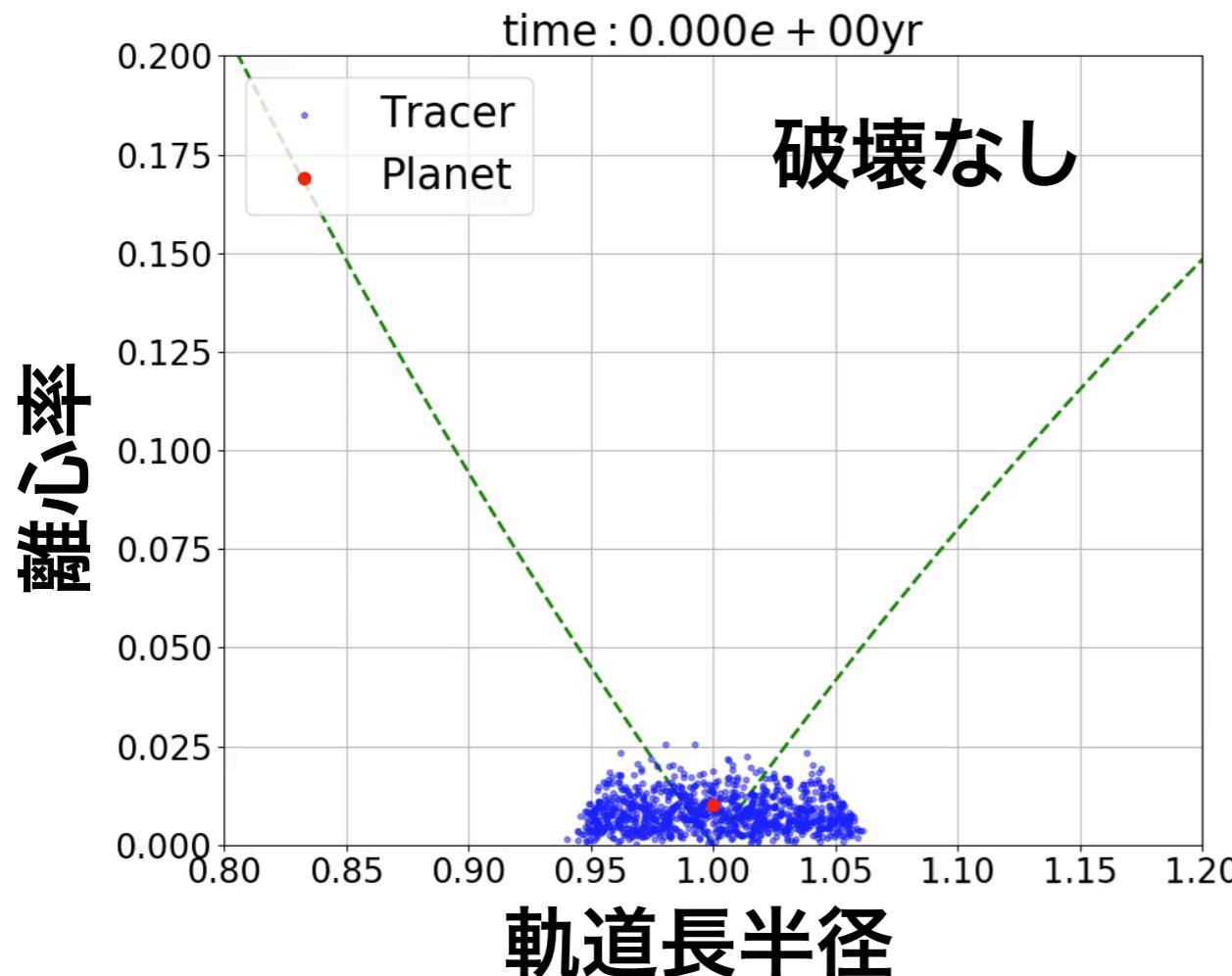
議論

惑星移動の方向

初期条件

- ・ 質量 $1M_E$ の惑星1体
- ・ 総質量 $10M_E$ の微惑星1000体
- ・ 円盤の幅~10相互ヒル半径

