

衝突・破壊をとりいれたN体計算の開発と 地球型惑星形成後期のシミュレーション

磯谷 和秀

理論宇宙物理学研究室 (Ta研)

地球型惑星 … 水星、金星、地球、火星のような岩石惑星

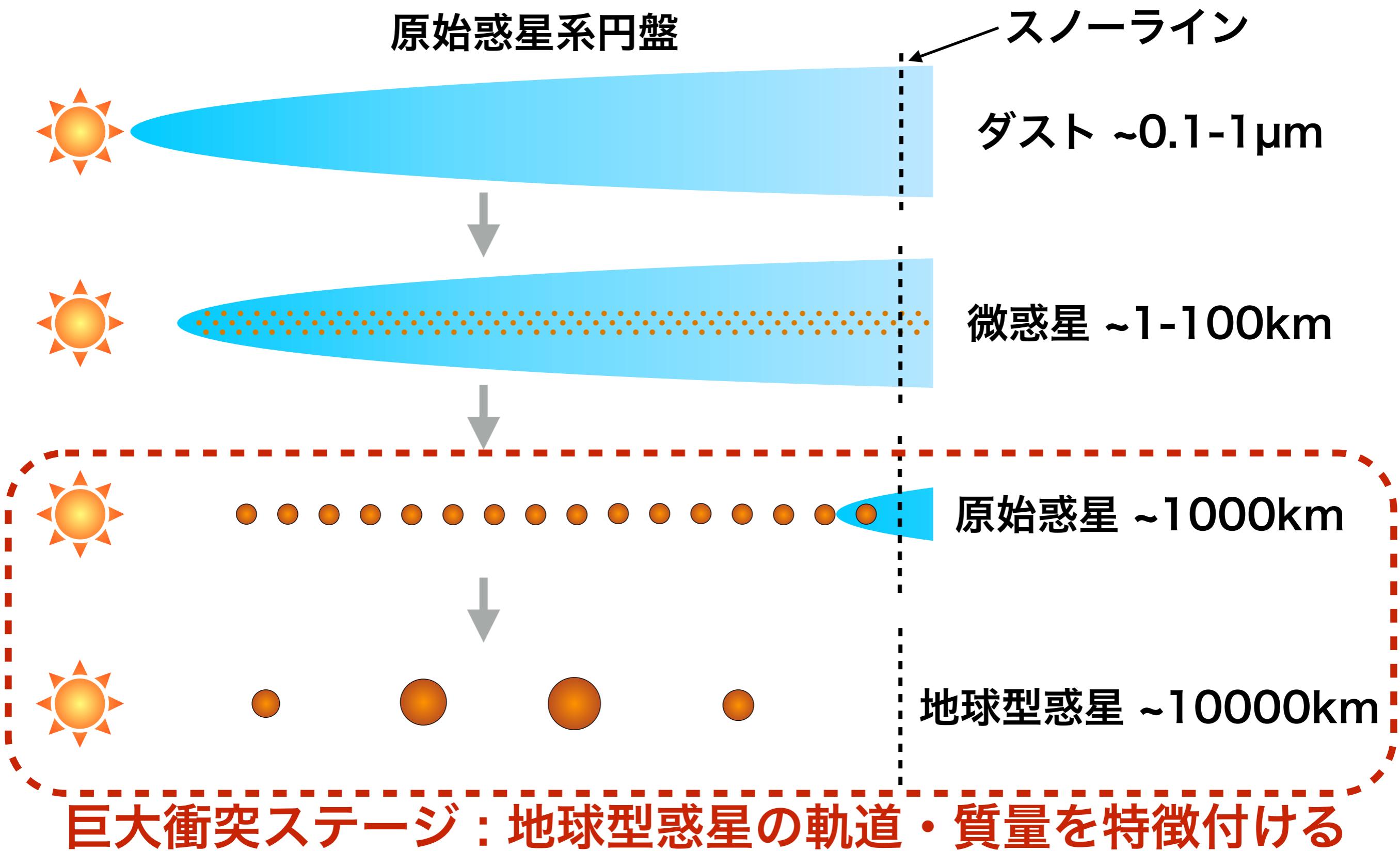
微惑星 … 地球型惑星形成の材料となる1–100kmサイズの天体

衝突・破壊 … 微惑星同士の高速度衝突による破壊現象により破片が生じる

背景

地球型惑星形成のこれまでの理解
微惑星同士の衝突・破壊現象

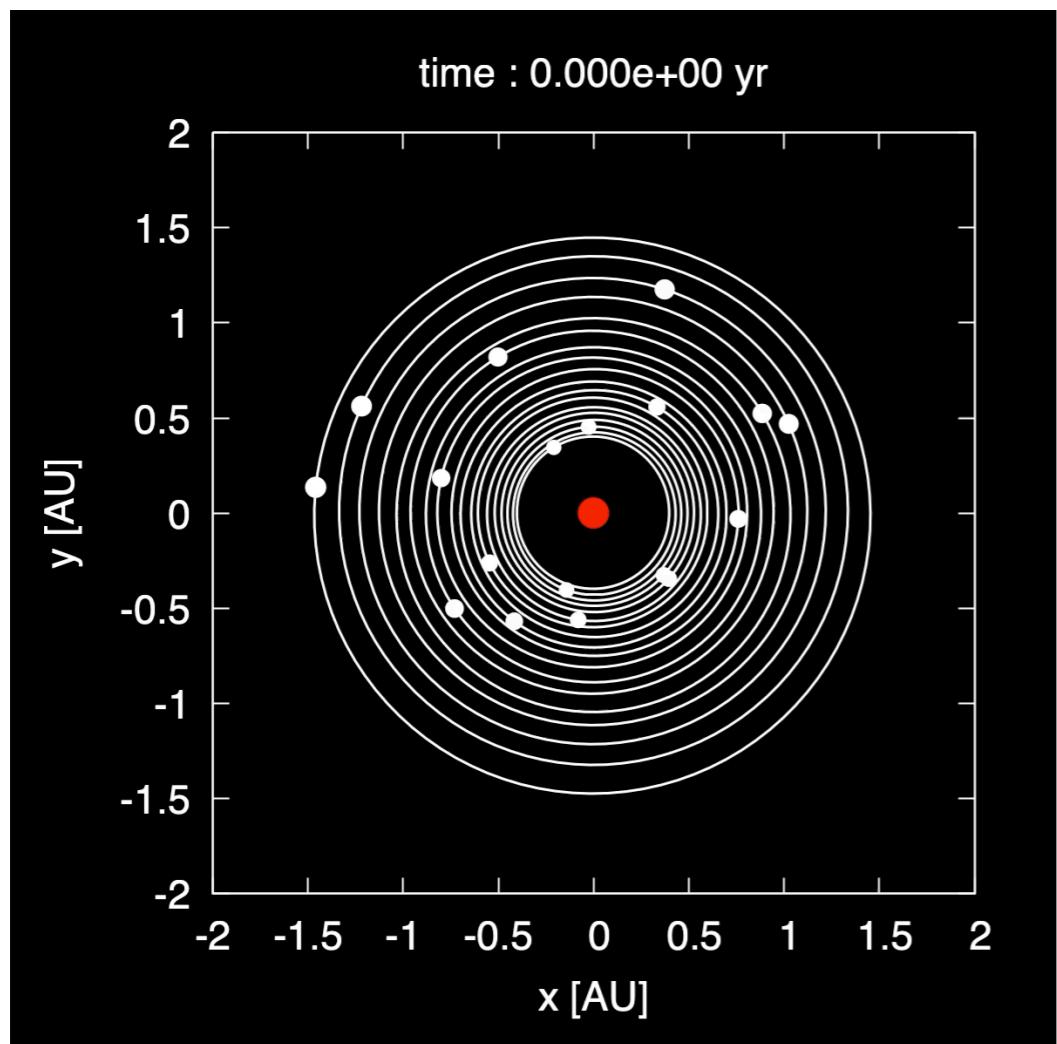
地球型惑星形成（標準モデル）



これまでの巨大衝突ステージの理解

- 原始惑星の衝突・合体を模擬したN体計算

位置（白丸） & 軌道（白線）



完全合体

- 相互の重力擾動による軌道不安定

軌道が交差して衝突が起こる
軌道の歪み具合：離心率 e

- 1億年程度で地球質量の惑星が形成

(e.g., Chambers & Wetherill, 1998; Agnor et al., 1999;
Kominami & Ida, 2002; Kokubo et al., 2006)

- 最終的な地球型惑星の離心率 e

(Kokubo et al., 2006)

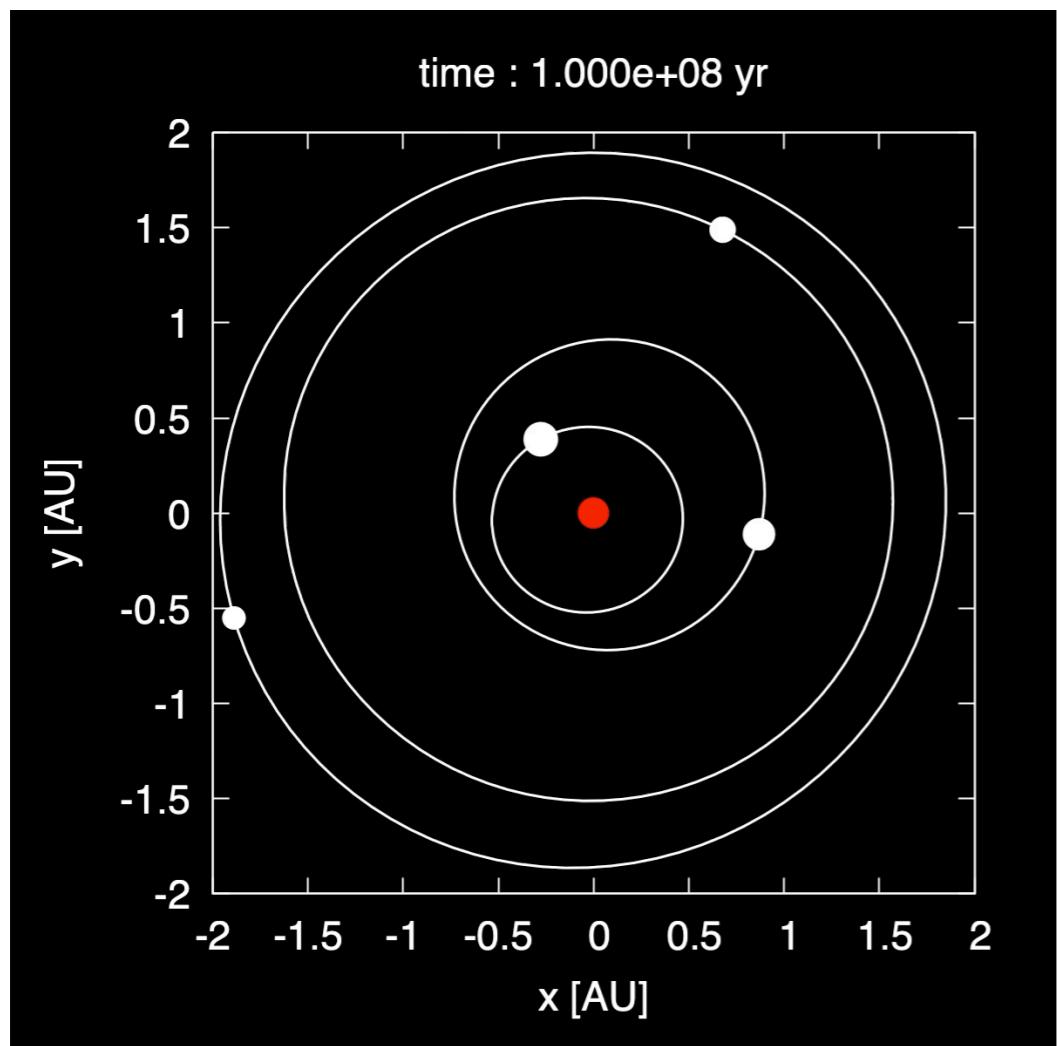
質量・軌道間隔を説明できるが

$$e \sim 0.05-0.15$$

これまでの巨大衝突ステージの理解

- 原始惑星の衝突・合体を模擬したN体計算

位置（白丸） & 軌道（白線）



完全合体

- 相互の重力擾動による軌道不安定

軌道が交差して衝突が起こる
軌道の歪み具合：離心率 e

- 1億年程度で地球質量の惑星が形成

(e.g., Chambers & Wetherill, 1998; Agnor et al., 1999;
Kominami & Ida, 2002; Kokubo et al., 2006)

- 最終的な地球型惑星の離心率 e

(Kokubo et al., 2006)

