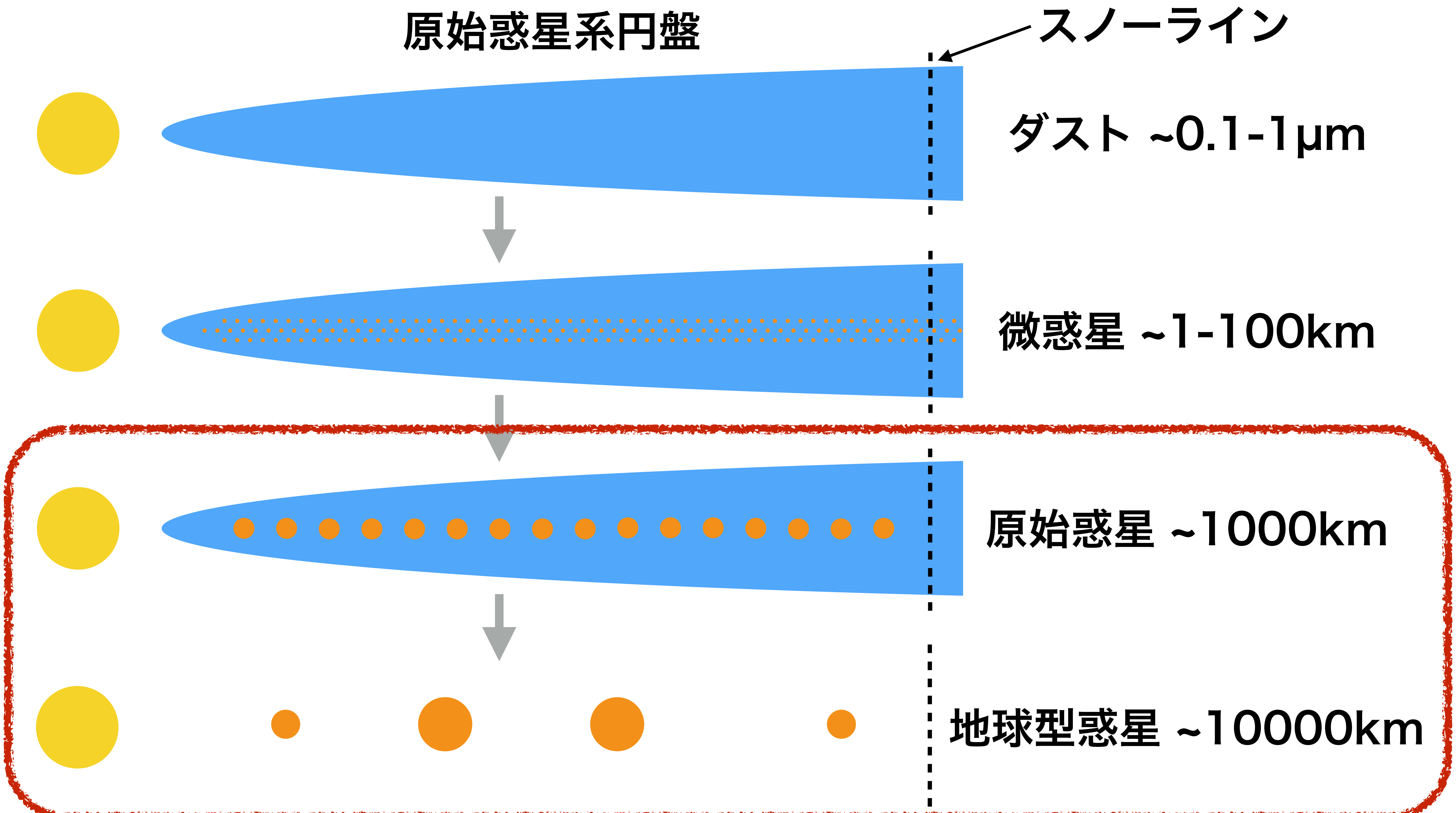
衝突・破壊をとりいれたN体計算の開発と地球型惑星形成後期のシミュレーション

磯谷和秀 (名古屋大 Ta研 M2)
共同研究者 小林浩

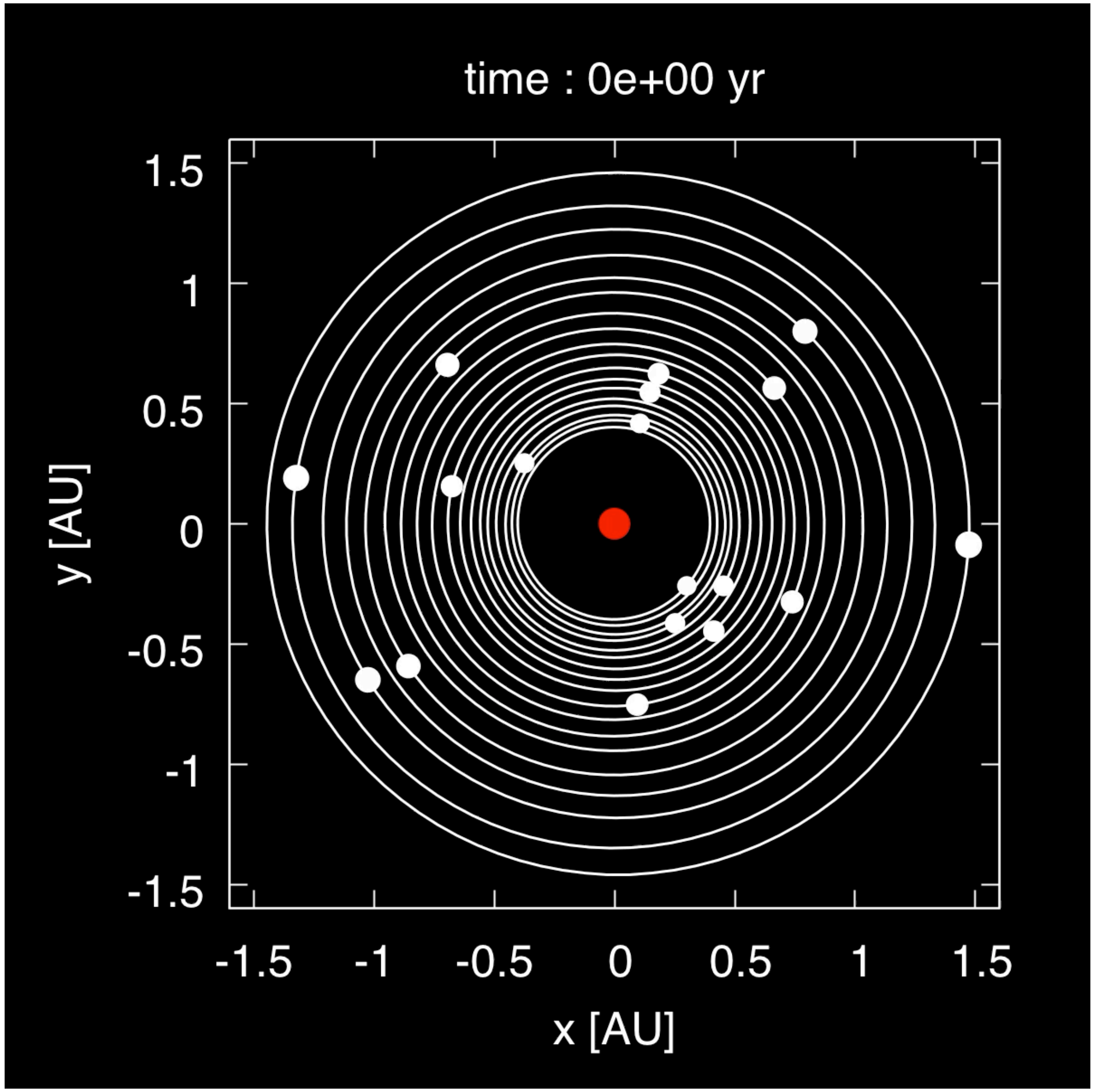
目次

地球型惑星形成（標準モデル）



巨大衝突ステージ：地球型惑星の軌道・質量を特徴付ける

N体計算による原始惑星の衝突成長

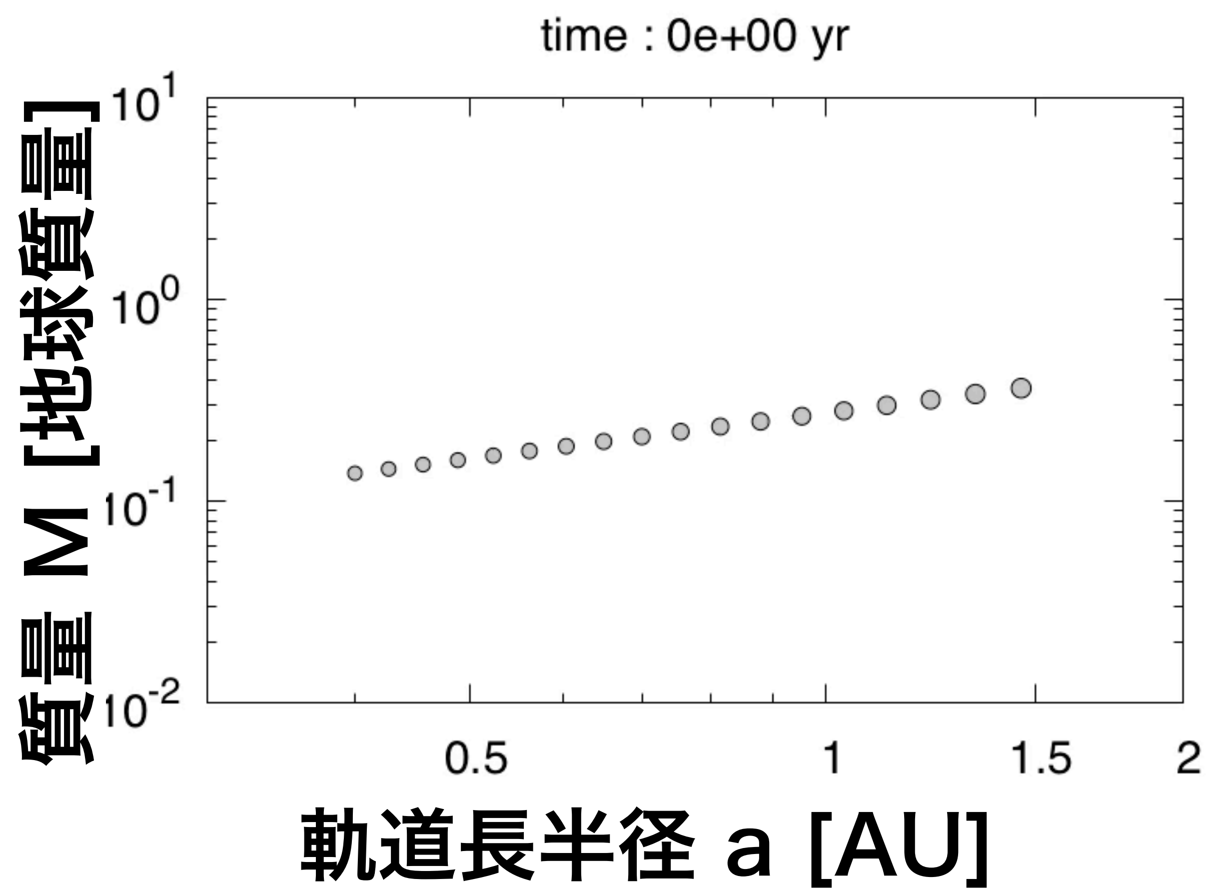


初期条件

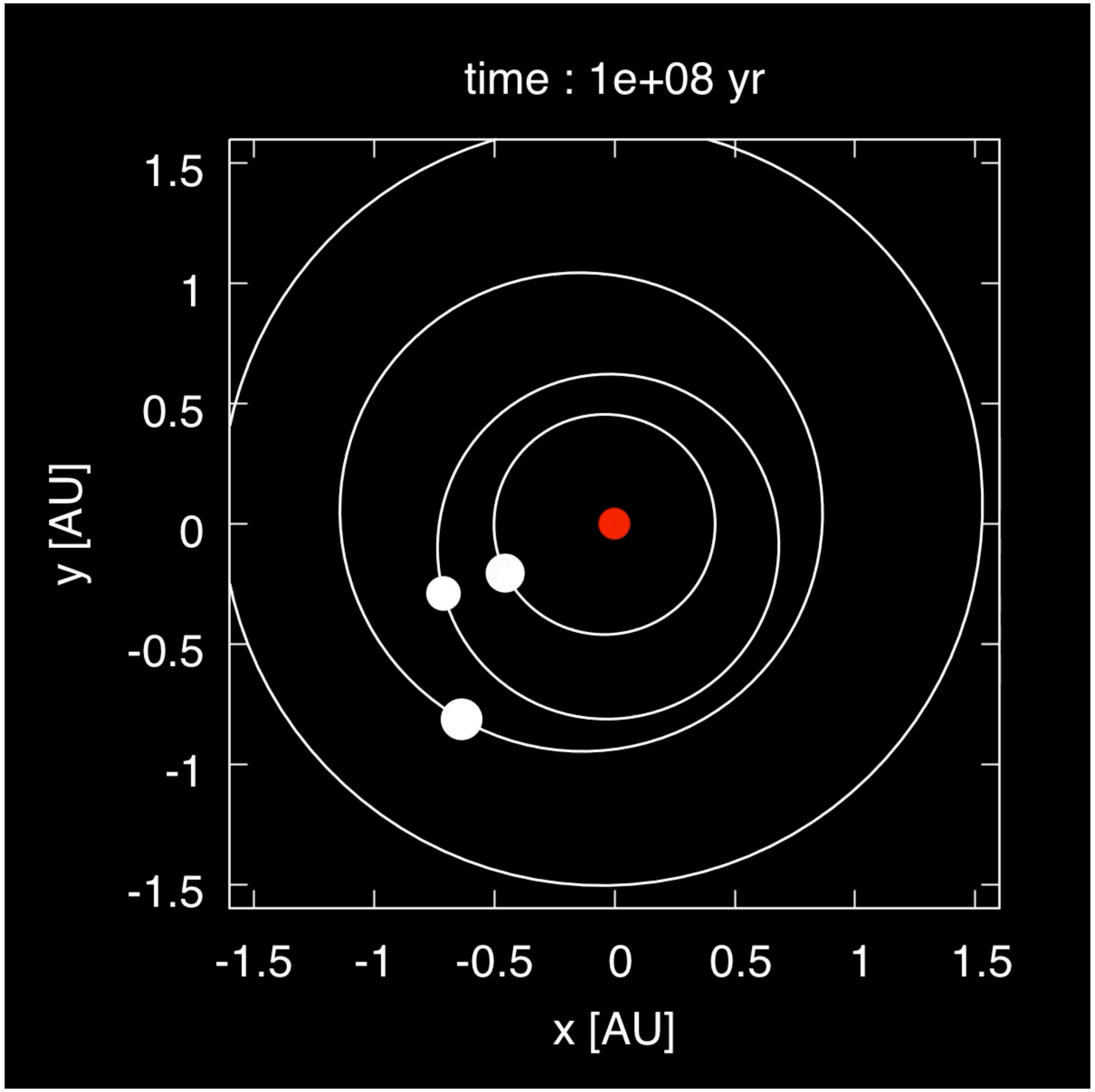
2MMSN

e=0.01　a=0.4-1.5AU

i=0.005　Δa=10$R_{H,M}$



N体計算による原始惑星の衝突成長

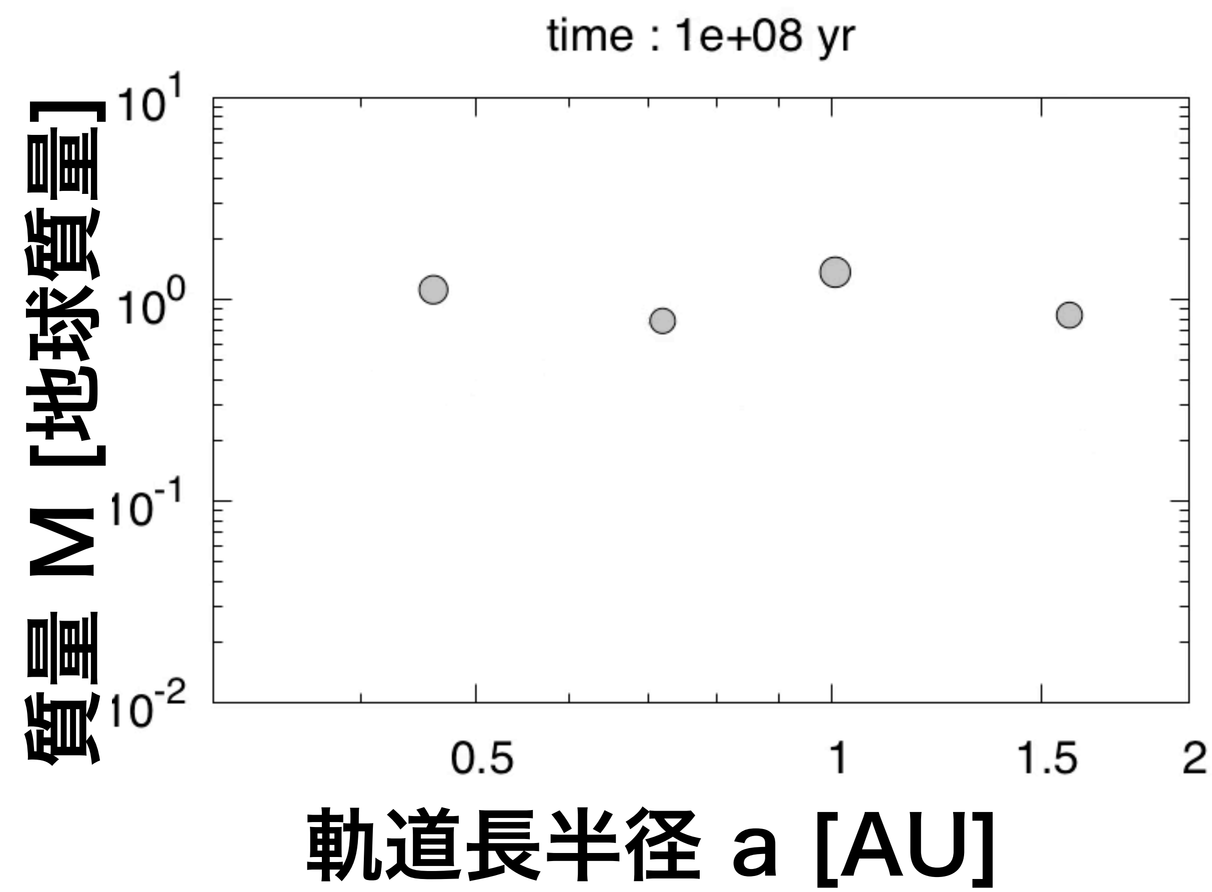


初期条件

2MMSN

e=0.01　a=0.4-1.5AU

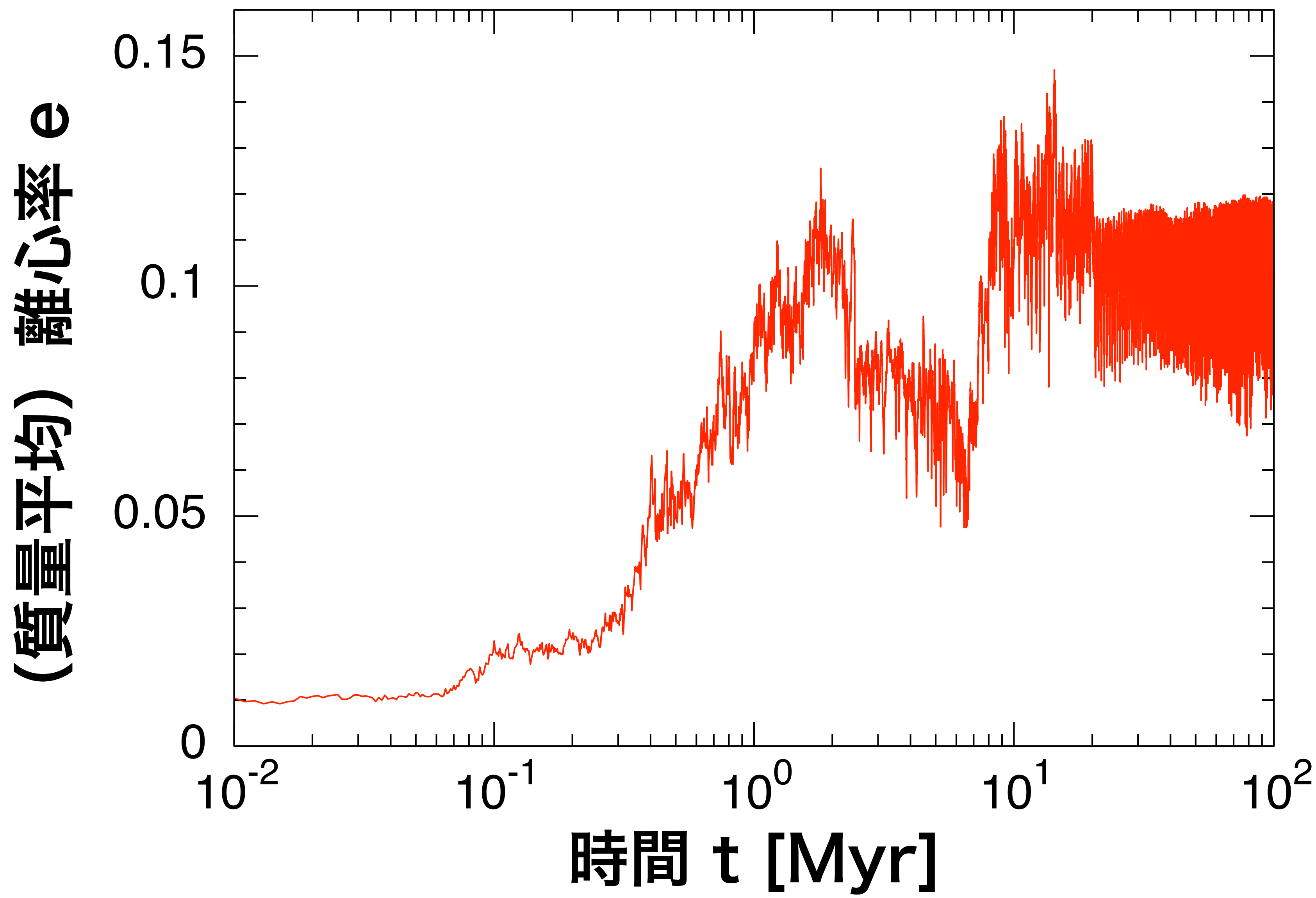
i=0.005　$\Delta a=10R_{H,M}$



1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

(e.g., Chambers & Wetherill 1998; Agnor et al. 1999; Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

問題点：離心率上昇



1億年後の離心率：~ 0.1 >> 現在の地球の離心率：0.0167

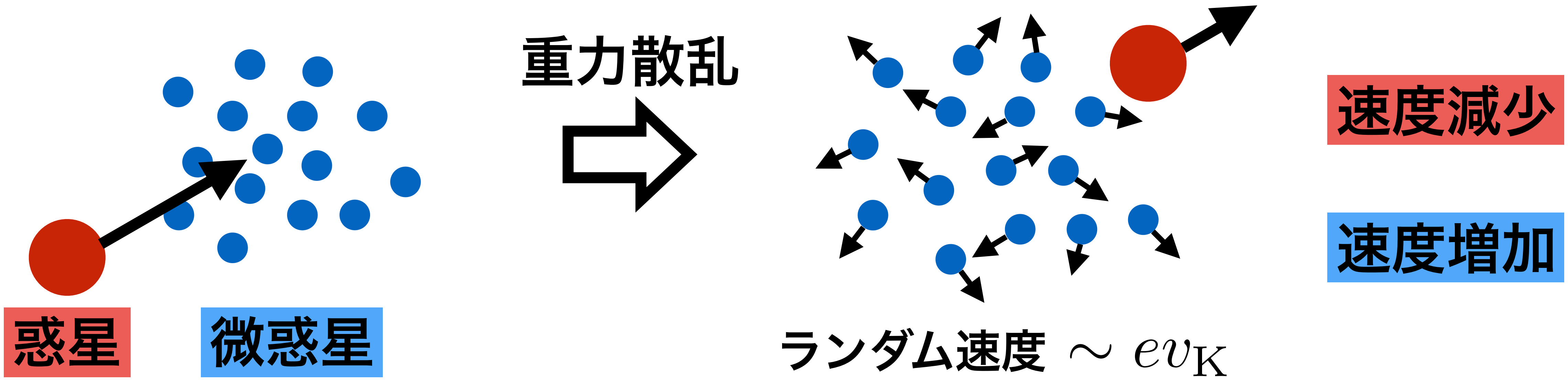
離心率が大きくなりすぎてしまう

⇨ 離心率を下げるメカニズムが必要

離心率を下げるメカニズム

- 残存微惑星との力学的摩擦

(e.g., O'Brien et al. 2006; Morishima et al. 2010)



平均離心率の変化率の解析解（e.g., Ohtsuki et al. 2002）

$$\left(\frac{d\boxed{\langle e_{\text{惑}}^2\rangle}}{dt}\right)_{\mathrm{df}} \propto -\underbrace{\Sigma_{\text{微}}}_{\text{面密度}}\underbrace{\left(M\boxed{\langle e_{\text{惑}}^2\rangle}-m\langle e_{\text{微}}^2\rangle\right)}_{\text{エネルギー等分配}}$$

残存微惑星との力学的摩擦により**地球型惑星の離心率は下がる！**

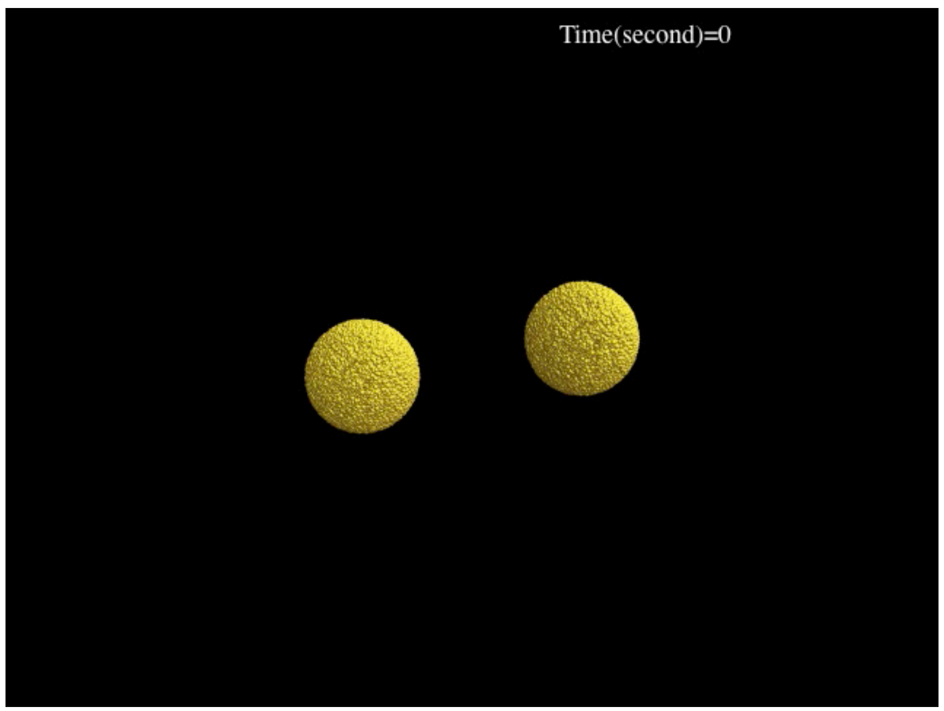
残存微惑星の面密度は変わらないのか？

微惑星同士の衝突・破壊

- 「衝突・破壊」… 衝突した際に様々なサイズの破片を放出

・ Catastrophic

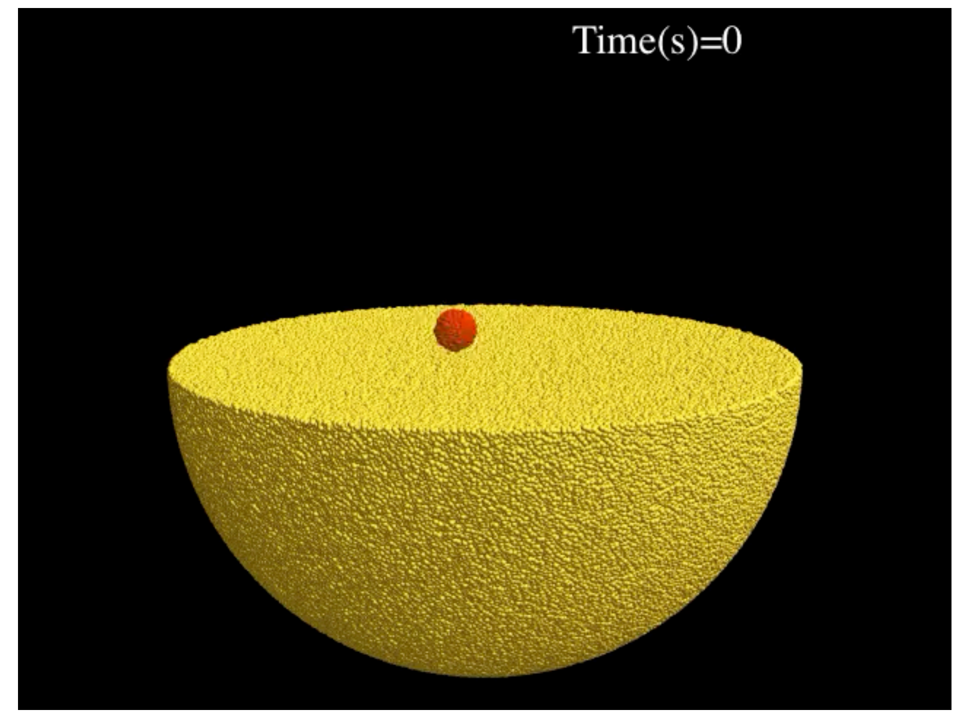
R = 50km, v = 0.3km/s



提供：杉浦（名大）

・ Cratering

R = 5km, v = 10km/s



提供：伊藤（名大）

離心率~0.1をもつ10kmサイズの微惑星の場合

$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} \sim \boxed{10^3} \left(\frac{e}{0.1}\right)^2 \left(\frac{a}{1\mathrm{AU}}\right)^{-1} \left(\frac{m}{10^{19}\mathrm{g}}\right)^{-0.453}$$

破壊は当然起こる！　　(Benz & Asphaug 1999)

衝突・破壊の効果：面密度減少

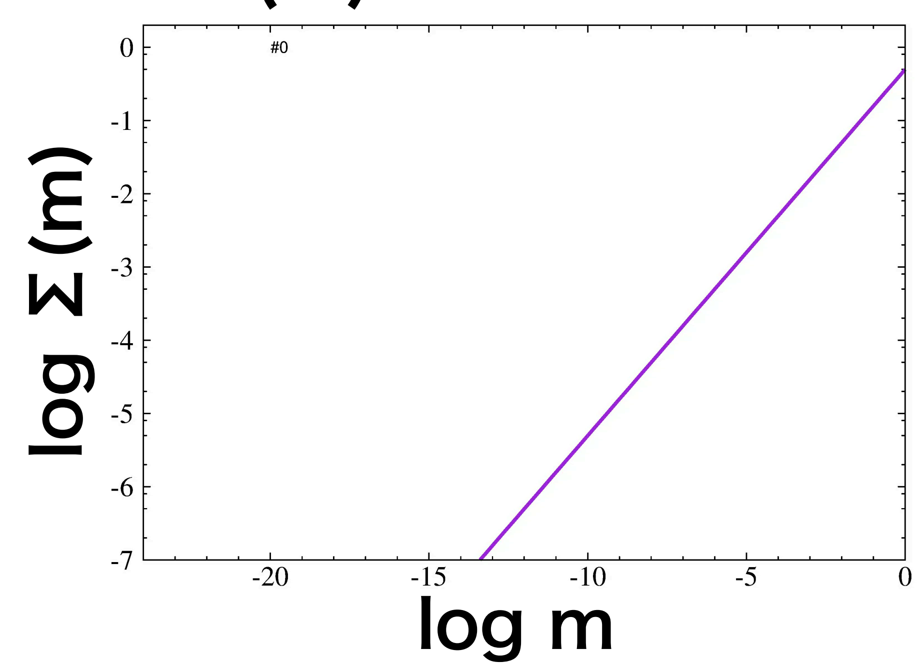
- 衝突・破壊にともなう微惑星円盤の進化
  - 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる = 衝突カスケード (e.g., Tanaka et al. 1996)
  - 1μm以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる

⇨ 微惑星円盤の面密度は減少する

- 面密度減少の解析解 (Kobayashi & Tanaka 2010)
  - 破片の面密度はべき一定のまま減少
  - 面密度減少のタイムスケール
    ∝ 1/面密度

定常衝突カスケード

$\Sigma(m)dm \propto m^{1/6}dm$



研究目的

先行研究（残存微惑星説）の問題点：微惑星の破壊を考慮していない

破壊を考慮すると…

微惑星円盤の面密度が減少（KT10)

⇨ 残存微惑星による力学的摩擦の効率低下

⇨ 地球型惑星の離心率を下げられるか？

破壊が力学的摩擦に与える影響を調べるため

微惑星同士の衝突・破壊を考慮した

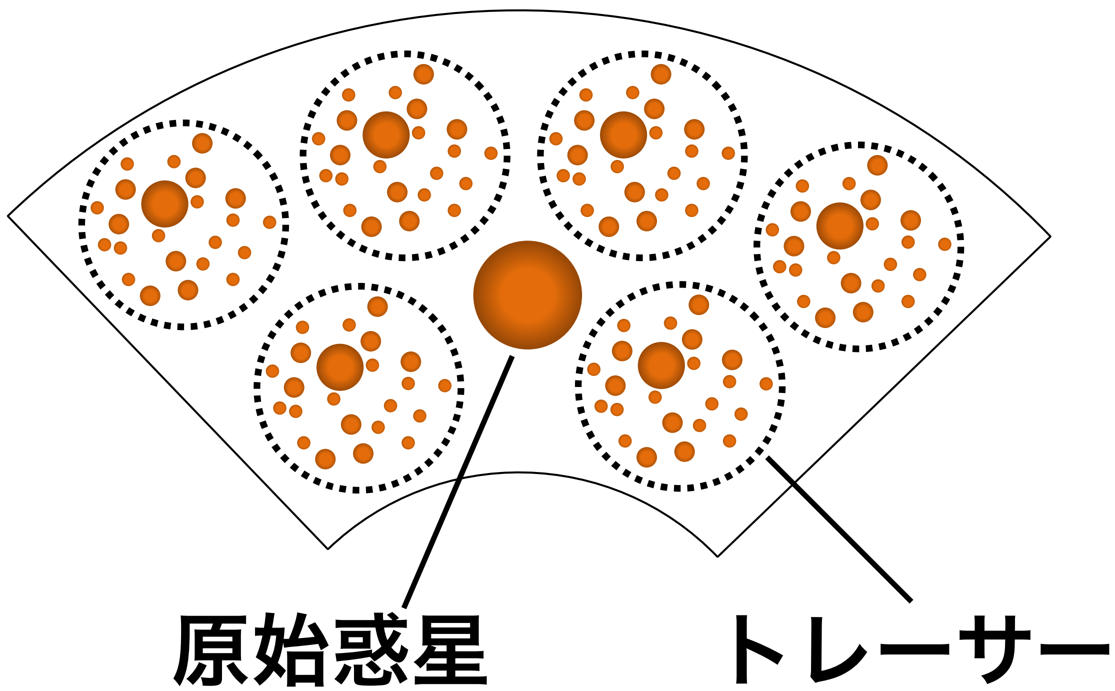
N体シミュレーションコードを開発する

手法

ハイブリッドコード

- 純粋なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(∵破壊に伴う破片~10^{35}個)