でテストを行ったが、微惑星円盤の外へ惑星は移動していた

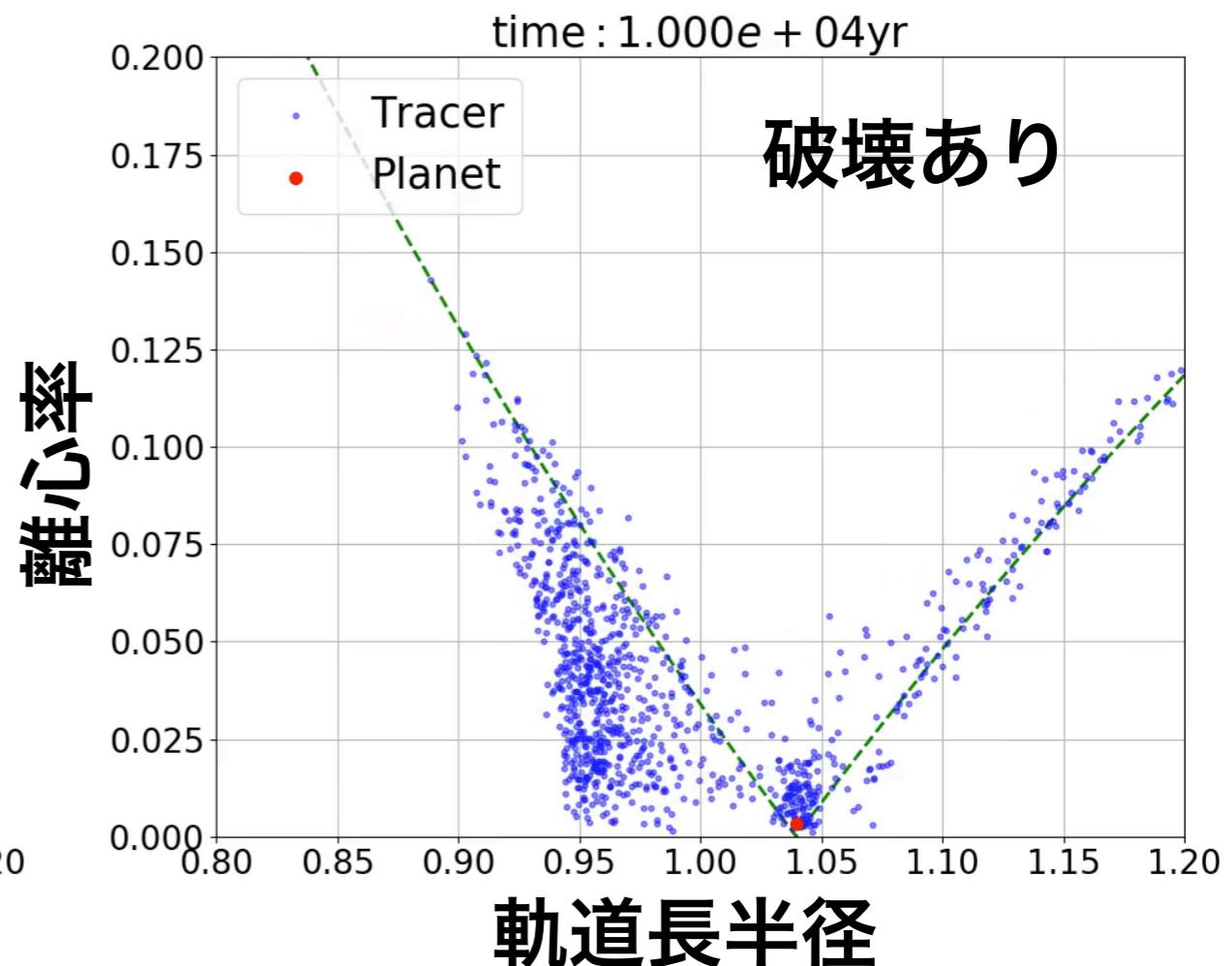
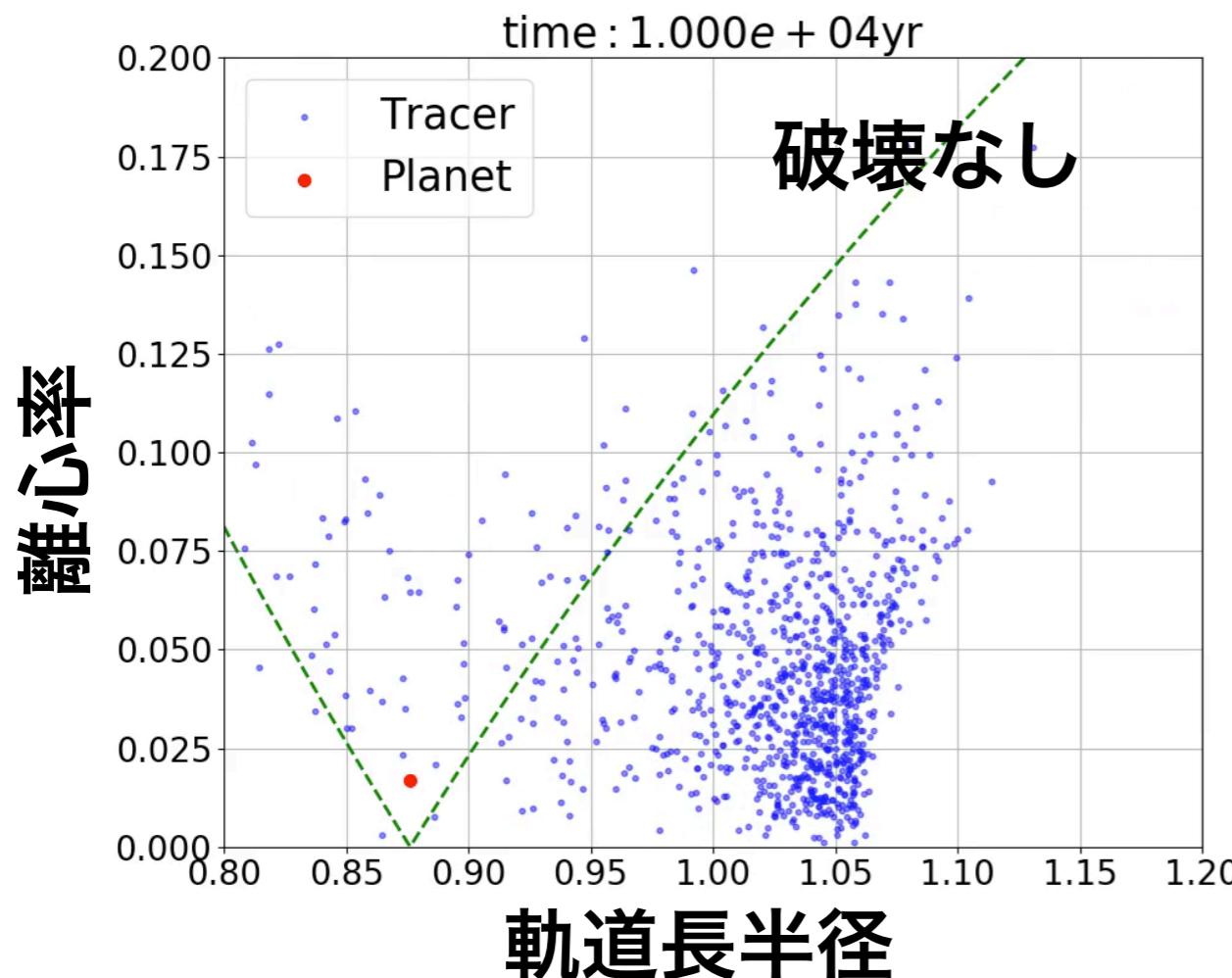