質量・軌道間隔を説明できるが

$$e \sim 0.05-0.15$$

太陽系地球型惑星の離心率（地球～0.0167、金星～0.00677）と矛盾

先行研究の問題点

- ・巨大衝突ステージ：原始惑星以外に小さな微惑星が円盤状に存在

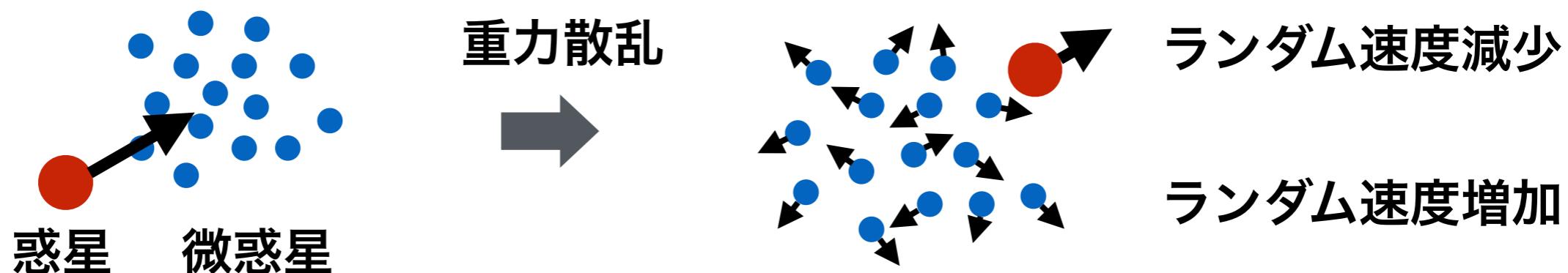
= “最終円盤”



(NASA/JPL)

- ・地球型惑星と微惑星の力学的摩擦

(e.g., O'Brien et al., 2006; Morishima et al., 2010)



- ・ランダム速度 \sim (離心率 e) \times (円軌道での速度) : 回転座標系における速度
- ・ランダム運動エネルギー \propto (質量) \times (離心率2乗 e^2)

先行研究の問題点

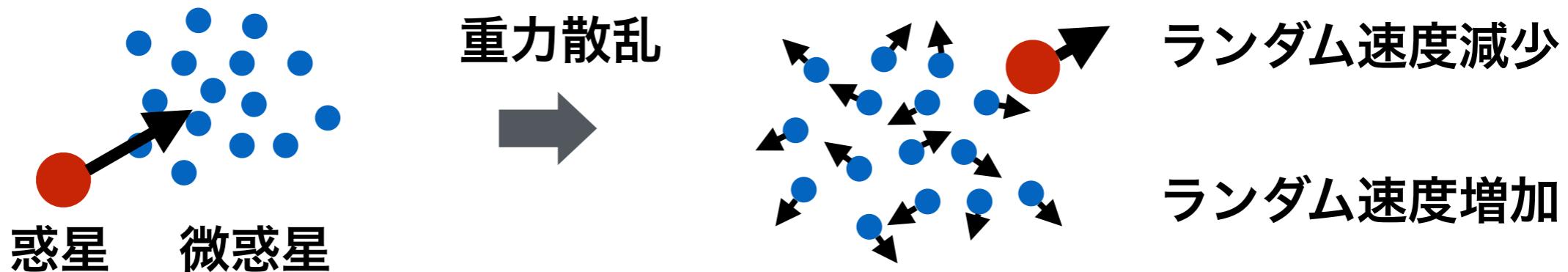
- ・巨大衝突ステージ：原始惑星以外に小さな微惑星が円盤状に存在

= “最終円盤”



(NASA/JPL)

- ・ 地球型惑星と微惑星の力学的摩擦
(e.g., O'Brien et al., 2006; Morishima et al., 2010)



- ・ ランダム速度 \sim (離心率 e) \times (円軌道での速度) : 回転座標系における速度
- ・ ランダム運動エネルギー \propto (質量) \times (離心率2乗 e^2)

ランダム運動エネルギーの等分配 \Rightarrow 地球型惑星の離心率は下がる！

地球型惑星の軌道進化は最終円盤も考慮しなければならない

最終円盤を扱うことの難しさ

• 衝突・破壊にともなう最終円盤の進化

- 微惑星同士が衝突すると必ず破壊が起き様々なサイズの破片を放出
- 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる = 衝突力スケード (e.g., Tanaka et al., 1996)
- $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる

→ 最終円盤の総質量は減少する (Kobayashi & Tanaka, 2010)

破片の軌道進化 … 純粹なN体計算で扱うことは不可能！

(火星質量) / ($1\mu\text{m}$ サイズ質量) $\sim 10^{35}$ 個

本研究の目的

衝突・破壊を扱うことができるN体計算の手法を開発し
最終円盤の総質量進化や地球型惑星の離心率進化について
長時間シミュレーションを行い明らかにする

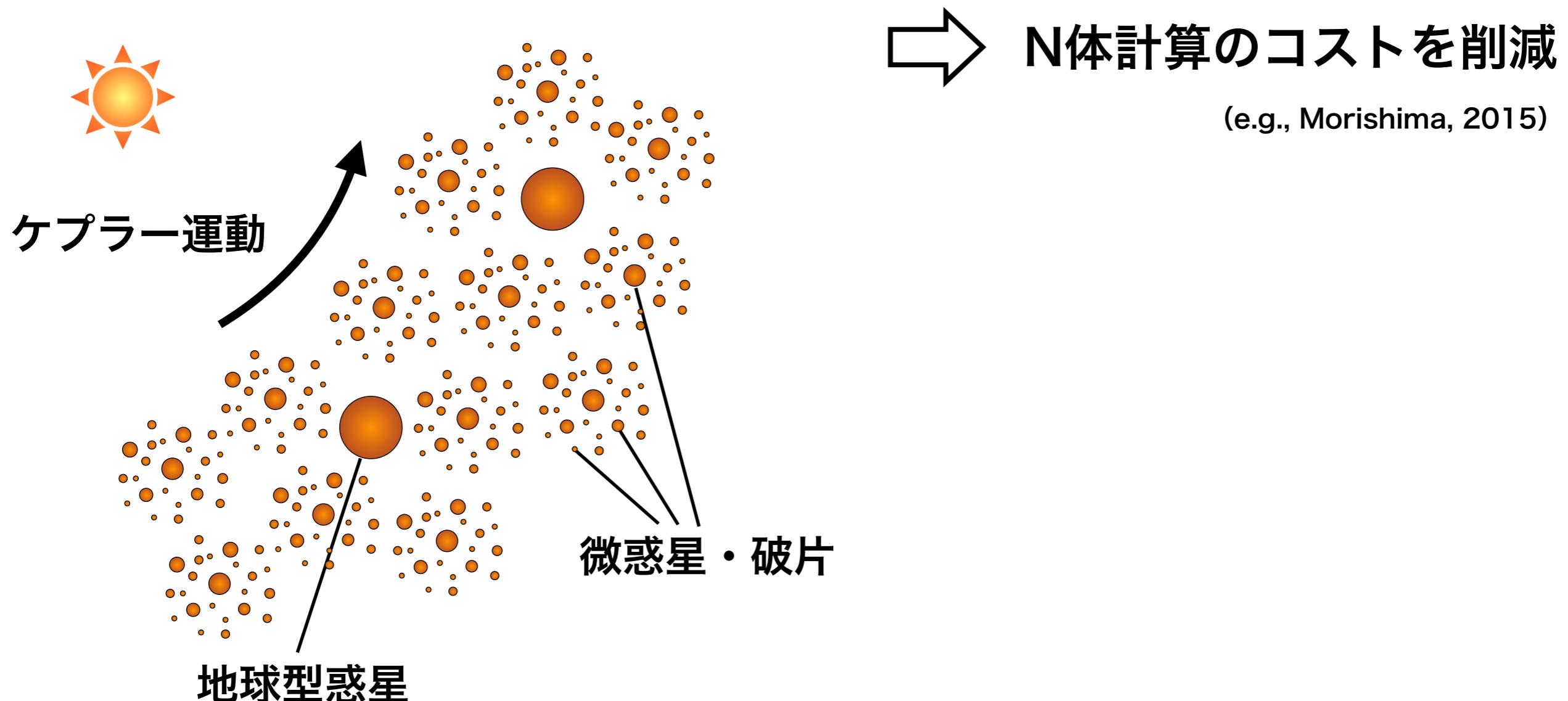
衝突・破壊をとりいれた N体計算の開発

スーパー粒子近似

- 純粹なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(\because 破壊に伴う破片~ 10^{35} 個)

- スーパー粒子近似N体計算 … 複数の微惑星・破片を1粒子とみなす

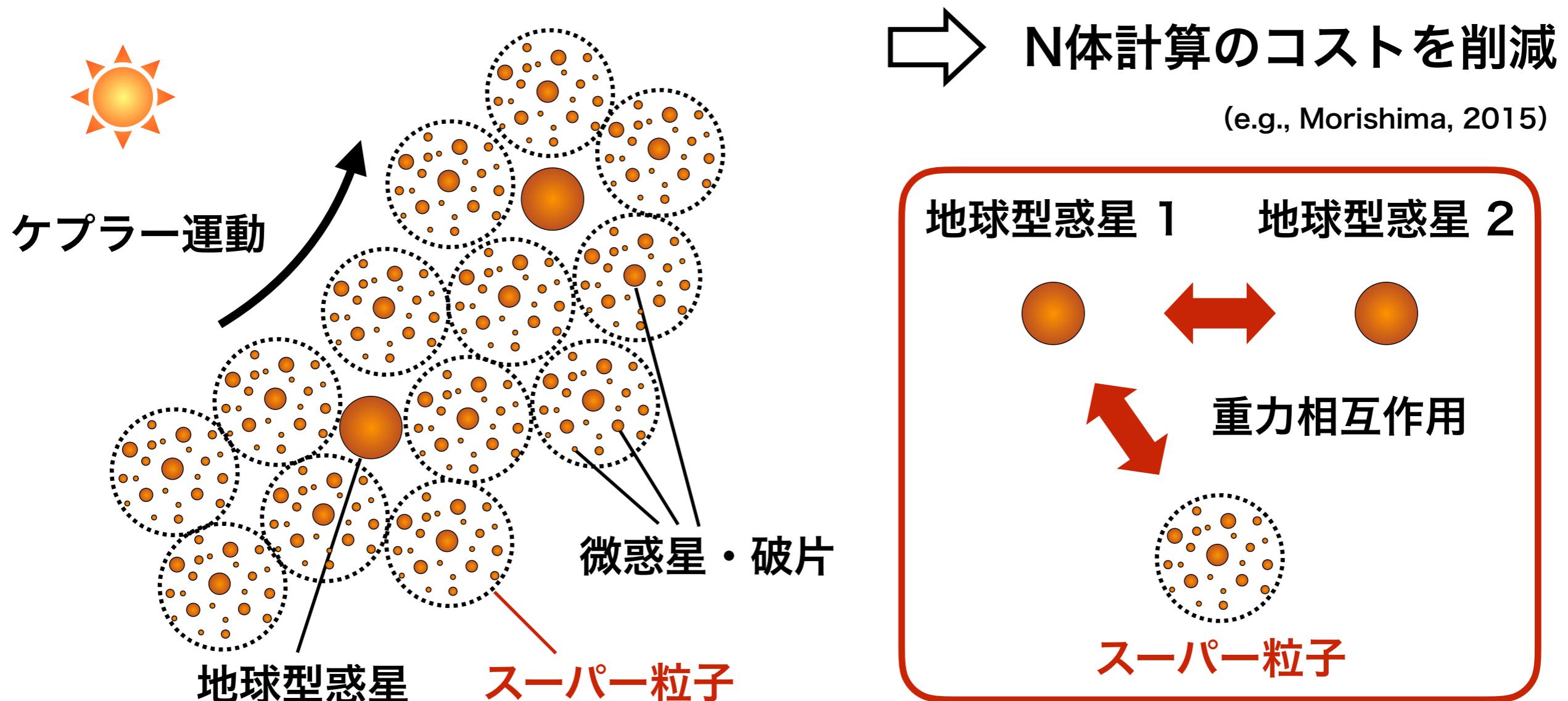


スーパー粒子近似

- 純粹なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

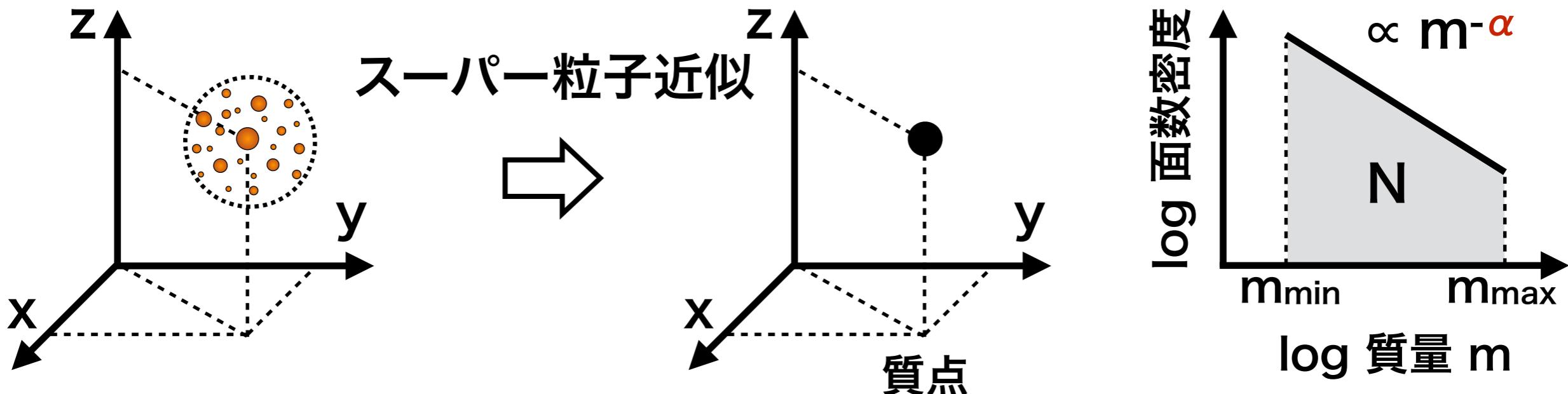
(\because 破壊に伴う破片~ 10^{35} 個)