複数の微惑星を1つの粒子とみなす

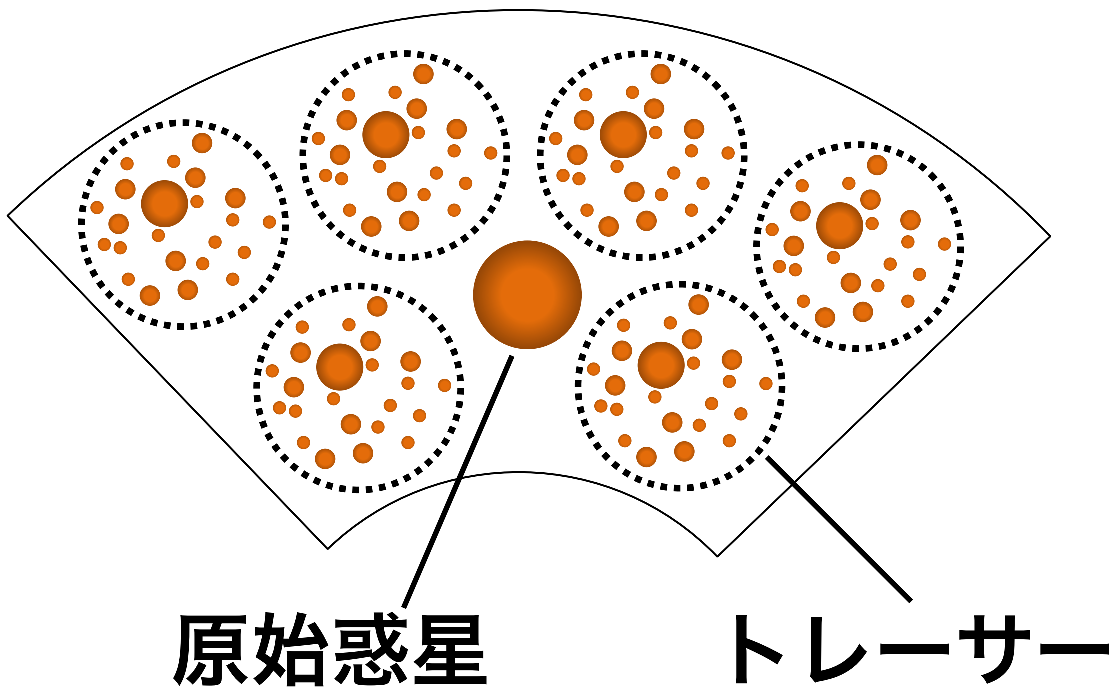
(スーパー粒子近似)

⇨ N体計算のコストを削減

ハイブリッドコード

- 純粋なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(∵破壊に伴う破片~10^{35}個)

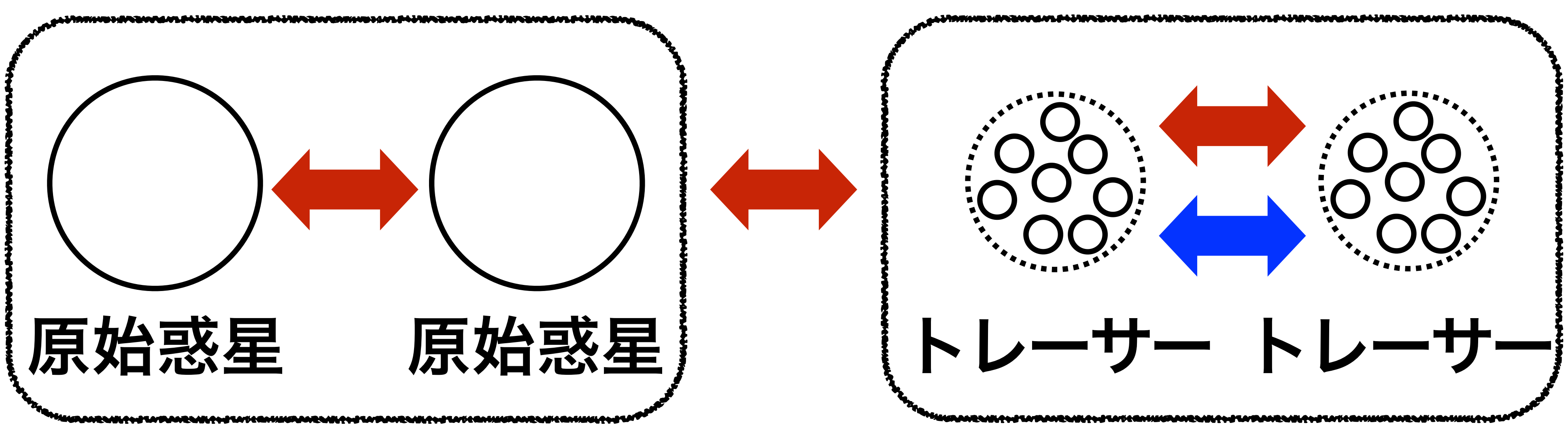


複数の微惑星を1つの粒子とみなす
(スーパー粒子近似)
⇨ N体計算のコストを削減

N体計算（4次のエルミート法） ＋ 統計的計算

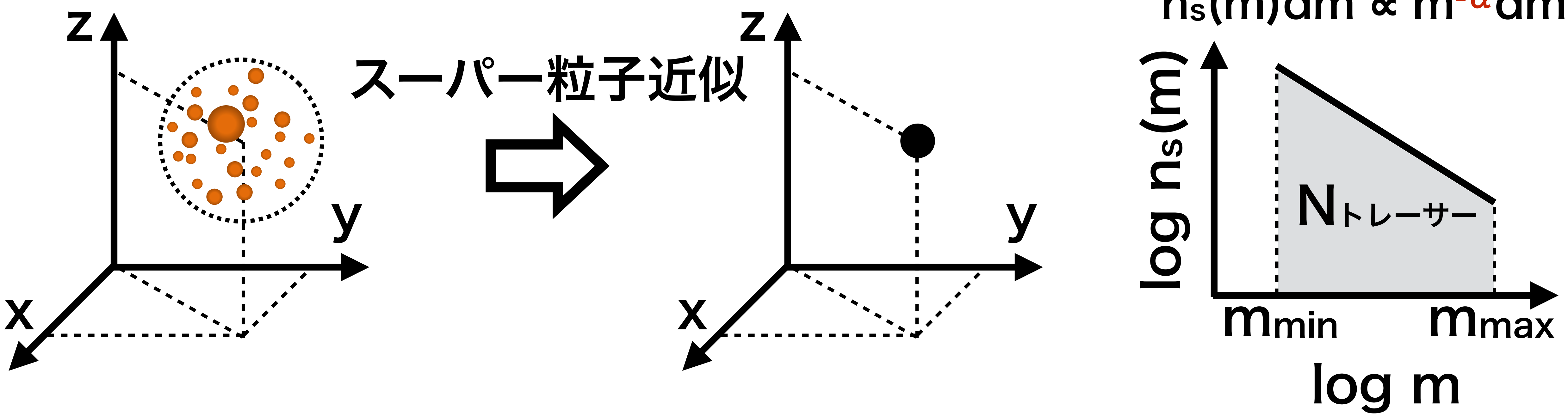
重力相互作用を取り扱う

衝突・破壊を取り扱う

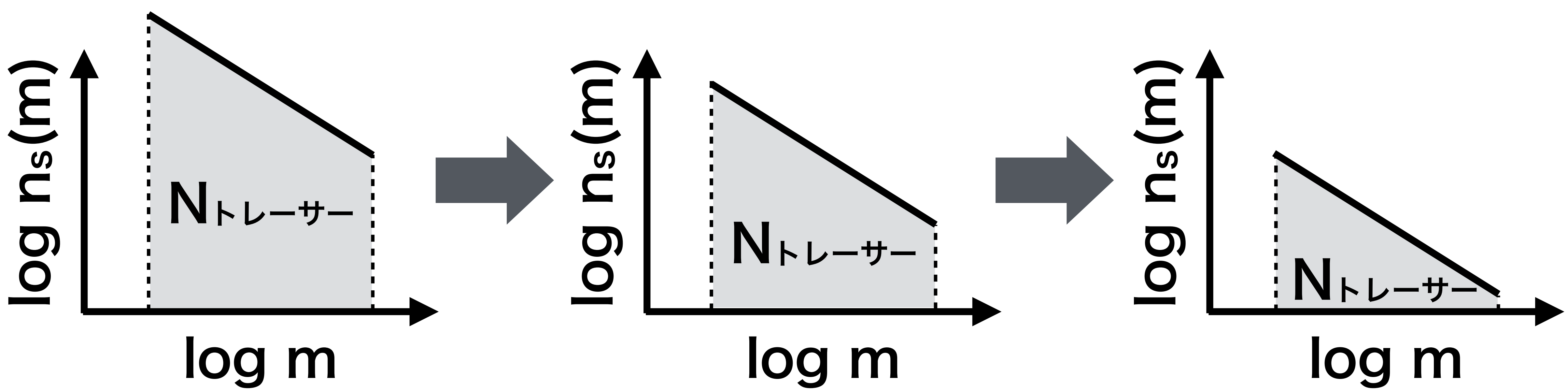


衝突・破壊を扱う粒子：トレーサー

- トレーサー … 計算上は質点、質量はべき分布（定常衝突カスケード）



- トレーサー内の微惑星の個数分布進化



べき一定のまま $N_{トレーサー}$ が減少 ＝ トレーサーの質量が減少

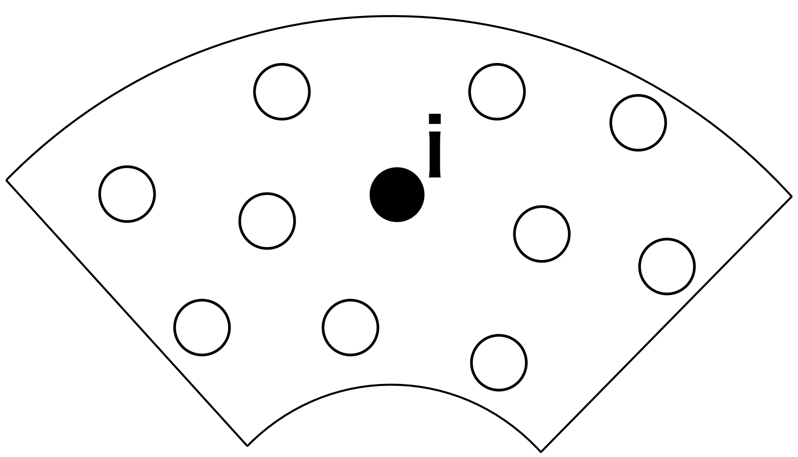
破壊の取り扱い方：統計的手法

- トレーサー内の微惑星の個数 $N_{\text{トレーサー}}$ の進化　　(KT10)

軌道分布に依存

$$\frac{dN_{\mathrm{tracer},i}}{dt} = -CN_{\mathrm{tracer},i}\left(\frac{\Sigma_i}{m_{\max}}\Omega_{\mathrm{K}}\pi R_{\max}{}^2\right)\left(\frac{v_i(m_{\max})^2}{2Q^*_{\mathrm{D}}(m_{\max})}\right)^{\alpha-1}$$

定数　　$m_{\max}$ 同士の衝突頻度　　低質量・高速度衝突



⇨ 面密度 Σ_i、衝突速度 v_i が重要

ハイブリッドコードでは軌道がわかるため、

近傍トレーサーの分布・相対速度から計算可能

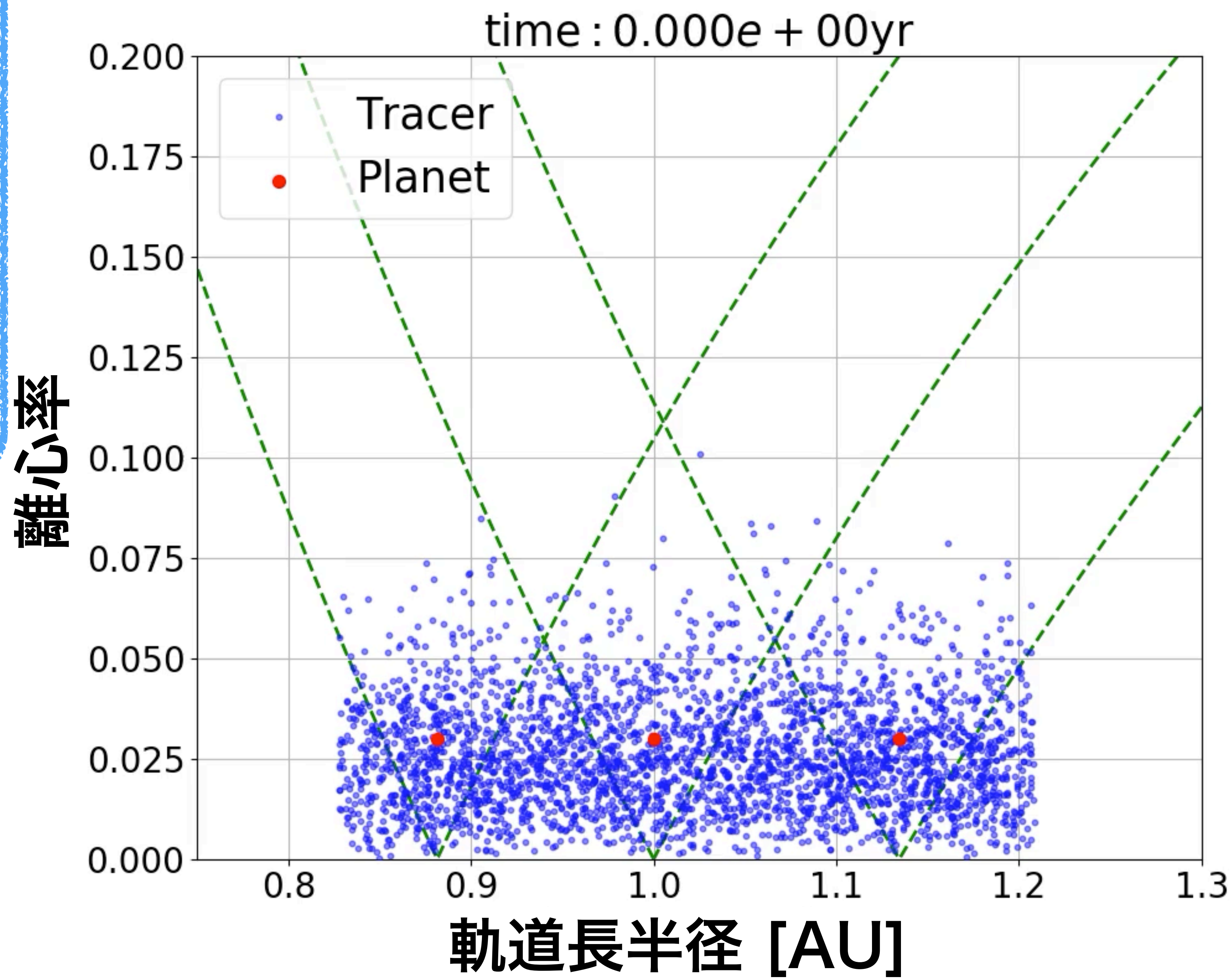
惑星-微惑星の力学的摩擦

$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$

赤点：惑星　青点：微惑星

緑破線：等ヤコビエネルギー線

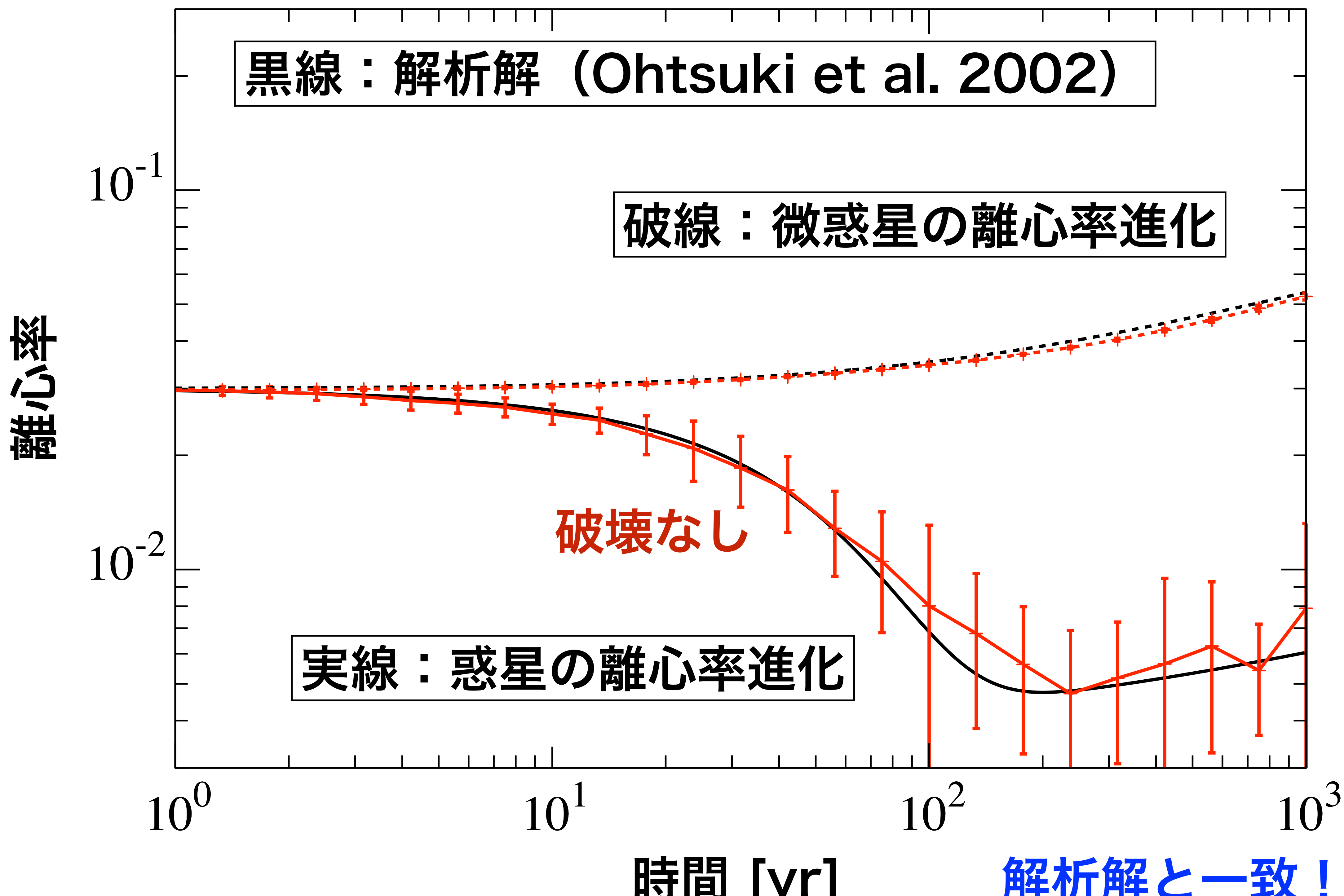
初期条件
- 質量1M_Eの惑星3体
- 総質量30M_Eの微惑星3000体
- 円盤の幅~30相互ヒル半径
- 破壊なし、集積あり