惑星移動の方向

初期条件

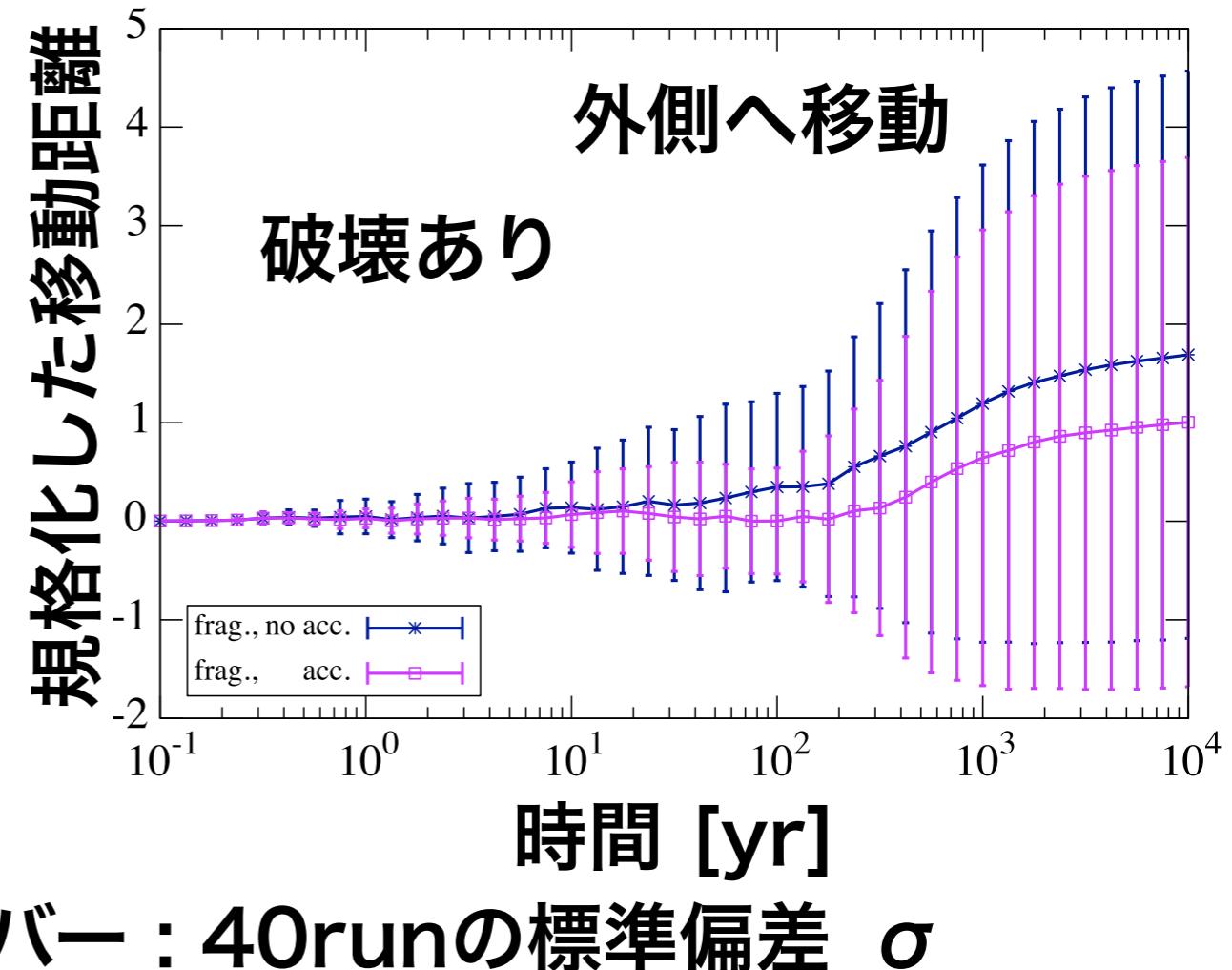
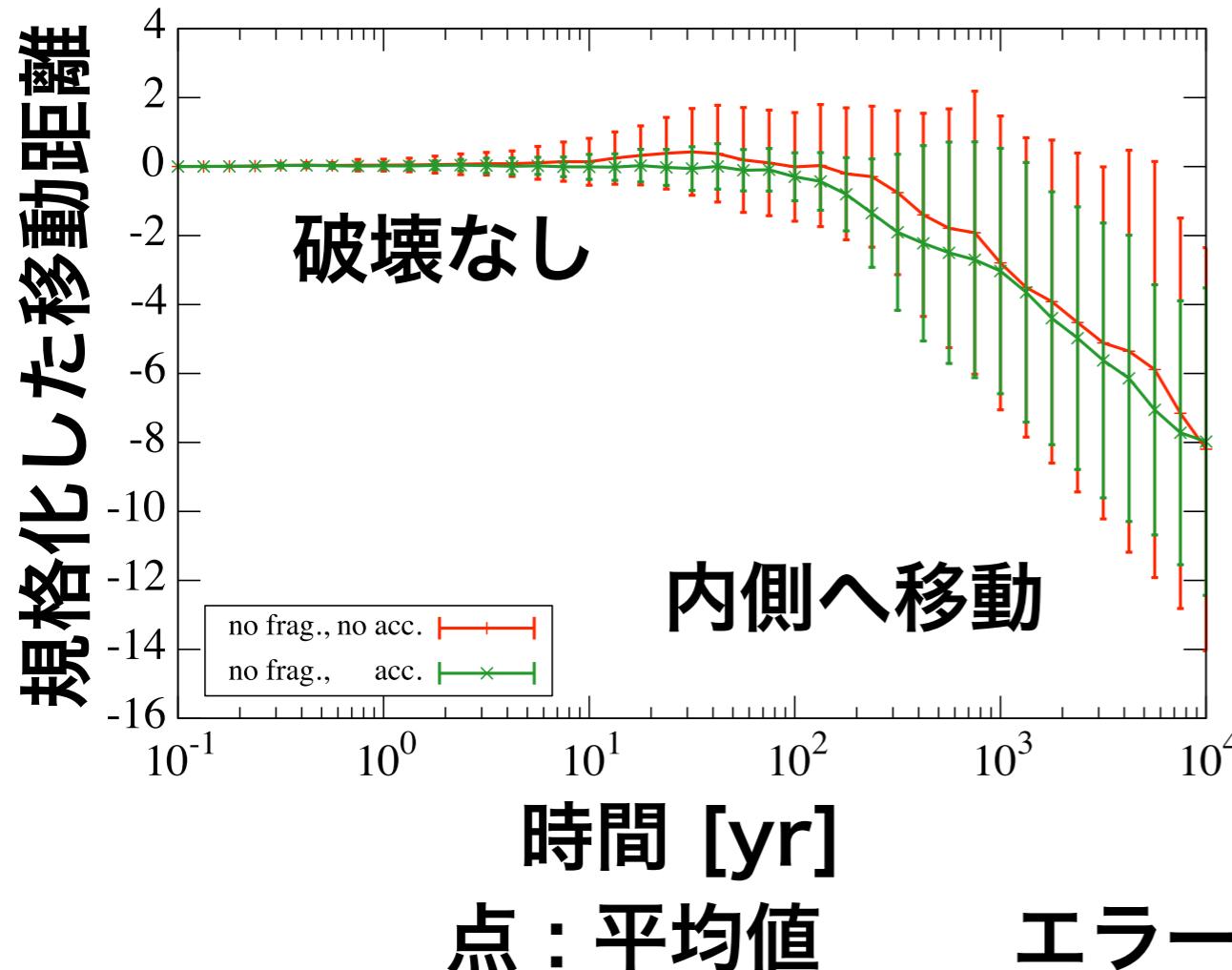
- ・ 質量 $1M_E$ の惑星1体
- ・ 総質量 $10M_E$ の微惑星1000体
- ・ 円盤の幅~10相互ヒル半径