- スーパー粒子近似N体計算 … 複数の微惑星・破片を1粒子とみなす



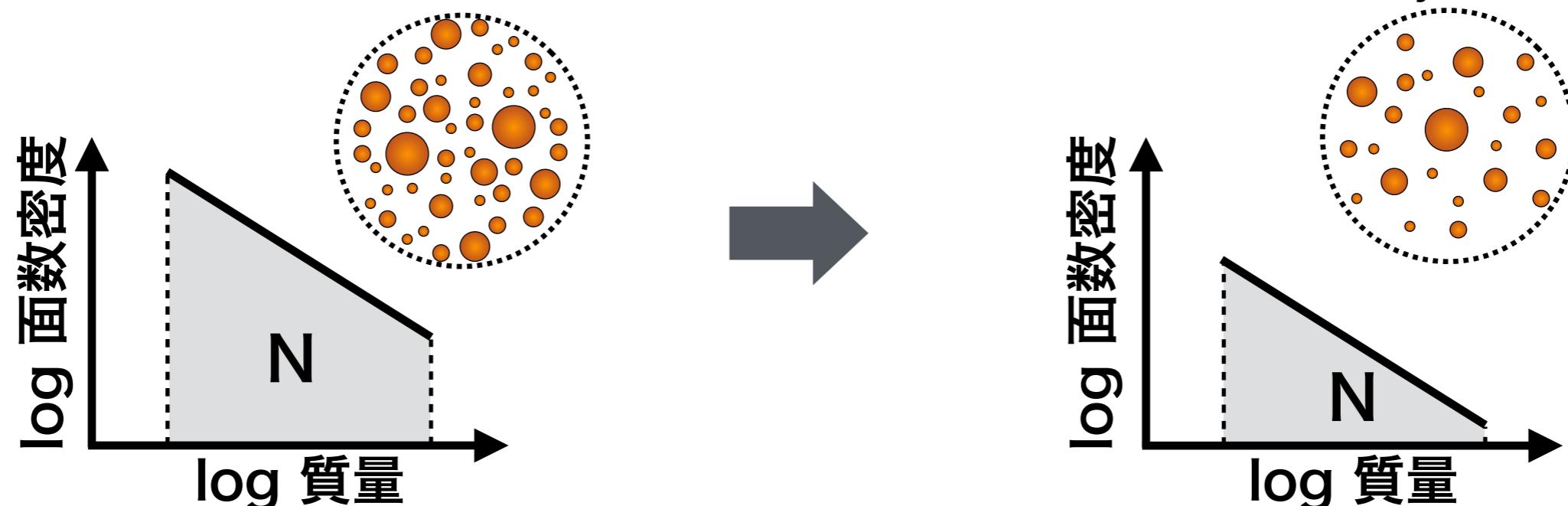
スーパー粒子と衝突・破壊による内包個数減少

- スーパー粒子 … N 個の様々なサイズの微惑星・破片の集合



- スーパー粒子に含まれる粒子数 N の時間進化 … **べき一定のまま減少**

(Kobayashi & Tanaka, 2010)



衝突・破壊における統計的計算

- スーパー粒子 i に含まれる粒子数 N_i の時間進化 (Kobayashi & Tanaka, 2010)

数が少なく壊れにくい最大微惑星 m_{\max} がタイムスケールを決めている

$$\frac{dN_i}{dt} \propto -N_i \times \left(\frac{\Sigma_i}{m_{\max}} \Omega_K \pi R_{\max}^2 \right) \times \left(\frac{v_{\text{imp},i} (m_{\max})^2}{2Q_D^* (m_{\max})} \right)^{\alpha-1}$$

(最大微惑星の衝突頻度) (破片放出量による効果)

最大微惑星半径 R_{\max} ケプラー角速度 Ω_K 面数密度の質量依存性のべき α

破壊に必要な単位質量当たりのエネルギー Q_D^* ：質量が重いほど大きい

衝突・破壊における統計的計算

- スーパー粒子 i に含まれる粒子数 N_i の時間進化 (Kobayashi & Tanaka, 2010)

数が少なく壊れにくい最大微惑星 m_{\max} がタイムスケールを決めている

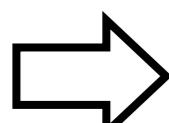
軌道分布に依存

$$\frac{dN_i}{dt} \propto -N_i \times \left(\frac{\Sigma_i}{m_{\max}} \Omega_K \pi R_{\max}^2 \right) \times \left(\frac{v_{\text{imp},i} (m_{\max})^2}{2Q_D^* (m_{\max})} \right)^{\alpha-1}$$

(最大微惑星の衝突頻度) (破片放出量による効果)

最大微惑星半径 R_{\max} ケプラー角速度 Ω_K 面数密度の質量依存性のべき α

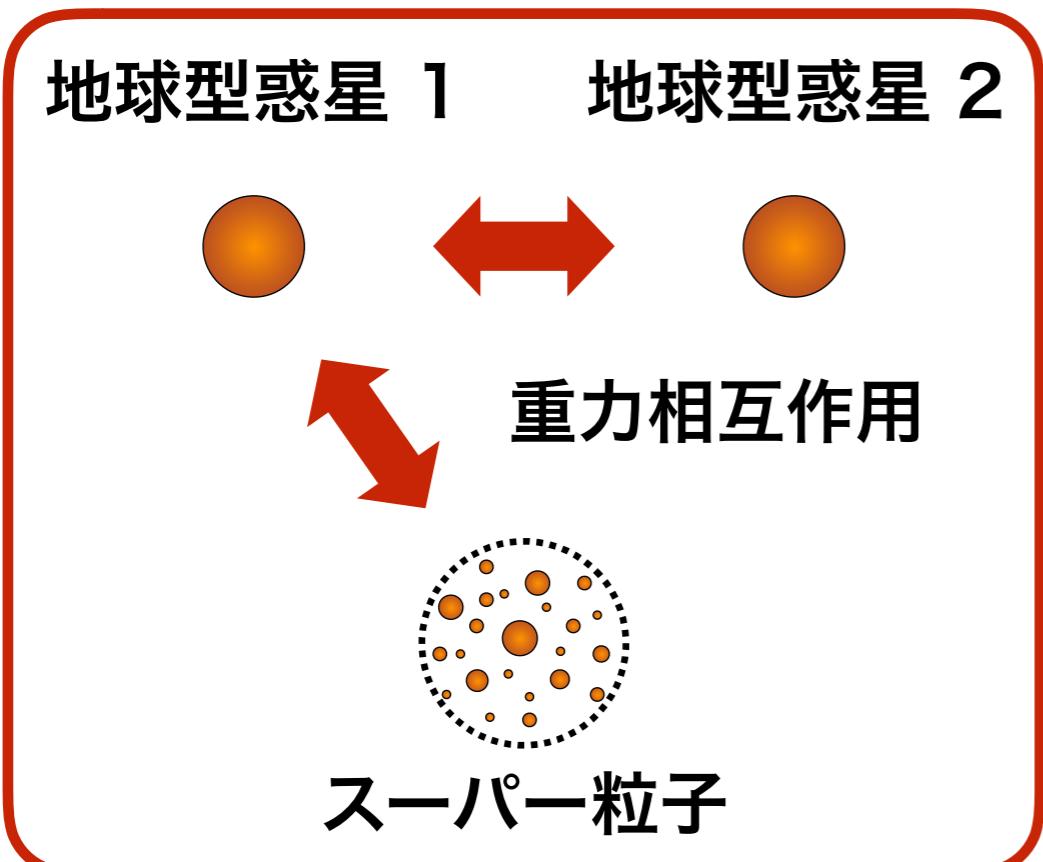
破壊に必要な単位質量当たりのエネルギー Q_D^* ：質量が重いほど大きい



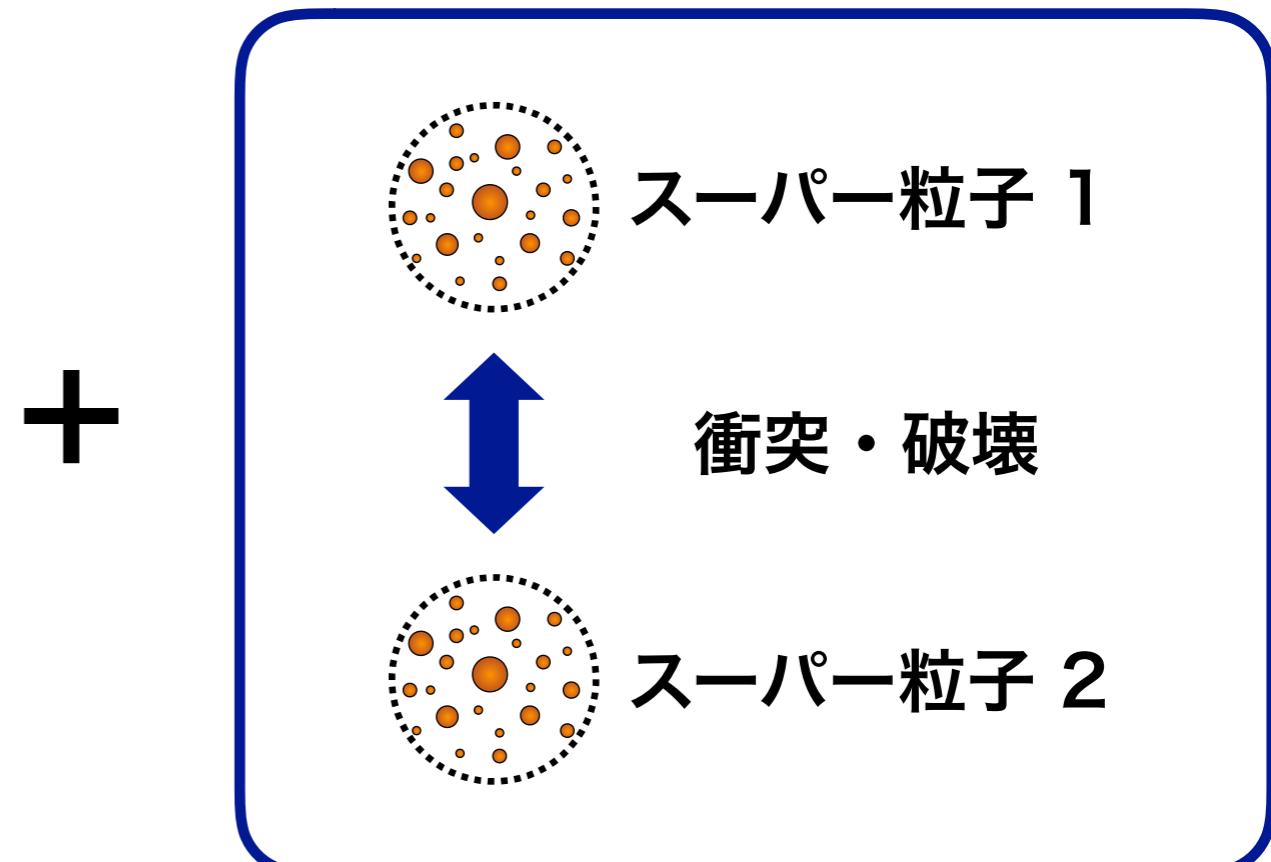
面密度 Σ_i と衝突速度 $v_{\text{imp},i}$ について
近傍スーパー粒子の軌道分布から統計的に計算する