計算結果
- 惑星の離心率は減少
- 微惑星の離心率は上昇

破壊がない場合の離心率進化

破壊なし、集積あり　$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$

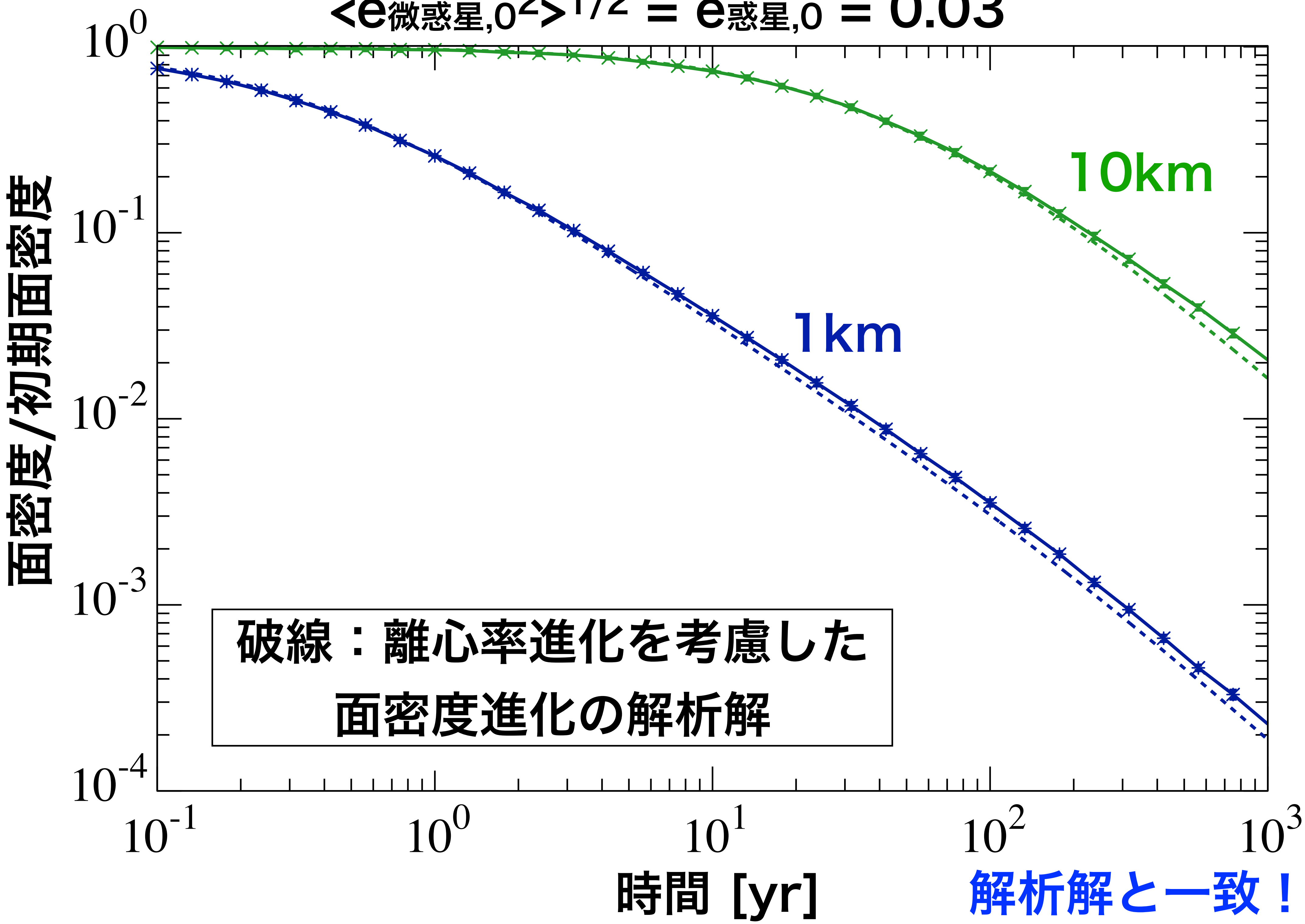


解析解と一致！

破壊による微惑星円盤の面密度進化

最大微惑星の質量m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$

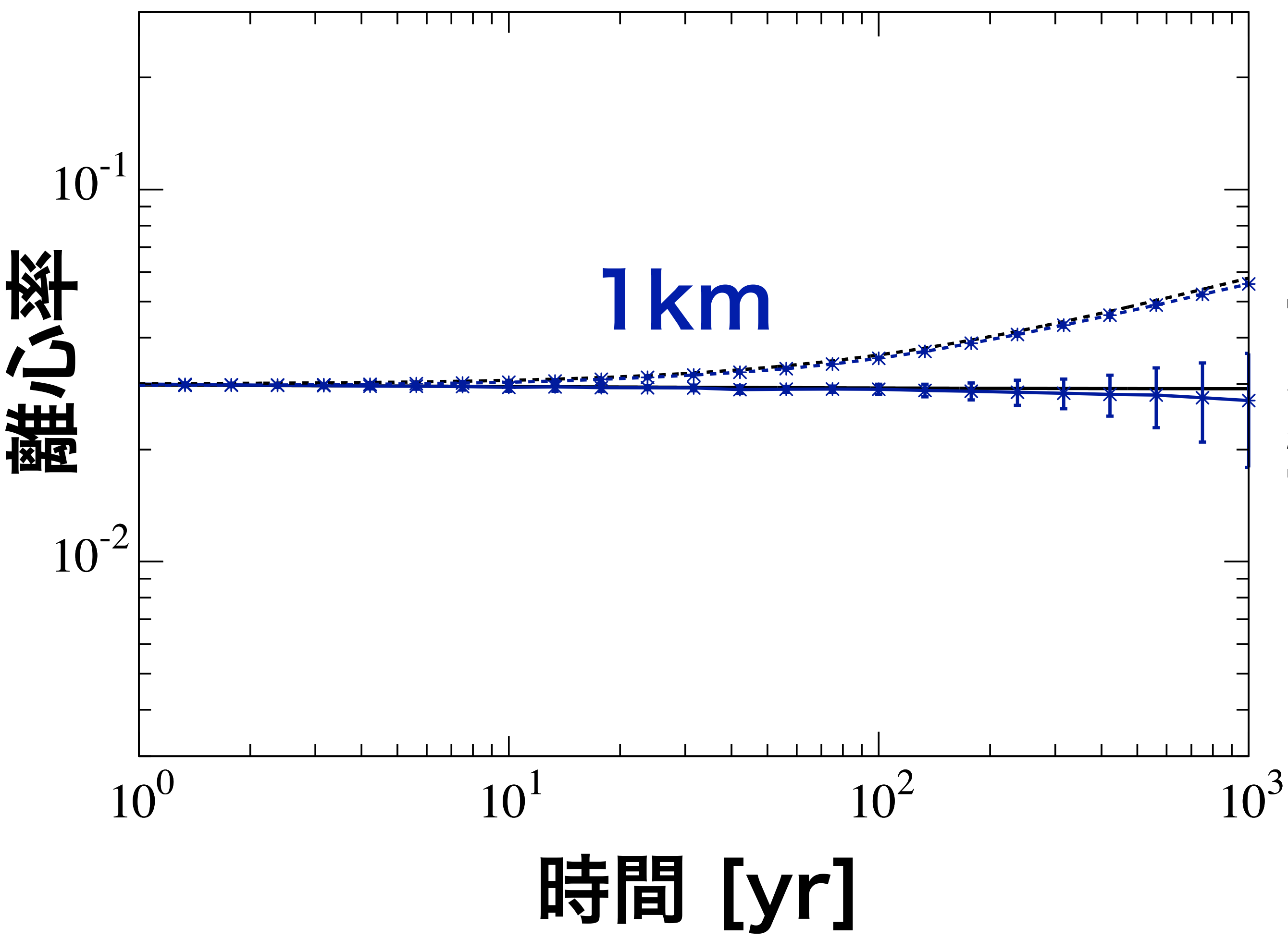


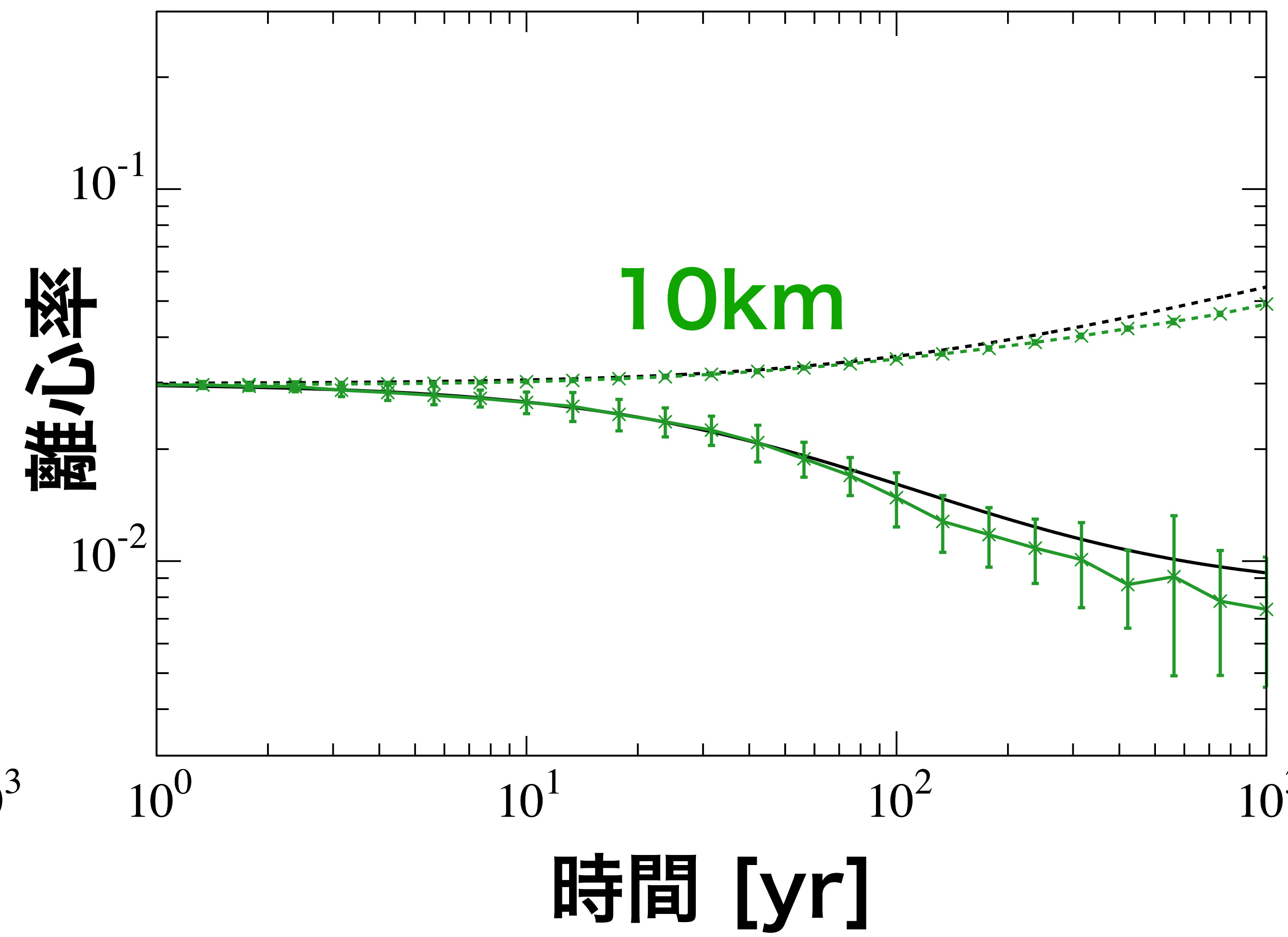
解析解と一致！

破壊を考慮した時の離心率進化

最大微惑星の質量m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$





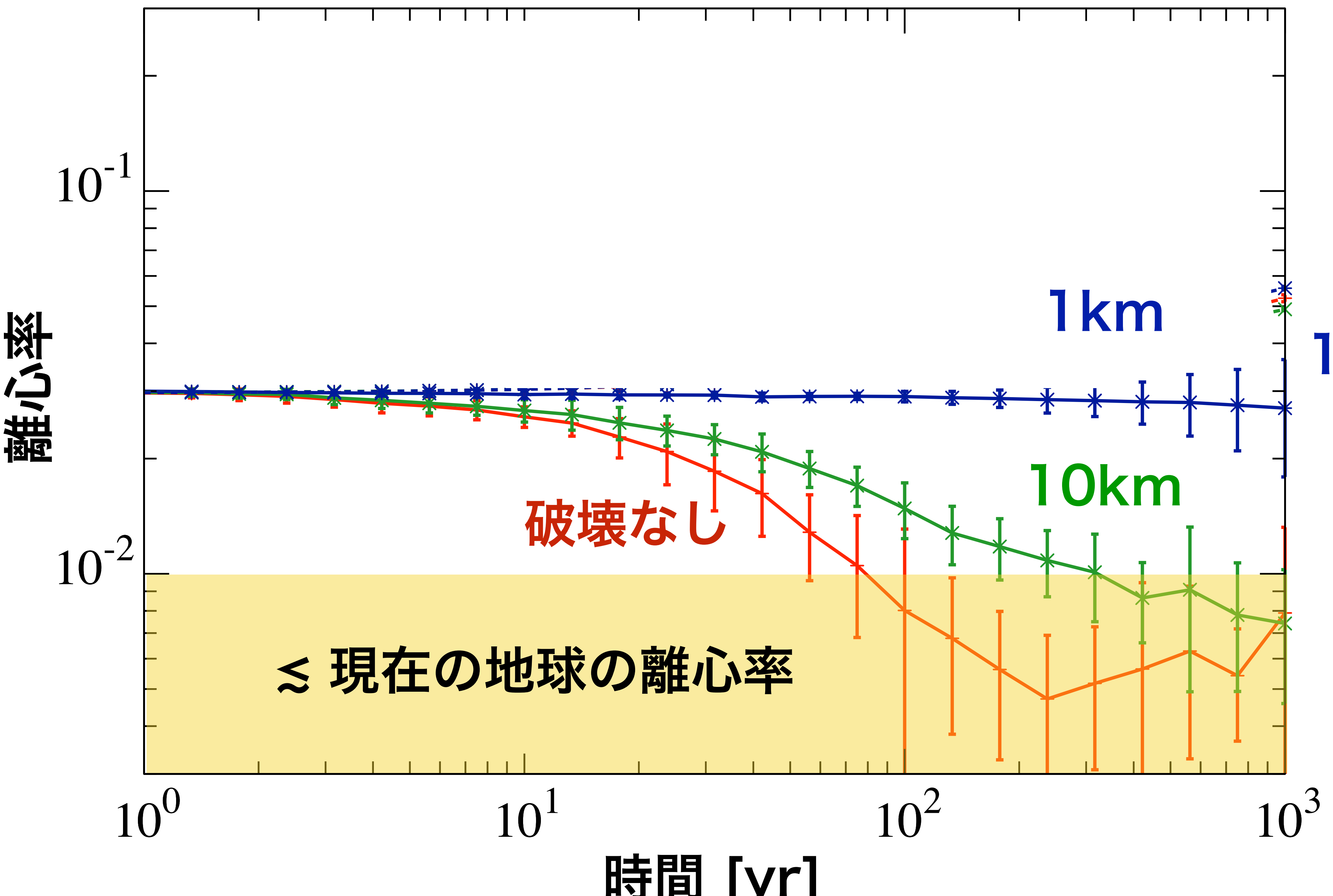
黒線：面密度進化を考慮した離心率進化の解析解

解析解と一致！

破壊が力学的摩擦に与える影響

最大微惑星の質量m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$



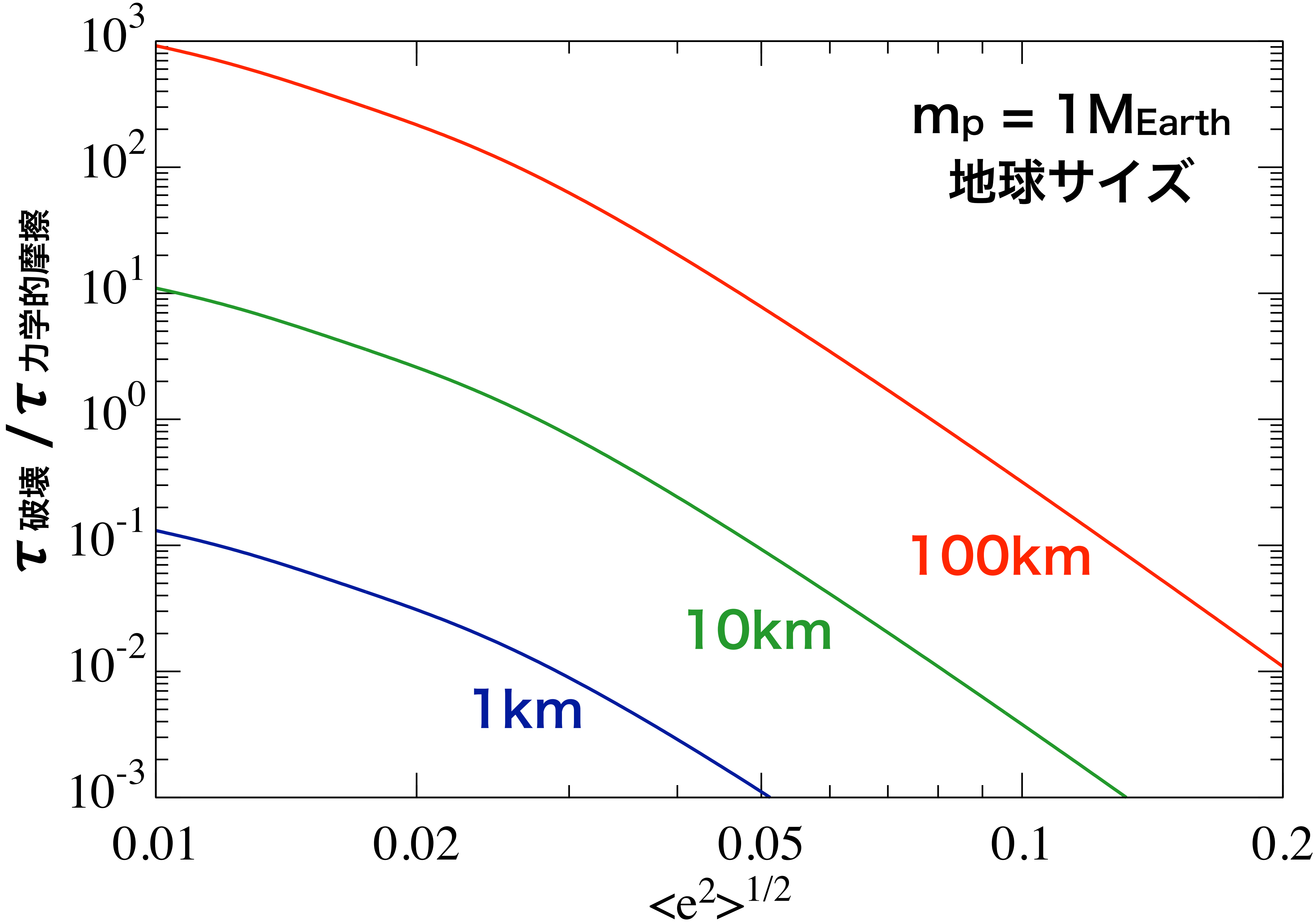
1kmでは離心率を下げられない

10km以上ならば可能か？

議論

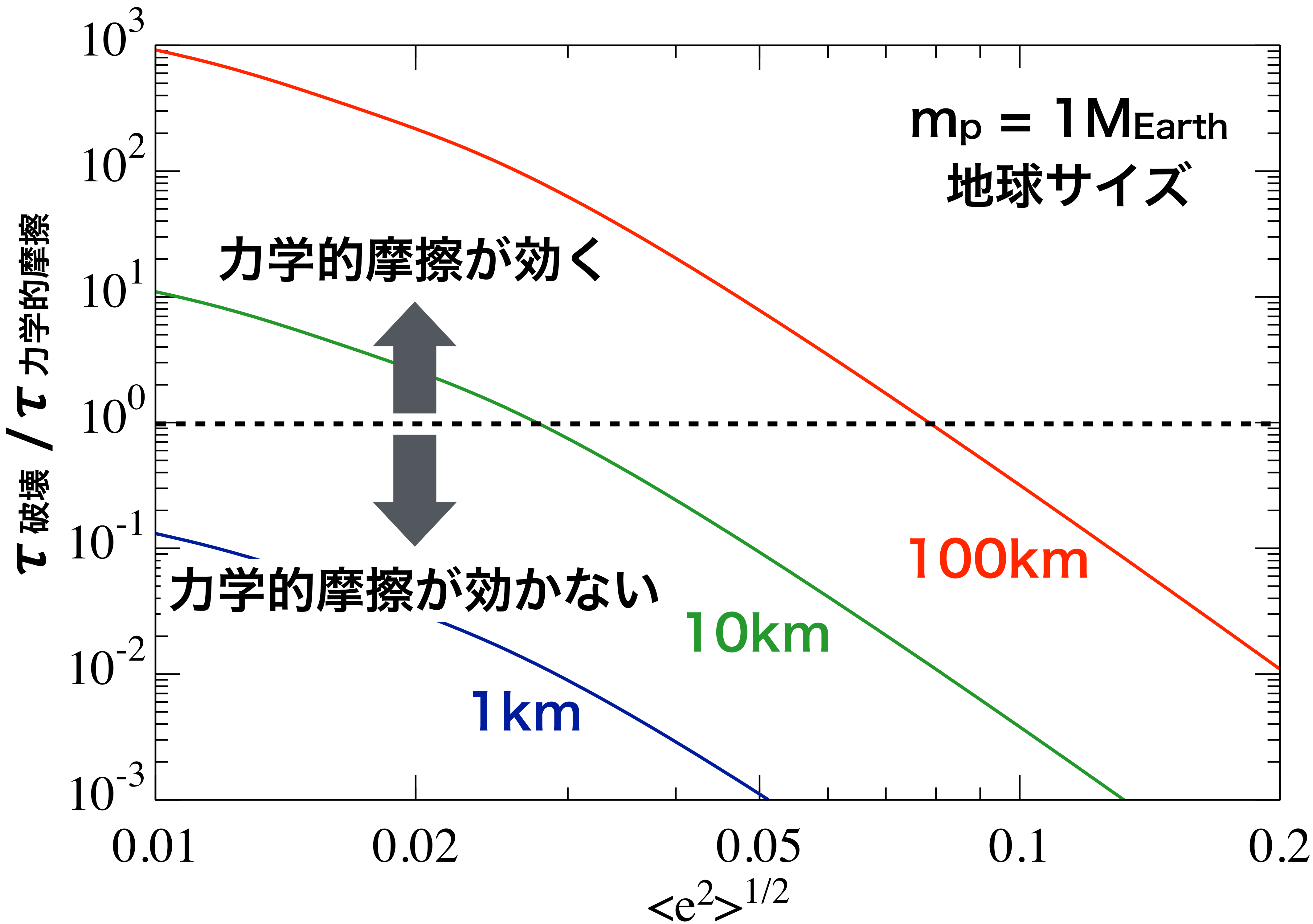
タイムスケールの比較

- $\tau_{破壊} / \tau_{力学的摩擦}$：残存微惑星円盤の面密度に依存しない

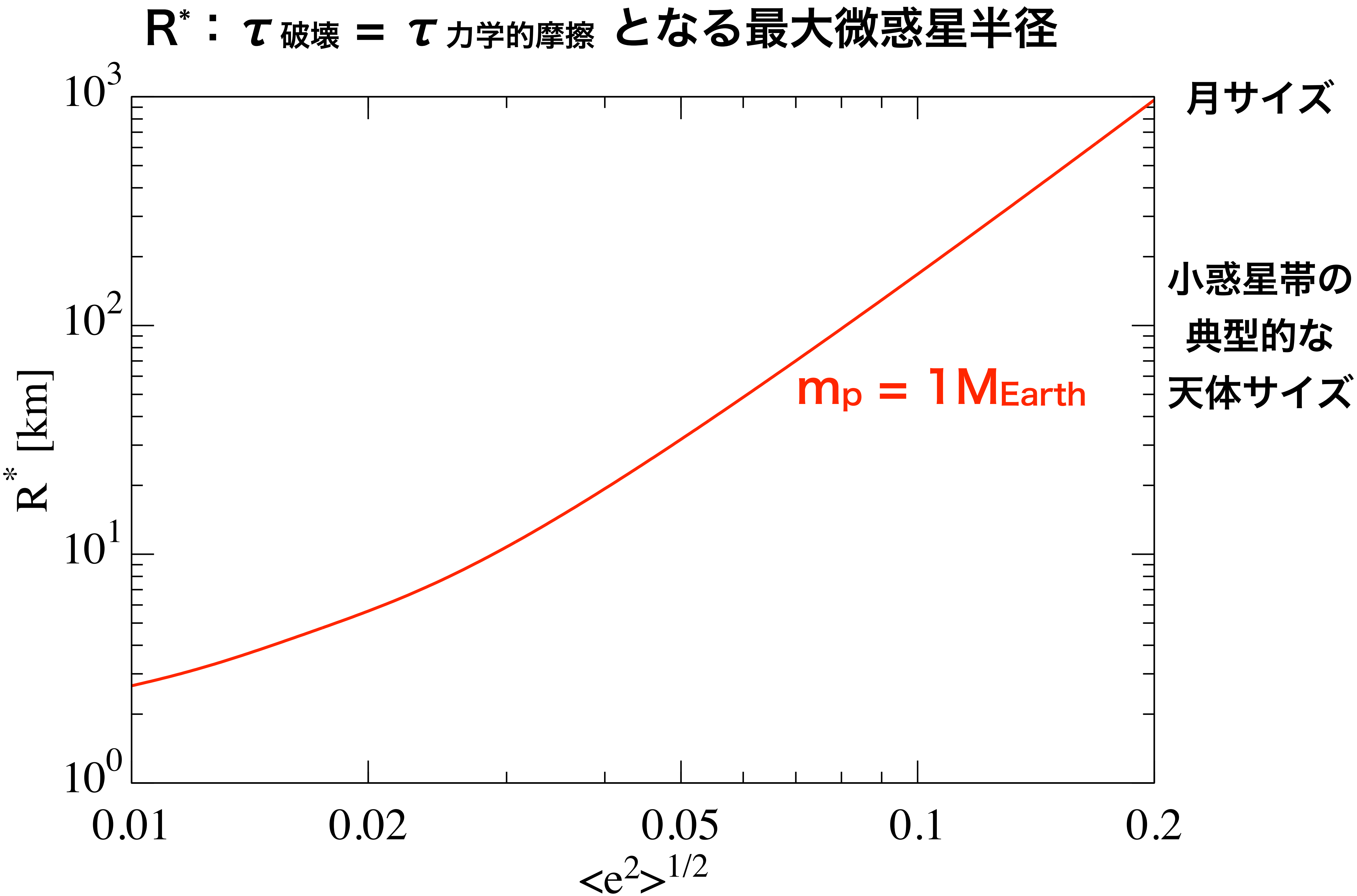


タイムスケールの比較

- $\tau_{破壊}/\tau_{力学的摩擦}$：残存微惑星円盤の面密度に依存しない

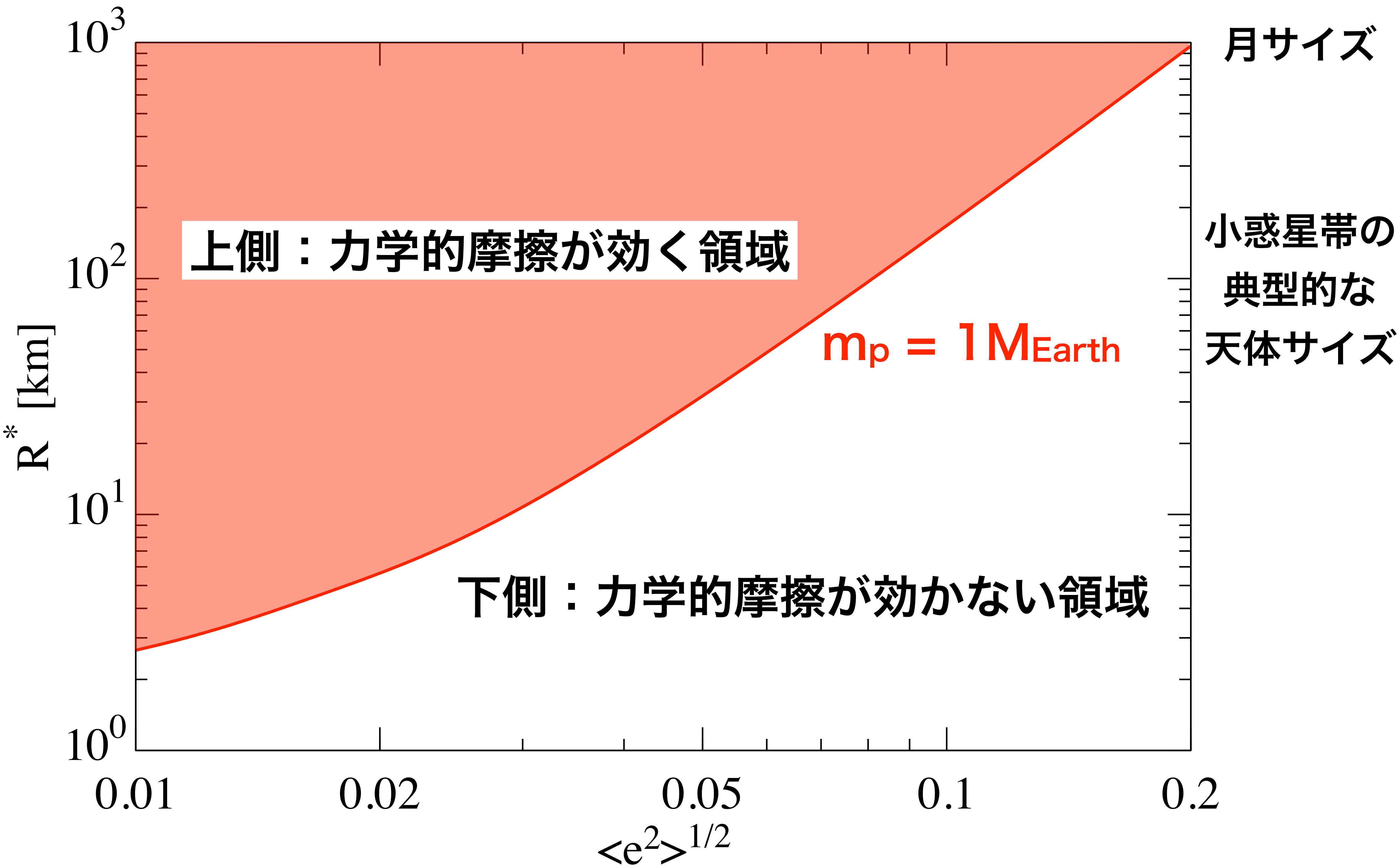


力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ



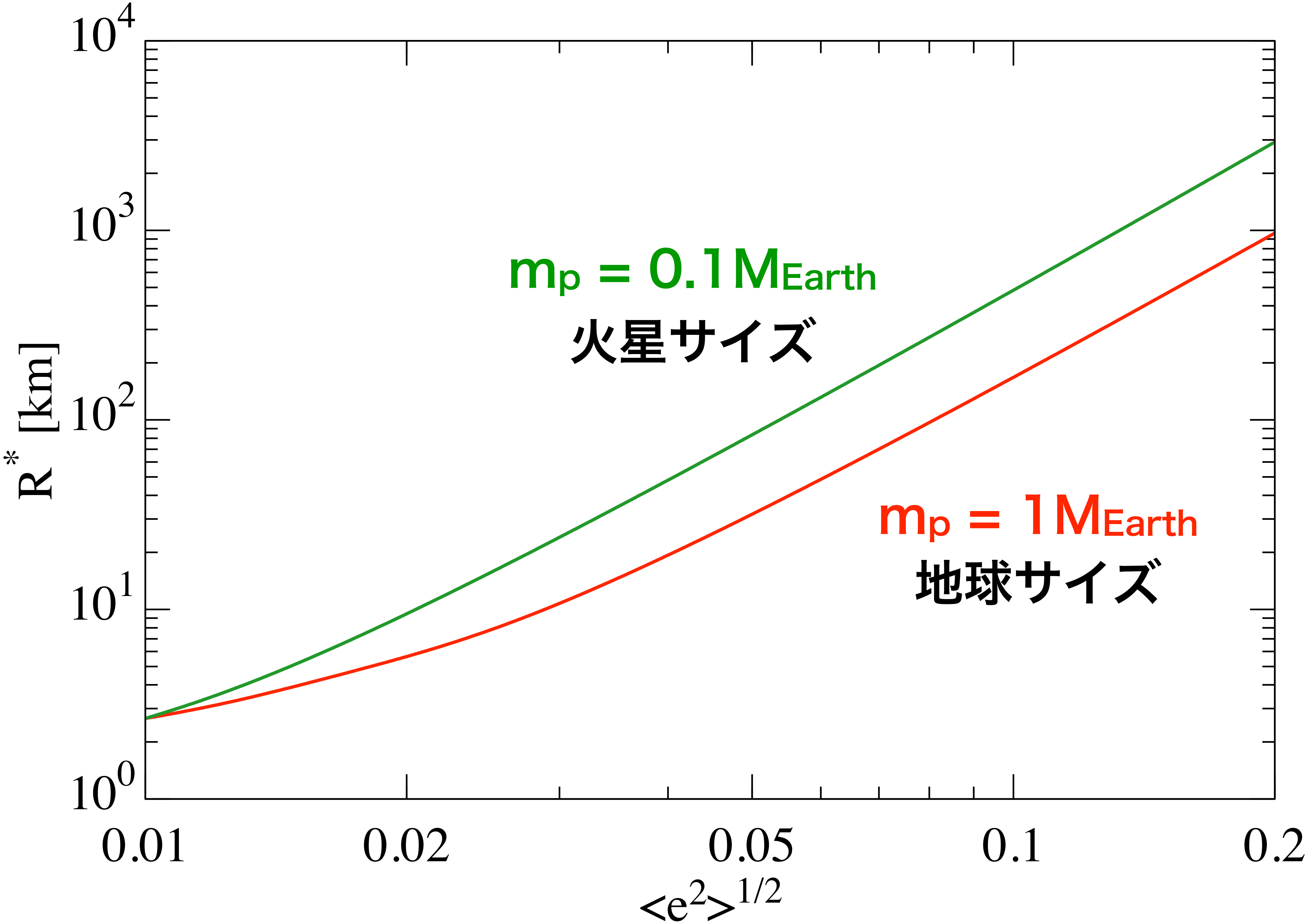
力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ

R^* : $\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径



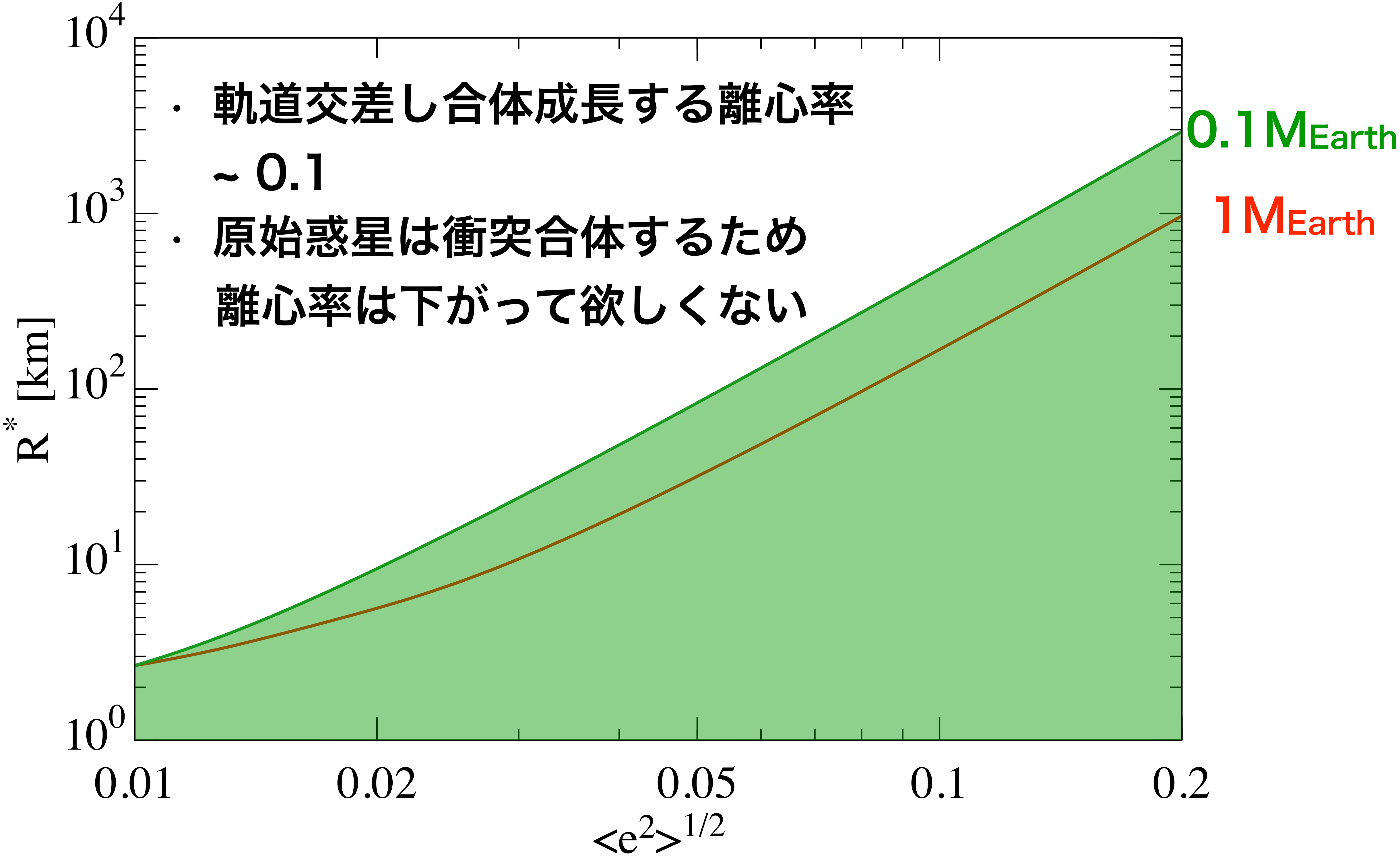
原始惑星（火星サイズ）の場合

R^{*} : $\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径



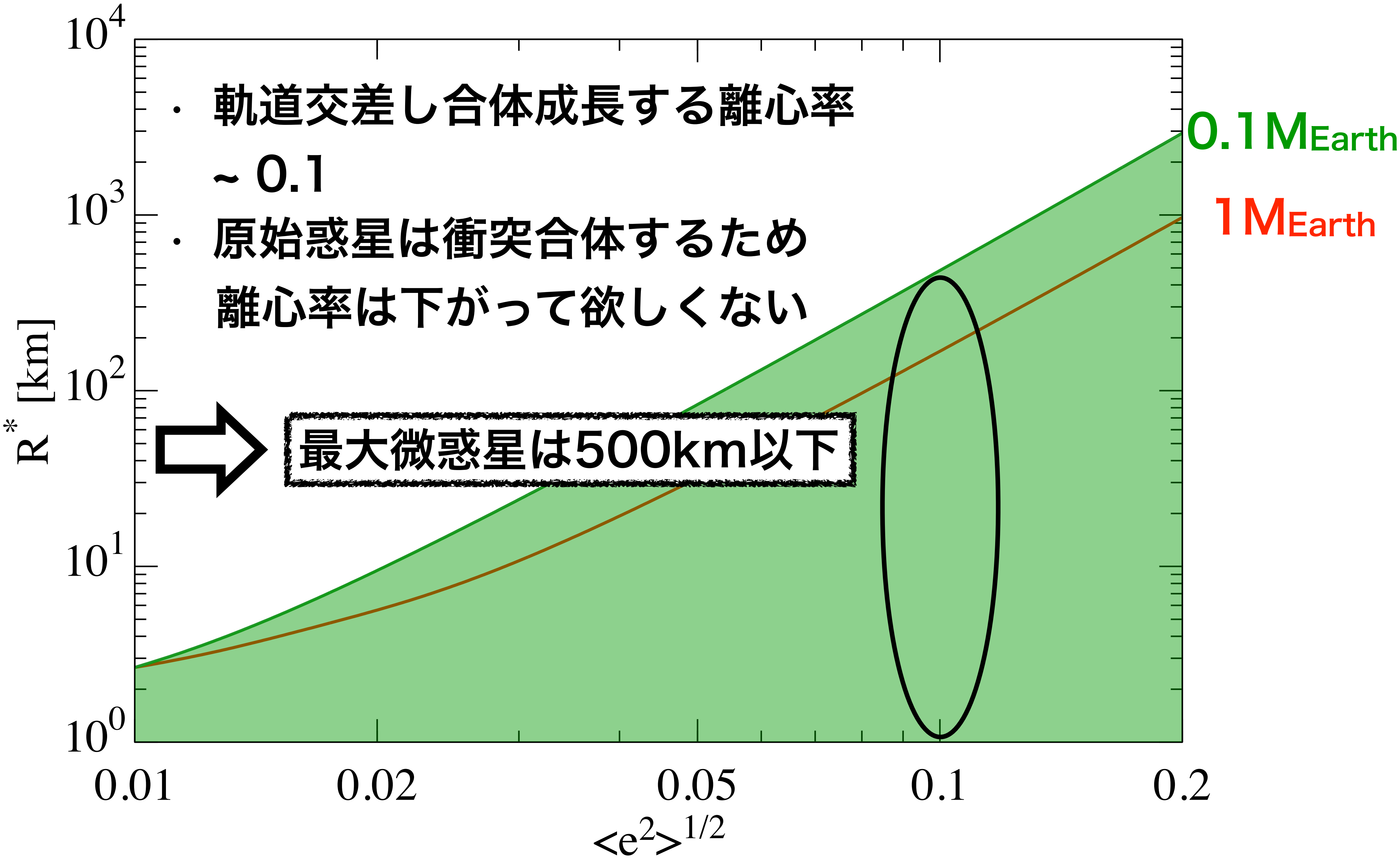
巨大衝突ステージ前期

R* : $\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径



巨大衝突ステージ前期

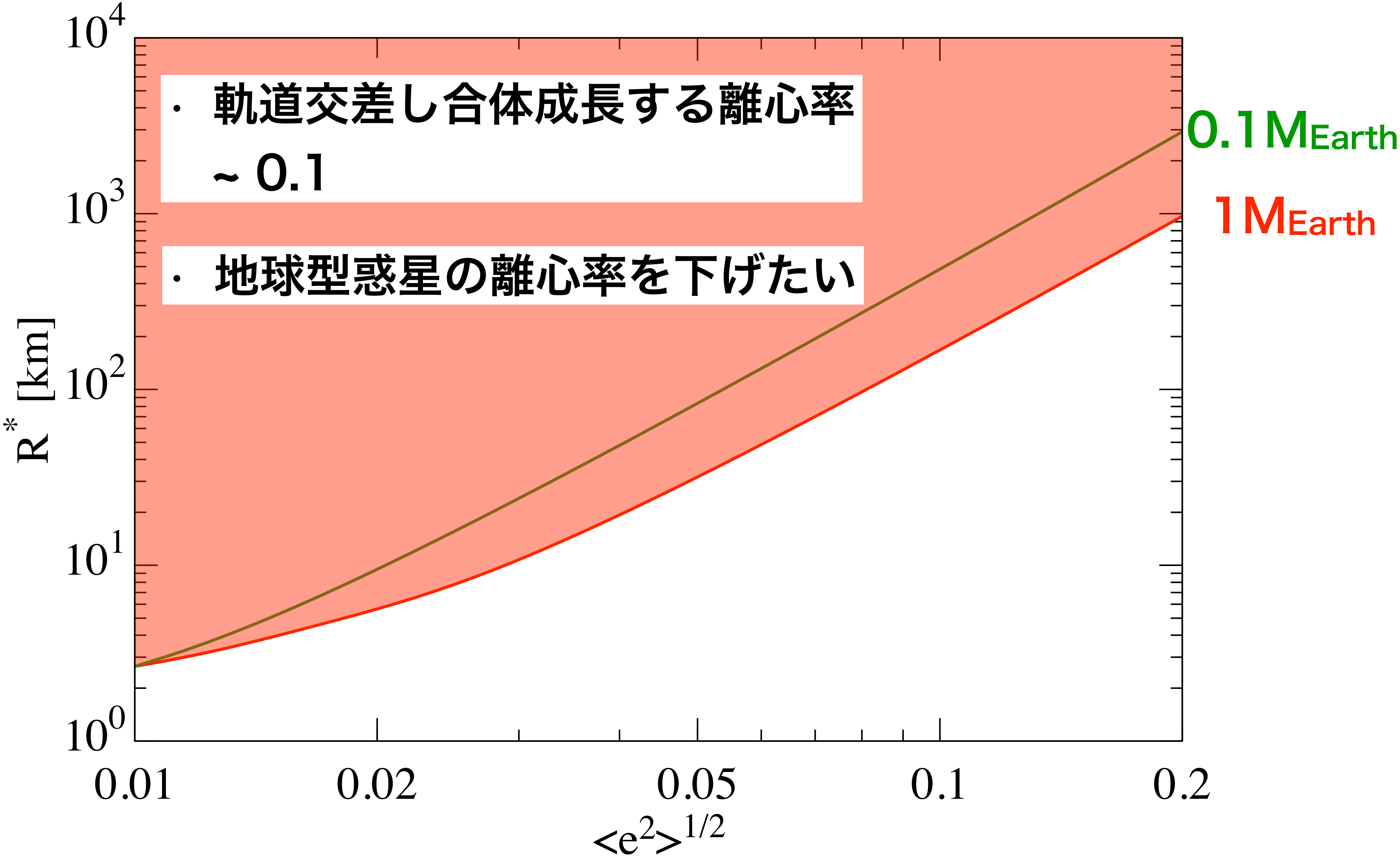
R*：$\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径



巨大衝突ステージ後期

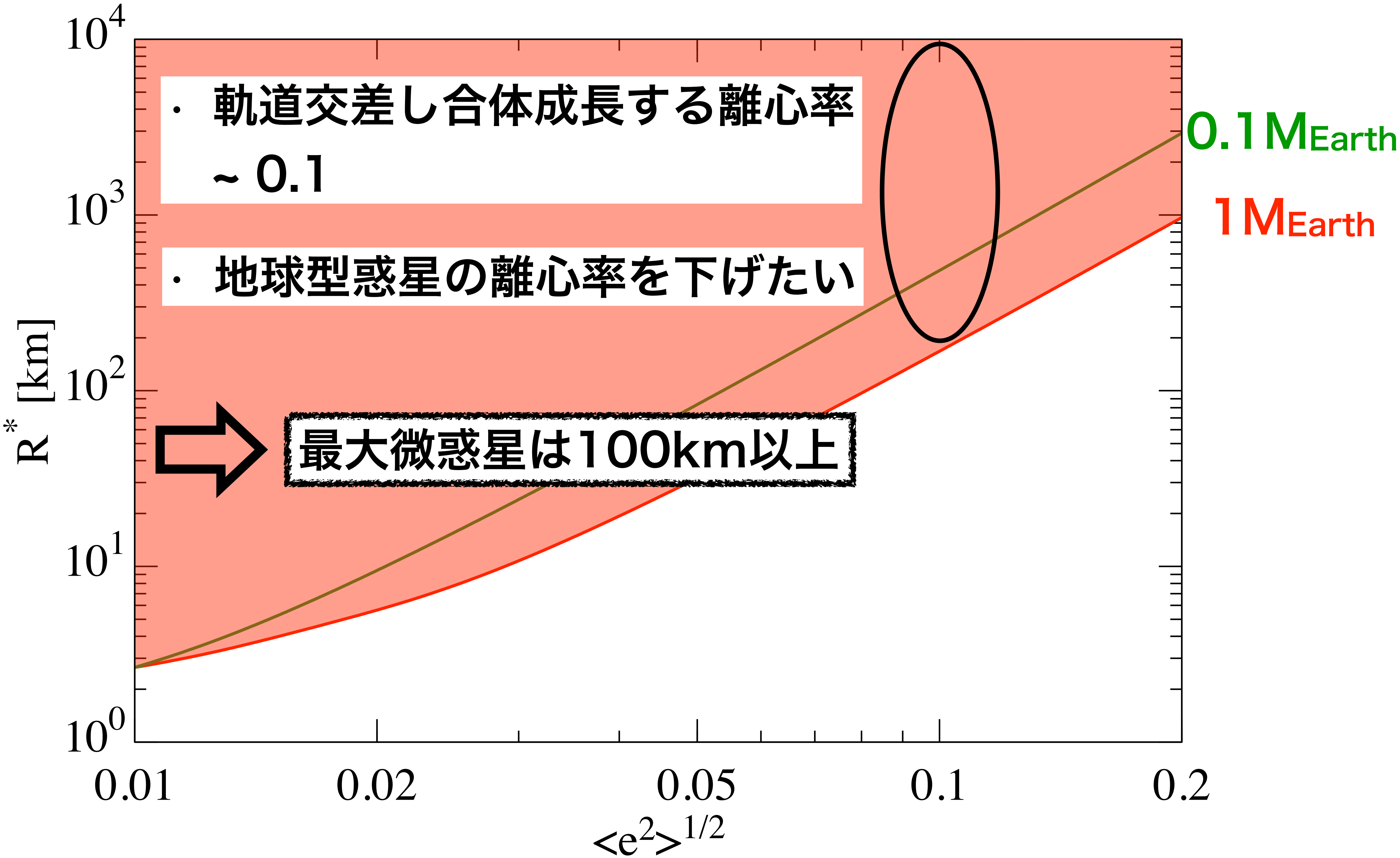
R^* : $\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径