でテストを行ったが、微惑星円盤の外へ惑星は移動していた



しかし、惑星移動の方向は破壊ありと破壊なしで正反対だった

惑星移動の方向と微惑星間破壊の関係



内側へ移動する理由：

内側の微惑星との角運動量交換の頻度が
外側に比べ多いため

破壊ありの場合に
面密度減少タイムスケールは内側ほど小さく、角運
外側へ移動した理由： 動量交換する相手が内側にいなくなつたため (?)

ヤコビエネルギー

回転系での相対運動のエネルギー

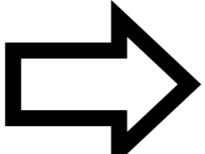
$$E_J = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2} \Omega_K^2 x^2 + \frac{1}{2} \Omega_K^2 z^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r} = \text{const.}$$

惑星による微惑星散乱では、ヤコビエネルギーを保つように軌道進化する離心率、軌道傾斜角、軌道長半径で書き換えると

$$E_J = \frac{1}{2} (e^2 + i^2) a^2 \Omega_K^2 - \frac{3}{8} \Delta a^2 \Omega_K^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r}$$

$$\equiv \frac{1}{2} v_{\text{inc}}^2$$

v_{inc} : ヒル圏への侵入速度

$|\Delta a|$ 増  $(e^2 + i^2)^2$ 増 **Viscous Stirringの原因**

4次のエルミート法1

step1 : 加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算 (2次精度)

$$\begin{cases} x_{p,j} = x_{0,j} + \Delta t v_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{a}_{0,j} & \text{予測子} \\ v_{p,j} = v_{0,j} + \Delta t a_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{a}_{0,j} & \text{添字0は} t_0 \text{での値} \end{cases}$$

step2 : 予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

ここで $\begin{cases} r_{jk} = x_{p,j} - x_{p,k} \\ v_{jk} = v_{p,j} - v_{p,k} \end{cases}$ とおくと、 Δt 進めた加速度は

$$\begin{cases} a_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \frac{r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \\ \dot{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \left[\frac{v_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(v_{jk} \cdot r_{jk}) r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \end{cases} \quad \epsilon : \text{ソフトニングパラメータ}$$

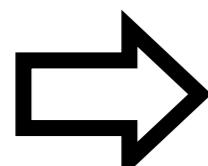
添字1は $t_0 + \Delta t$ での値

4次のエルミート法2

step2続き

$$\begin{cases} a_{1,j} = a_{0,j} + \Delta t \dot{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(3)} & \text{3次のエルミート補完} \\ \dot{a}_{1,j} = \dot{a}_{0,j} + \Delta t a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(3)} & (\text{テイラー展開}) \end{cases}$$