衝突・破壊を扱うことができるN体計算

スーパー粒子近似N体計算



統計的計算

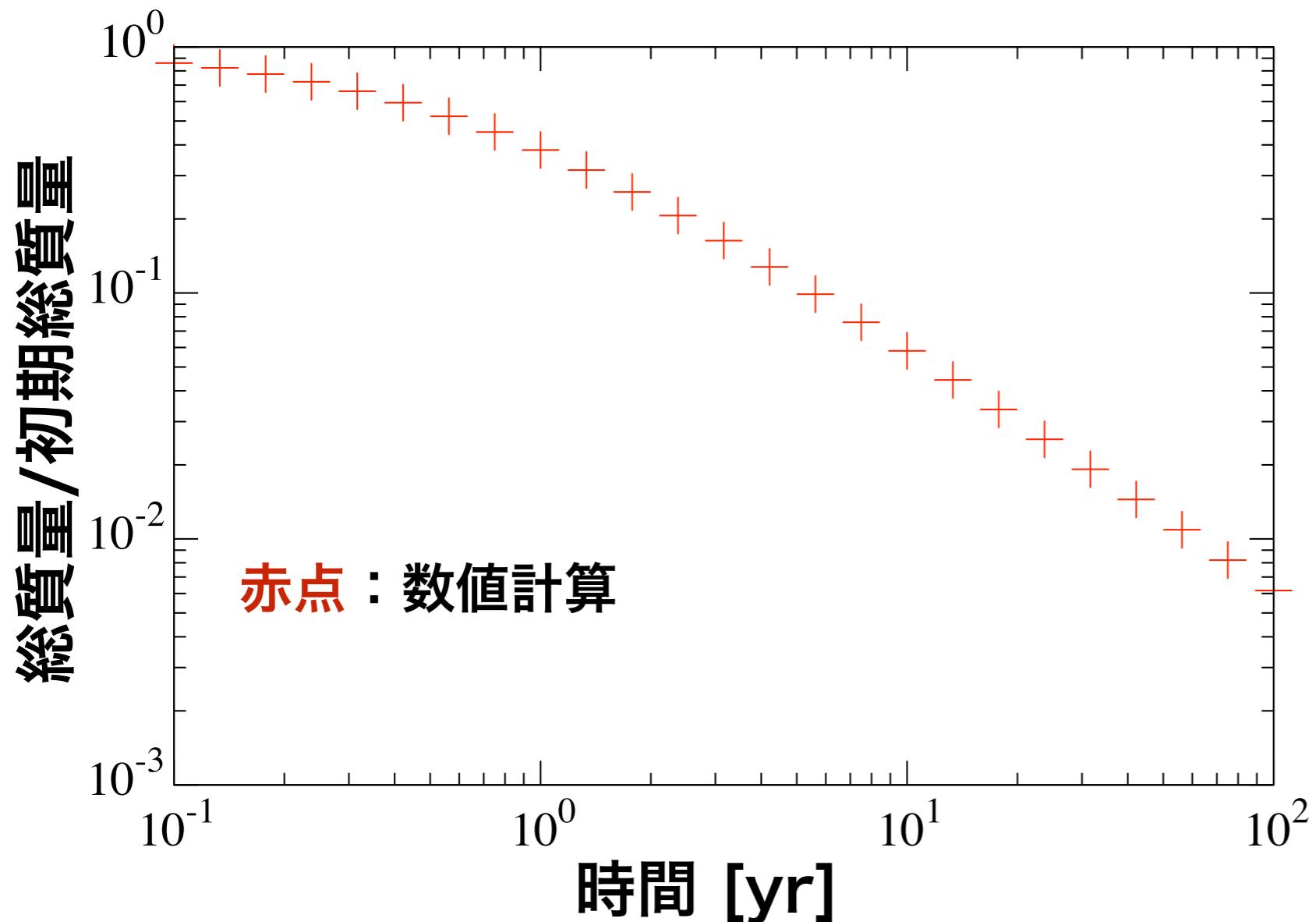
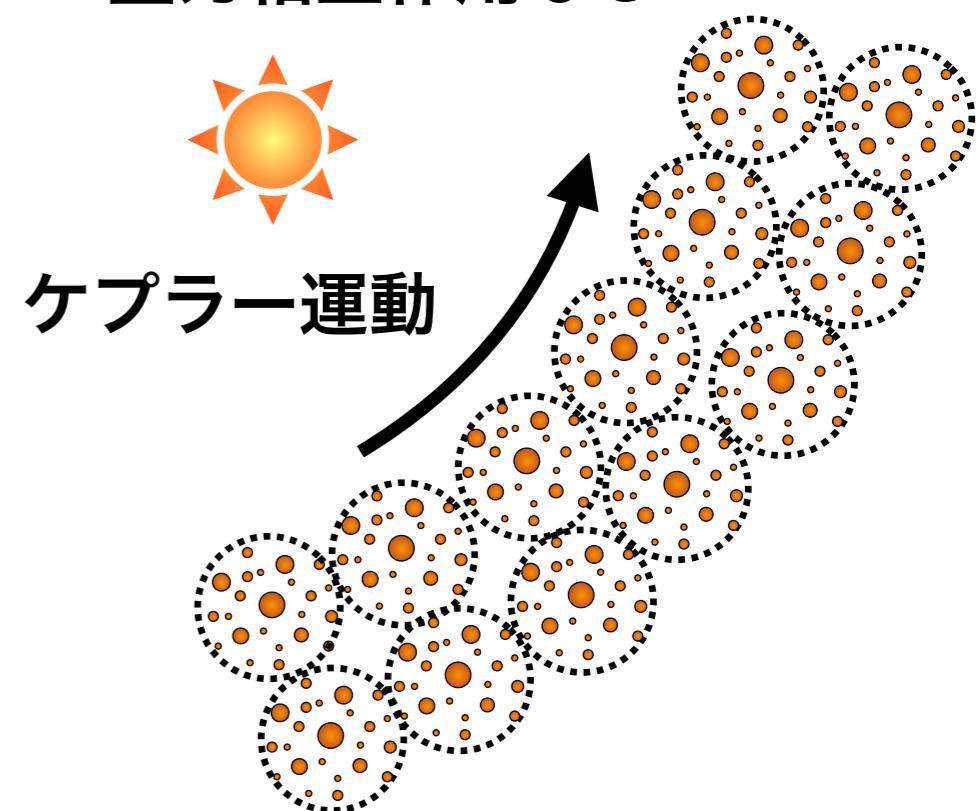


最終円盤を含めた巨大衝突ステージを調べることができる！

テスト：破壊による微惑星円盤の総質量減少

初期条件

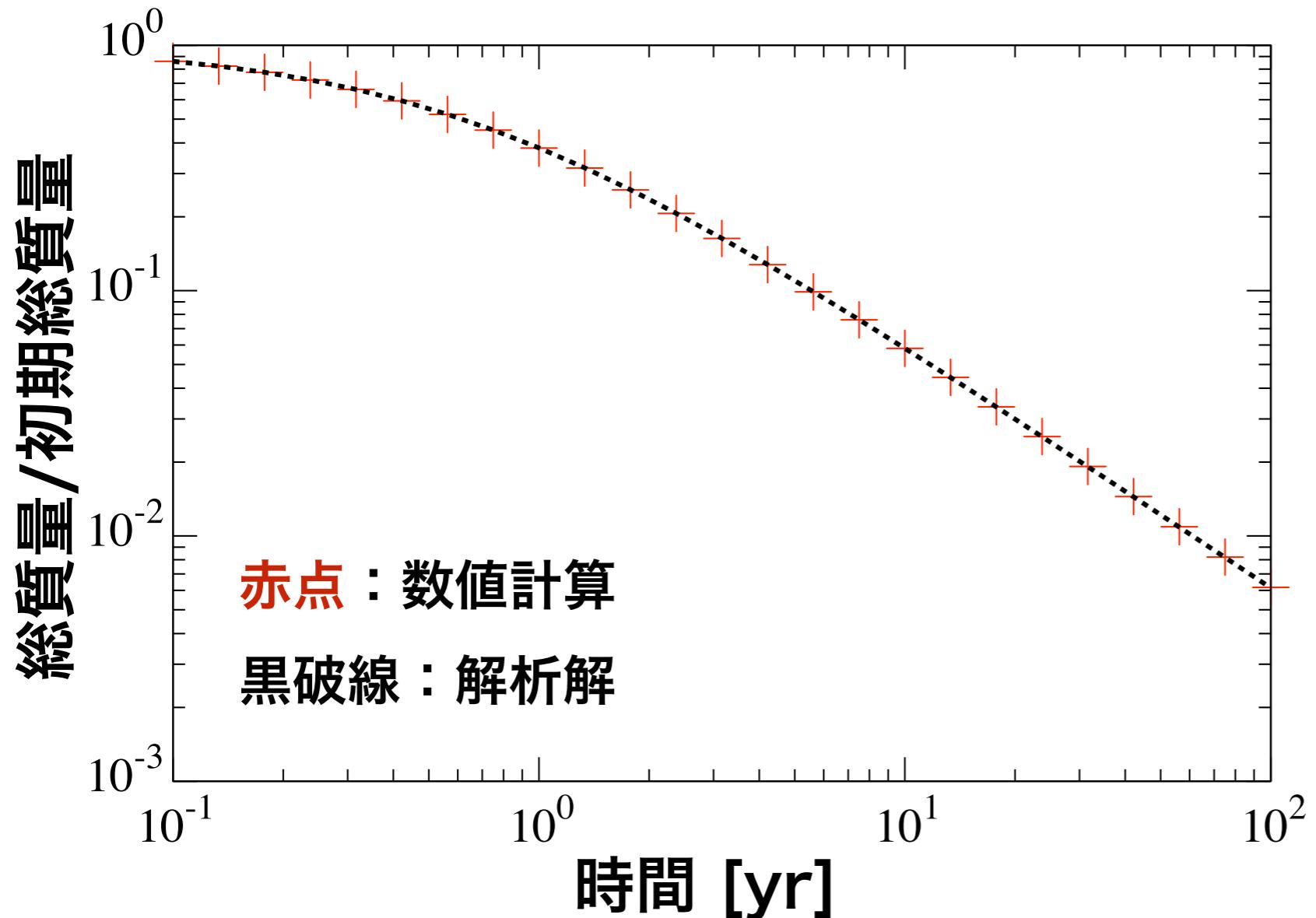
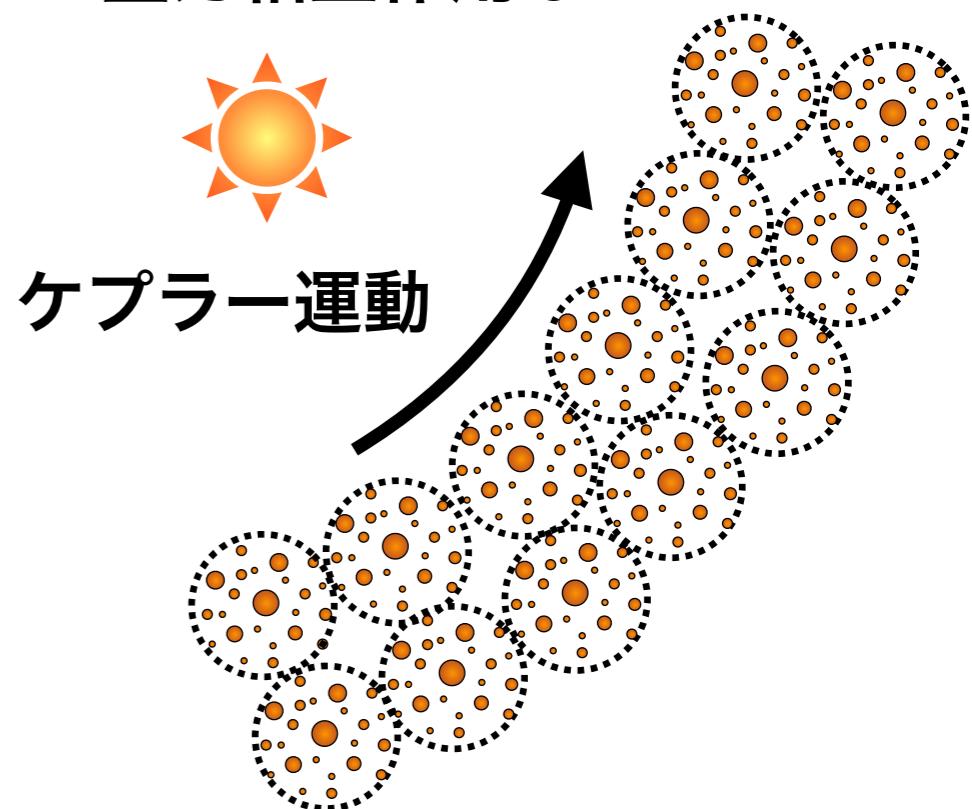
- ・スーパー粒子2000体
- ・ 1 ± 0.025 AU に分布
- ・総質量 = 10地球質量
- ・離心率 = 0.01
- ・最大微惑星質量 = 10^{16} g
- ・地球型惑星なし
- ・重力相互作用なし



テスト：破壊による微惑星円盤の総質量減少

初期条件

- ・スーパー粒子2000体
- ・ 1 ± 0.025 AU に分布
- ・総質量 = 10地球質量
- ・離心率 = 0.01
- ・最大微惑星質量 = 10^{16} g
- ・地球型惑星なし
- ・重力相互作用なし