- 軌道交差し合体成長する離心率 ~ 0.1
- 地球型惑星の離心率を下げたい



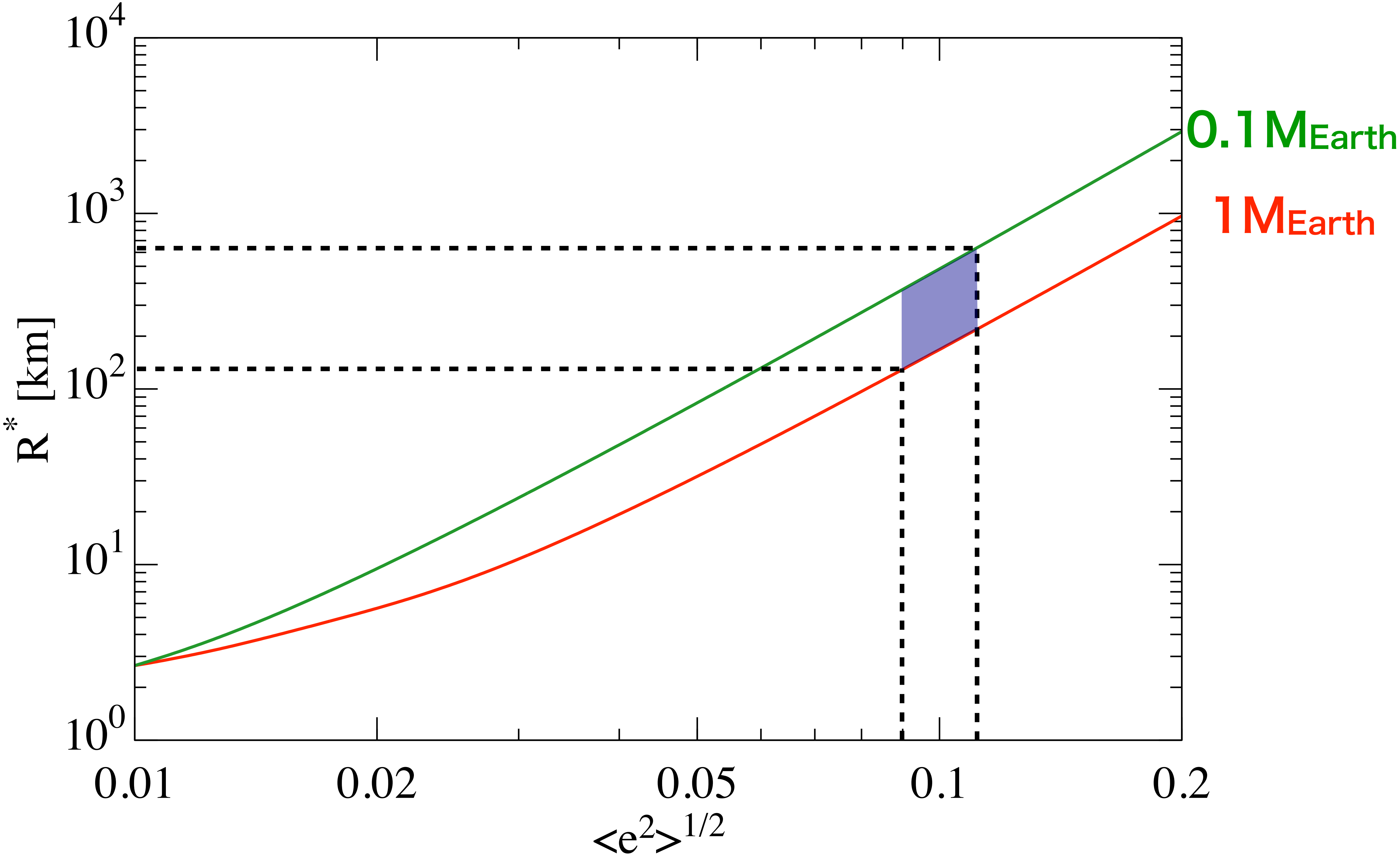
巨大衝突ステージ後期

R^* : $\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径

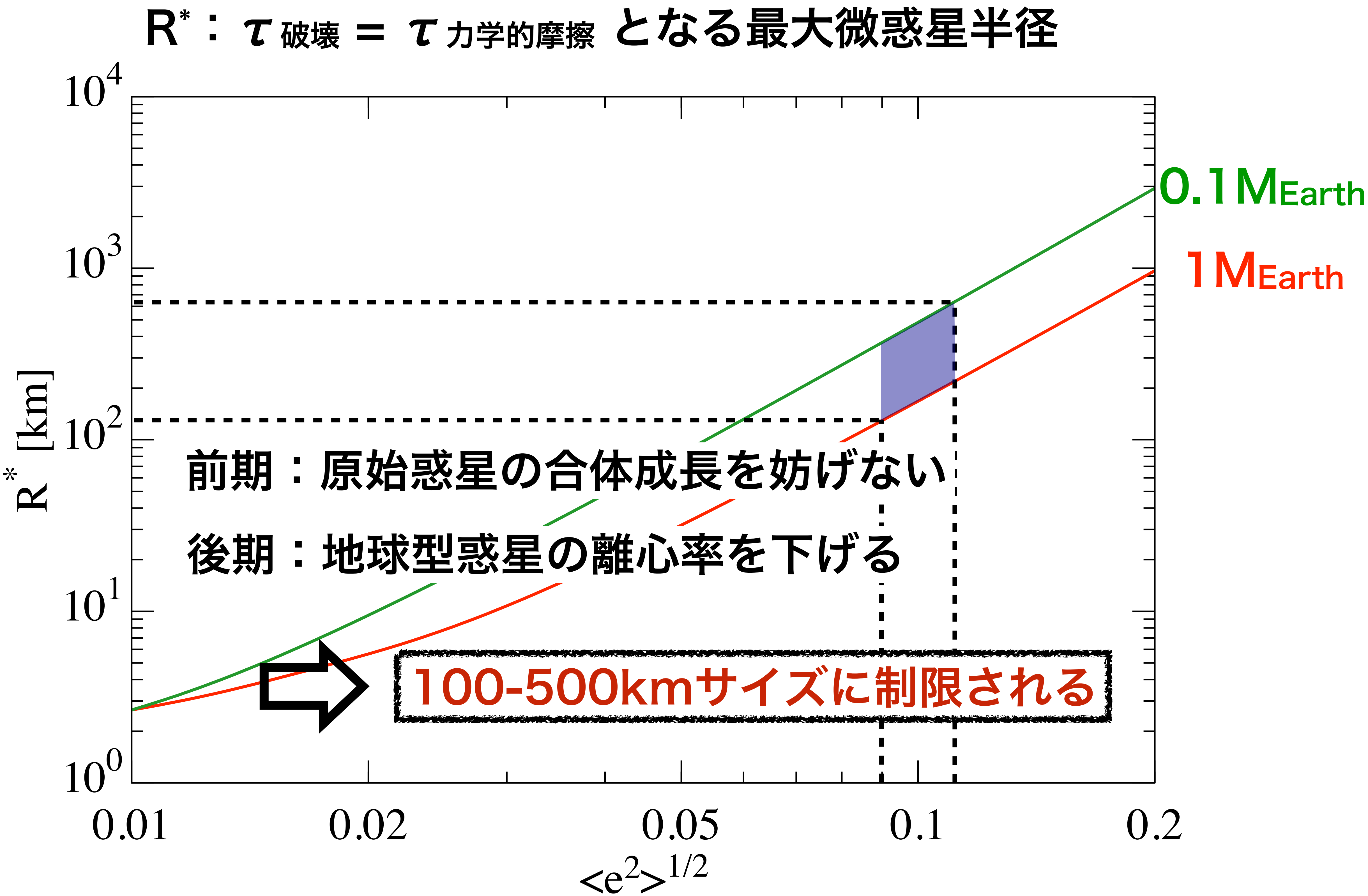


最大微惑星の大きさへの制限

R^* : $\tau_{破壊} = \tau_{力学的摩擦}$ となる最大微惑星半径



最大微惑星の大きさへの制限



まとめ

- 巨大衝突ステージに残存する微惑星の衝突・破壊

  ⇨ 微惑星円盤の面密度が減少 (KT10)

  ⇨ 残存微惑星による力学的摩擦の効率低下

- 軌道進化と面密度進化を同時に解いて調べる必要あり

  ($\tau_{破壊} \lesssim \tau_{力学的摩擦}$ の場合)

  ⇨ 本研究のハイブリッドコードが有効

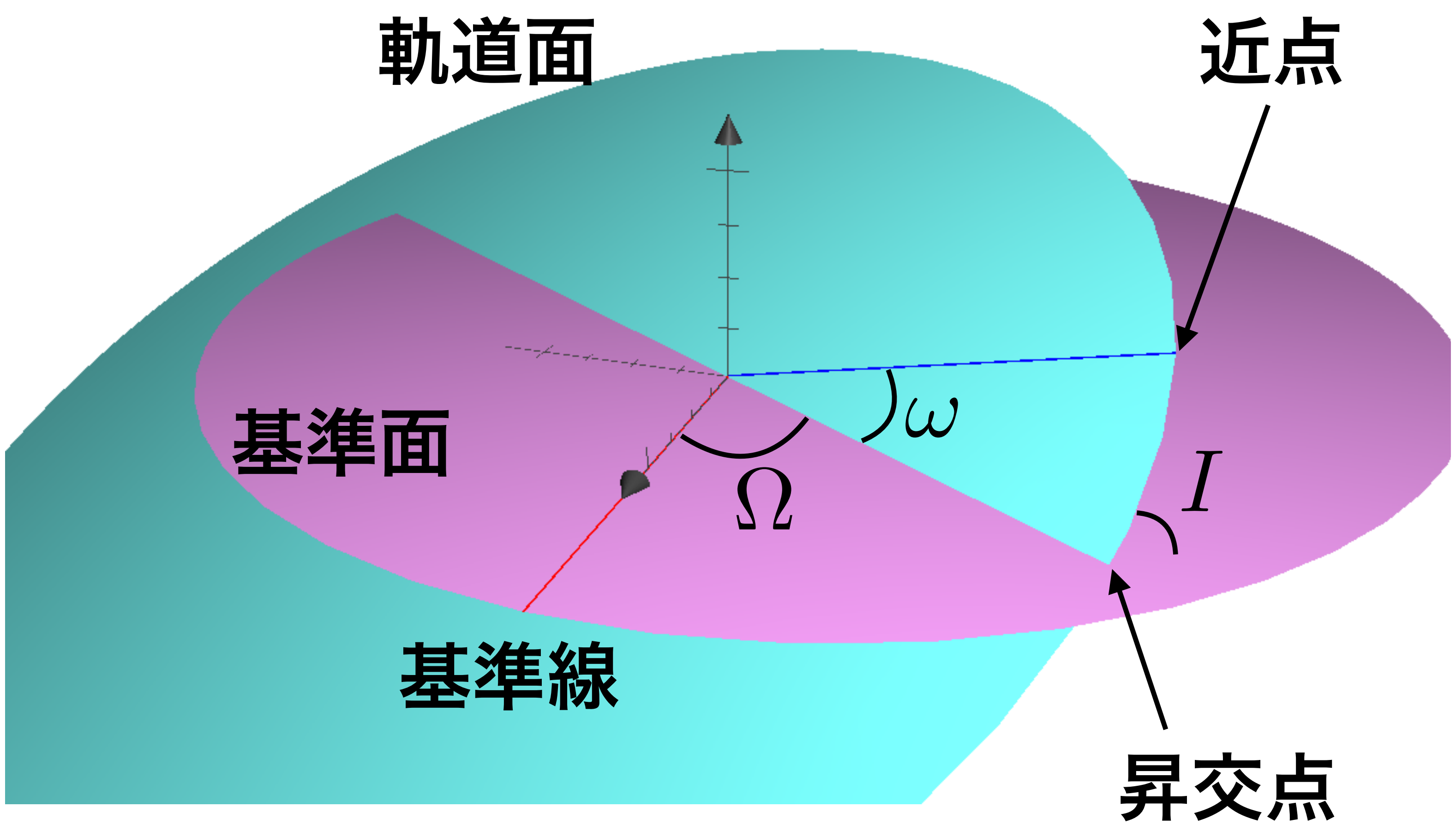
- 「原始惑星の合体成長が可能」＆「地球型惑星の離心率減少」

  ⇨ 100-500kmの最大微惑星を含む残存微惑星円盤が必要

Appendix

軌道要素

楕円軌道の場合



位置と速度の6変数

⇕

軌道要素6つ

楕円の形を決定：

軌道長半径	a
離心率	e

軌道面の位置を決定：

昇交点経度	Ω
近点引数	ω
軌道傾斜角	I

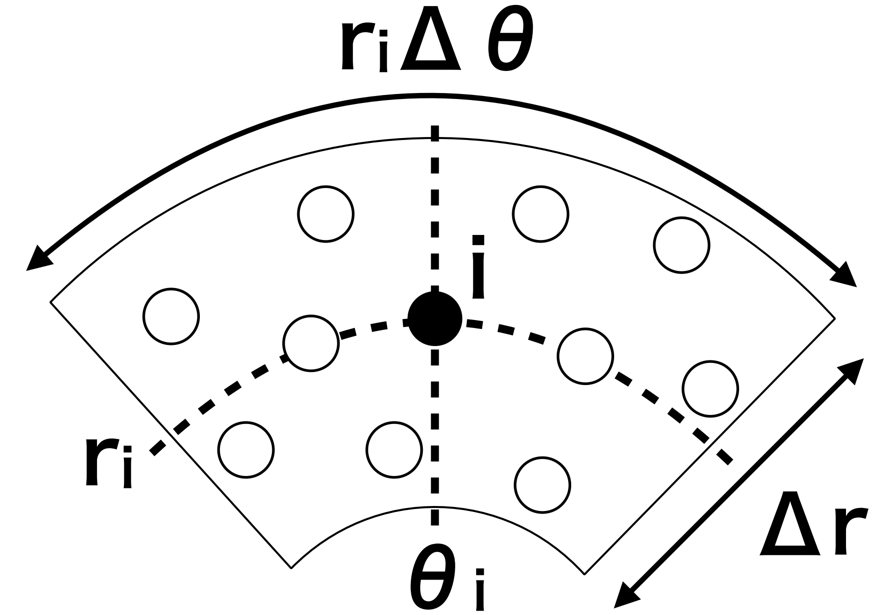
天体の位置を決定：

近点通過時刻	τ

面密度と衝突速度

step1：トレーサー i のまわりに扇形領域 i を作る　(Morishima 2015)

step2：この領域の面密度を
トレーサー i の面密度Σ_iとする



$$\Sigma_i = \frac{m_i + \sum_j^N m_j}{r_i \Delta r \Delta\theta}$$

j：領域 i 内の
トレーサー
N：j の総和

step3：i と j の相対速度をランダム速度で近似

ランダム速度 $\sqrt{{e_{i,j}}^2 + {i_{i,j}}^2} v_{\mathrm{K},i}$

$e_{i,j}$：相対離心率
$i_{i,j}$：相対軌道傾斜角
$v_{K,i}$：i のケプラー速度

step4：相対速度の2乗平均平方根を i の衝突速度 $v_{imp,i}$ だとみなす

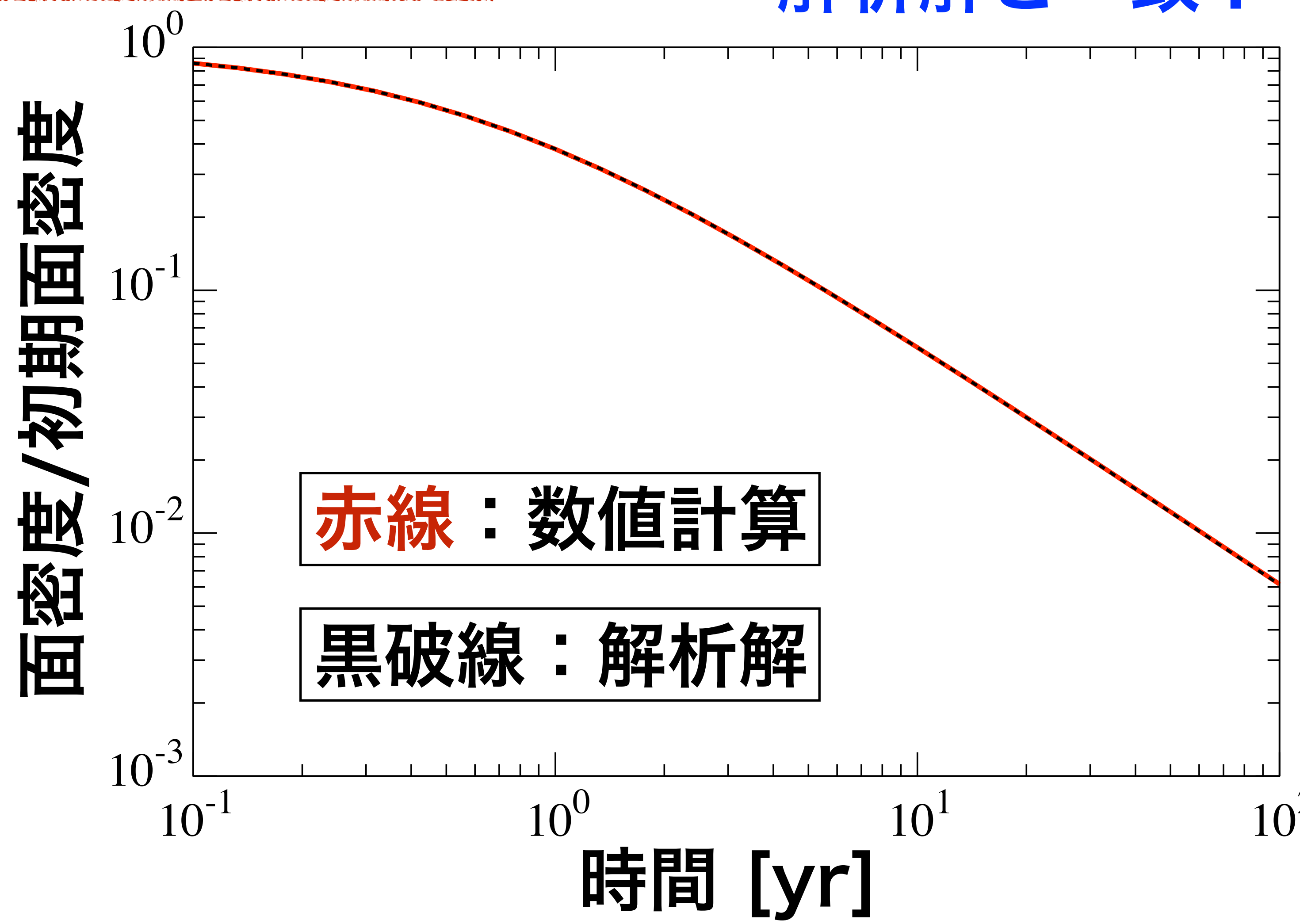
$$v_{\mathrm{imp},i} = \sqrt{\frac{\sum_j^N \left(e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2\right) v_{\mathrm{K},i}^2}{N}}$$

破壊計算のテスト

破壊による微惑星円盤の面密度減少をテスト

- 微惑星2000体
- 1±0.025AU
- 総質量 = 10地球質量
- 離心率 = 0.01
- $m_{max} = 10^{16}$ g
- 重力相互作用なし

解析解と一致！



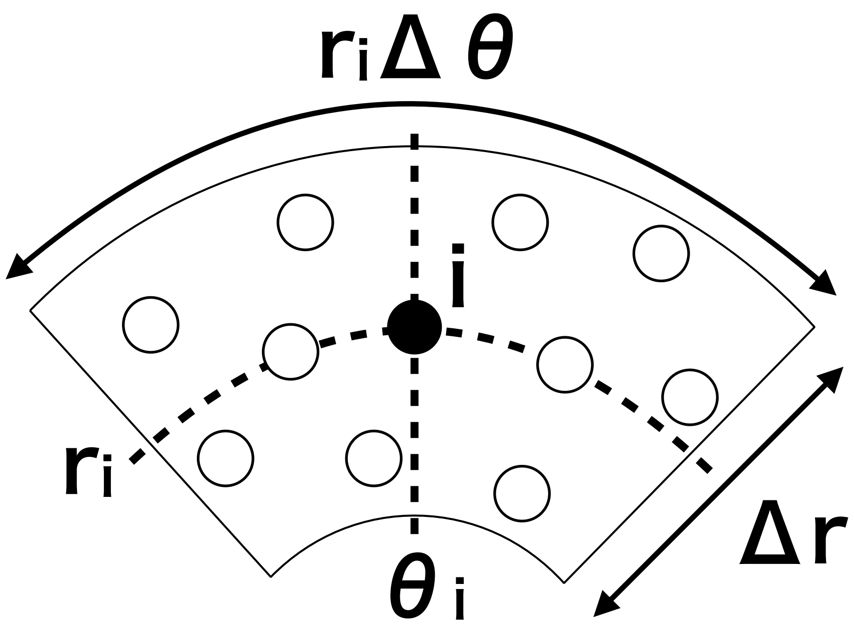
解析解（KT10）

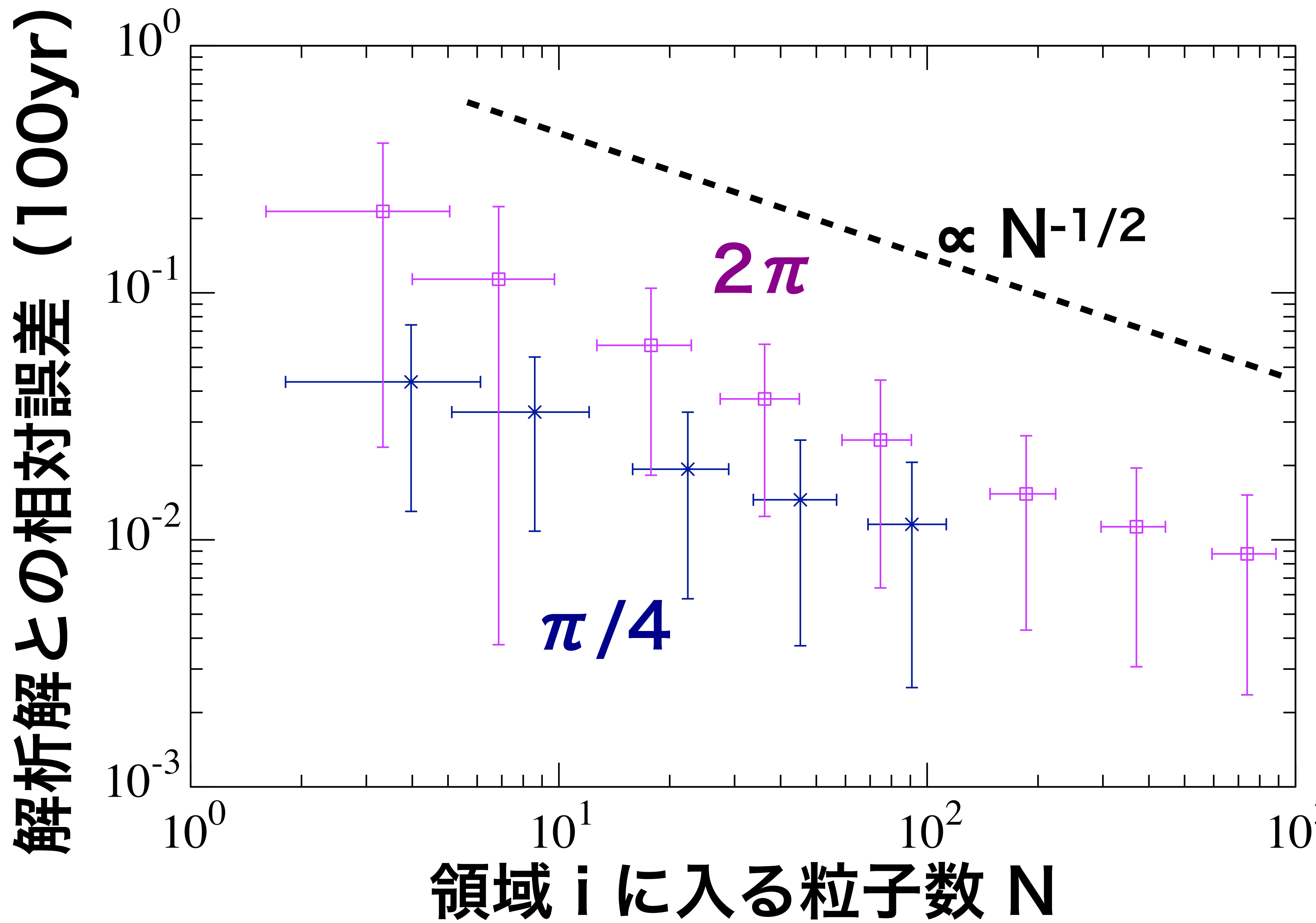
$$\frac{\Sigma(t)}{\Sigma_0} = \frac{1}{1 + t/\tau_{\rm dep}}$$

$$\tau_{\rm dep} = 0.617 \left(\frac{M_{\rm tot}}{10{\rm M}_\oplus}\right)^{-1} \left(\frac{m_{\rm max}}{10^{16}{\rm g}}\right)^{0.641} \left(\frac{a}{1{\rm AU}}\right)^{4.18} \times \left(\frac{\Delta a/a}{0.05}\right) \left(\frac{e}{0.01}\right)^{-1.36} \left(\frac{Q_0}{5.07 \times 10^6 {\rm erg/g}}\right)^{0.679} {\rm yr}$$

破壊計算の精度と粒子数の関係

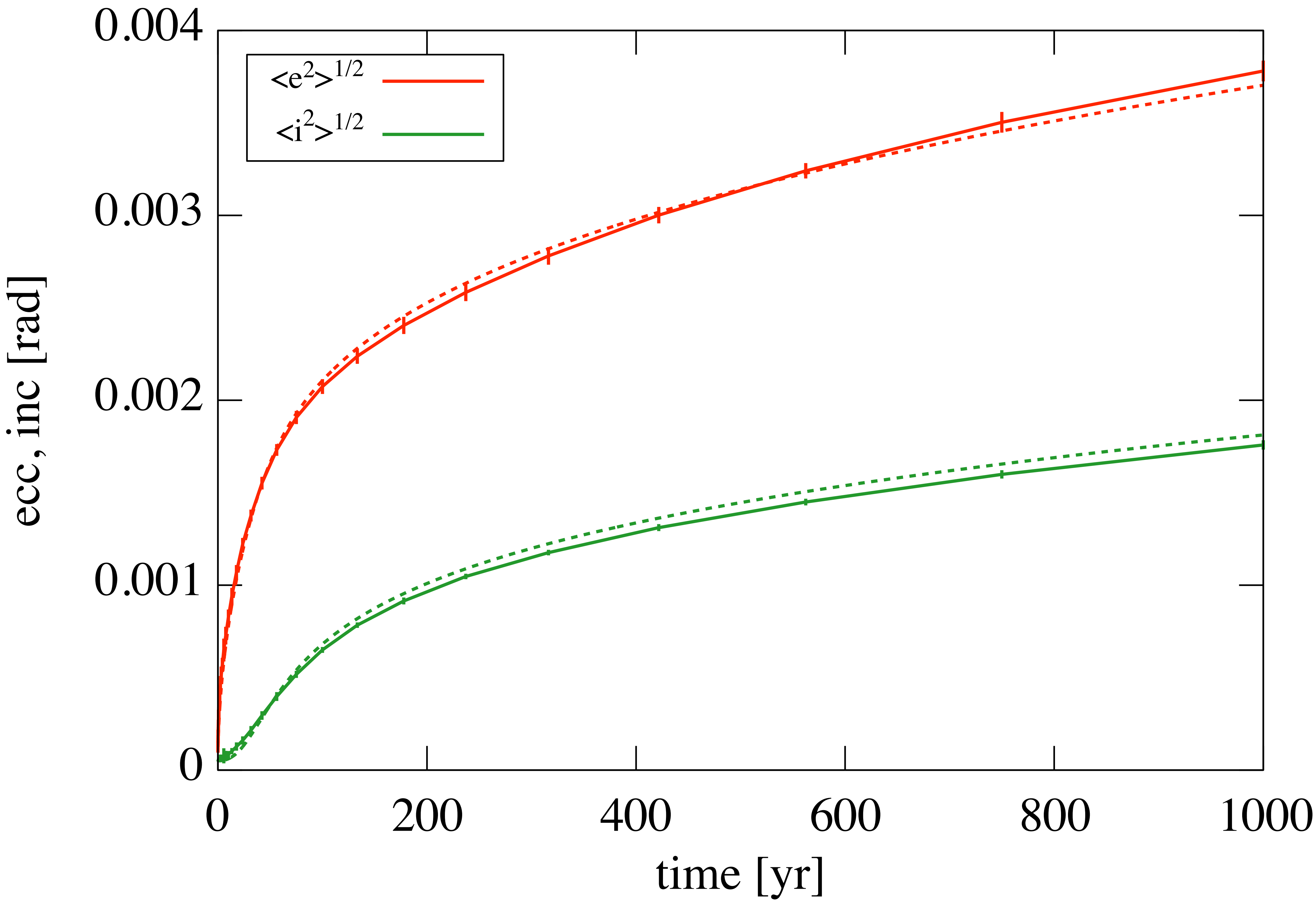
- 微惑星の個数：{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000} 体
- $\Delta\theta = 2\pi, \pi/4$
- Δr = 0.02AU





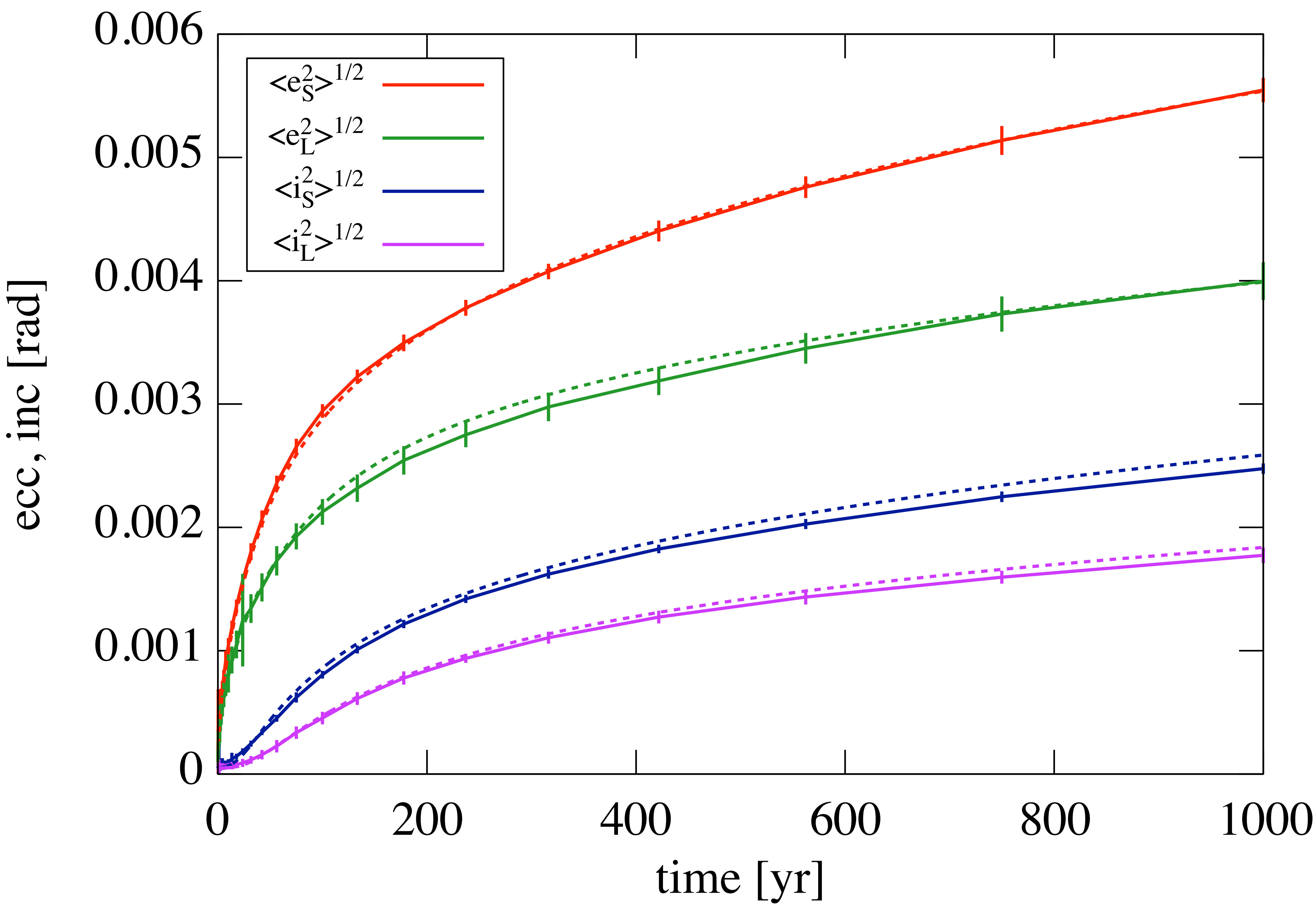
$\pi/4$は時間経過で粒子が入れ替わるため、2πに比べ約8倍の粒子平均が取れている ⇨ 約$\sqrt{8}$倍誤差が小さい

N体計算のテスト



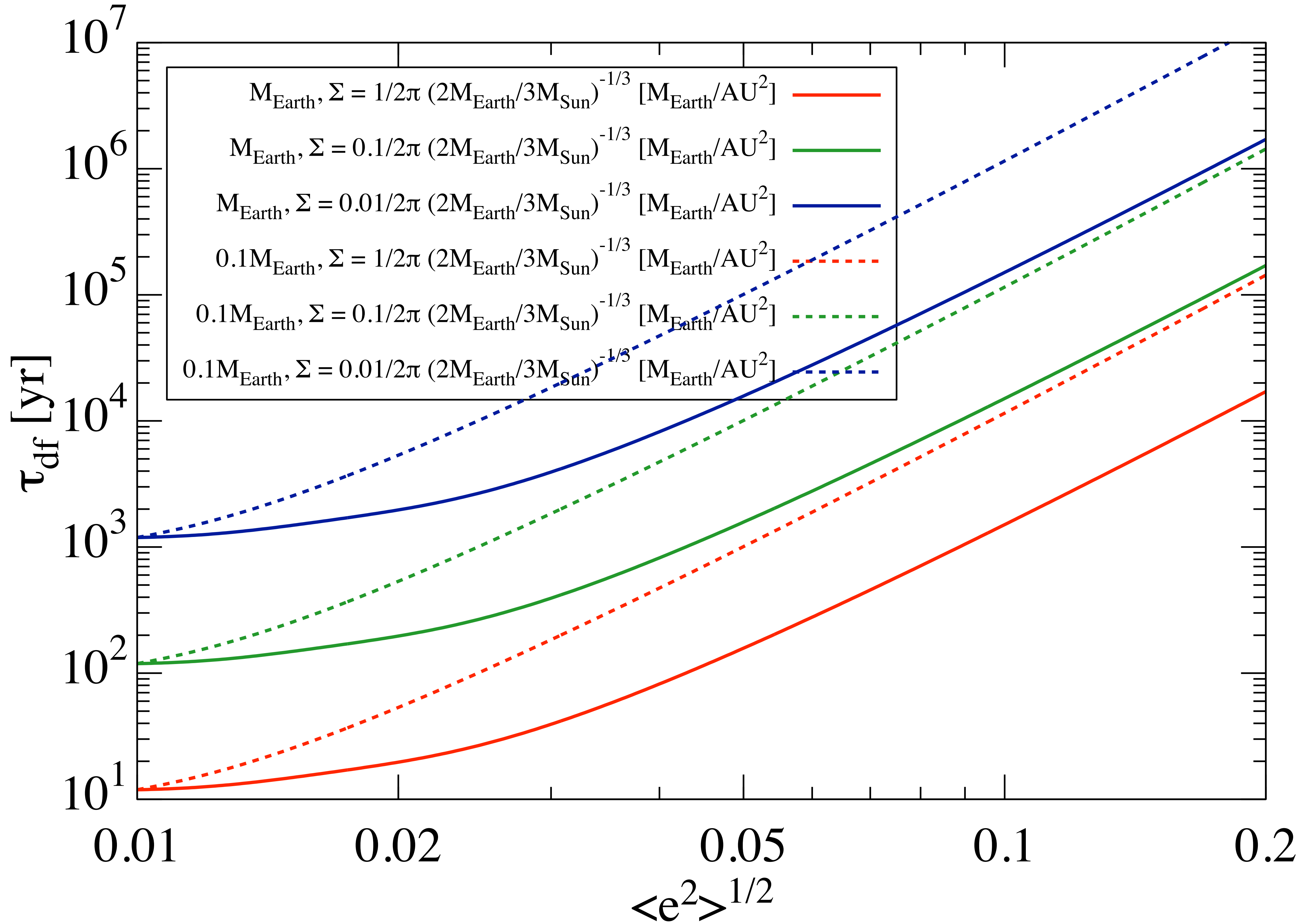
0.004
0.003
0.002
0.001
0
ecc, inc [rad]
<e2>1/2
<i2>1/2
0
200
400
600
800
1000
time [yr]