逆に解く



$$\begin{cases} a_{0,j}^{(2)} = \frac{-6(a_{0,j} - a_{1,j}) - \Delta t(4\dot{a}_{0,j} + 2\dot{a}_{1,j})}{\Delta t^2} \\ a_{0,j}^{(3)} = \frac{12(a_{0,j} - a_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{a}_{0,j} + \dot{a}_{1,j})}{\Delta t^3} \end{cases}$$

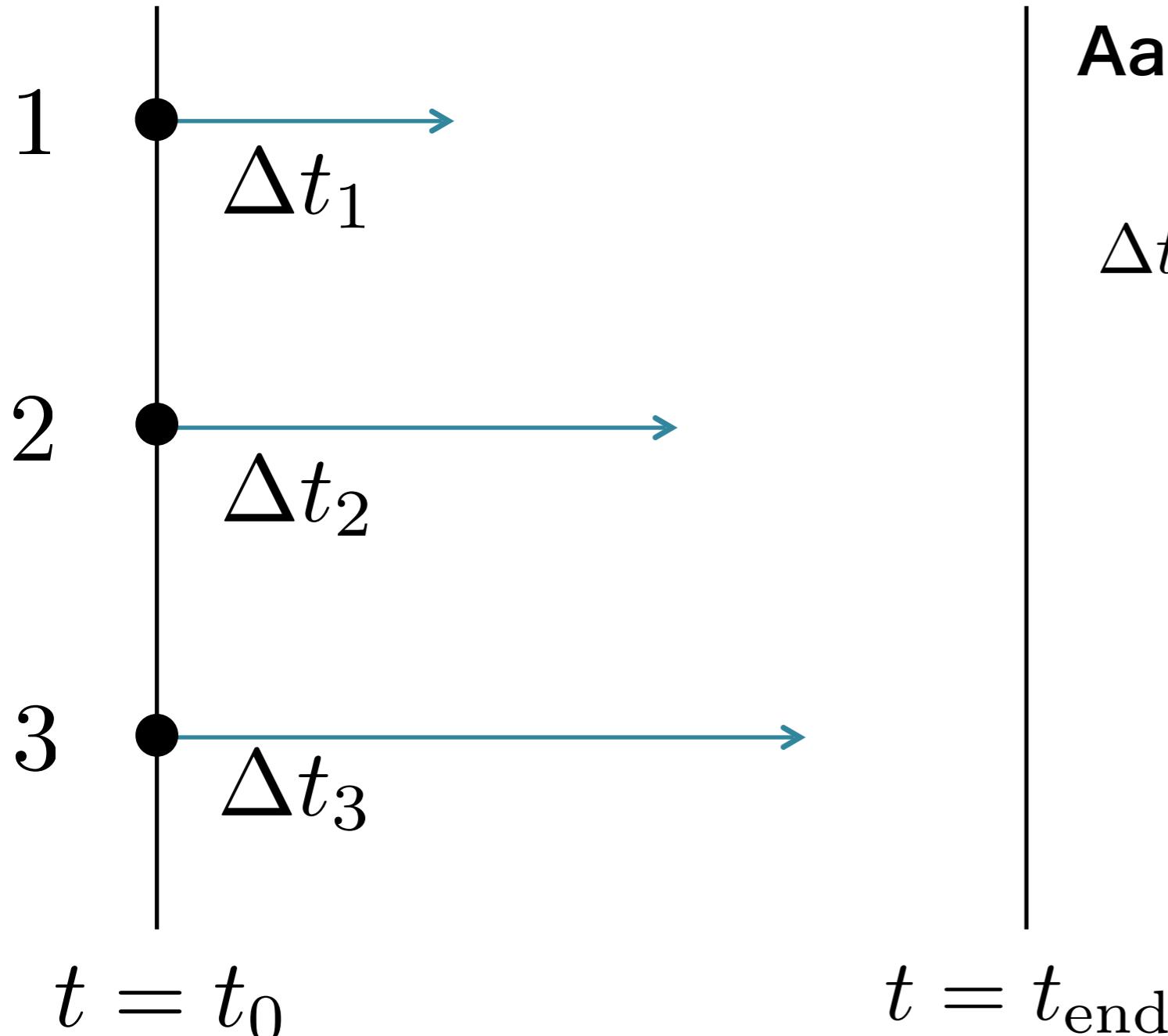
step3 : 加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算 (4次精度)

$$\begin{cases} x_{c,j} = x_{p,j} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(2)} + \alpha \frac{\Delta t^5}{120} a_{0,j}^{(3)} \\ v_{c,j} = v_{p,j} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(3)} \end{cases} \quad \text{修正子}$$