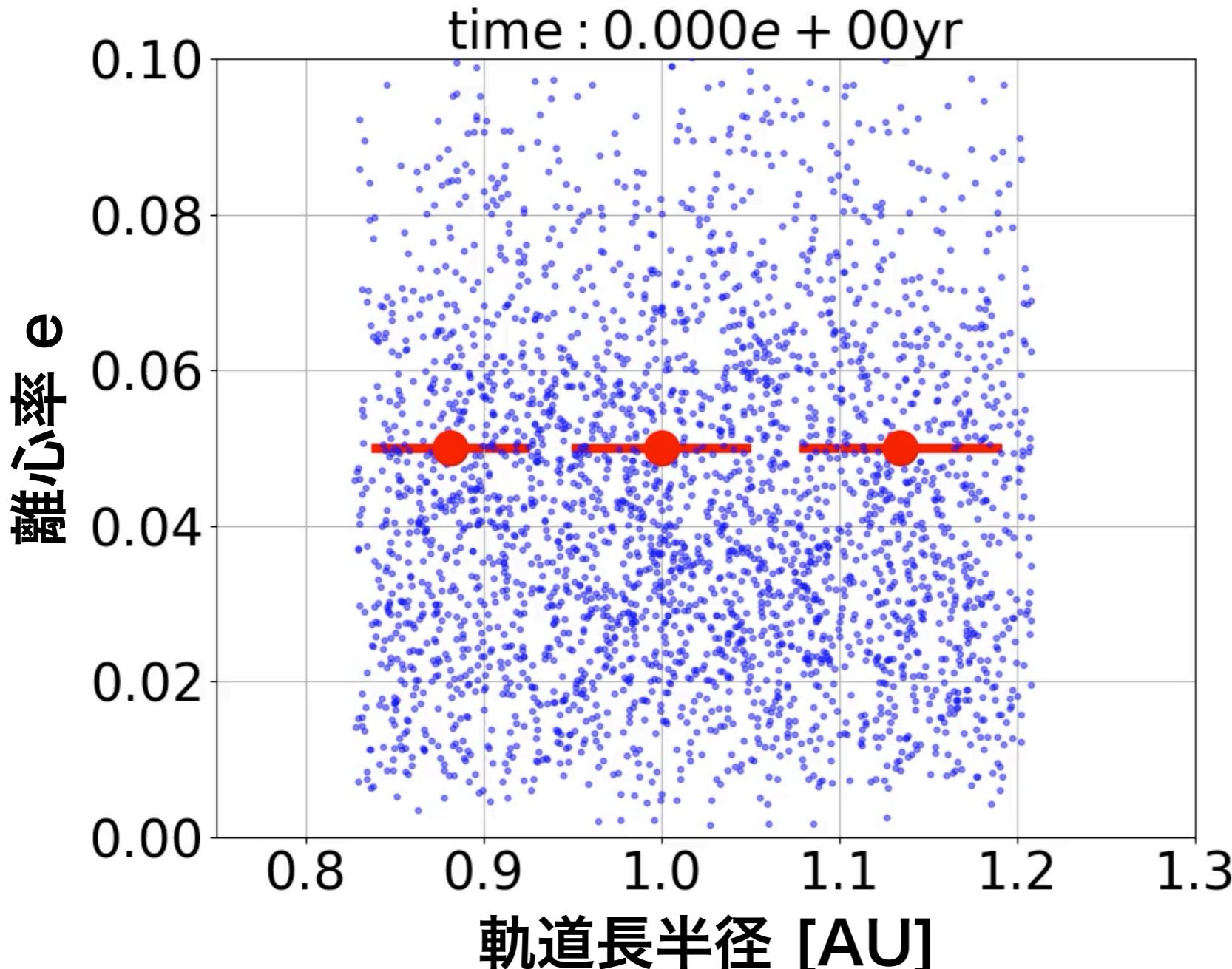
地球型惑星形成後期の シミュレーション

地球型惑星と最終円盤の進化

破壊を無視した場合

赤点：惑星（地球質量） 青点：微惑星（0.01地球質量）

$$e_{\text{惑星},0} = \langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = 0.05$$



惑星が微惑星を重力散乱

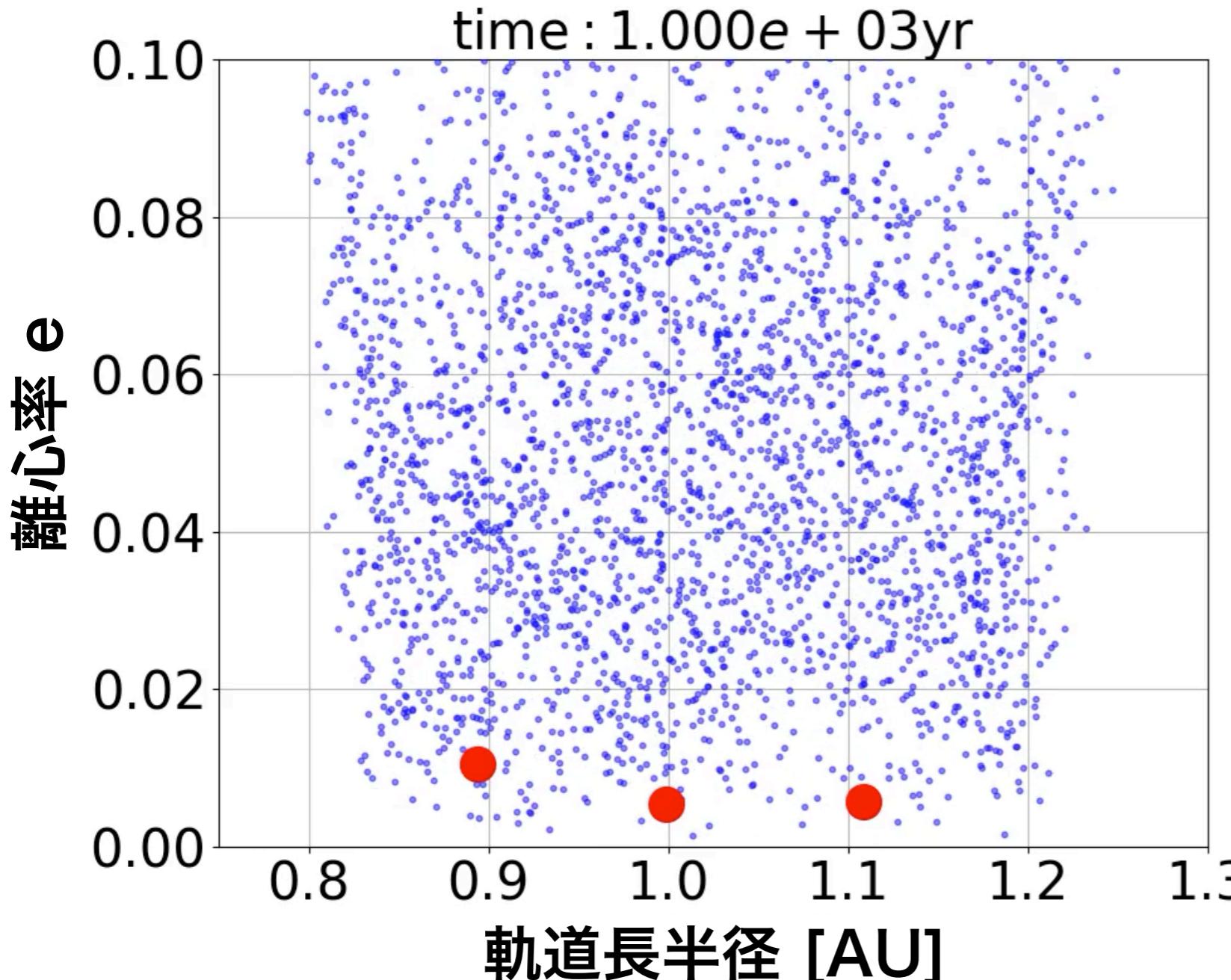
ランダム運動エネルギー
 $\propto (\text{質量}) \times (\text{離心率})^2$
を等分配



破壊を無視した場合

赤点：惑星（地球質量） 青点：微惑星（0.01地球質量）

$$e_{\text{惑星},0} = \langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = 0.05$$



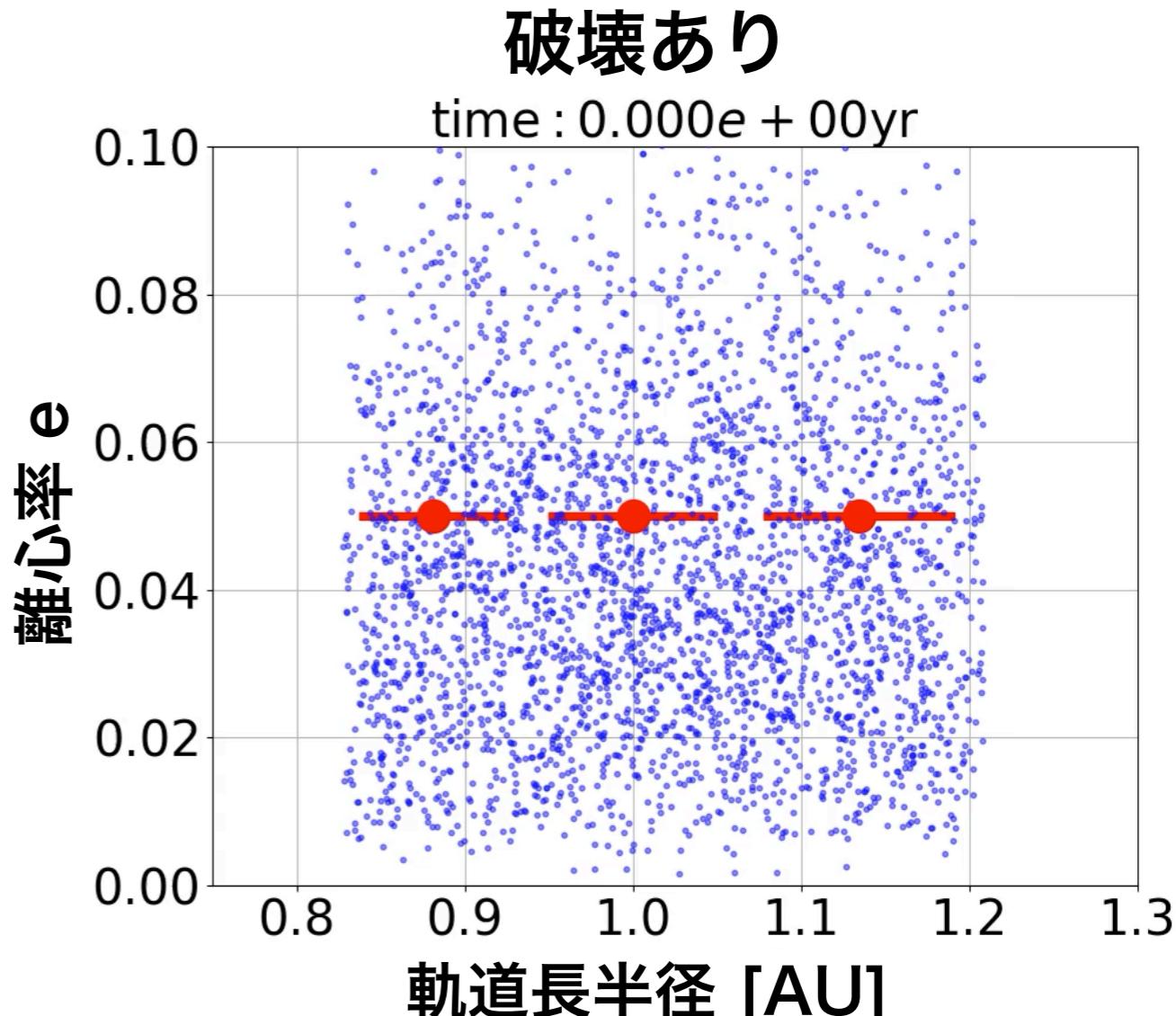
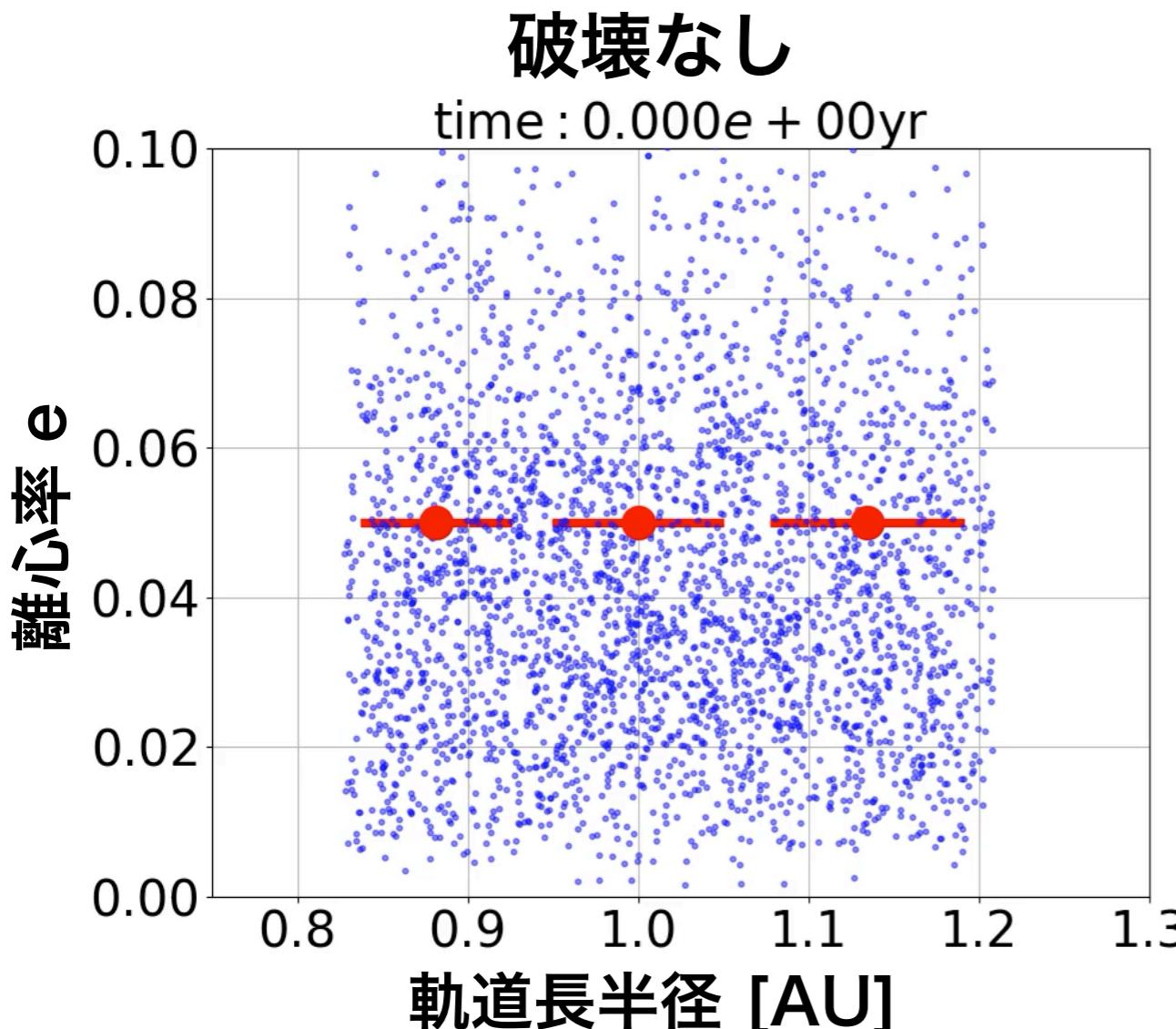
惑星が微惑星を重力散乱