N体計算のテスト

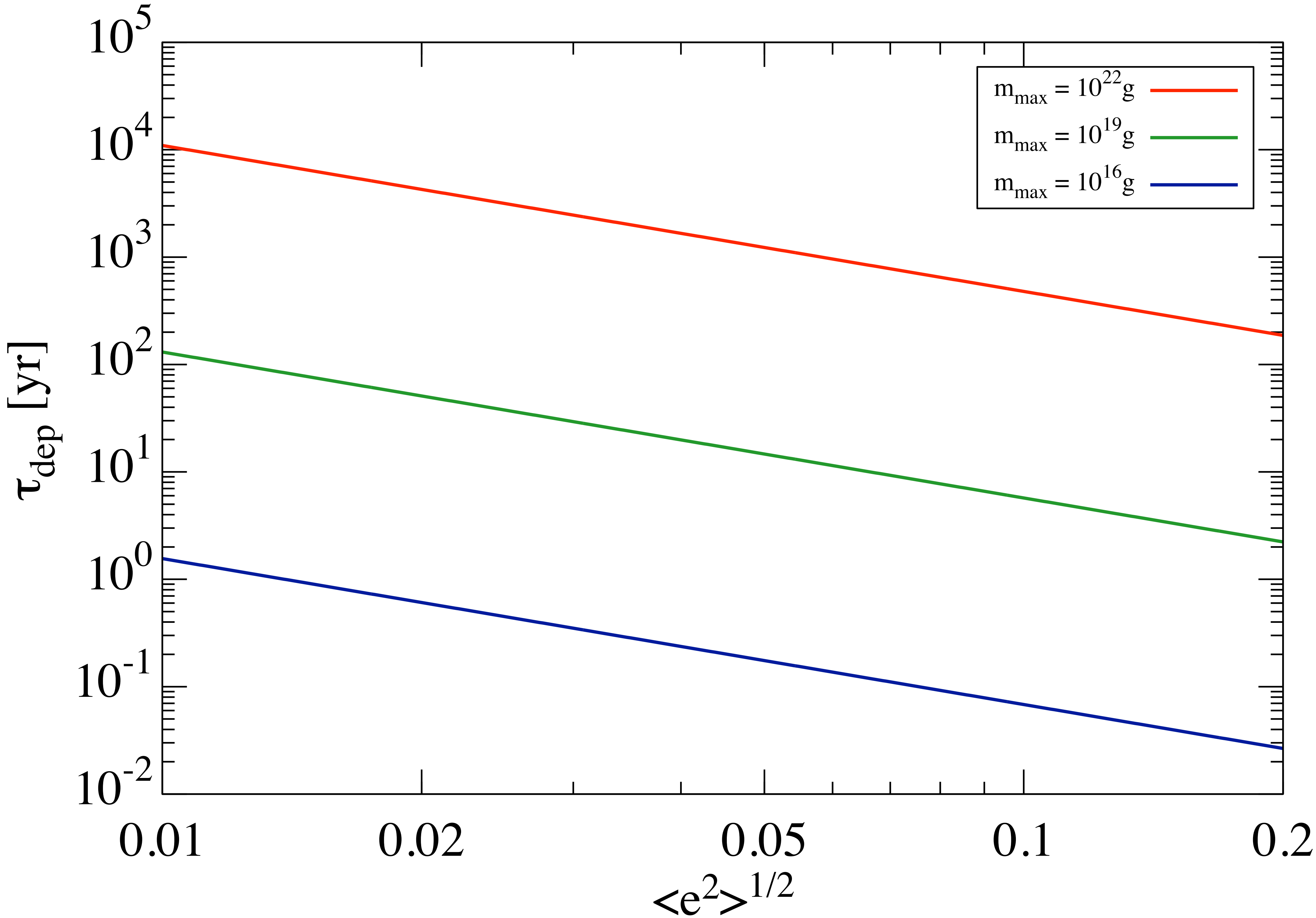


0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
0
200
400
600
800
1000
ecc, inc [rad]
time [yr]
$<e_S^2>^{1/2}$
$<e_L^2>^{1/2}$
$<i_S^2>^{1/2}$
$<i_L^2>^{1/2}$

力学的摩擦のタイムスケール

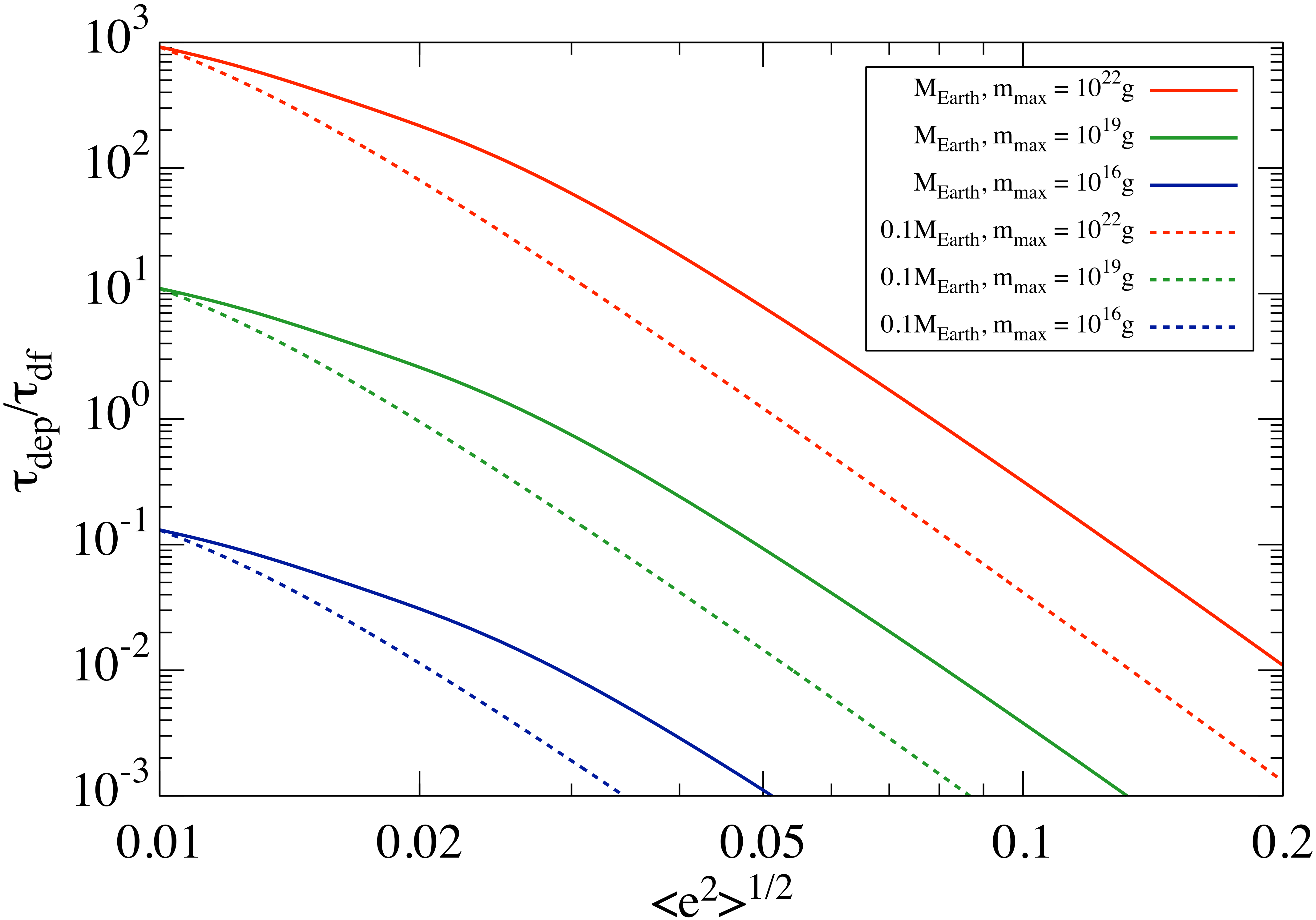


破壊のタイムスケール



m_{max} = 10^{22}g
m_{max} = 10^{19}g
m_{max} = 10^{16}g
τ_{dep} [yr]
10^{5}
10^{4}
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
0.01
0.02
0.05
0.1
0.2
$<e^2>^{1/2}$

タイムスケールの比較



M_{Earth}, m_{max} = 10^{22}g
M_{Earth}, m_{max} = 10^{19}g
M_{Earth}, m_{max} = 10^{16}g
0.1M_{Earth}, m_{max} = 10^{22}g
0.1M_{Earth}, m_{max} = 10^{19}g
0.1M_{Earth}, m_{max} = 10^{16}g
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
τ_{dep}/τ_{df}
0.01
0.02
0.05
0.1
0.2
$\langle e^2 \rangle^{1/2}$

巨大衝突ステージの先行研究

1. Chambers & Wetherill, 1998, Icarus, 136, 304
   - N体シミュレーション & 衝突・合体
   - ガス円盤無し、破壊無し、原始惑星から惑星まで
2. Morishima et al., 2010, Icarus, 207, 517
   - N体シミュレーション & 衝突・合体
   - ガス円盤有り、破壊無し、微惑星から惑星まで
3. Kobayashi & Tanaka, 2010, Icarus, 206, 735
   - 統計的シミュレーション & 衝突・破壊
   - 微惑星間の衝突・破壊による面密度の減少

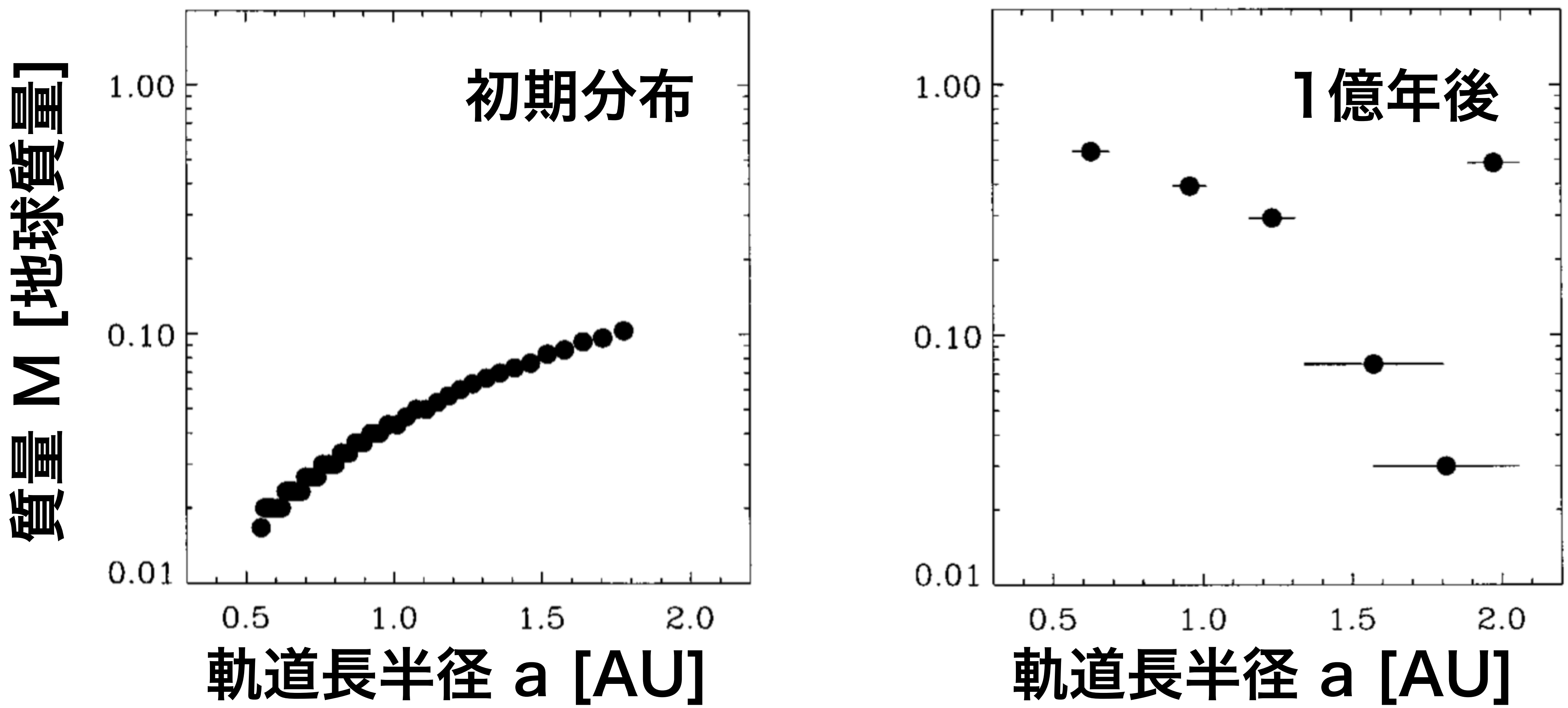
先行研究1：原始惑星のN体計算による衝突成長

Chambers & Wetherill (1998)

初期条件

固体面密度：6 [g/cm²] @1AU, 軌道長半径に反比例

原始惑星の間隔：相互ヒル半径の7倍



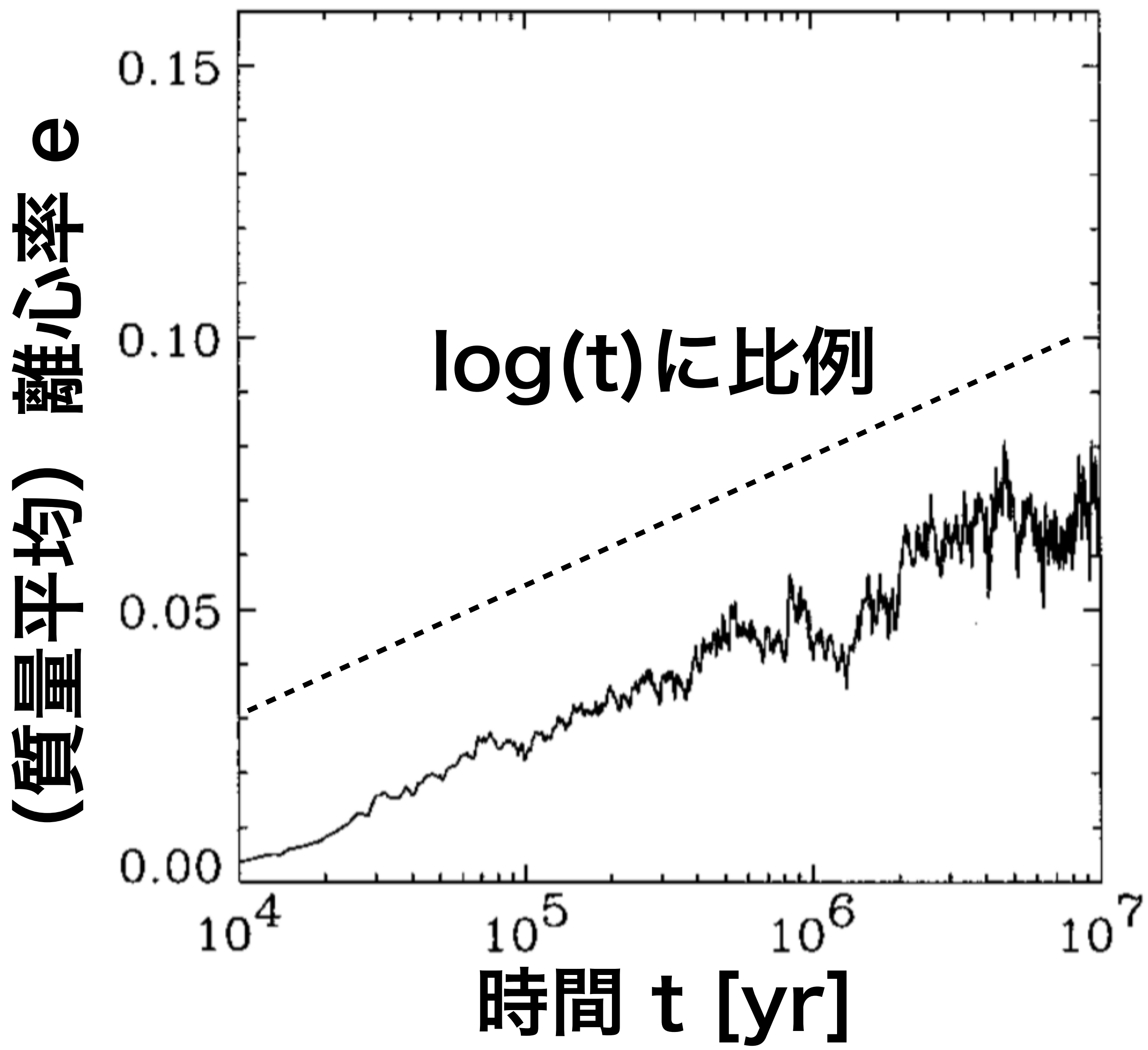
1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

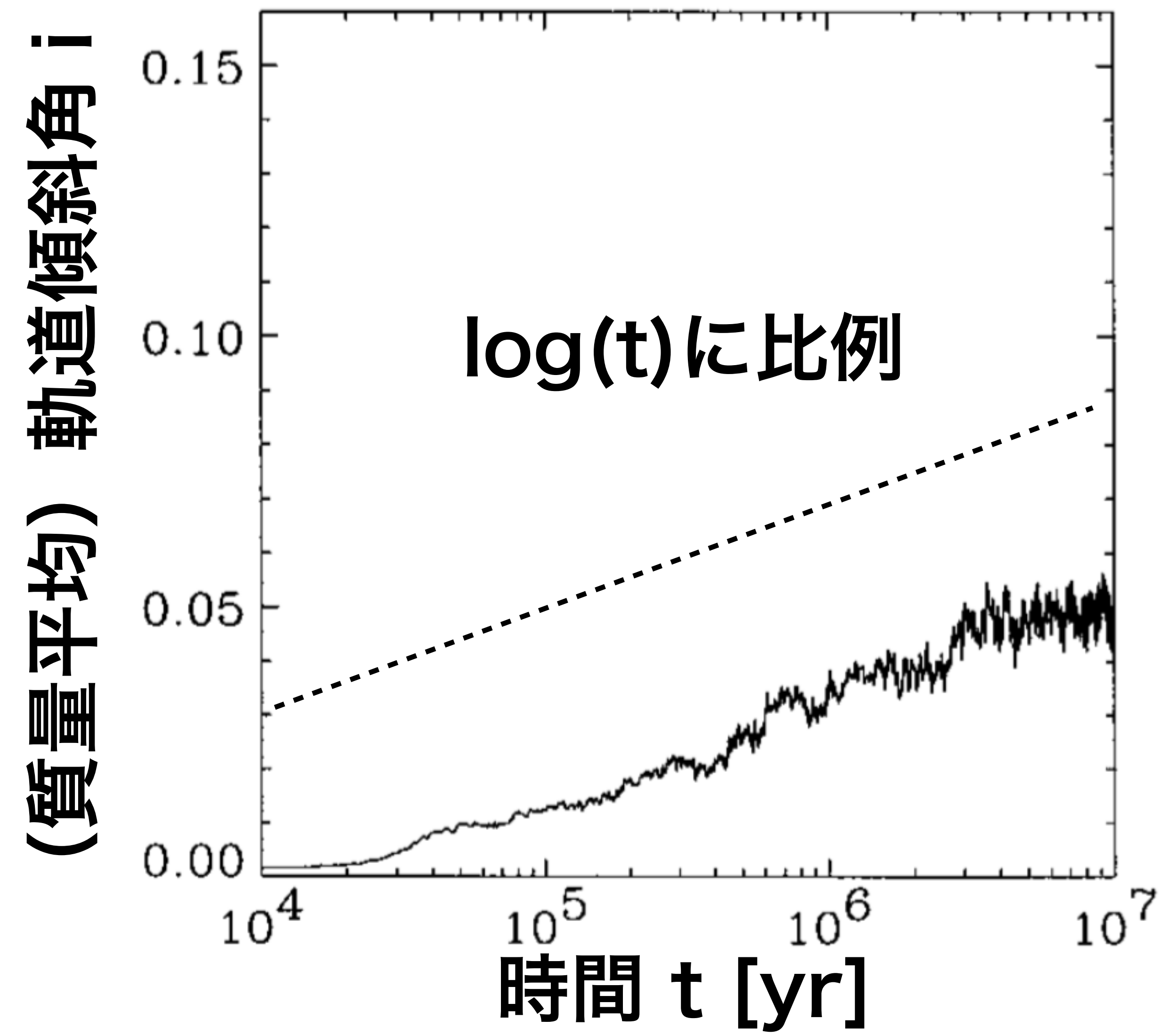
(e.g., Agnor et al. 1999; Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

先行研究1の問題点：離心率上昇

Chambers & Wetherill (1998)

衝突に伴い離心率が上昇





1億年後の離心率：~ 0.1 >> 現在の地球の離心率：0.0167

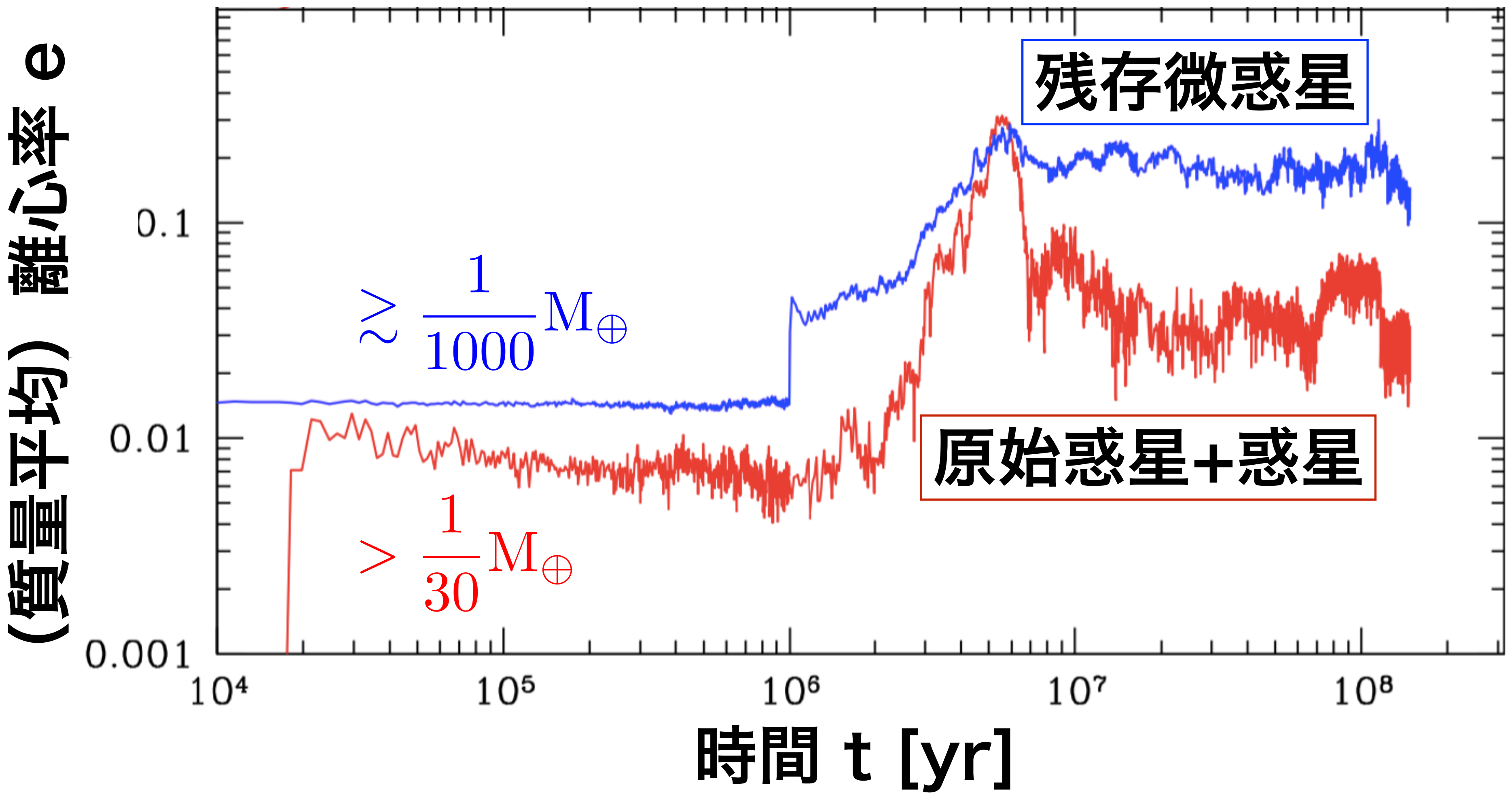
離心率が大きくなりすぎてしまう

先行研究2：微惑星円盤と原始惑星成長

Morishima et al. (2010)

微惑星（~10^{25} [g]）のN体計算

原始惑星形成・成長を一貫してシミュレーション

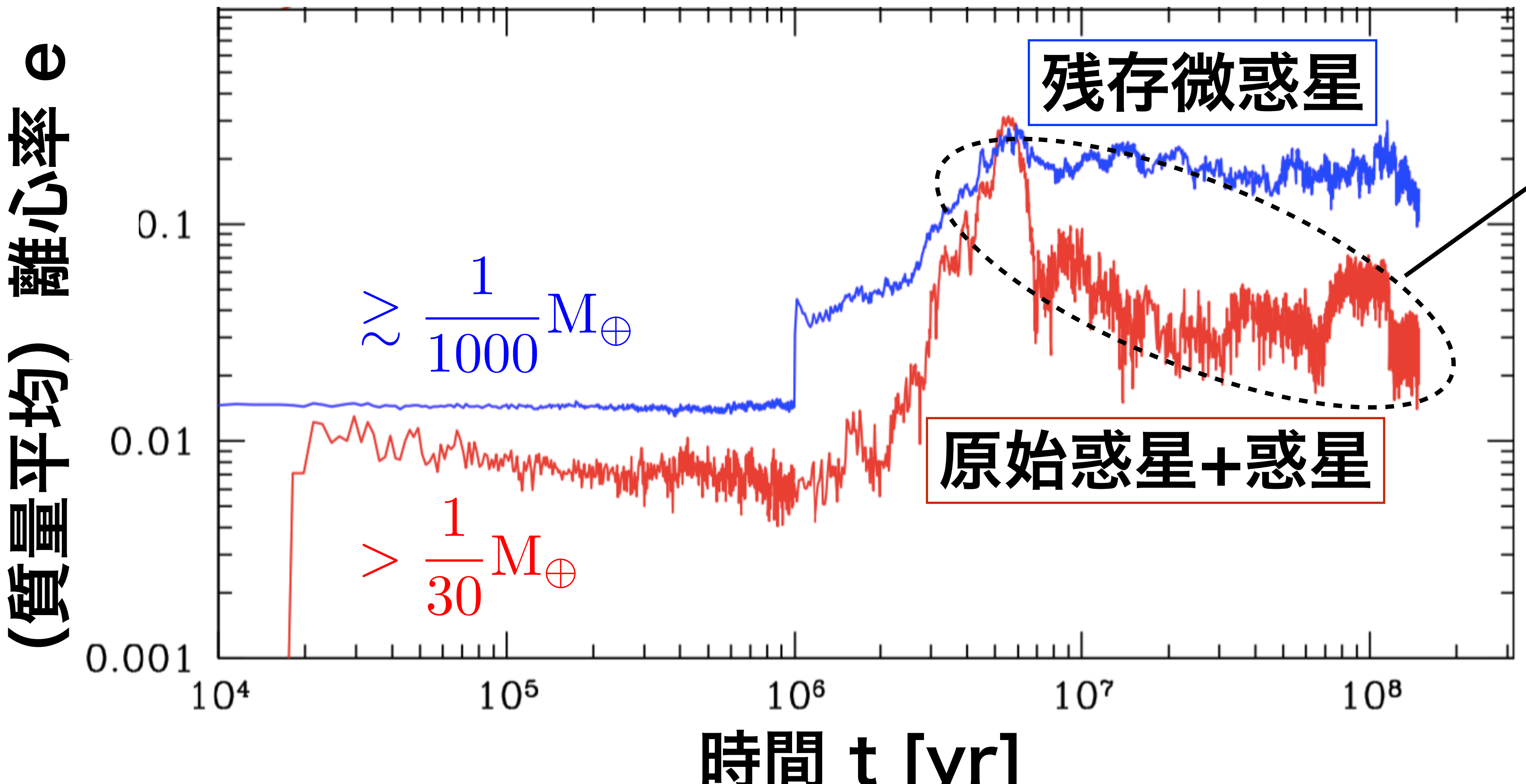


先行研究2：微惑星円盤と原始惑星成長

Morishima et al. (2010)

微惑星（~10^{25} [g]）のN体計算

原始惑星形成・成長を一貫してシミュレーション



現在の地球の離心率 ~0.01まで下がる

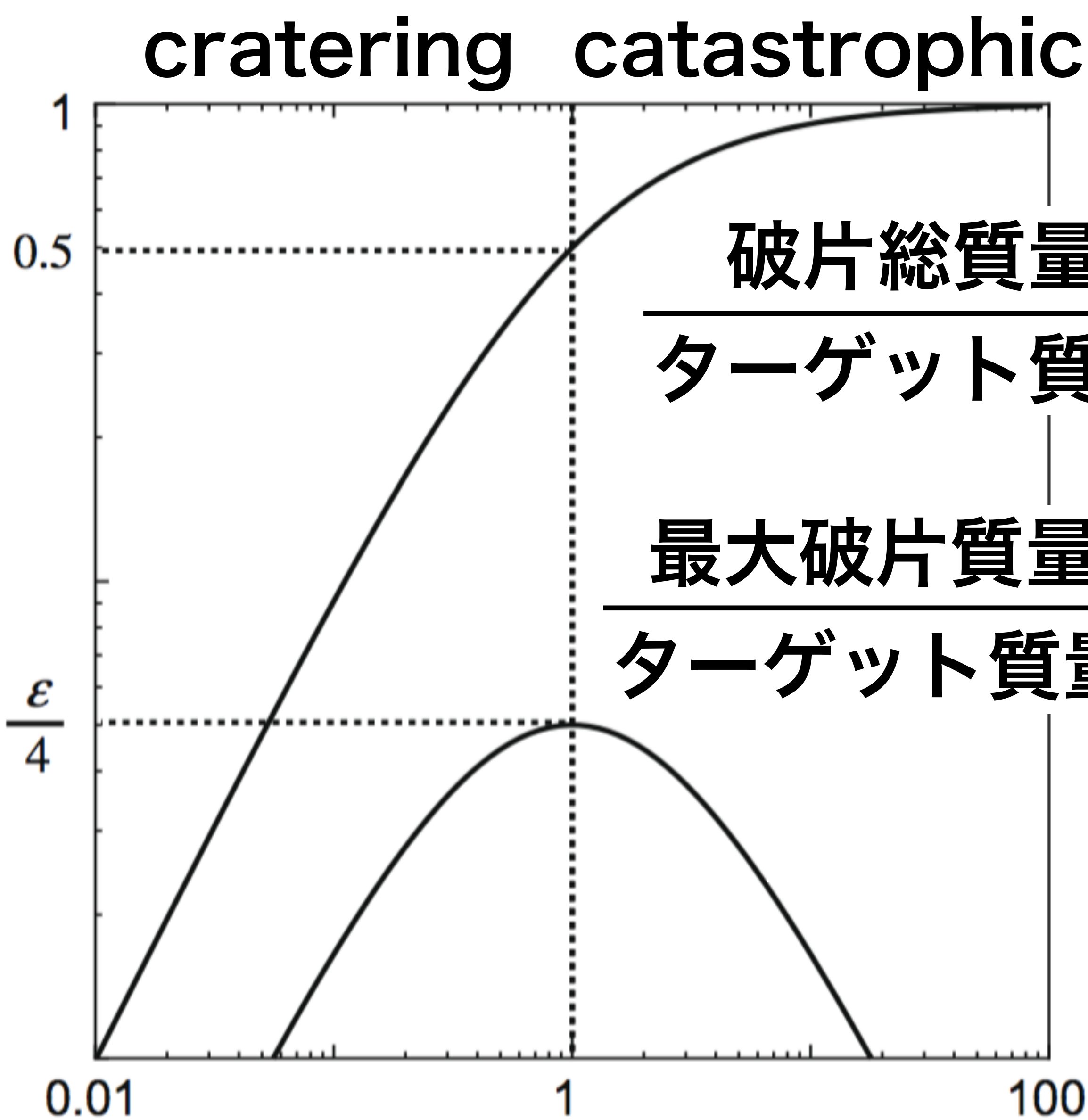
原因：力学的摩擦（エネルギー等分配）

残存微惑星による力学的摩擦により原始惑星の離心率を下げる

しかし離心率~0.1の微惑星衝突(~3km/s)により破壊が起きる

先行研究3：衝突・破壊のモデル

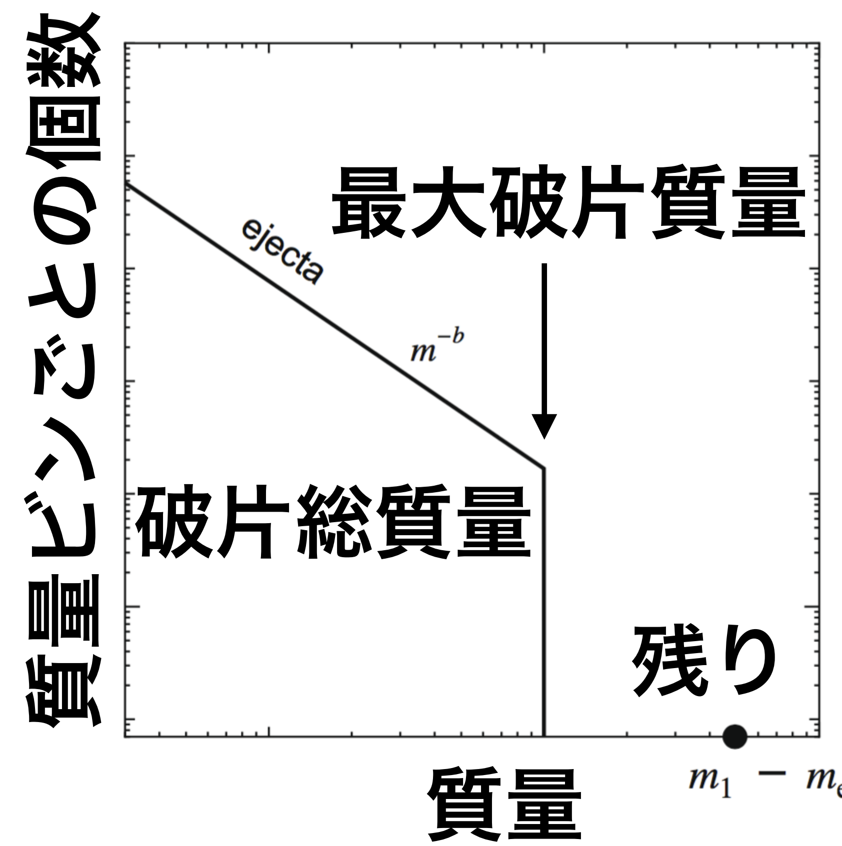
Kobayashi & Tanaka 2010



$$\frac{\text{破片総質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\phi}{1+\phi}$$

$$\frac{\text{最大破片質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\varepsilon\phi}{(1+\phi)^2}$$