独立タイムステップ1

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

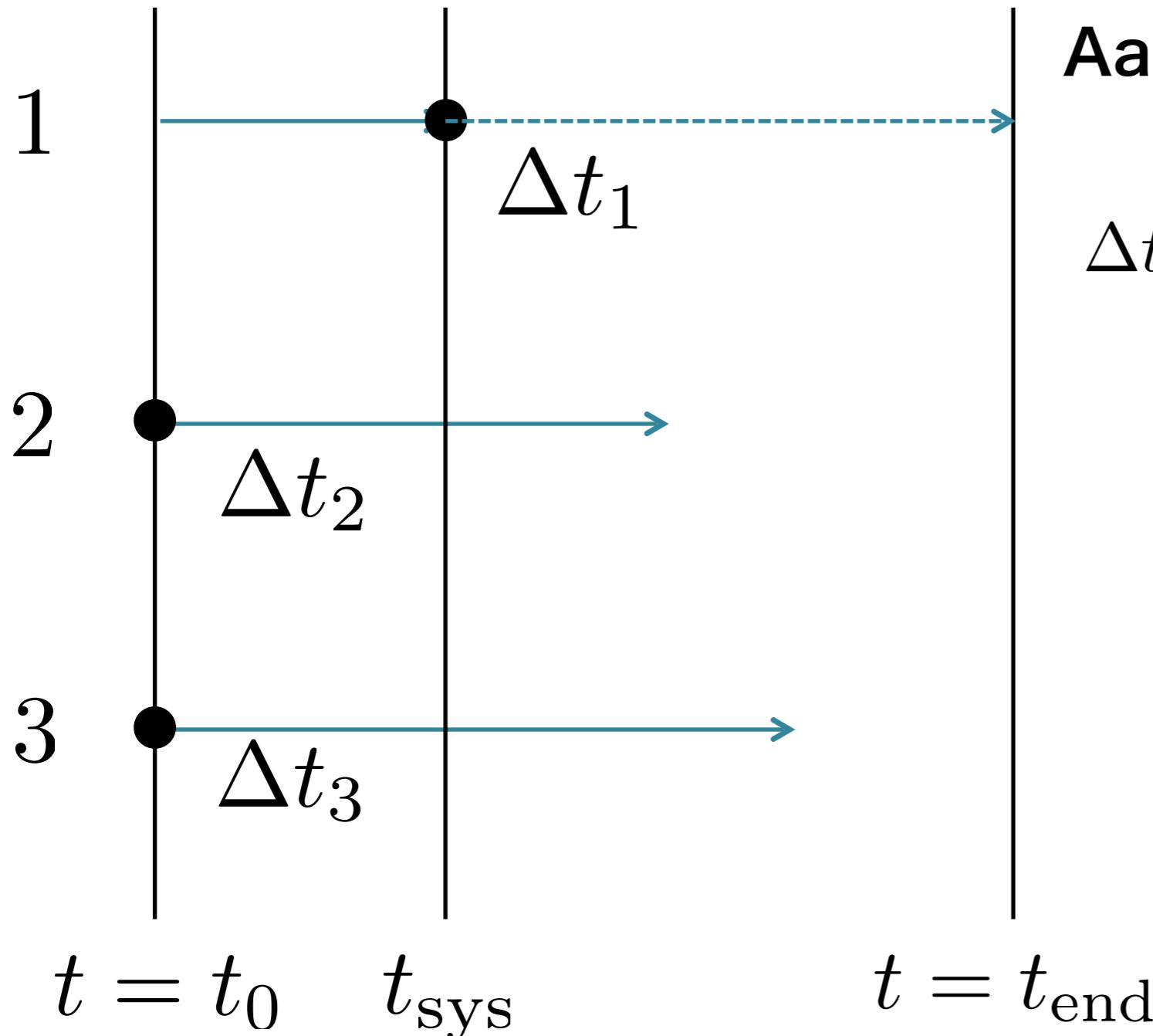
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ2

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

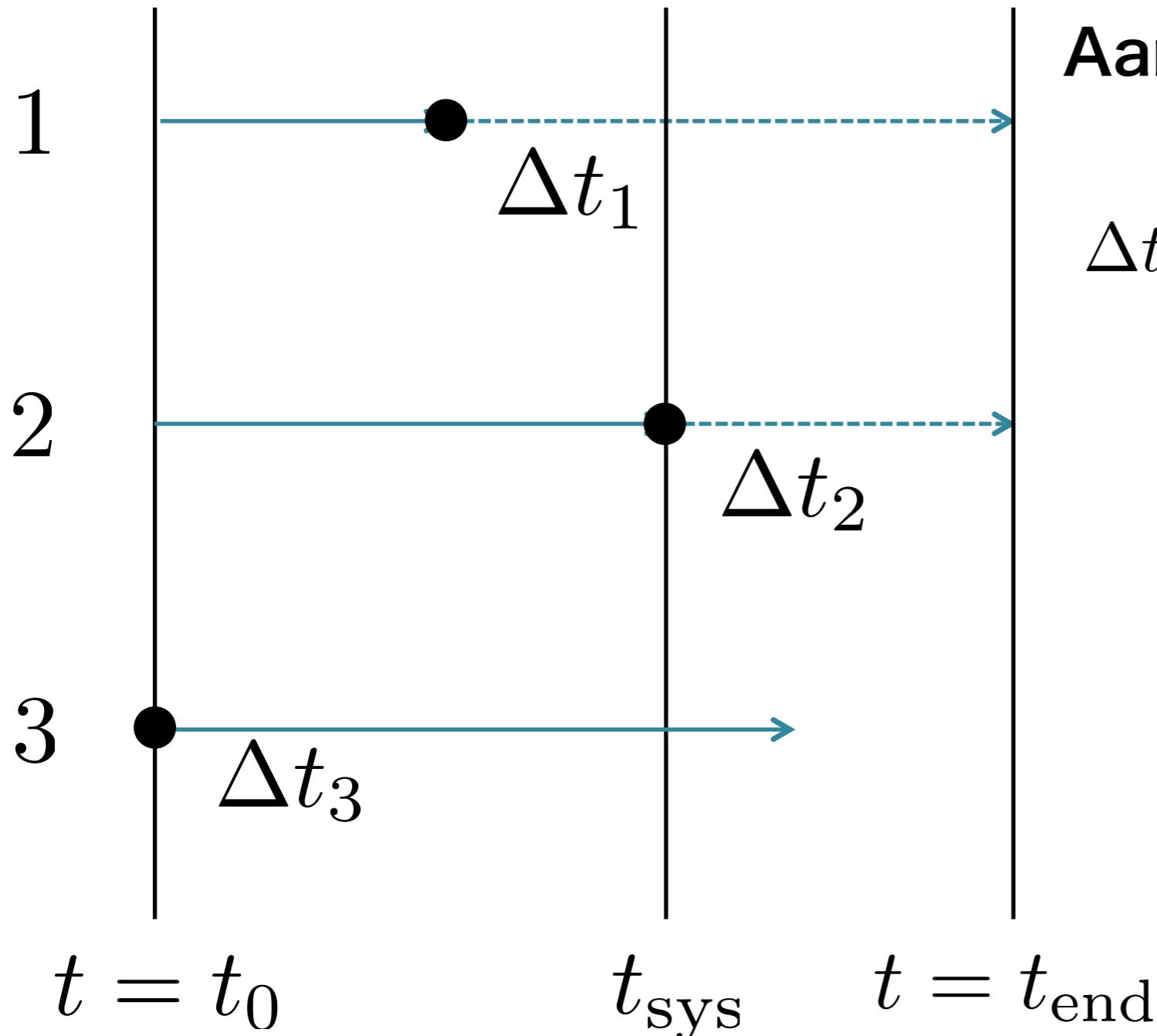
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ3