ランダム運動エネルギー
 $\propto (\text{質量}) \times (\text{離心率})^2$
を等分配

- 惑星の離心率は減少
- 微惑星の離心率は上昇

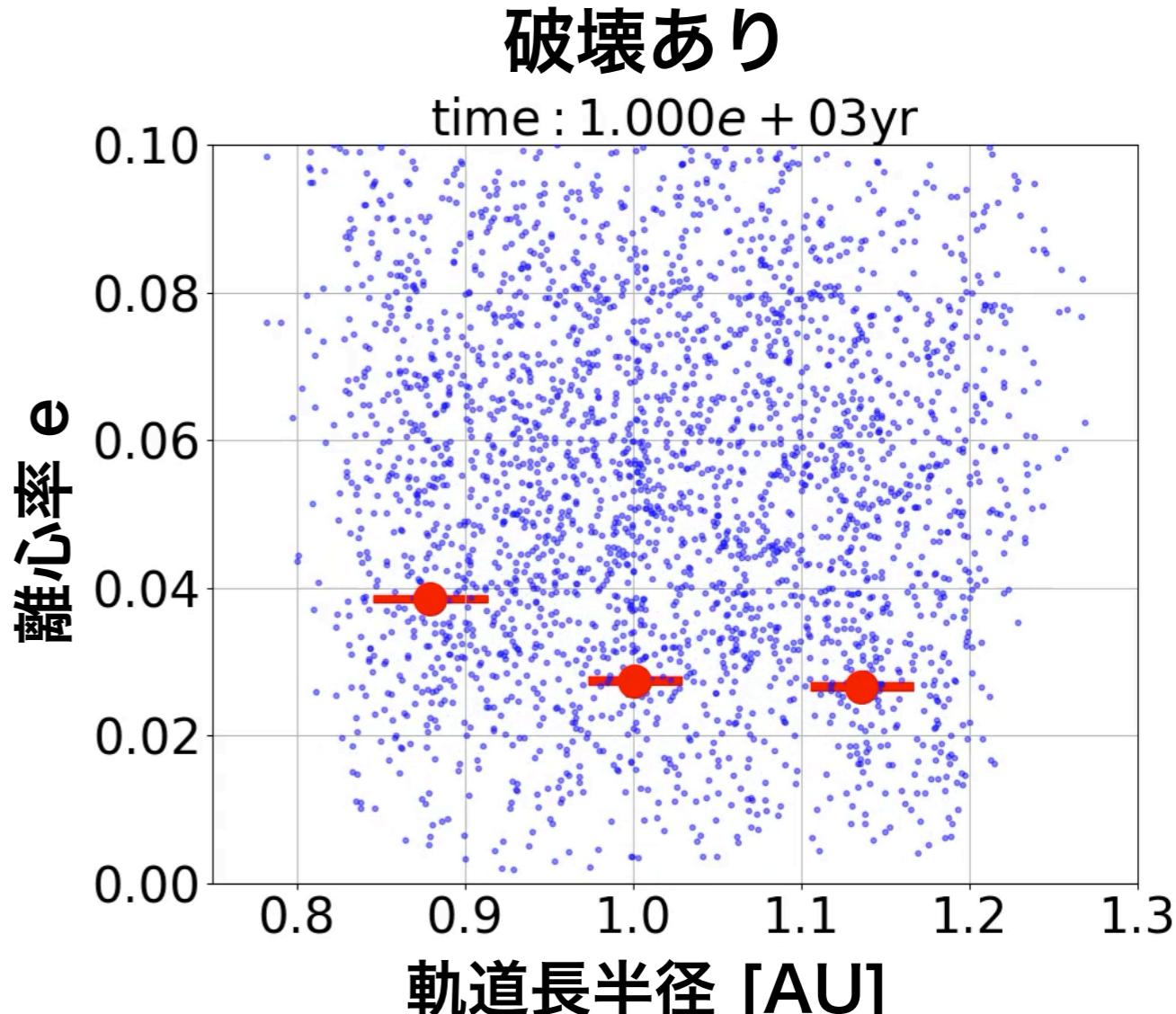
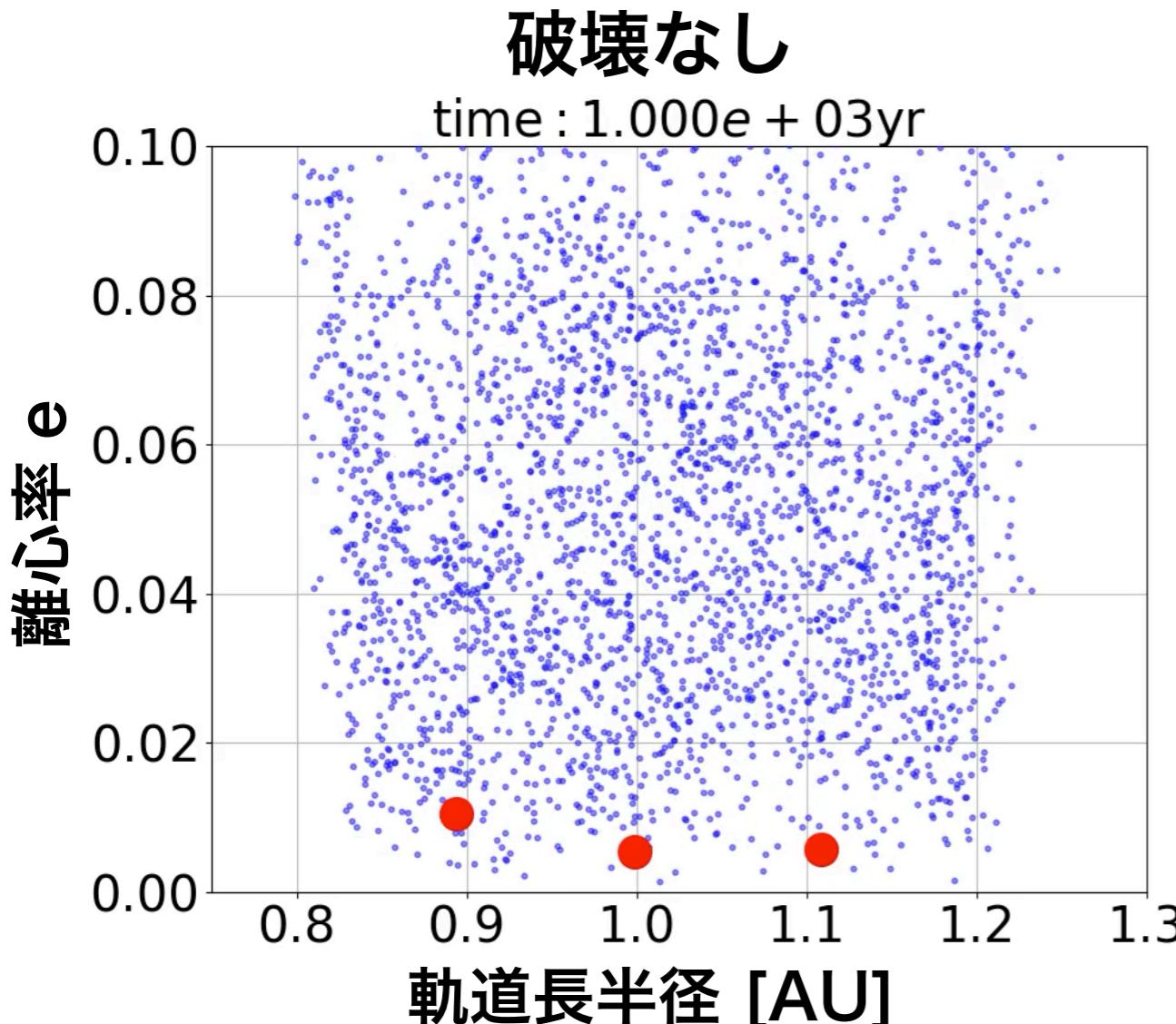
破壊を考慮した場合の力学的摩擦

最大微惑星質量 10^{19} g (~10kmサイズ)



破壊を考慮した場合の力学的摩擦

最大微惑星質量 10^{19} g (~10kmサイズ)

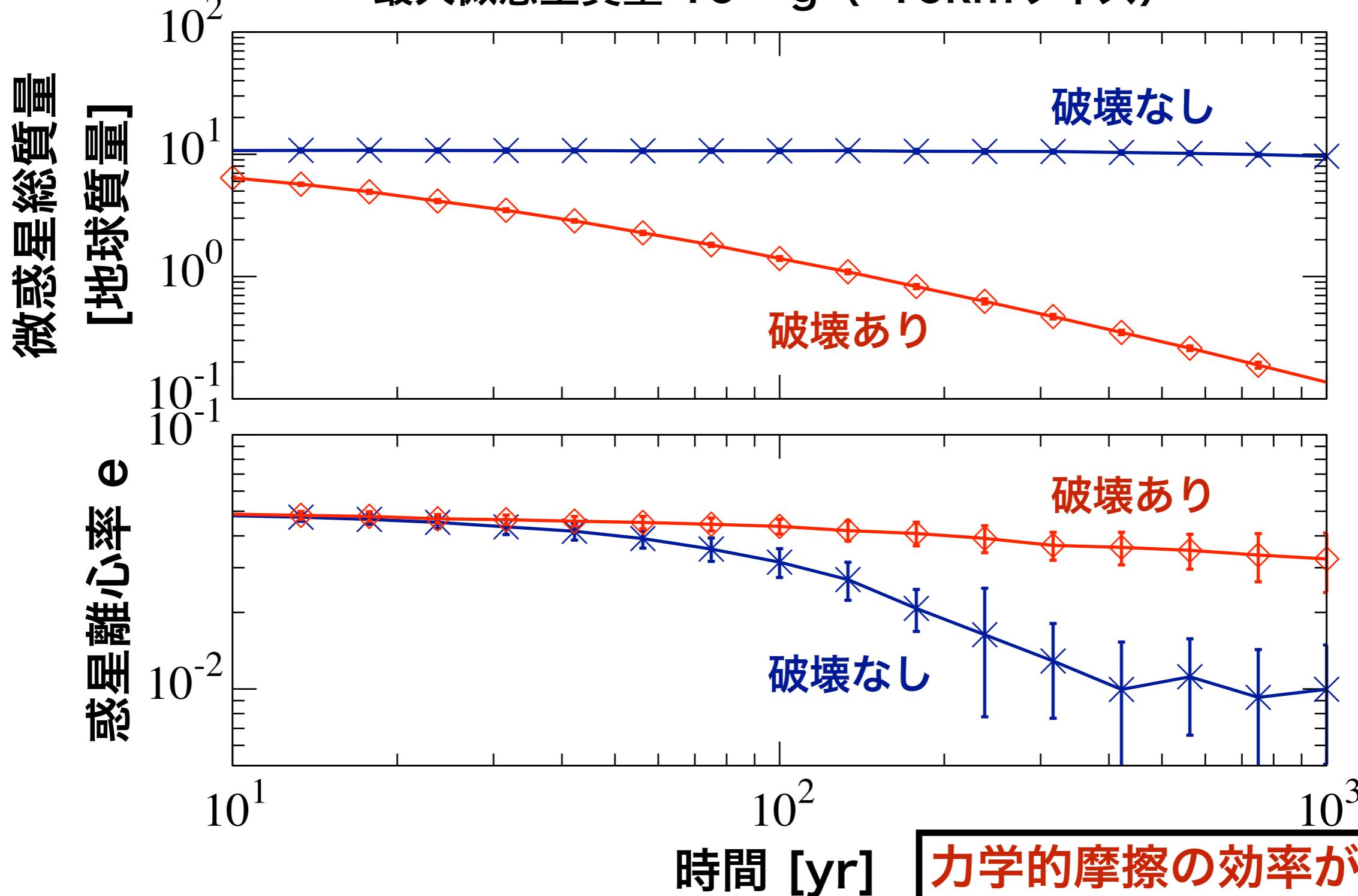


微惑星同士の破壊を考慮すると惑星の離心率が下がりにくい

破壊が力学的摩擦に与える影響

$$e_{\text{惑星},0} = \langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = 0.05$$

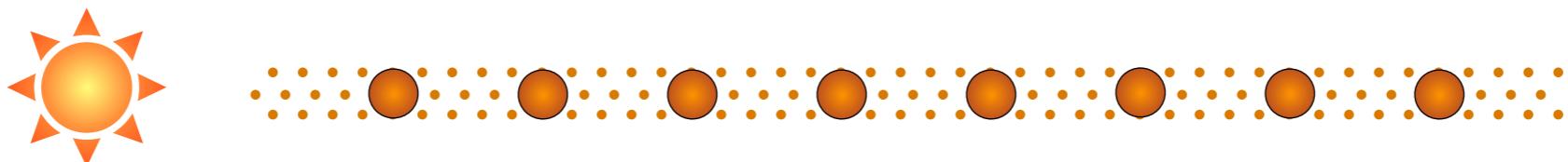
最大微惑星質量 10^{19} g (~10kmサイズ)