$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} = \phi$$



ϕ=1のときターゲット
質量の半分が吹き飛ぶ

↕

Q_{D}^{*}の定義

破壊を起こす衝突速度

$$\frac{v_{\rm esc}^2}{Q_{\rm D}^*} = 1.23 \times 10^{-2} \left(\frac{\rho}{3{\rm g/cm^3}}\right)^{-0.213} \left(\frac{m}{10^{19}{\rm g}}\right)^{0.213}$$

脱出速度の約10倍で衝突すれば破壊が起こる

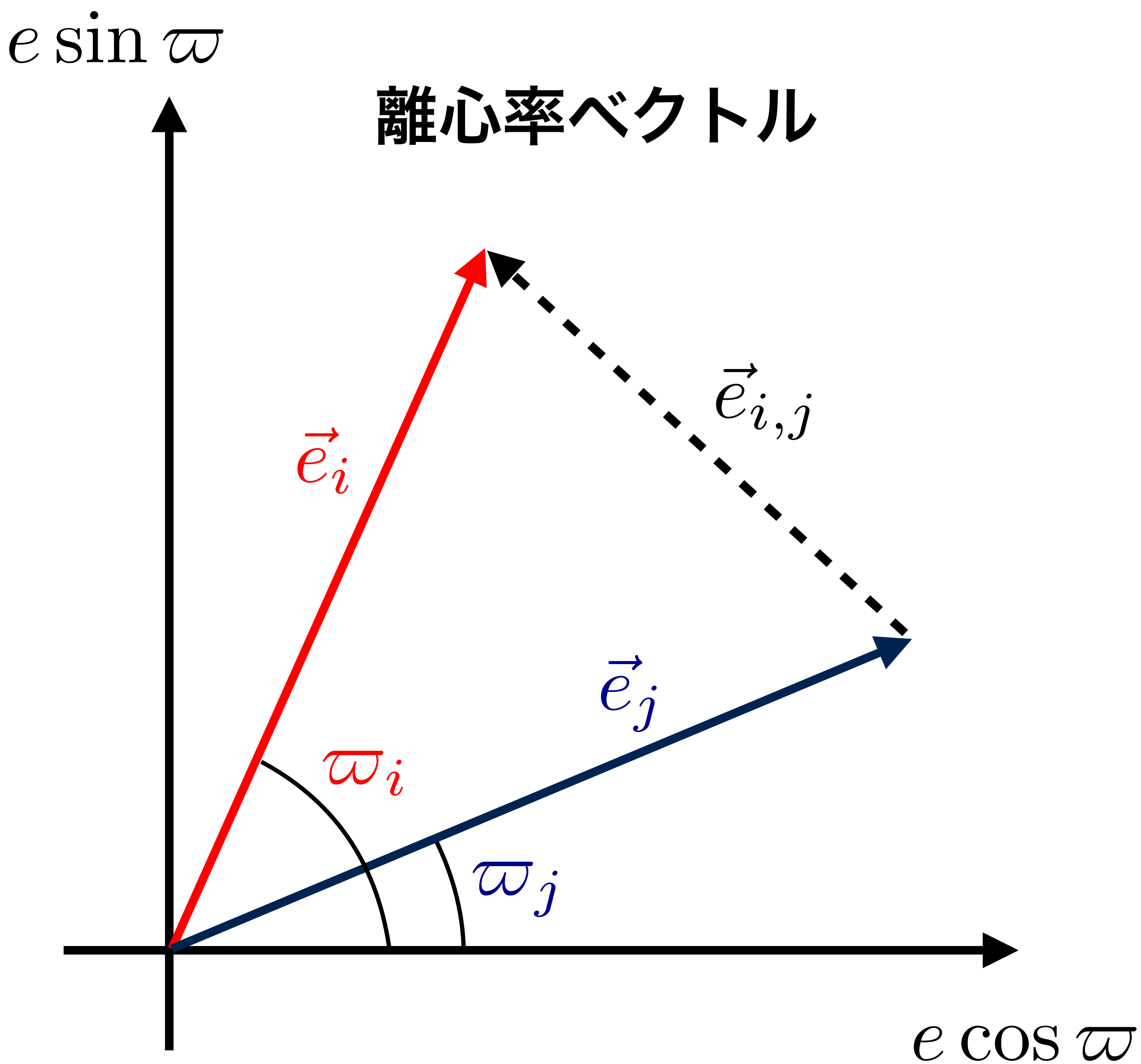
$$\frac{(e^2+i^2)v_{\rm K}^2}{Q_{\rm D}^*} = 948 \left(\frac{e}{0.1}\right)^2 \left(\frac{a}{1{\rm AU}}\right)^{-1} \left(\frac{\rho}{3{\rm g/cm^3}}\right)^{-0.547} \left(\frac{m}{10^{19}{\rm g}}\right)^{-0.453} \left(\frac{M_*}{{\rm M}_\odot}\right)$$

離心率が0.1のときには破壊に必要なエネルギーの1000倍で衝突する

相対離心率

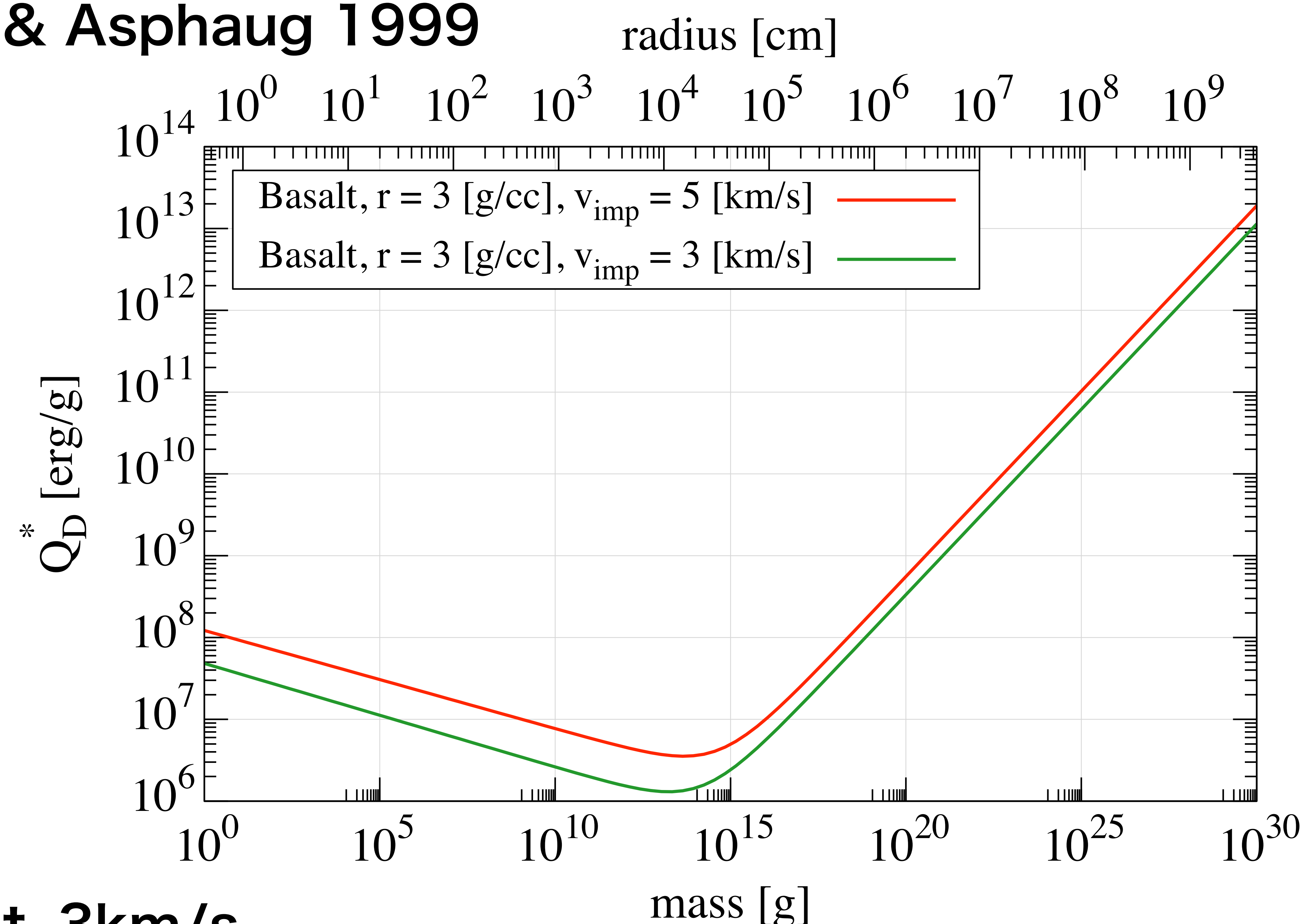
$$e_{i,j}{}^2 = e_i{}^2 + e_j{}^2 - 2e_i e_j \cos\left(\varpi_i - \varpi_j\right)$$

ϖ ：近点経度



Q_D^*

Benz & Asphaug 1999



Basalt, 3km/s

$$Q_\mathrm{D}^* \simeq 1.16 \times 10^8 \left(\frac{\rho}{3\mathrm{g/cm^3}}\right)^{0.547} \left(\frac{m}{10^{19}\mathrm{g}}\right)^{0.453} \mathrm{erg/g}$$

N体計算の手法

4次のエルミート法　　Makino & Aarseth 1992

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

step3：加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算（4次精度）

&

独立タイムステップ

粒子は別々の時間とタイムステップを持つ

加速度 大 → タイムステップ 小

⇨ 近接遭遇を精度よく効率的に解くことができる

物理半径を用いた衝突合体（惑星への集積）も取り扱っている

離心率の平均値の変化率（解析解）

質量M_1の粒子集団1と質量M_2の粒子集団2の重力相互作用を考える

(Ida 1990; Ohtsuki et al. 1993; Stewart & Ida 2000)

$$\frac{d{e_1}^2}{dt} \simeq \underbrace{\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2 \frac{e^2}{t_{\mathrm{g},12}}}_{\text{Viscous Stirring}} + \underbrace{\frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{M_2{e_2}^2 - M_1{e_1}^2}{M_1+M_2}\frac{1}{t_{\mathrm{g},12}}}_{\text{Dynamical Friction}}$$

Viscous Stirring

ランダム速度上昇の効果

ヤコビエネルギーの保存より

$|a_2 - a_1|$ が増えると e, i が増える

Dynamical Friction

エネルギー等分配の効果

粒子あたりのエネルギー

$\propto M_j\, {e_j}^2$ を一定にする働き

$$t_{\mathrm{g},12} = \left(\frac{1}{e^2}\frac{de^2}{dt}\right)^{-1}$$

: 相対離心率が変化する典型的なタイムスケール

$$e^2 = {e_1}^2 + {e_2}^2$$

: 相対離心率の平均

$d{e_j}^2/dt$を積分すれば解析解が求まる!

力学的摩擦の特徴

力学的摩擦の項 $\left(\frac{d{e_1}^2}{dt}\right)_{\rm df} = \frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{M_2{e_2}^2 - M_1{e_1}^2}{M_1+M_2}\frac{1}{t_{\rm g,12}}$

M1とM2それぞれにエネルギーが等分配されるとき

$$M_2{e_2}^2 - M_1{e_1}^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad e_{1,\rm eq} \approx \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}e_{2,\rm eq}$$

最終的な平衡状態の離心率はM1とM2の質量比、
つまりN体計算では粒子数に大きく依存する

一方、力学的摩擦のタイムスケールは、M1>>M2 かつ e1 ~ e2 とすると

$$\tau_{\rm df} \simeq 16\left(\frac{a}{\rm 1AU}\right)^{3/2}\left(\frac{\Delta a/a}{0.126}\right)\left(\frac{e}{0.01}\right)^4\left(\frac{\ln\Lambda}{5}\right)^{-1}\left(\frac{M_1}{\rm M_\oplus}\right)^{-1}\left(\frac{M_{\rm tot,2}}{\rm 10M_\oplus}\right)^{-1}\left(\frac{M_*}{\rm M_\odot}\right)^{3/2}\rm yr$$

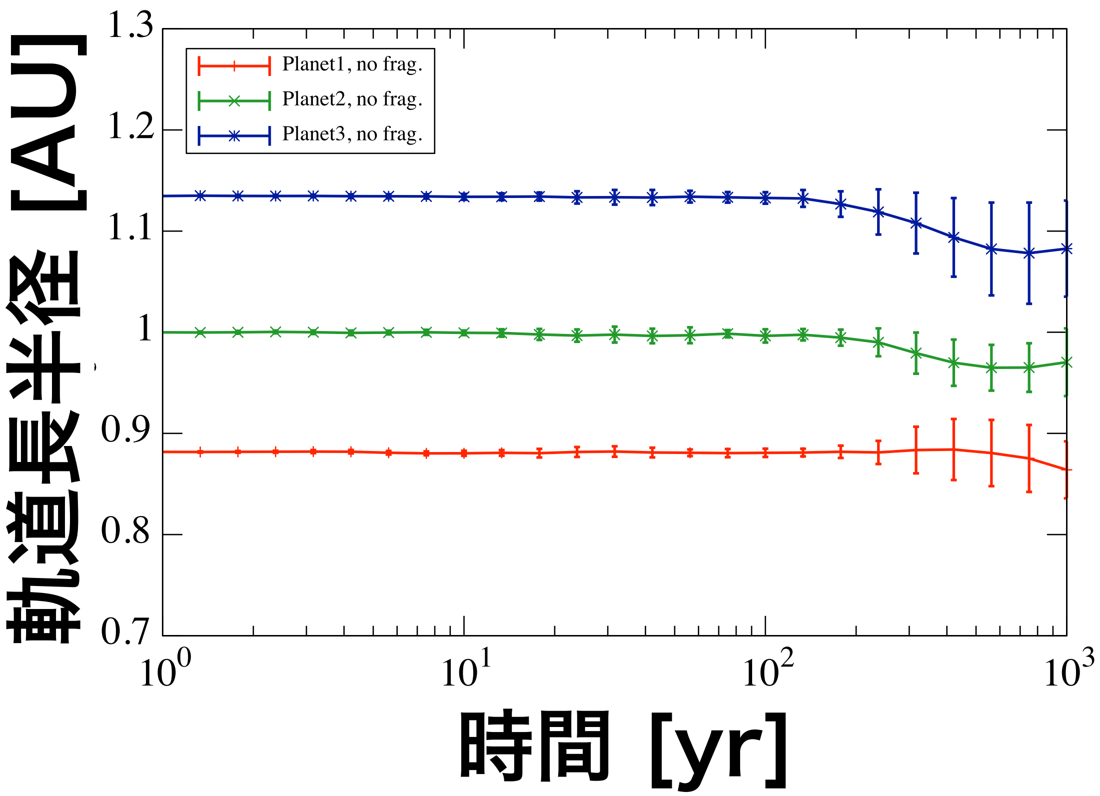
それぞれのM2に依存せず、集団2の総質量Mtot,2が重要

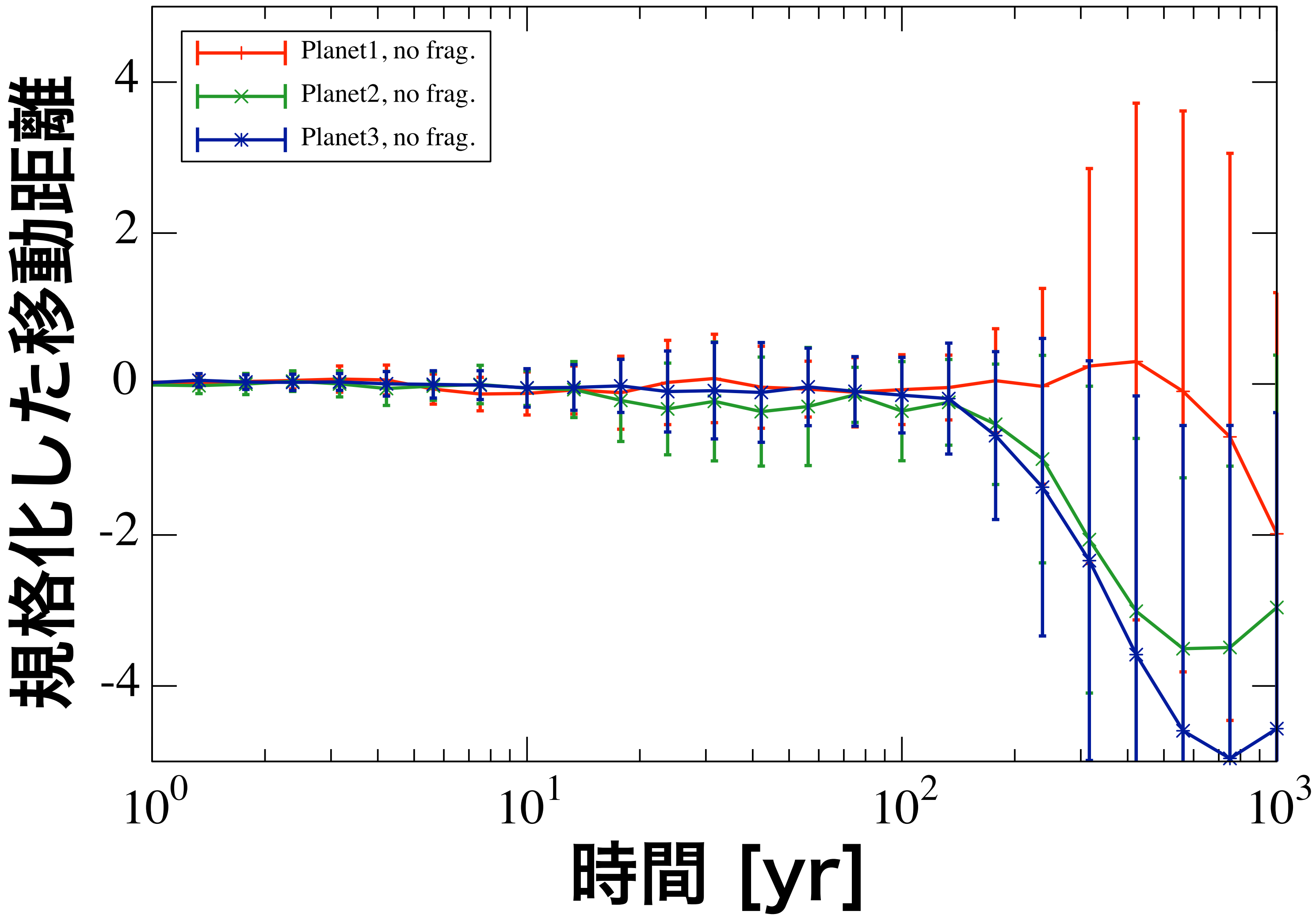
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星　緑：真ん中の惑星　青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

$<e_{微惑星,0}^2>^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.01$





点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差 σ

真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

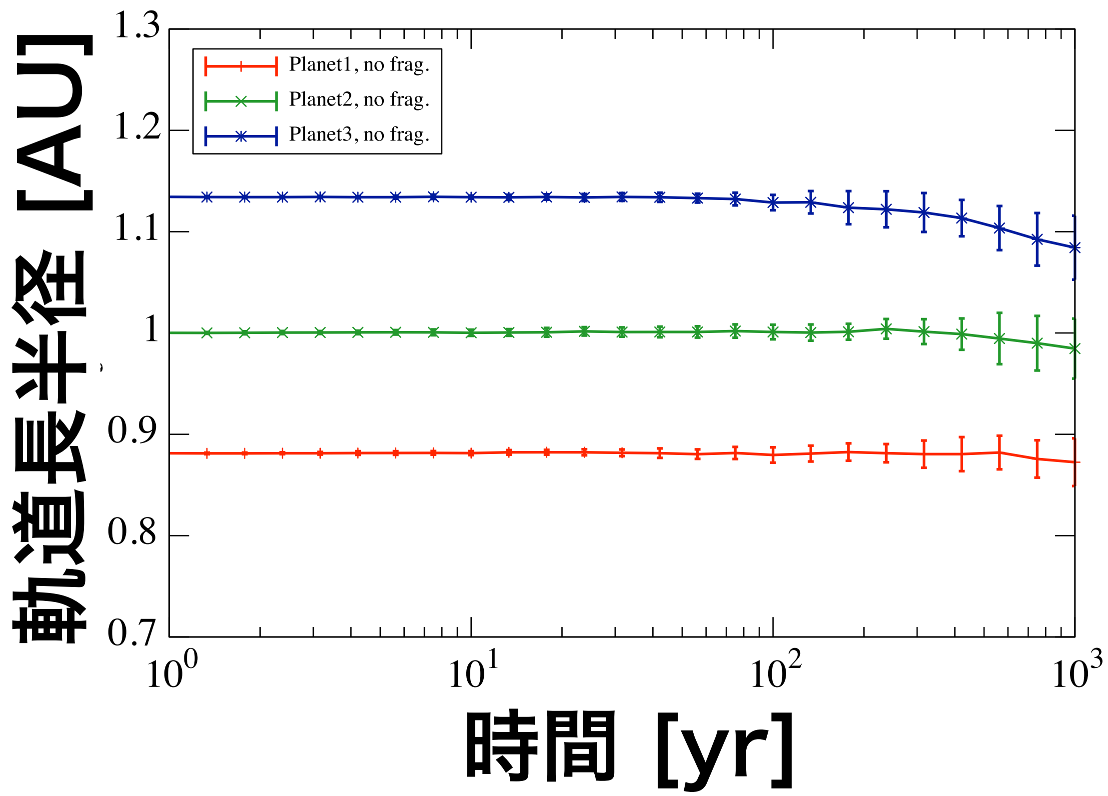
真ん中の惑星の離心率に注目する

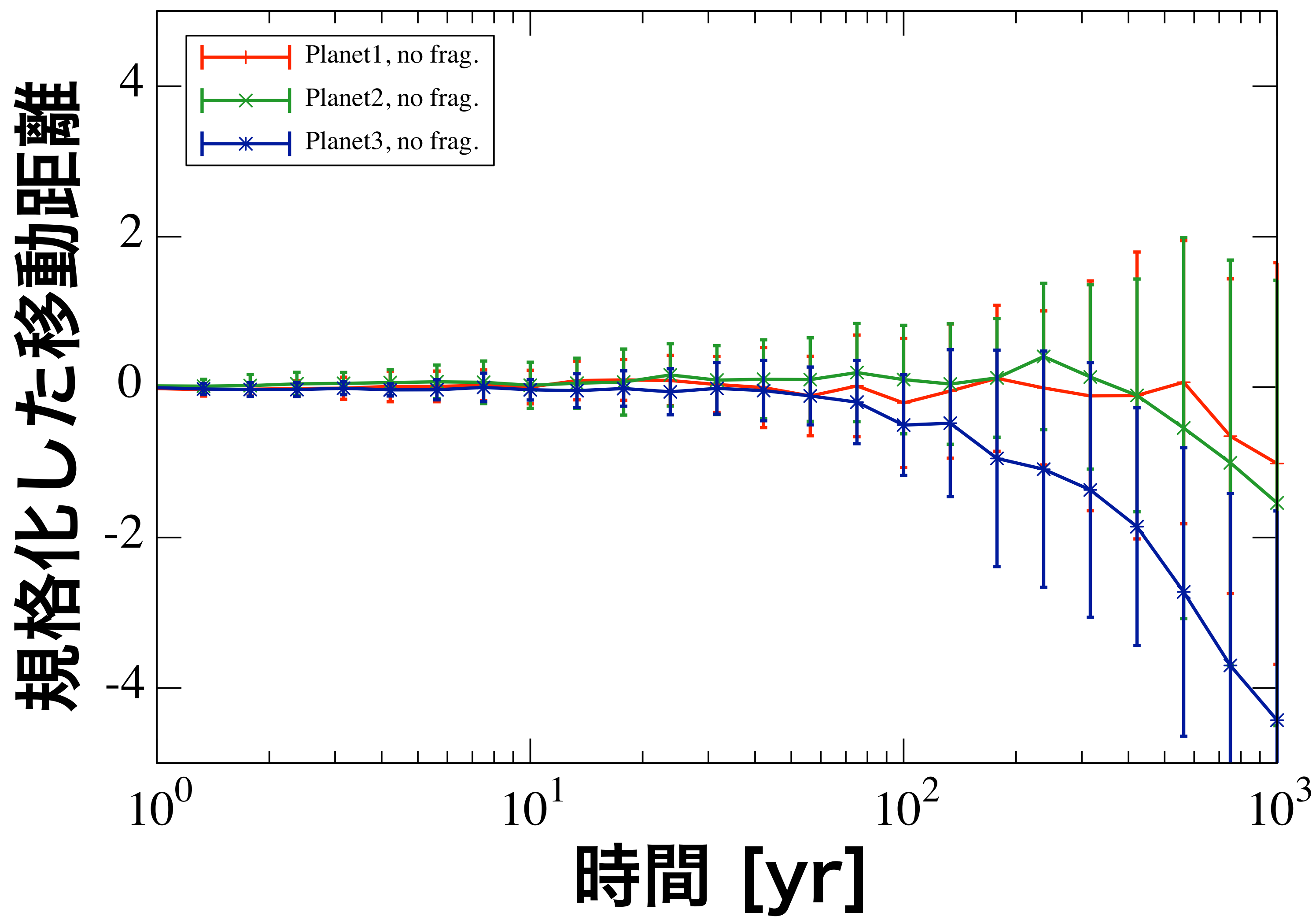
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星　緑：真ん中の惑星　青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

$\langle e_{微惑星,0}^{2}\rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$





点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差 σ

真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

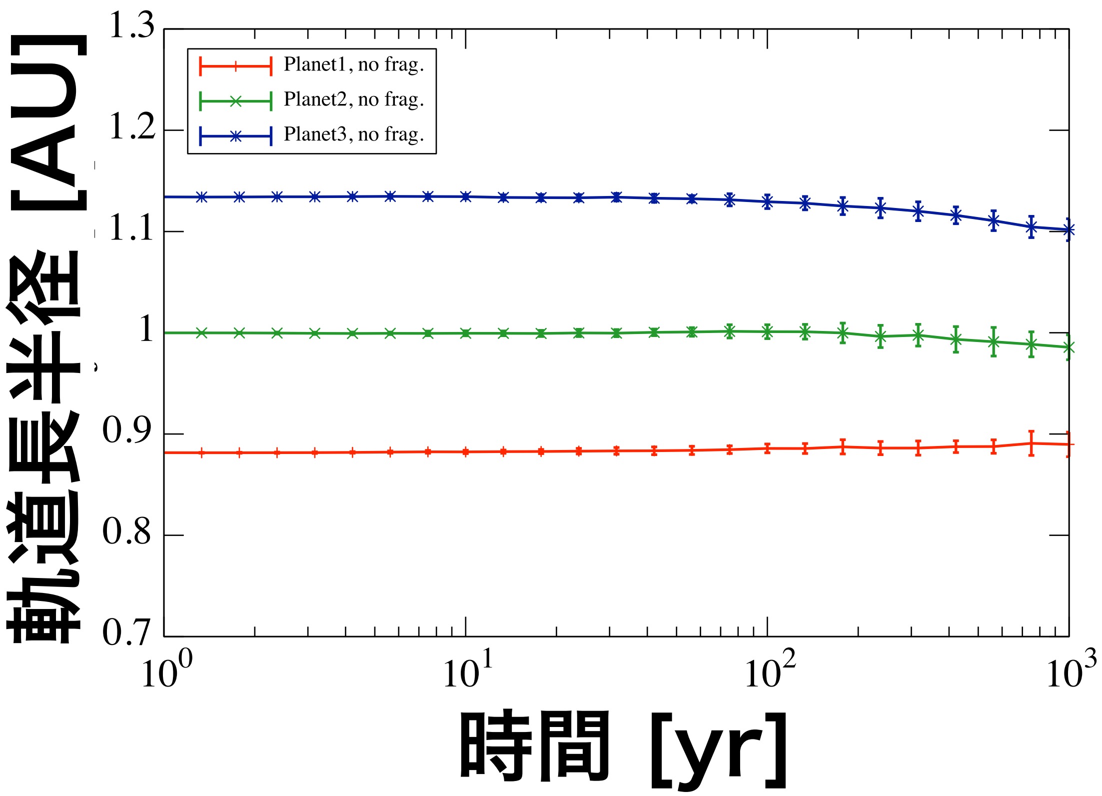
真ん中の惑星の離心率に注目する

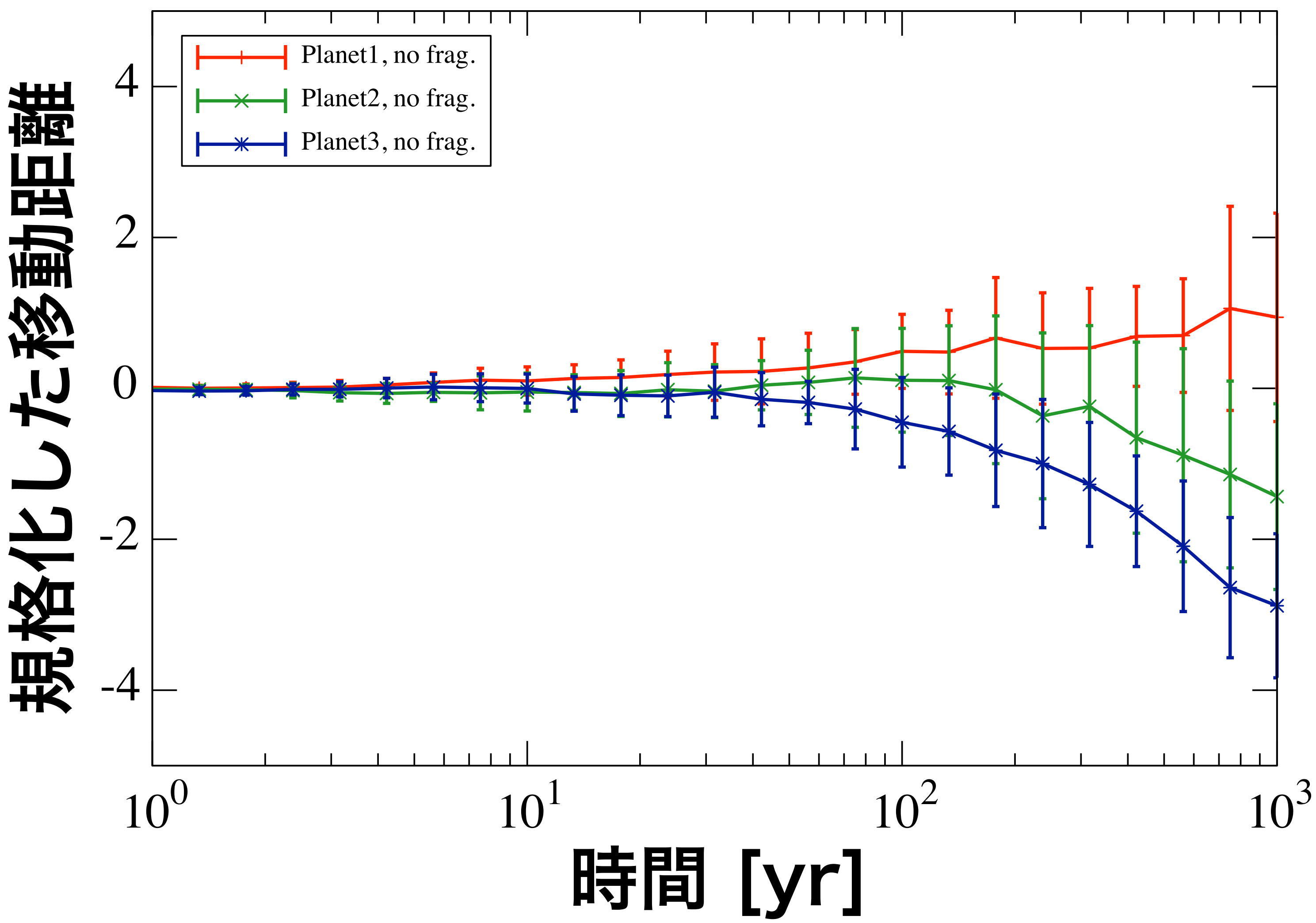
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星　　緑：真ん中の惑星　　青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

$\langle e_{微惑星,0}{}^{2}\rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.05$