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

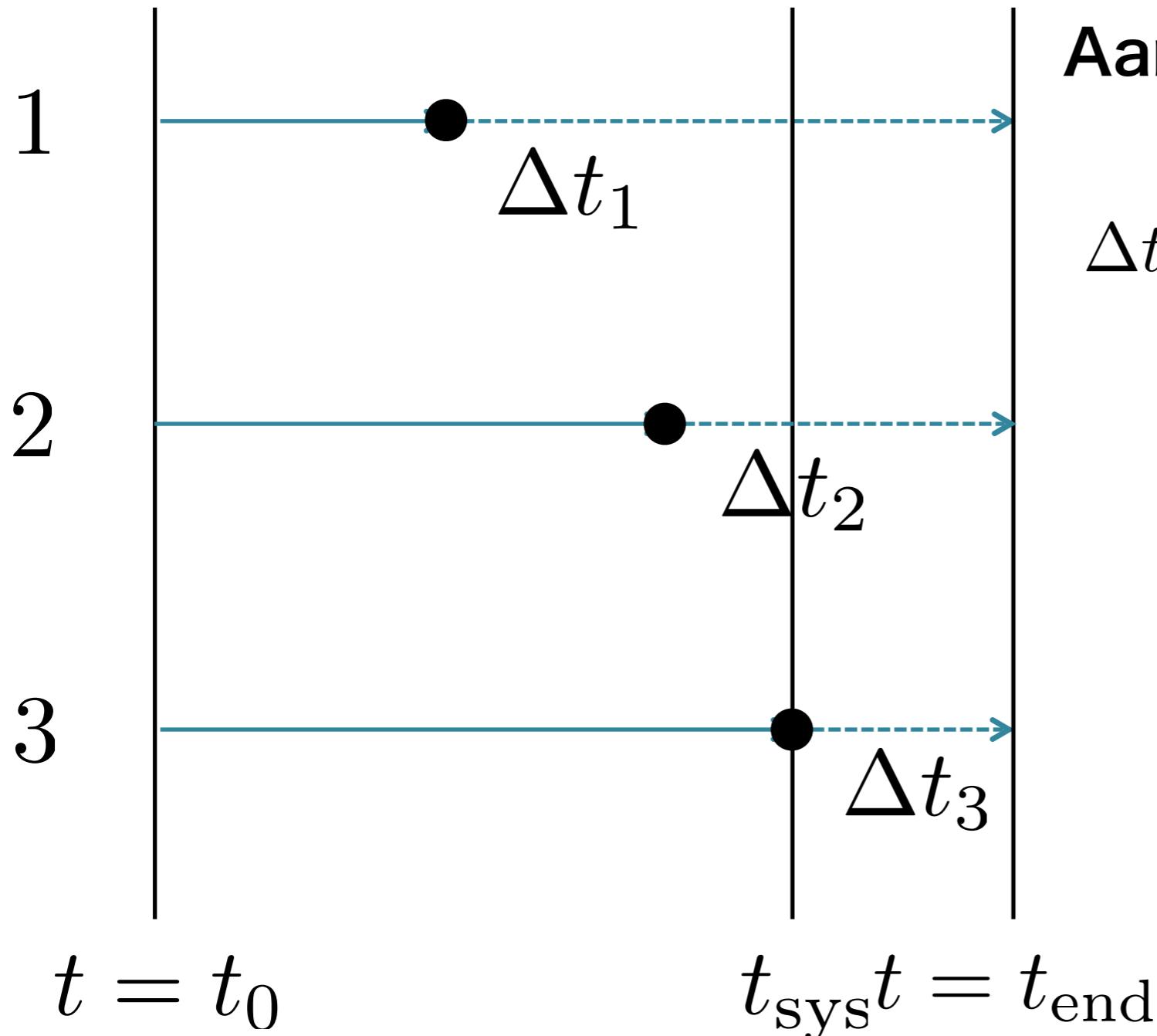
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ4