最終円盤の起源

- 最終円盤の起源の候補

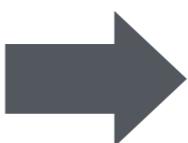
1. 原始惑星になれなかった残存微惑星・破片 (Morishima et al., 2010)



2. 原始惑星同士が巨大衝突する際に放出される破片 (Genda et al., 2015)



(Kathleen Cantner, AGI)



(NASA/JPL)

最終円盤の起源

- 最終円盤の起源の候補

1. 原始惑星になれなかった残存微惑星・破片 (Morishima et al., 2010)

原始惑星の軌道不安定がそもそも起こらず
巨大衝突ステージが始まらない可能性

2. 原始惑星同士が巨大衝突する際に放出される破片 (Genda et al., 2015)

破片総質量：衝突天体質量の10–20%（平均18%）

最大破片質量： $10^{-3} - 10^{-2}$ 地球質量

最終円盤の起源

- 最終円盤の起源の候補

- 原始惑星になれなかった残存微惑星・破片 (Morishima et al., 2010)

原始惑星の軌道不安定がそもそも起こらず
巨大衝突ステージが始まらない可能性

- 原始惑星同士が巨大衝突する際に放出される破片 (Genda et al., 2015)

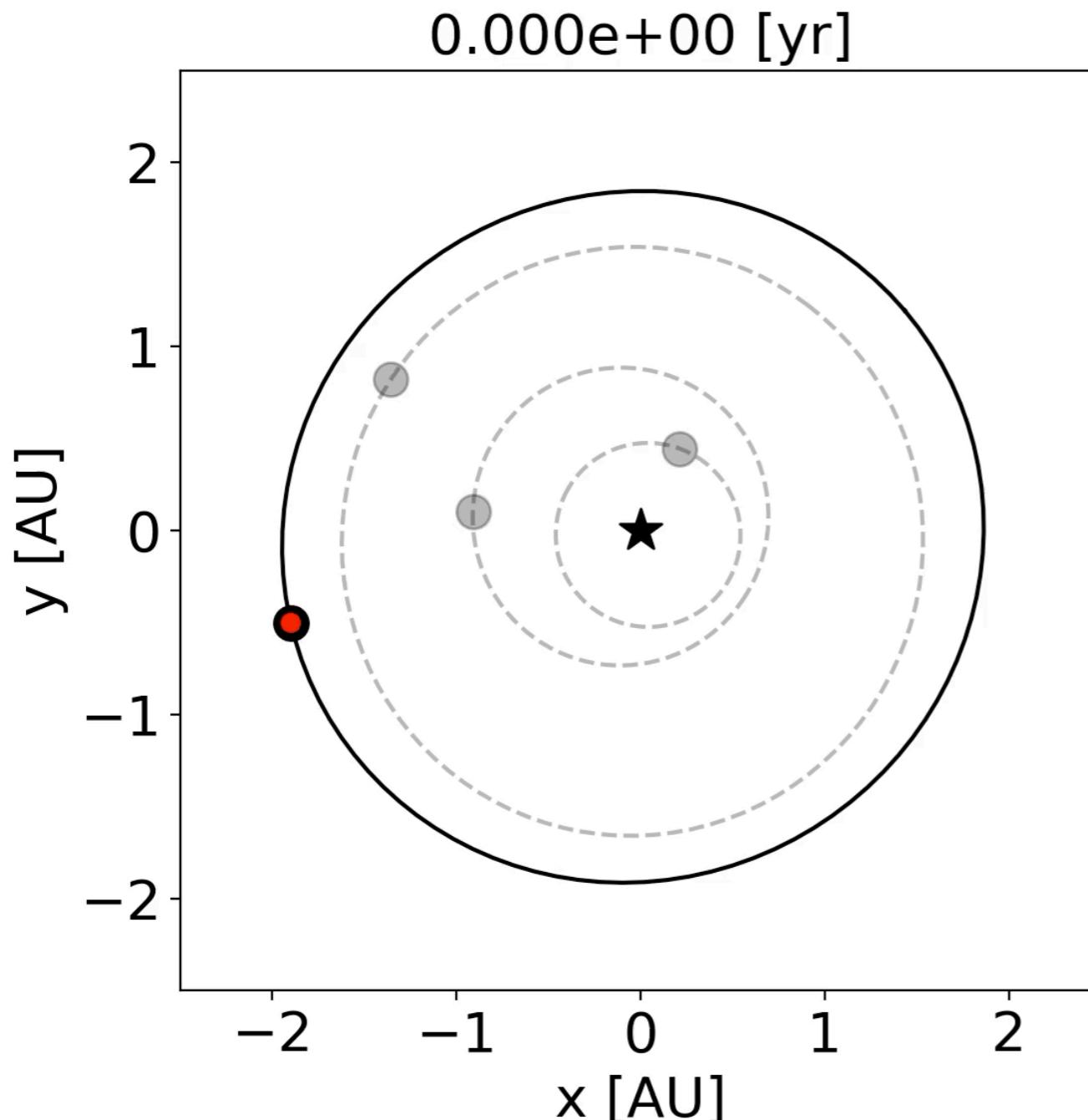
破片総質量：衝突天体質量の10–20%（平均18%）

最大破片質量： $10^{-3} - 10^{-2}$ 地球質量

巨大衝突起源の最終円盤の空間分布進化

一連の巨大衝突のうち「最後」の巨大衝突に注目

地球型惑星の位置（丸） & 軌道（線） 破片総質量：衝突天体質量の10%



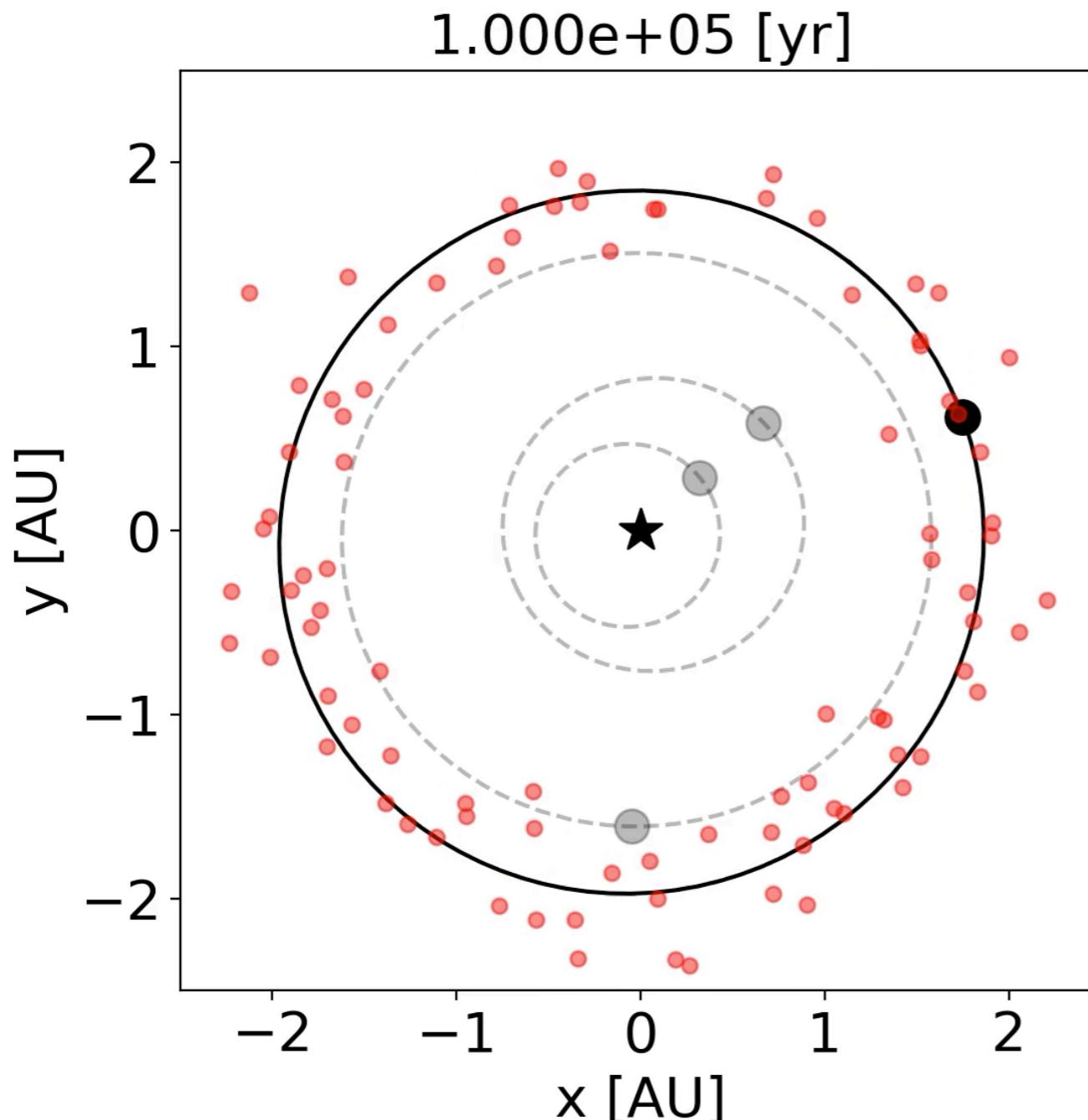
放出された破片（赤点）は
巨大衝突を起こした地球型惑星の
軌道の周りに最終円盤を形成

巨大衝突起源の最終円盤の空間分布進化

一連の巨大衝突のうち「最後」の巨大衝突に注目

地球型惑星の位置（丸） & 軌道（線）

破片総質量：衝突天体質量の10%



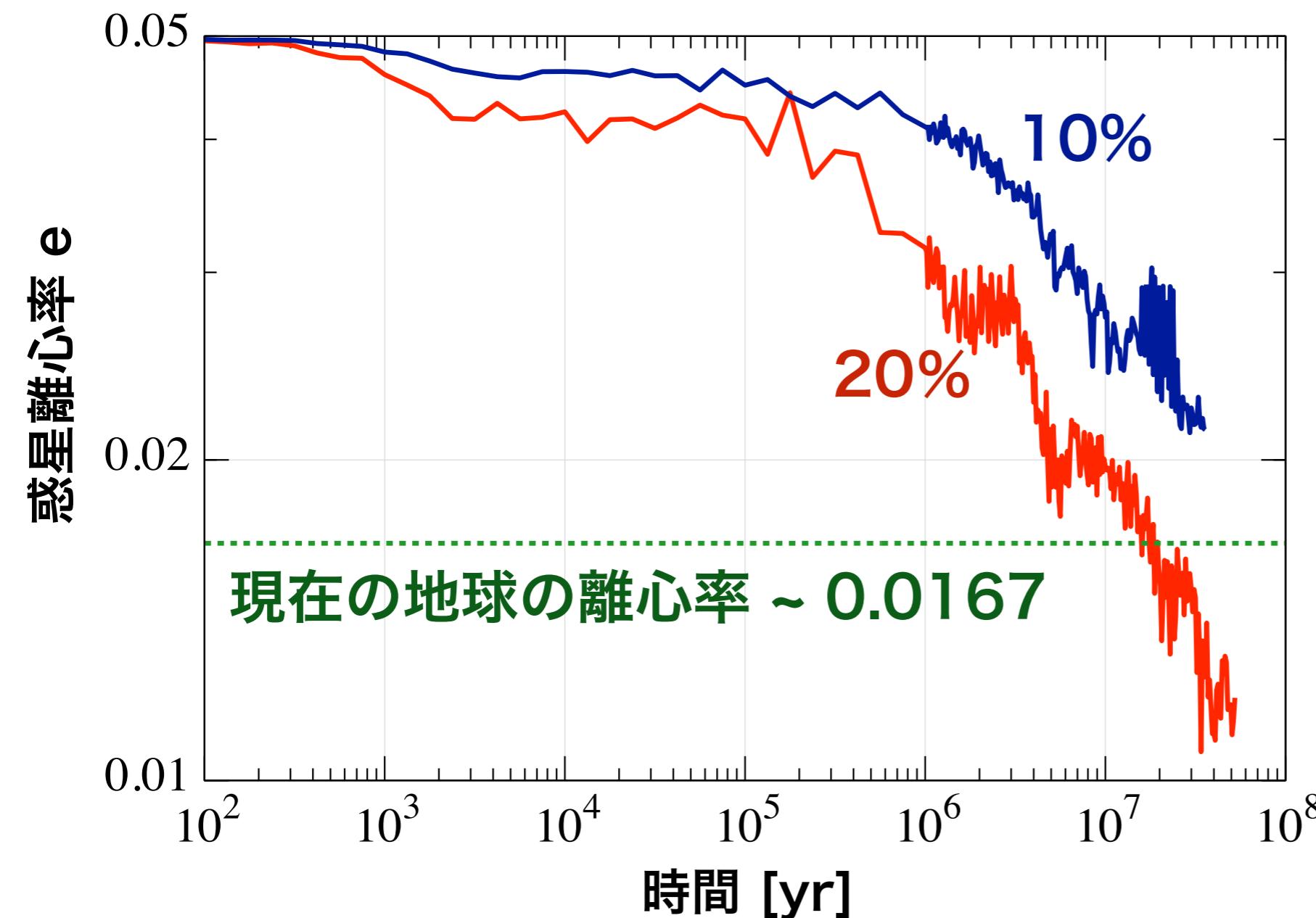
放出された破片（赤点）は
巨大衝突を起こした地球型惑星の
軌道の周りに最終円盤を形成