点：平均値

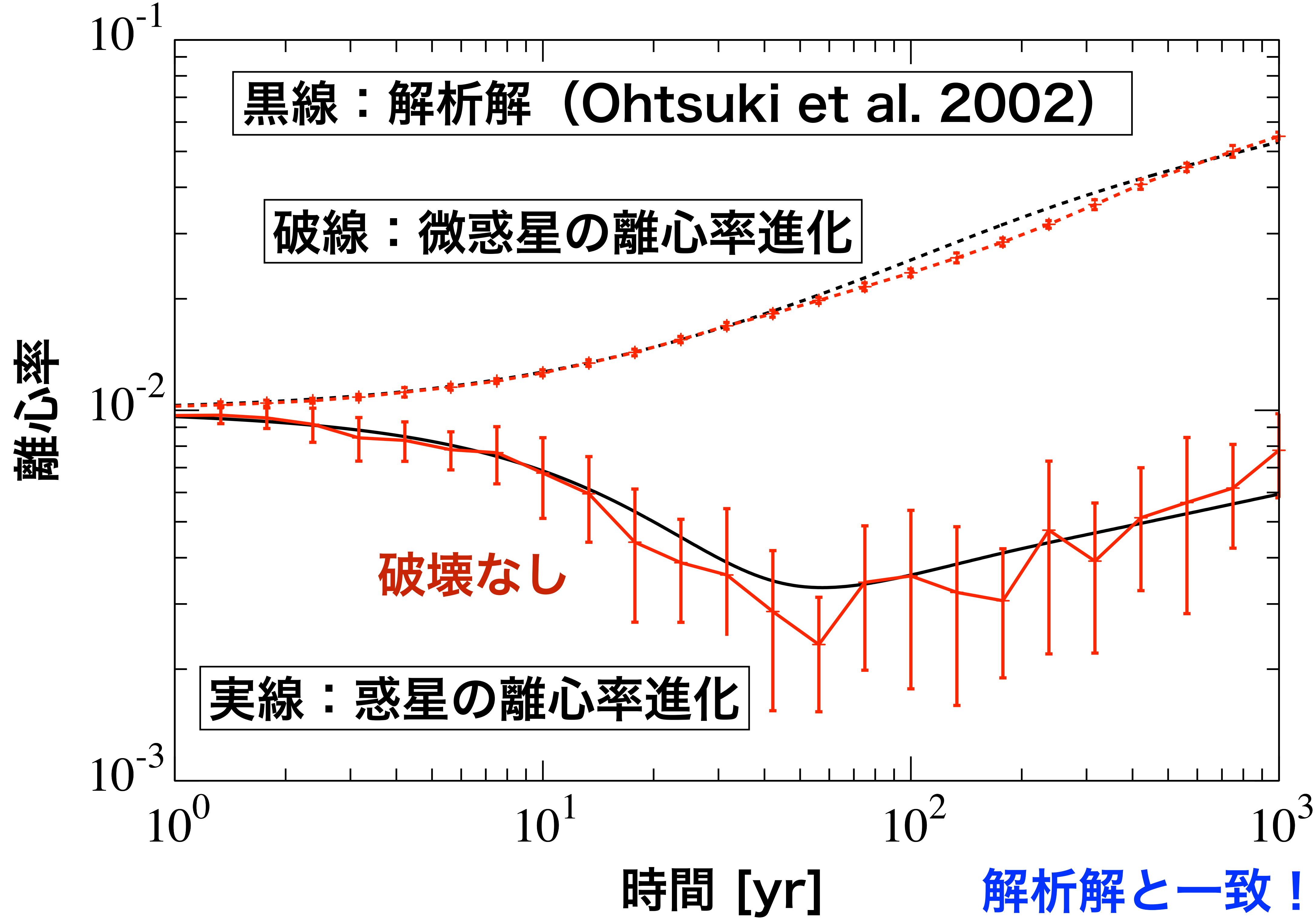
エラーバー：13runの標準偏差 σ

真ん中の惑星は軌道長半径の移動が少ない

真ん中の惑星の離心率に注目する

破壊がない場合の離心率進化

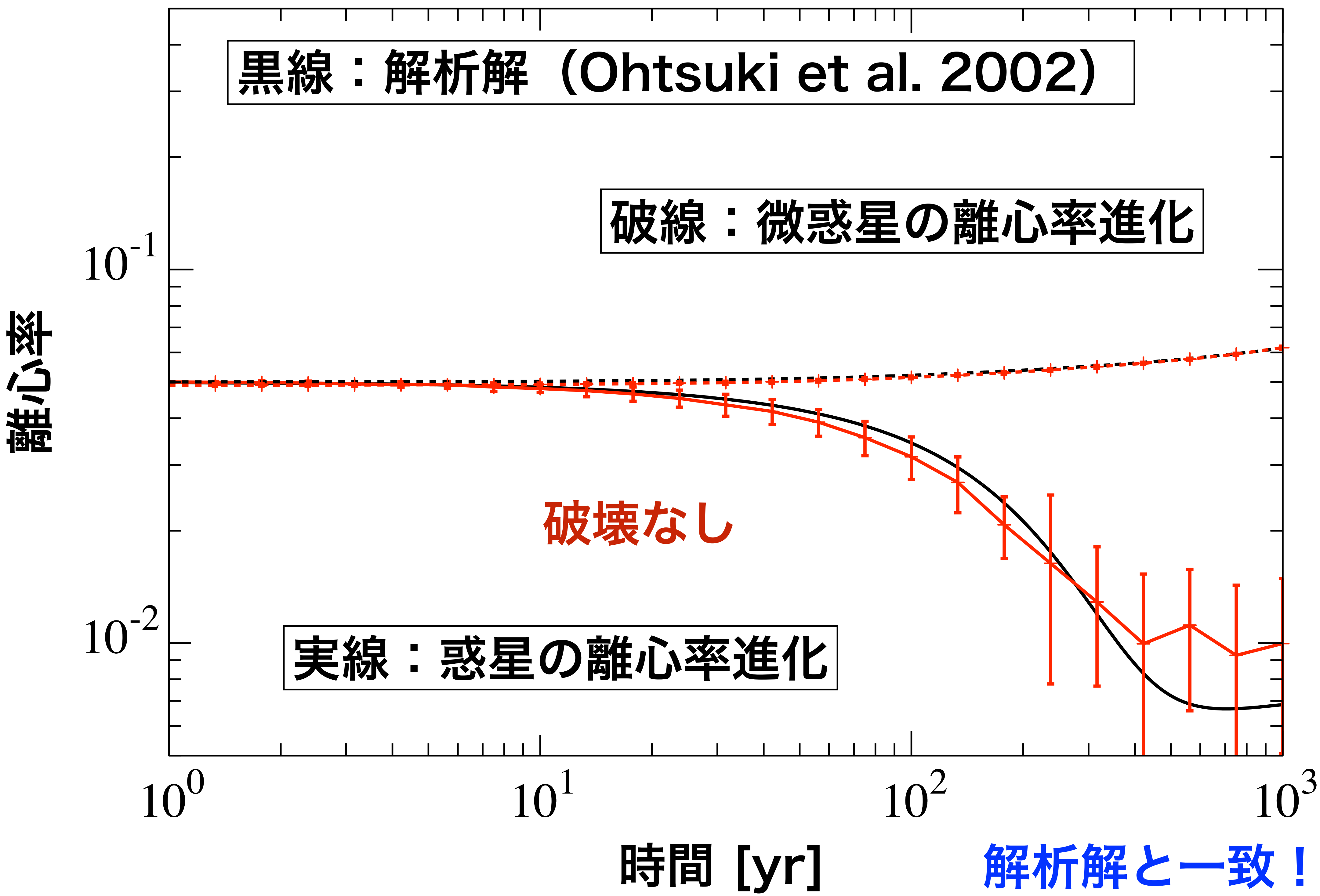
破壊なし、集積あり　$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.01$



解析解と一致！

破壊がない場合の離心率進化

破壊なし、集積あり　$\langle e_{\text{微惑星},0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$

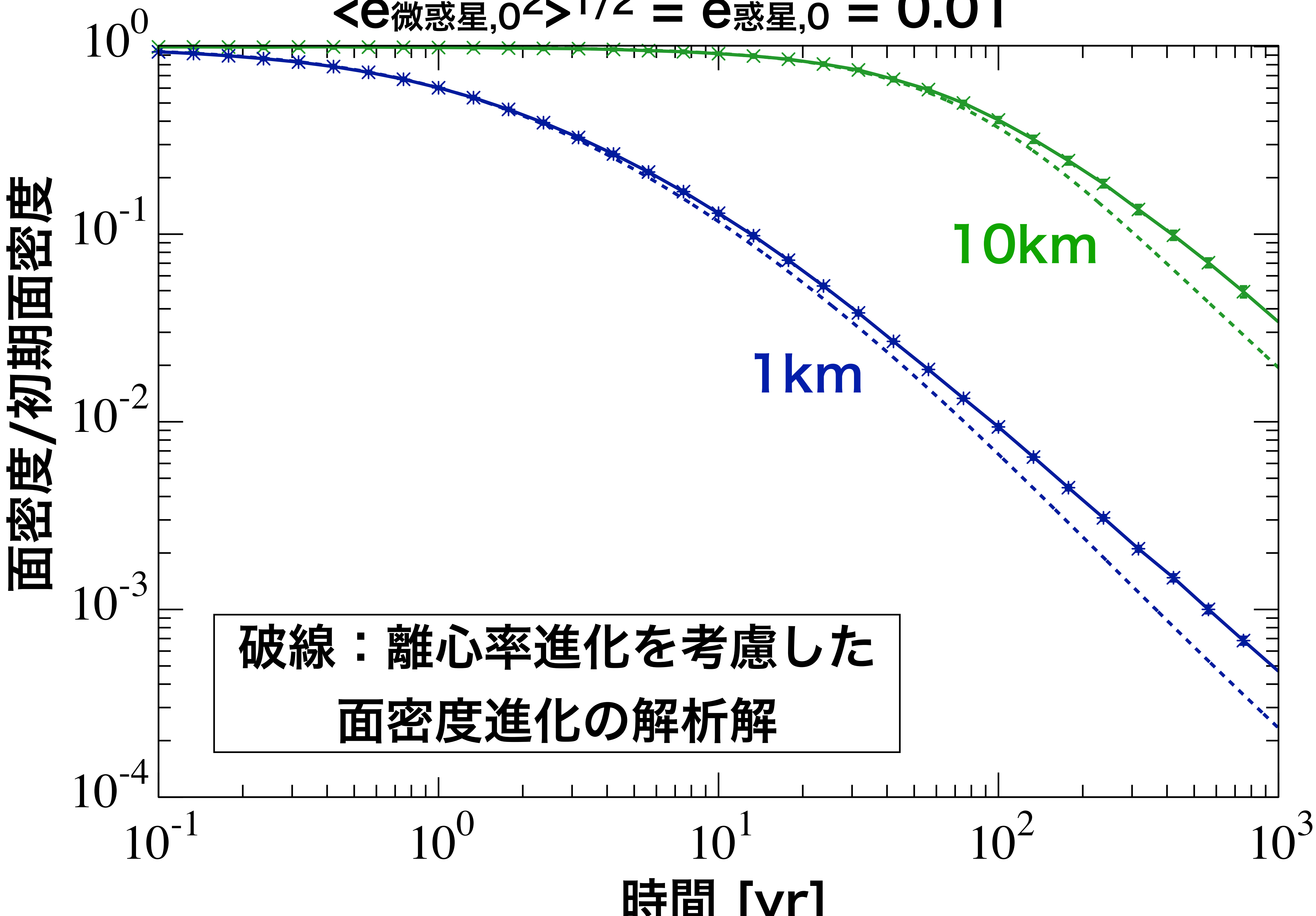


解析解と一致！

破壊による微惑星円盤の面密度進化

最大微惑星の質量m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

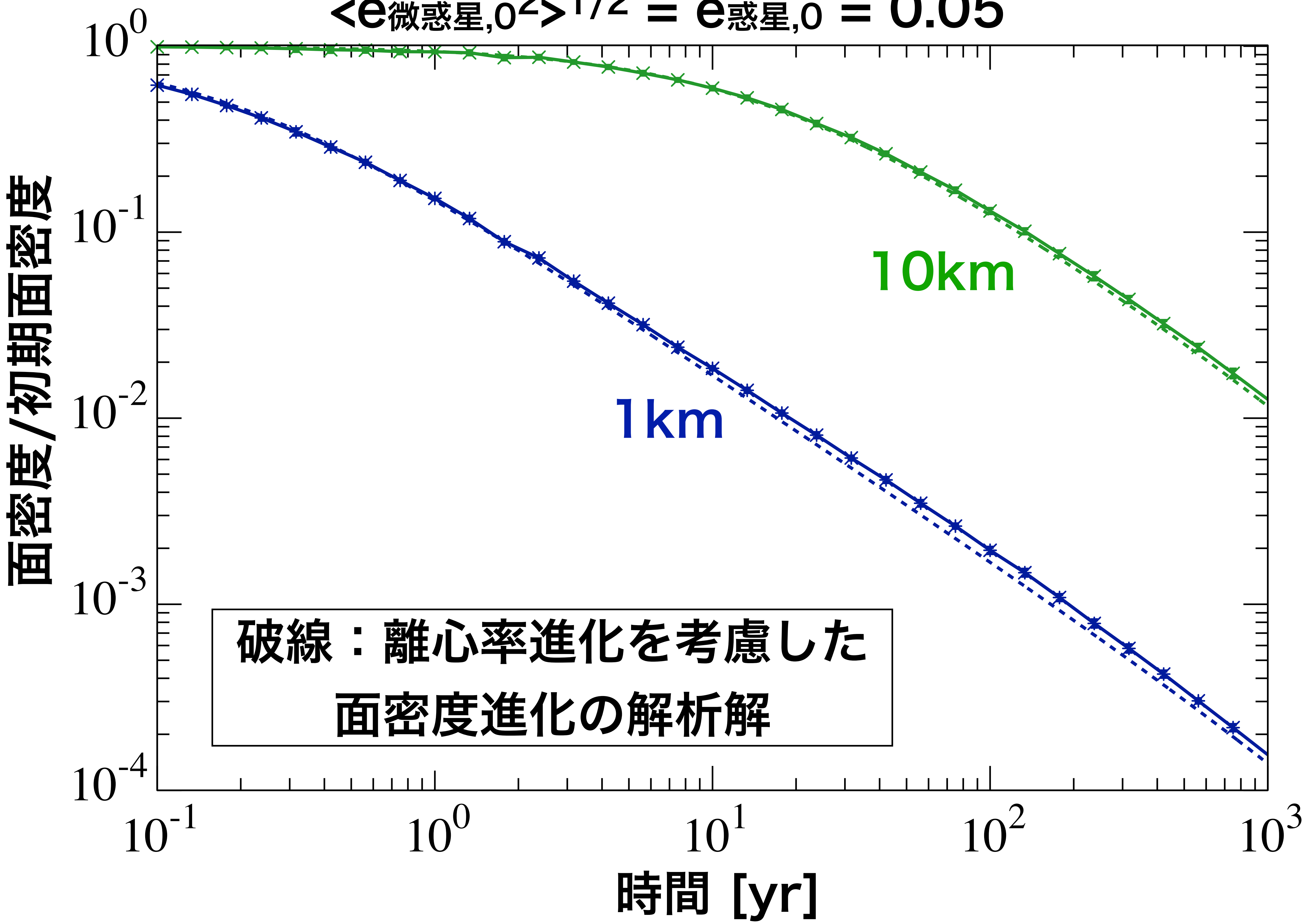
$\langle e_{微惑星,0}{}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.01$



破壊による微惑星円盤の面密度進化

最大微惑星の質量m_{max}を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

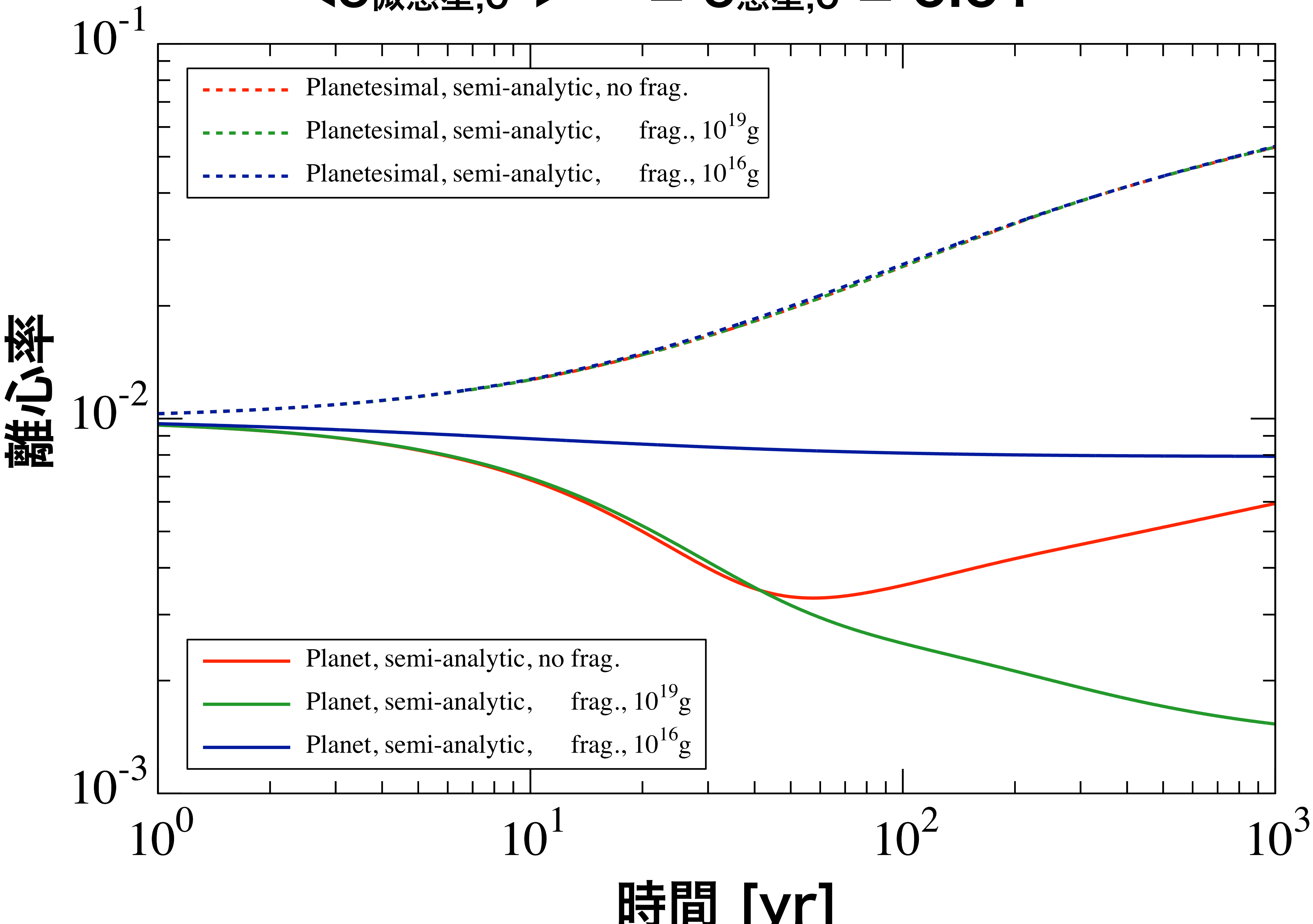
$\langle e_{微惑星,0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.05$



破壊を考慮した時の離心率進化　解析解

m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

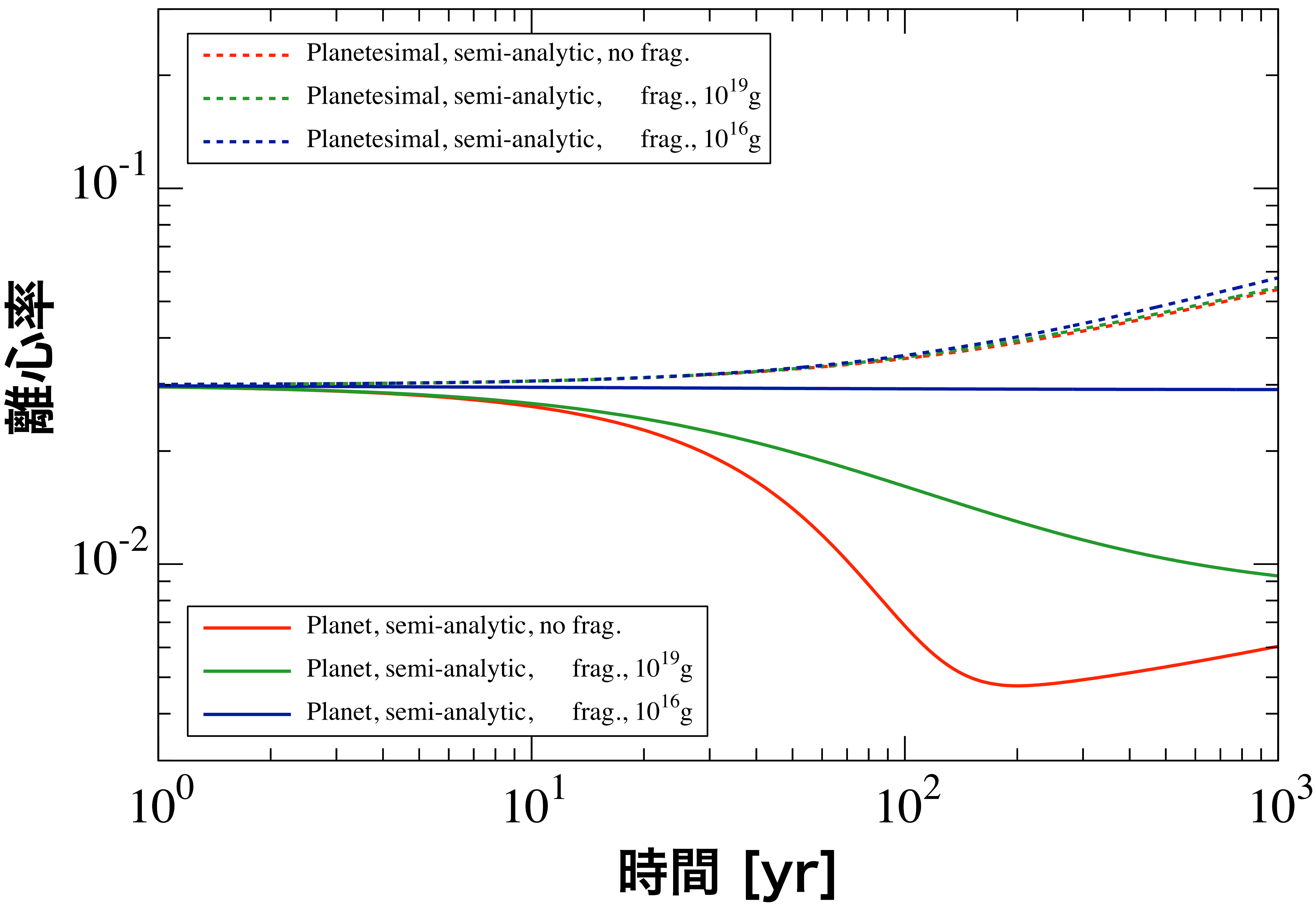
$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.01$



破壊を考慮した時の離心率進化　解析解

m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

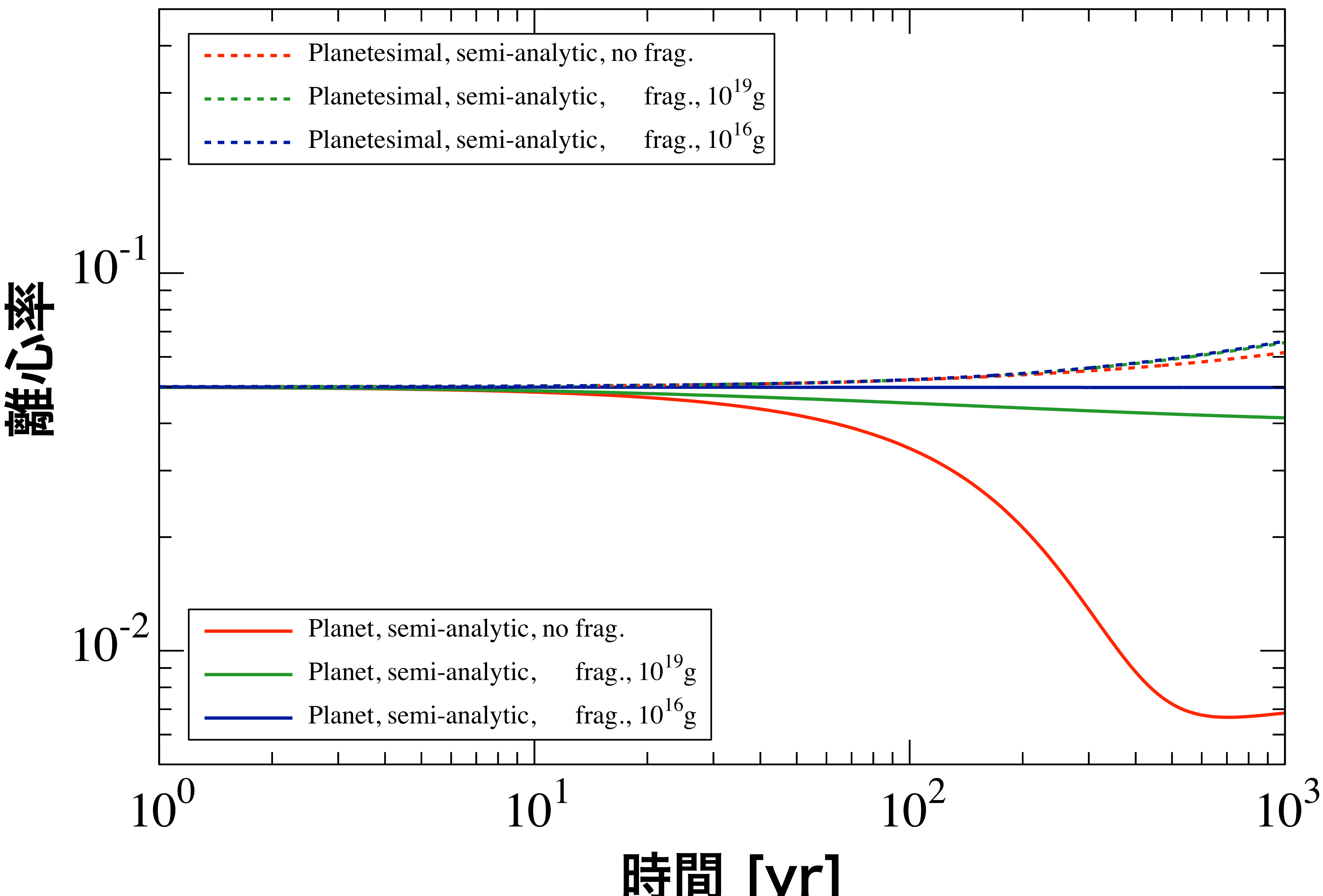
$\langle e_{微惑星,0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$



破壊を考慮した時の離心率進化　解析解

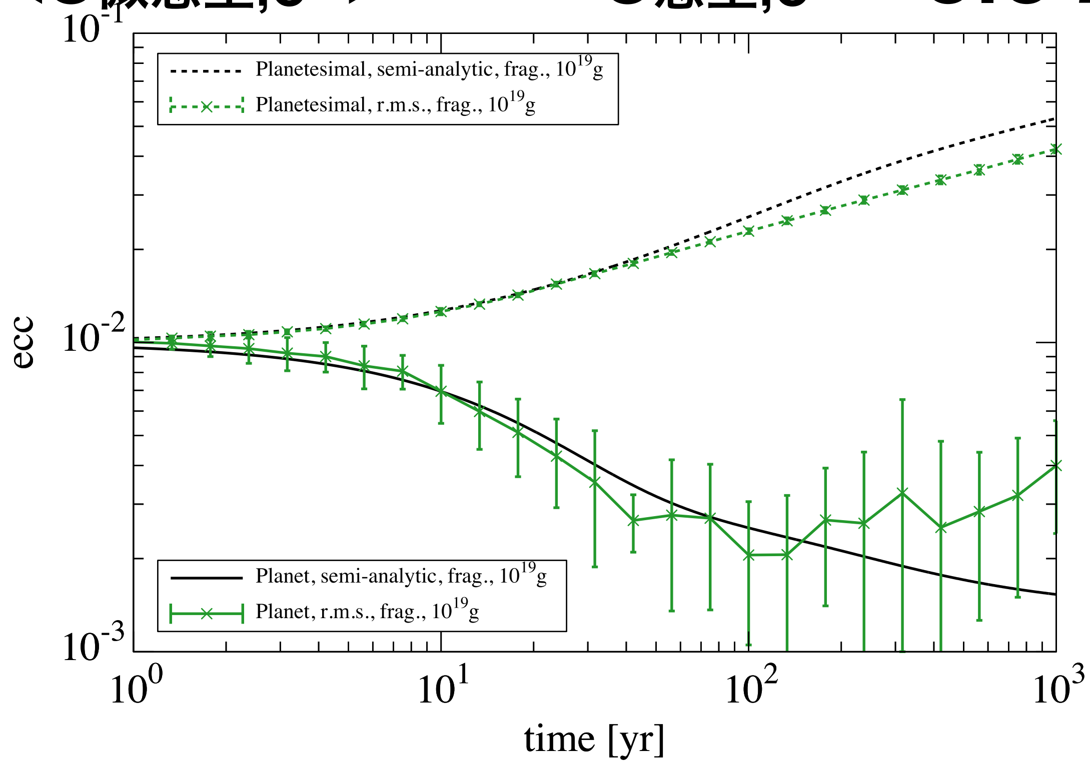
m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.05$

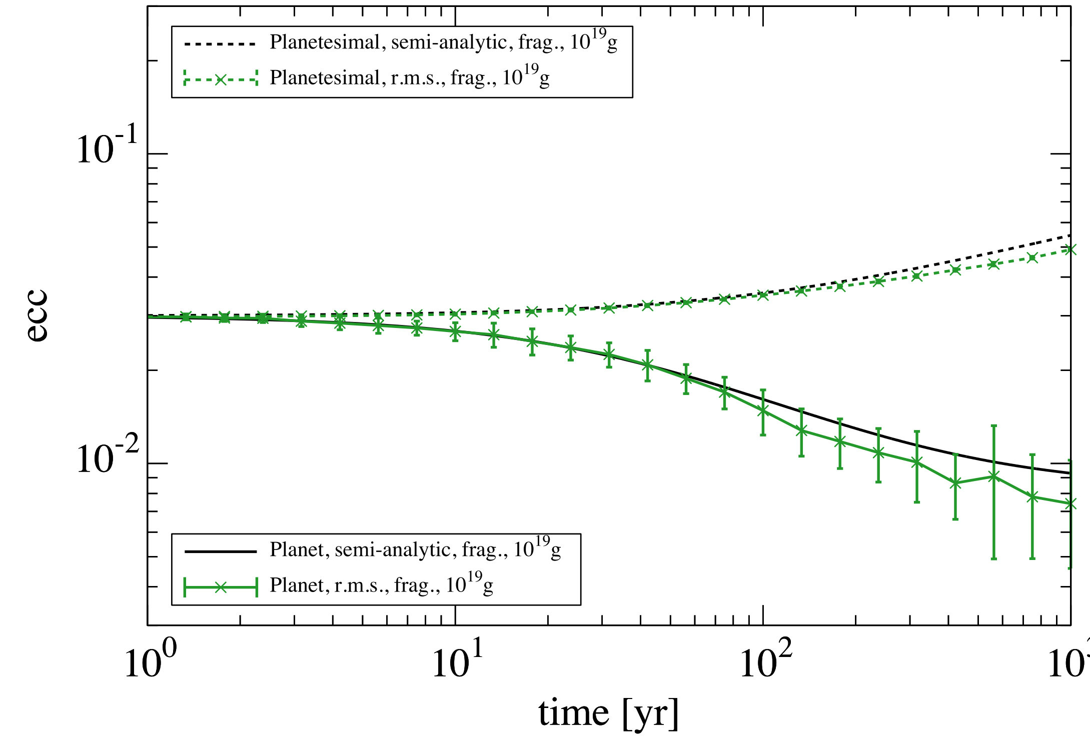


解析解と数値計算の比較 10^{19}g(~10km)

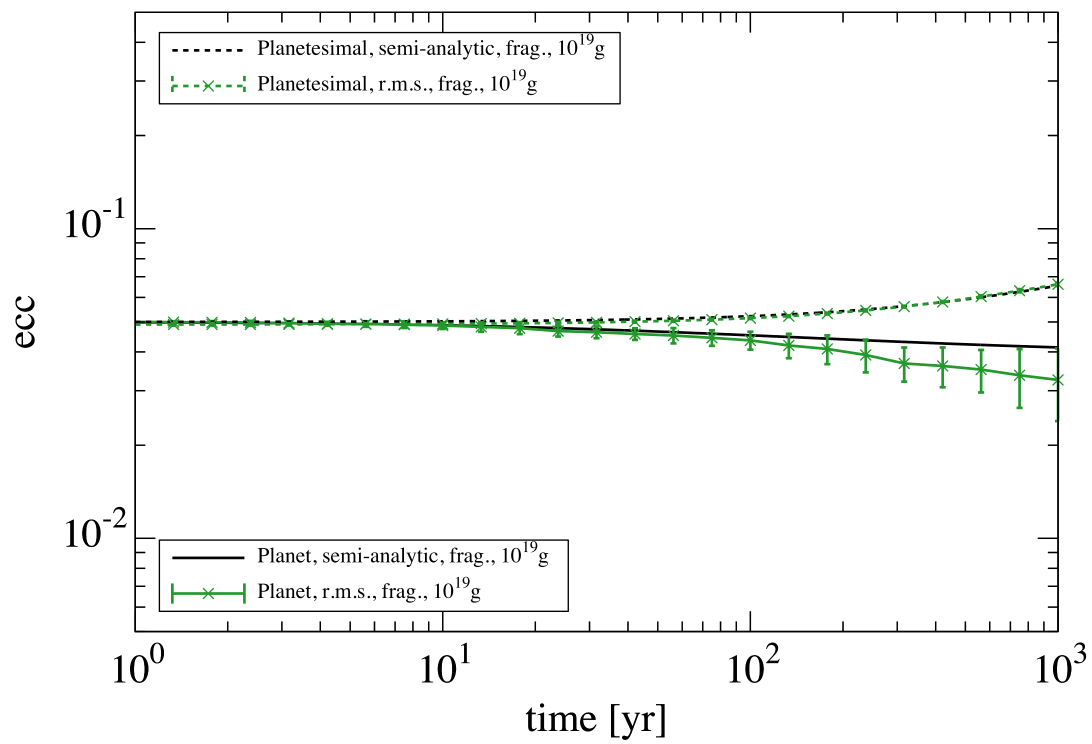
$\langle e_{\text{微惑星},0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.01$



$\langle e_{\text{微惑星},0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.03$

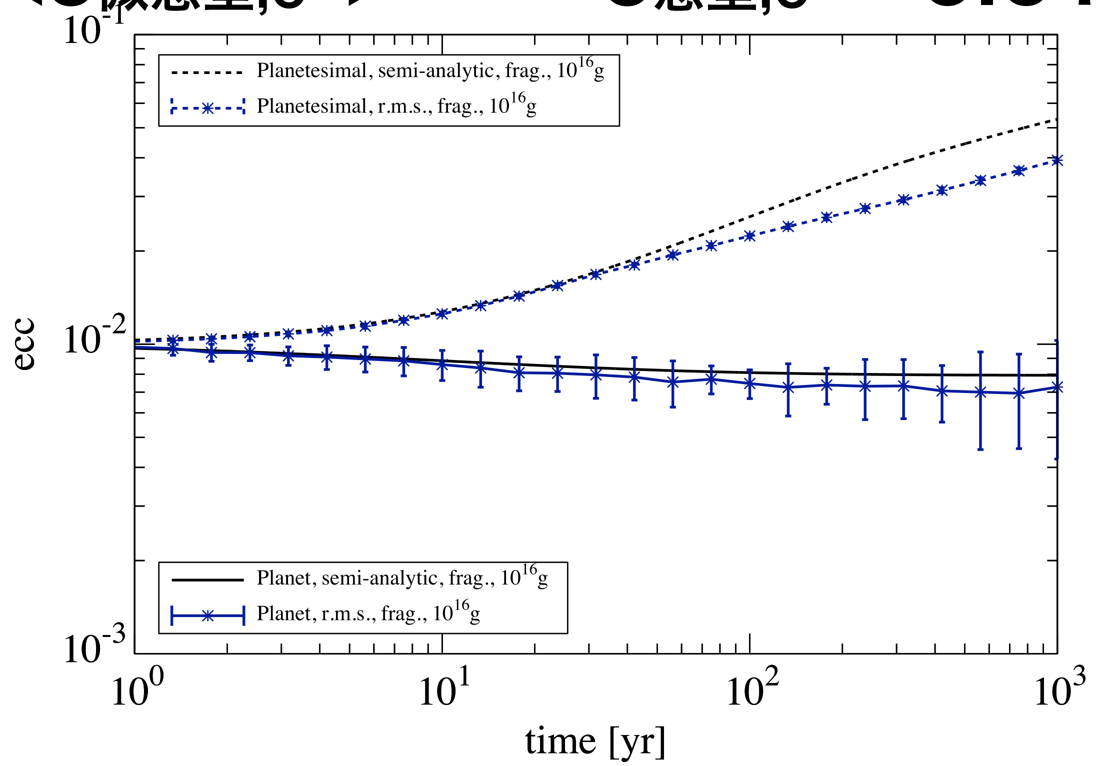


$\langle e_{\text{微惑星},0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{\text{惑星},0} = 0.05$