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

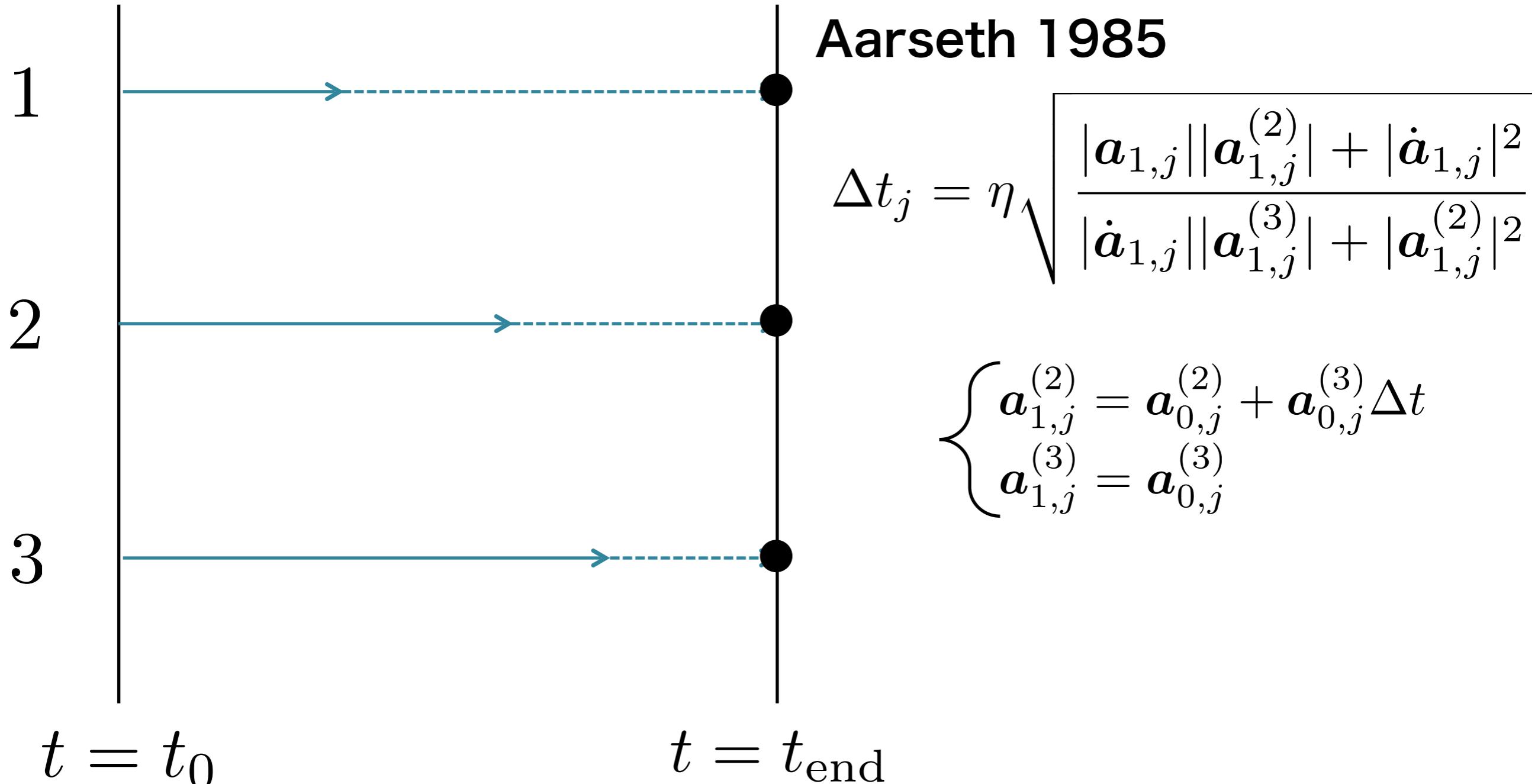
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ5

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



計算のパラメータ

				planetesimal					protoplanet		
run No.	collision	fragment	accretion	ecc r.m.s.	inc r.m.s. [rad]	mass [g]	total mass [g]	M _{max} [g]	ecc	inc [rad]	mass [g]
1	0	0	0	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28		1.0E-02	5.0E-03	6E+27
2	0	0	1	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28		1.0E-02	5.0E-03	6E+27
3	1	1	0	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+19	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
4	1	1	0	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+16	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
5	1	1	1	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+19	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
6	1	1	1	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+19	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
7	0	0	0	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28		3.0E-02	1.5E-02	6E+27
8	0	0	1	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28		3.0E-02	1.5E-02	6E+27
9	1	1	0	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+19	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
10	1	1	0	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+16	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
11	1	1	1	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+19	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
12	1	1	1	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+19	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
13	0	0	0	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28		5.0E-02	2.5E-02	6E+27
14	0	0	1	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28		5.0E-02	2.5E-02	6E+27
15	1	1	0	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+19	5.0E-02	2.5E-02	6E+27
16	1	1	0	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+16	5.0E-02	2.5E-02	6E+27
17	1	1	1	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+19	5.0E-02	2.5E-02	6E+27
18	1	1	1	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+19	5.0E-02	2.5E-02	6E+27

$$\frac{v(m)^2}{Q_{\text{D}}^*(m)} \propto m^{-p} \quad n_{\text{s}}(m)dm \propto m^{-\alpha}dm \quad \alpha = \frac{11+3p}{6+3p}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{dt} = & - \frac{(2-\alpha)^2}{m_{\max}^{1/3}} \Sigma^2 \Omega_{\text{K}} h_0 \left(\frac{v(m_{\max})^2}{2Q_{\text{D}}^*(m_{\max})} \right)^{\alpha-1} \\ & \times \left[\left(-\ln \epsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1 + s_2 + s_3 \right] \end{aligned}$$

$${e_{i,j}}^2 = {e_i}^2 + {e_j}^2 - 2e_i e_j \cos(\varpi_i - \varpi_j)$$

$${i_{i,j}}^2 = {i_i}^2 + {i_j}^2 - 2i_i i_j \cos(\Omega_i - \Omega_j)$$