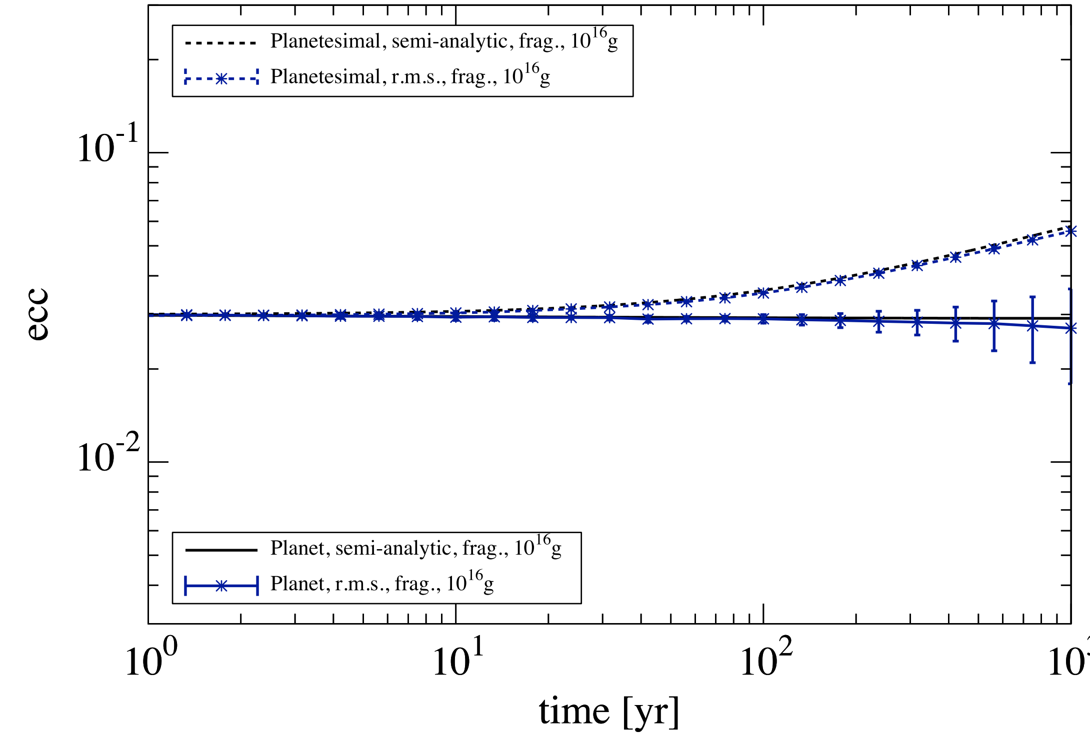


解析解と数値計算の比較 10^{16}g(~1km)

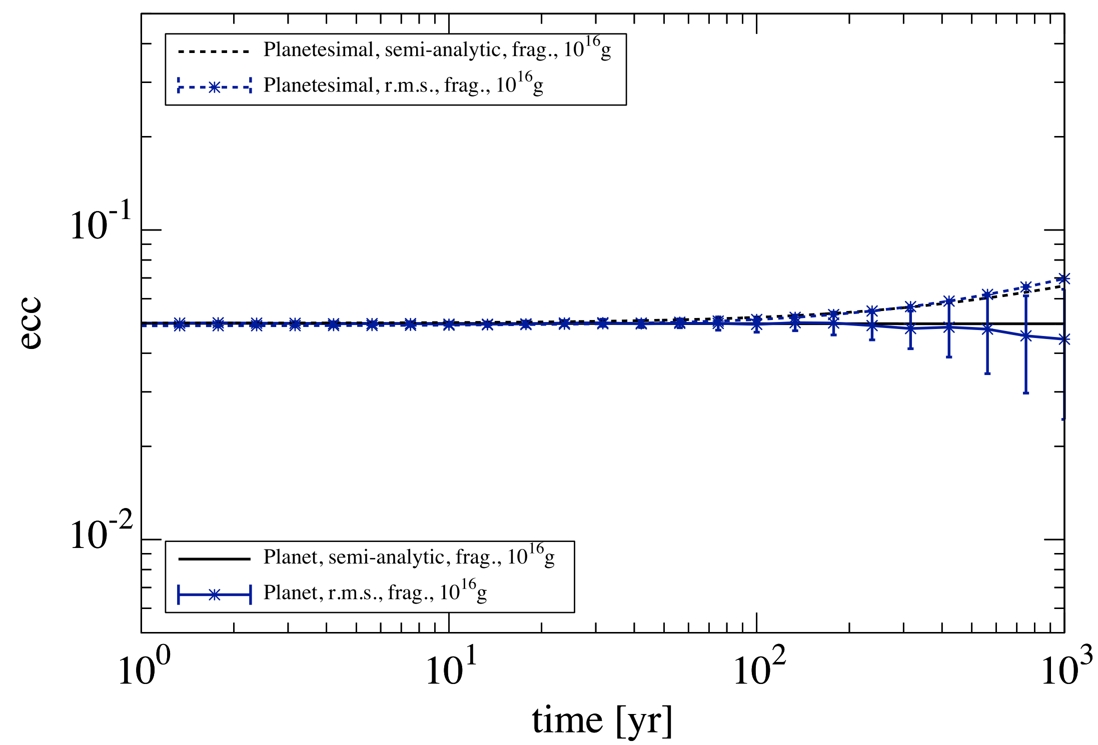
$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.01$



$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.03$



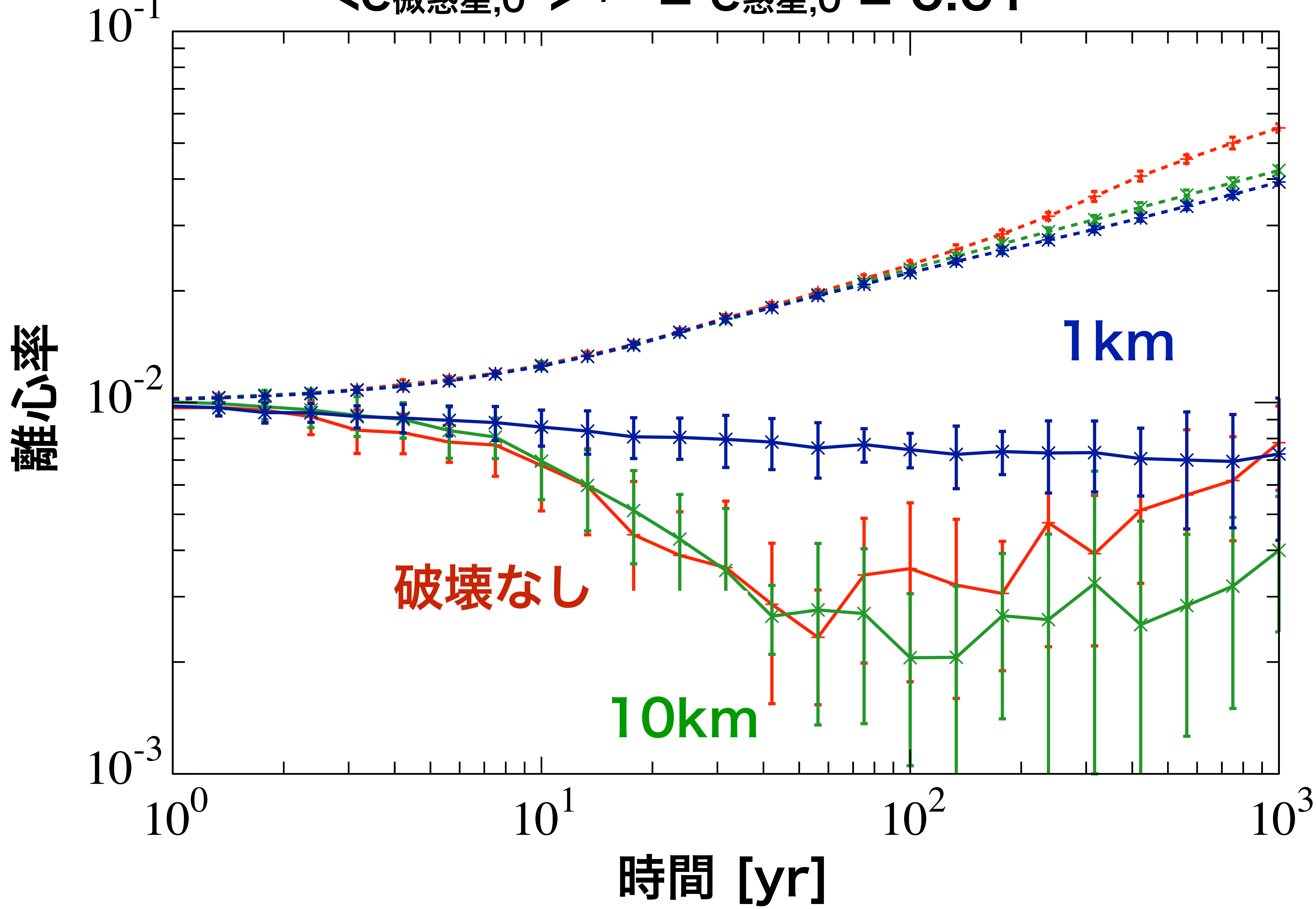
$\langle e_{微惑星,0}^2 \rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.05$



破壊が力学的摩擦に与える影響

最大微惑星の質量m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

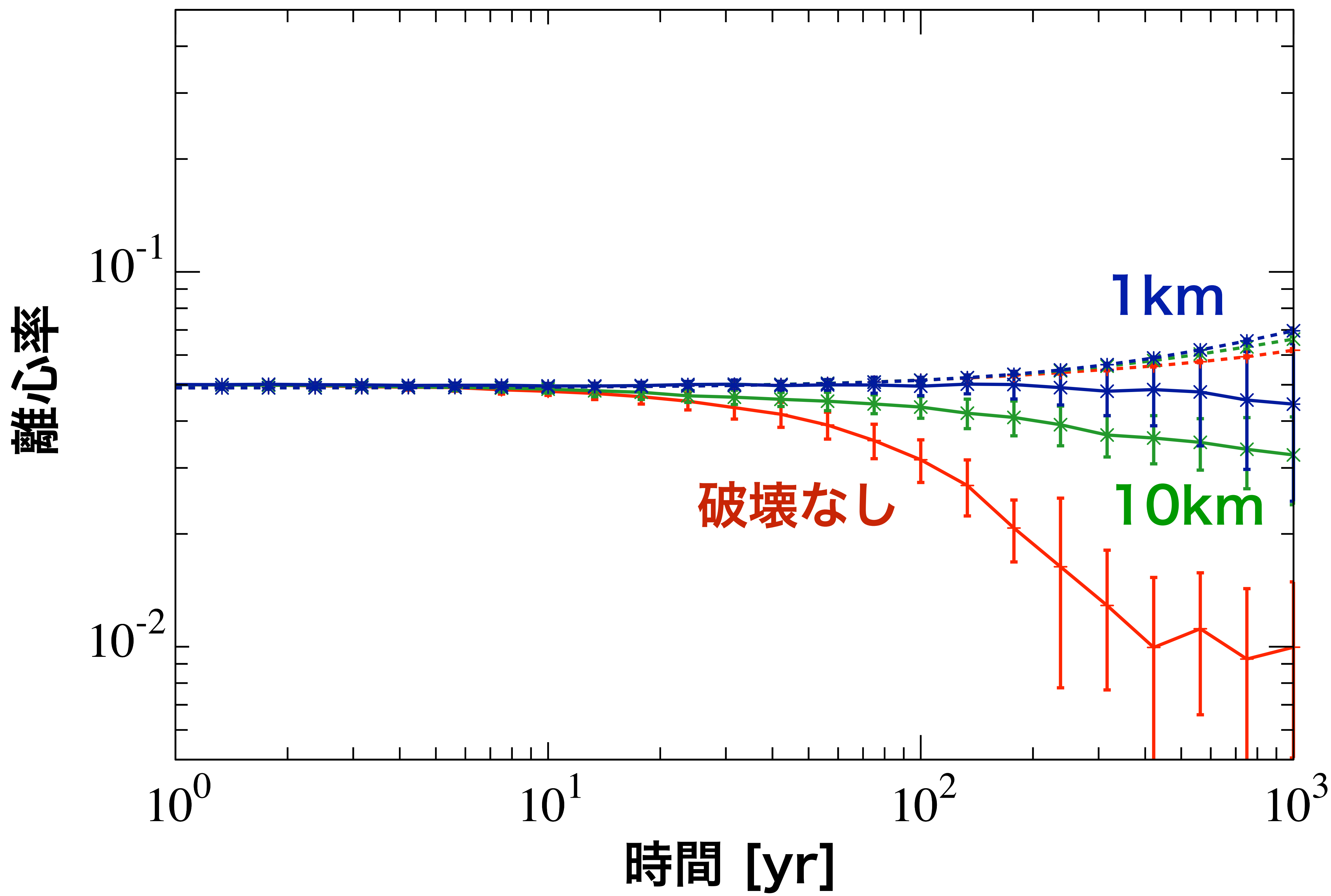
$\langle e_{微惑星,0}{}^2\rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.01$



破壊が力学的摩擦に与える影響

最大微惑星の質量m_{max} を10^{16}g(~1km)と10^{19}g(~10km)に設定

$\langle e_{微惑星,0}^2\rangle^{1/2} = e_{惑星,0} = 0.05$



ヤコビエネルギー

回転系での相対運動のエネルギー

$$E_{\mathrm{J}} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{3}{2}\Omega_{\mathrm{K}}^2 x^2 + \frac{1}{2}\Omega_{\mathrm{K}}^2 z^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r} = \mathrm{const.}$$

惑星による微惑星散乱では、ヤコビエネルギーを保つように軌道進化する

離心率、軌道傾斜角、軌道長半径で書き換えると

$$E_{\mathrm{J}} = \underline{\frac{1}{2}\left(e^2 + i^2\right) a^2\Omega_{\mathrm{K}}^2 - \frac{3}{8}\Delta a^2\Omega_{\mathrm{K}}^2} - \frac{G(M_1 + M_2)}{r}$$

$$\equiv \frac{1}{2}v_{\mathrm{inc}}^2$$

v_{inc}：ヒル圏への侵入速度

|Δa| 増 ⇒ $(e^2 + i^2)^2$ 増　　Viscous Stirringの原因

4次のエルミート法1

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{p,j} = \boldsymbol{x}_{0,j} + \Delta t \boldsymbol{v}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{a}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^3}{6}\dot{\boldsymbol{a}}_{0,j} \\ \boldsymbol{v}_{p,j} = \boldsymbol{v}_{0,j} + \Delta t \boldsymbol{a}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\dot{\boldsymbol{a}}_{0,j} \end{cases}$$

予測子

添字０はt_0での値

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

ここで $\begin{cases} \boldsymbol{r}_{jk} = \boldsymbol{x}_{p,j} - \boldsymbol{x}_{p,k} \\ \boldsymbol{v}_{jk} = \boldsymbol{v}_{p,j} - \boldsymbol{v}_{p,k} \end{cases}$ とおくと、Δt 進めた加速度は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{1,j} = -\displaystyle\sum_{k\neq j} G m_k \frac{\boldsymbol{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \\ \dot{\boldsymbol{a}}_{1,j} = -\displaystyle\sum_{k\neq j} G m_k \left[\frac{\boldsymbol{v}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(\boldsymbol{v}_{jk}\cdot \boldsymbol{r}_{jk})\boldsymbol{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \end{cases}$$

ϵ：ソフトニングパラメータ

添字１は $t_0 + \Delta t$ での値

4次のエルミート法2

step2続き

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{1,j} = \boldsymbol{a}_{0,j} + \Delta t \dot{\boldsymbol{a}}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^3}{6}\boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \\ \dot{\boldsymbol{a}}_{1,j} = \dot{\boldsymbol{a}}_{0,j} + \Delta t \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$

3次のエルミート補完
（テイラー展開）

逆に解く

⇨

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} = \dfrac{-6(\boldsymbol{a}_{0,j} - \boldsymbol{a}_{1,j}) - \Delta t(4\dot{\boldsymbol{a}}_{0,j} + 2\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j})}{\Delta t^2} \\ \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} = \dfrac{12(\boldsymbol{a}_{0,j} - \boldsymbol{a}_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{\boldsymbol{a}}_{0,j} + \dot{\boldsymbol{a}}_{1,j})}{\Delta t^3} \end{cases}$$

step3：加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算（4次精度）

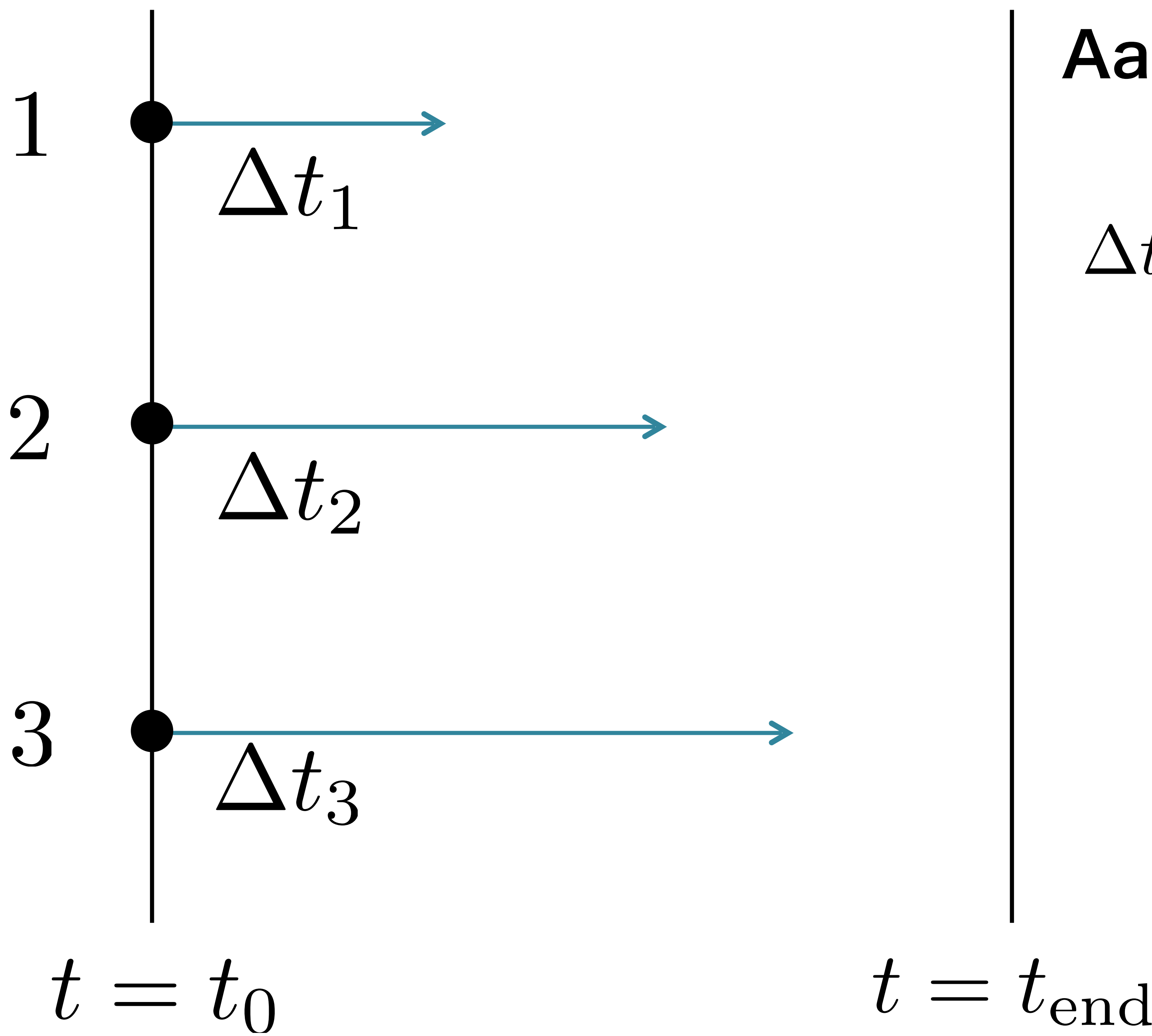
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{c,j} = \boldsymbol{x}_{p,j} + \dfrac{\Delta t^4}{24}\boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \alpha\dfrac{\Delta t^5}{120}\boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \\ \boldsymbol{v}_{c,j} = \boldsymbol{v}_{p,j} + \dfrac{\Delta t^3}{6}\boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \dfrac{\Delta t^4}{24}\boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$

修正子

独立タイムステップ1

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

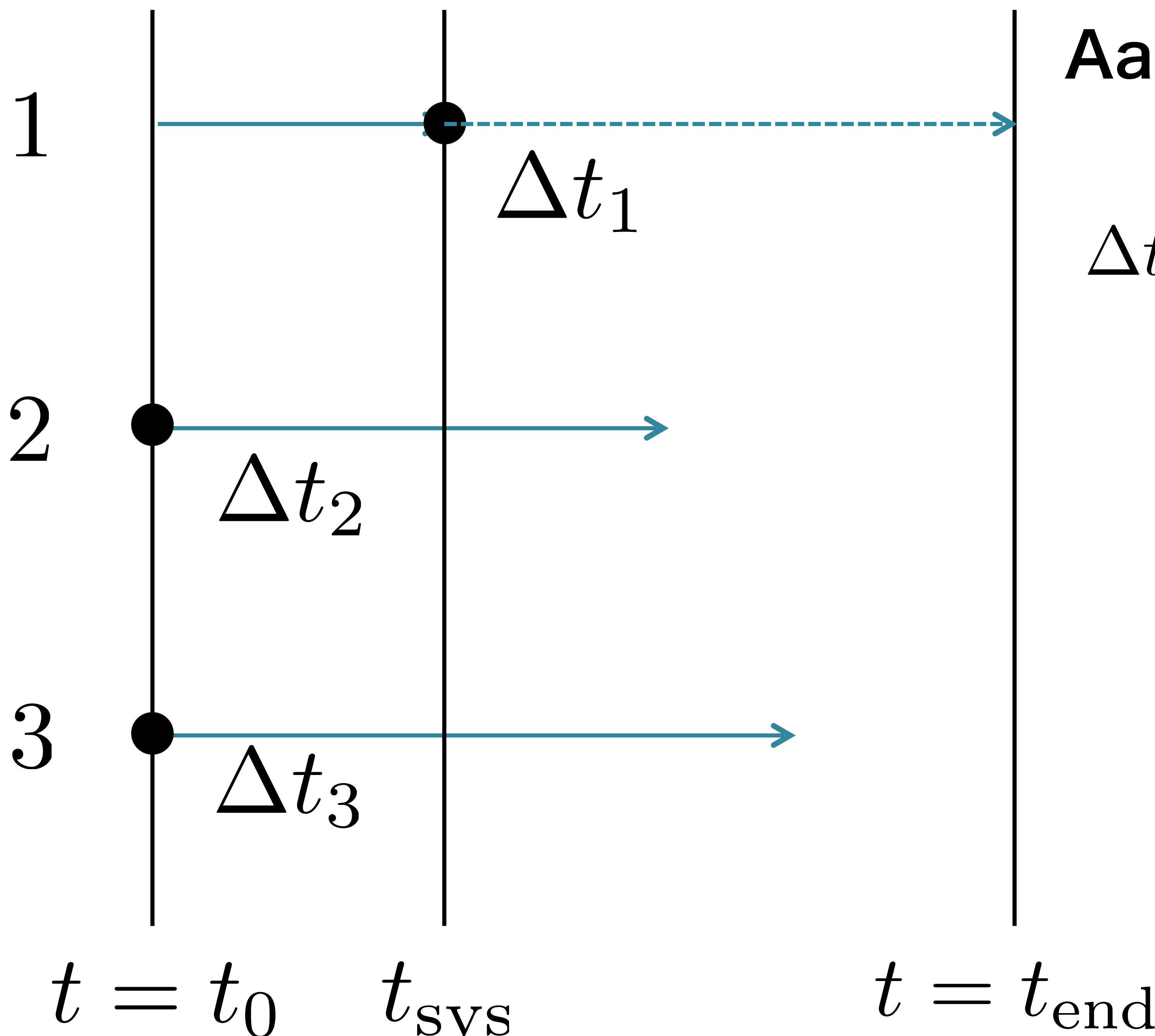
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}| + |\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j}| + |\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}|^2}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j}\Delta t \\ \boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$

独立タイムステップ2

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

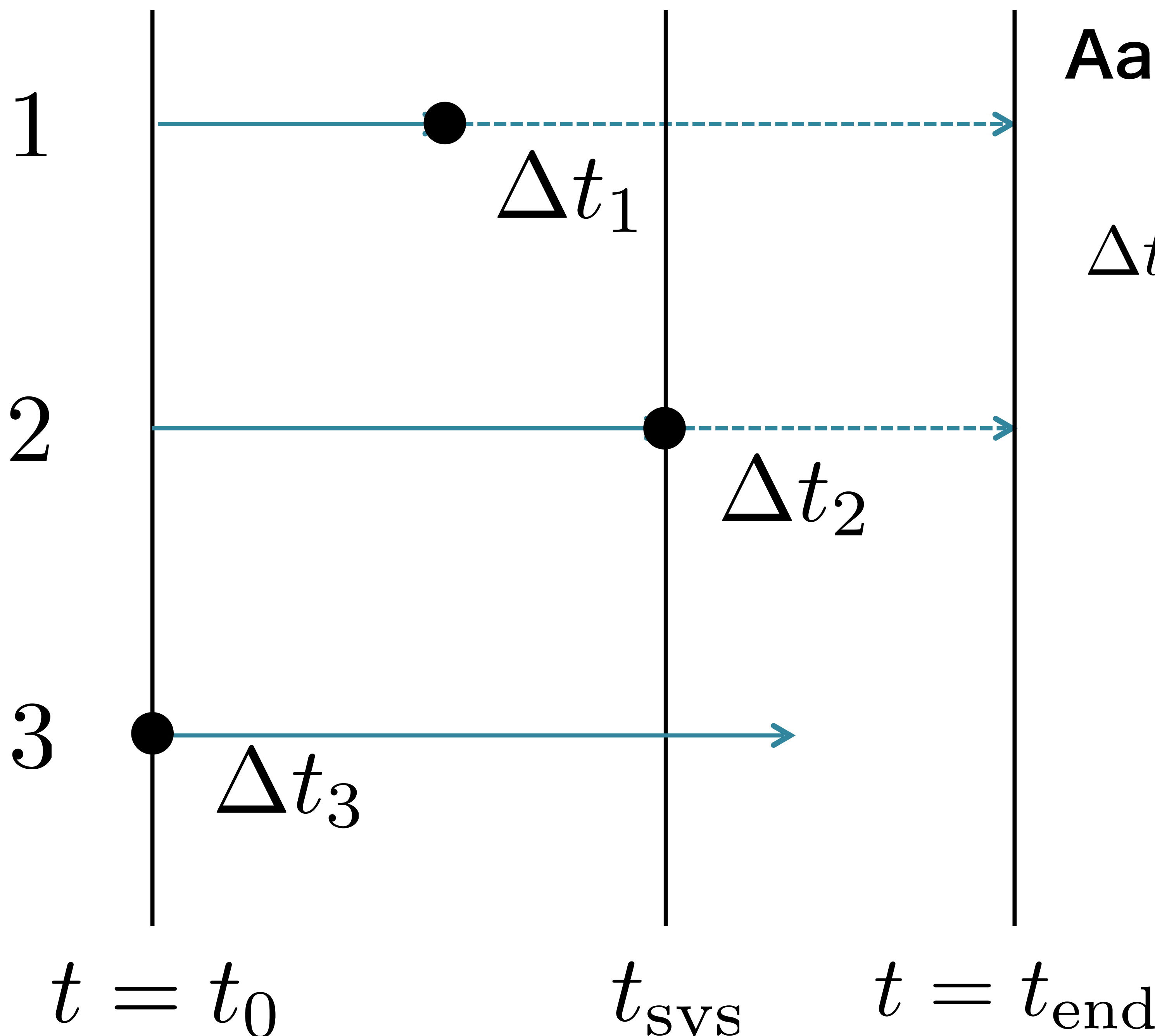
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}| + |\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j}| + |\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}|^2}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j}\Delta t \\ \boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$

独立タイムステップ3

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

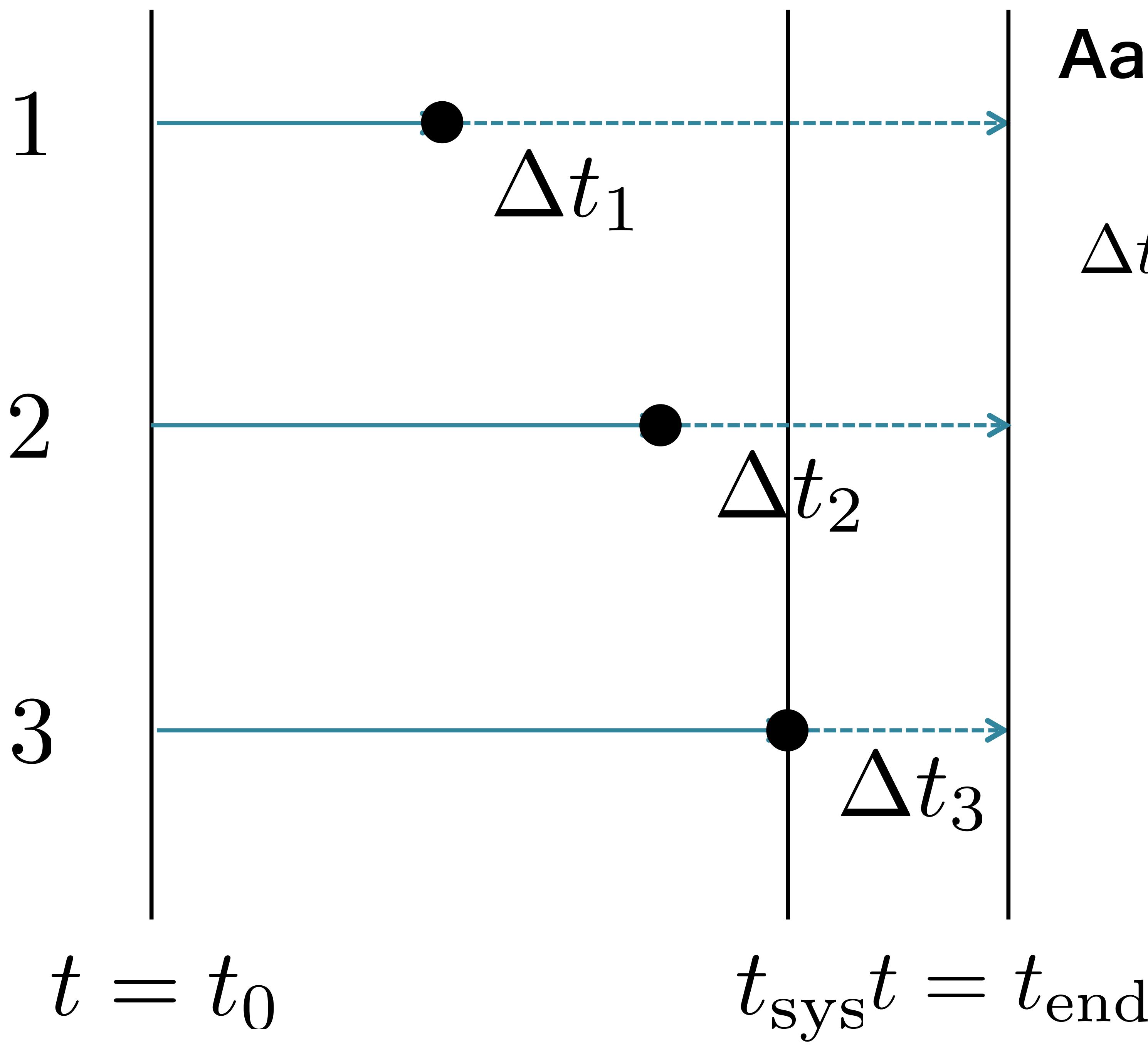
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}| + |\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j}| + |\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}|^2}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j}\Delta t \\ \boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$

独立タイムステップ4

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

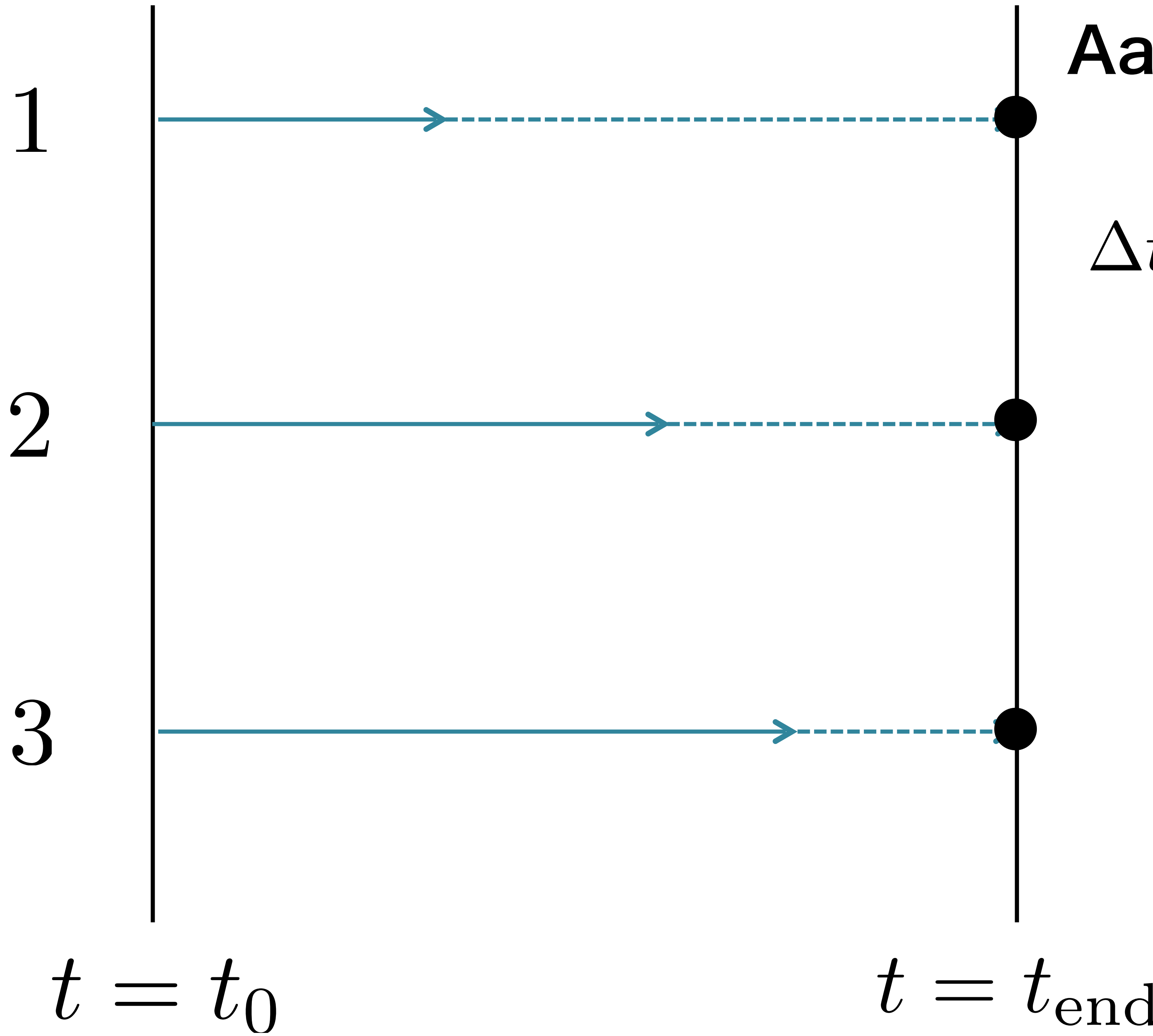
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}| + |\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j}| + |\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}|^2}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j}\Delta t \\ \boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$

独立タイムステップ5

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}| + |\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\boldsymbol{a}}_{1,j}||\boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j}| + |\boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j}|^2}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{(2)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(2)}_{0,j} + \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j}\Delta t \\ \boldsymbol{a}^{(3)}_{1,j} = \boldsymbol{a}^{(3)}_{0,j} \end{cases}$$