この最終円盤は非常に軽いため
長時間の計算が必要

巨大衝突起源の最終円盤との相互作用

$e_{\text{惑星},0} = \langle e_{\text{微惑星},0}^2 \rangle^{1/2} = 0.05$ 惑星 (地球質量) 1体 スーパー粒子100体

破片総質量：地球質量の10% & 20% 最大破片質量： 10^{-3} 地球質量



平均は天体質量の18%
(Genda et al., 2015)

巨大衝突起源の最終円盤
との重力相互作用

破壊は影響しなかった

地球型惑星の離心率を下げるに成功！

地球型惑星形成後期のシミュレーションまとめ

- 地球型惑星と微惑星円盤の重力相互作用
 - ⇨ 地球型惑星の離心率は減少
原因：力学的摩擦（ランダム運動エネルギーの等分配）
- 微惑星同士の衝突・破壊を考慮した場合
 - ⇨ 力学的摩擦の効率が落ちる
- 巨大衝突の際に放出される破片が最終円盤を形成
 - ⇨ 約1億年で地球型惑星の離心率は減少
 - ⇨ 現在の地球の離心率（~0.01）を説明可能！

まとめ

- 原始惑星（火星サイズ）同士の衝突・合体のみ
 - ➡ 地球型惑星の離心率が大きくなりすぎてしまう
※最終円盤（小さな微惑星円盤）を考慮していない
- 最終円盤の面密度進化と地球型惑星の離心率進化を同時に計算
 - ➡ 衝突・破壊を扱うことができるN体計算の手法を開発
- 巨大衝突の際に放出される破片が最終円盤を形成
 - ➡ 約1億年で地球型惑星の離心率は減少
 - ➡ 現在の地球の離心率（~0.01）を説明可能！

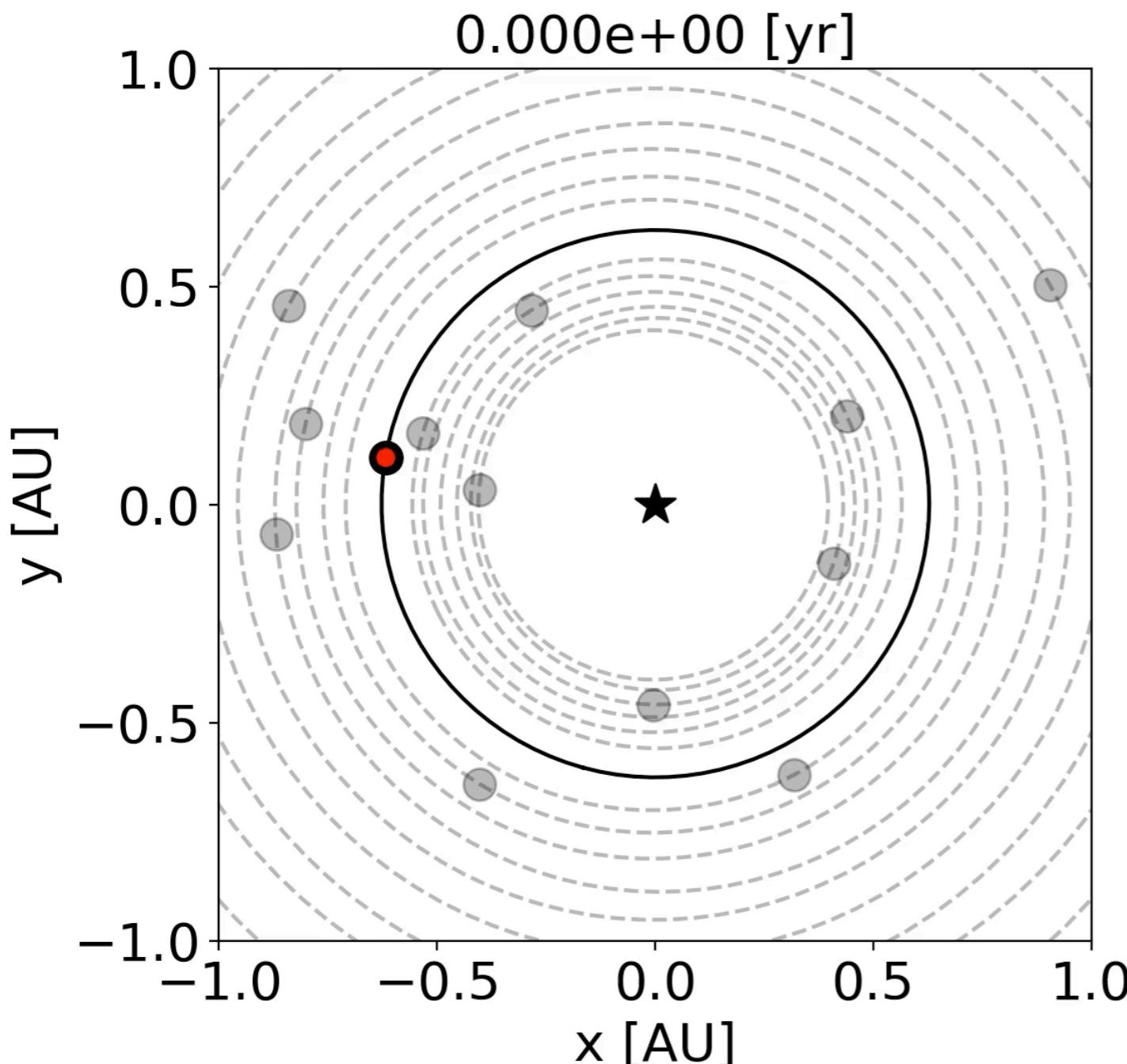
Appendix

③ 最終円盤の空間分布進化：最初の巨大衝突

一連の巨大衝突のうち「最初」の巨大衝突に注目

原始惑星の位置（丸） & 軌道（線）

破片総質量：衝突天体質量の10%



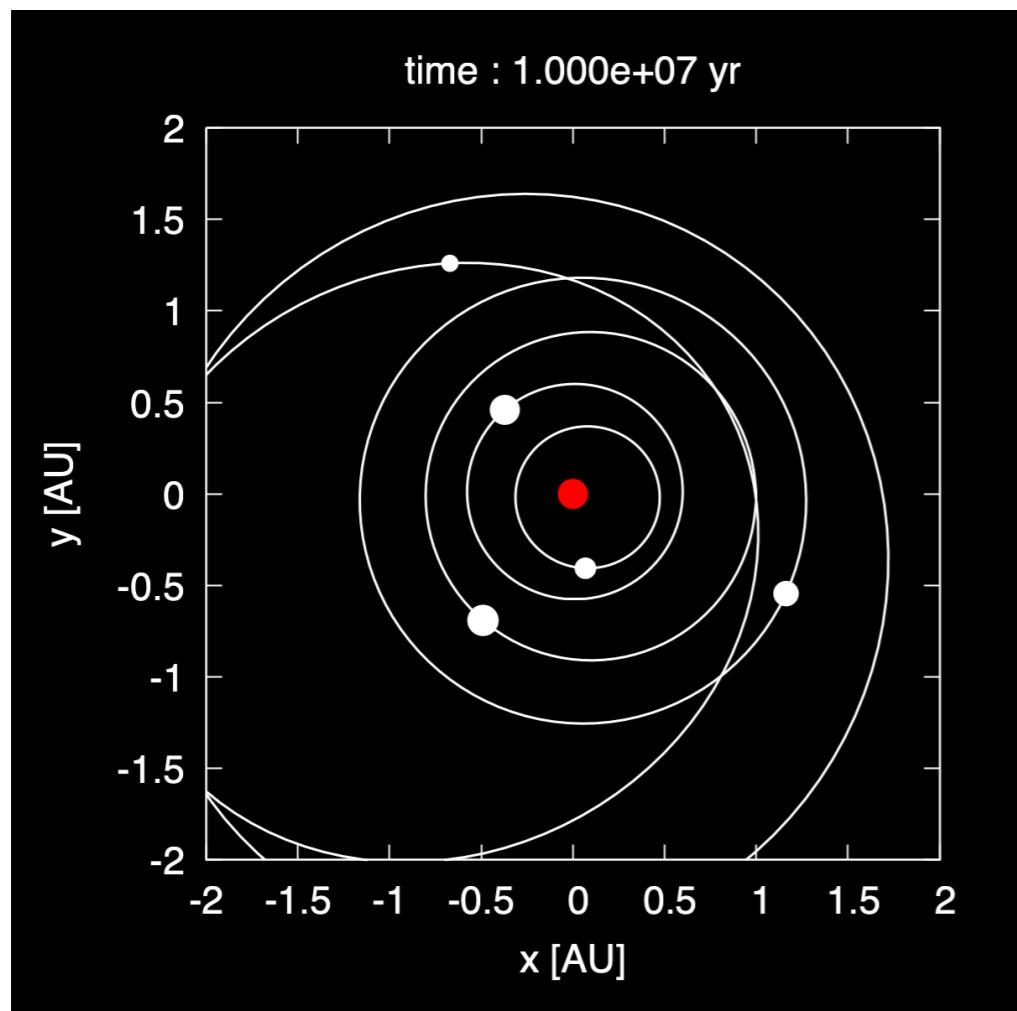
原始惑星の軌道間隔が狭い

最終円盤は近くの原始惑星からの重力散乱によって崩される

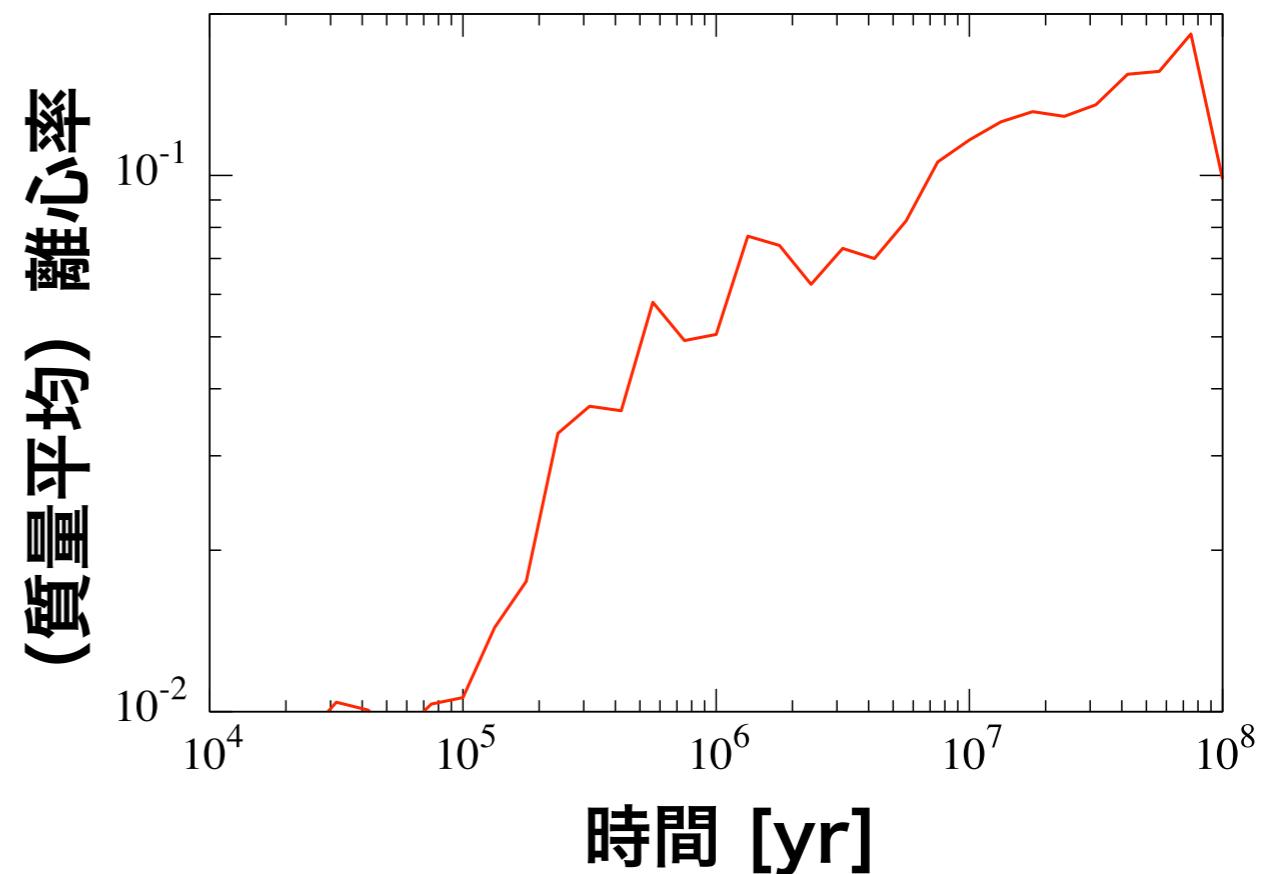
力学的摩擦が効きにくくなり
原始惑星の離心率は下がらず
この後の合体成長を妨げない

地球型惑星の離心率上昇

例：1000万年時の軌道



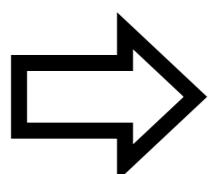
軌道不安定を起こし離心率が上昇



1億年後の離心率： ~ 0.1

>>

現在の地球の離心率：0.0167



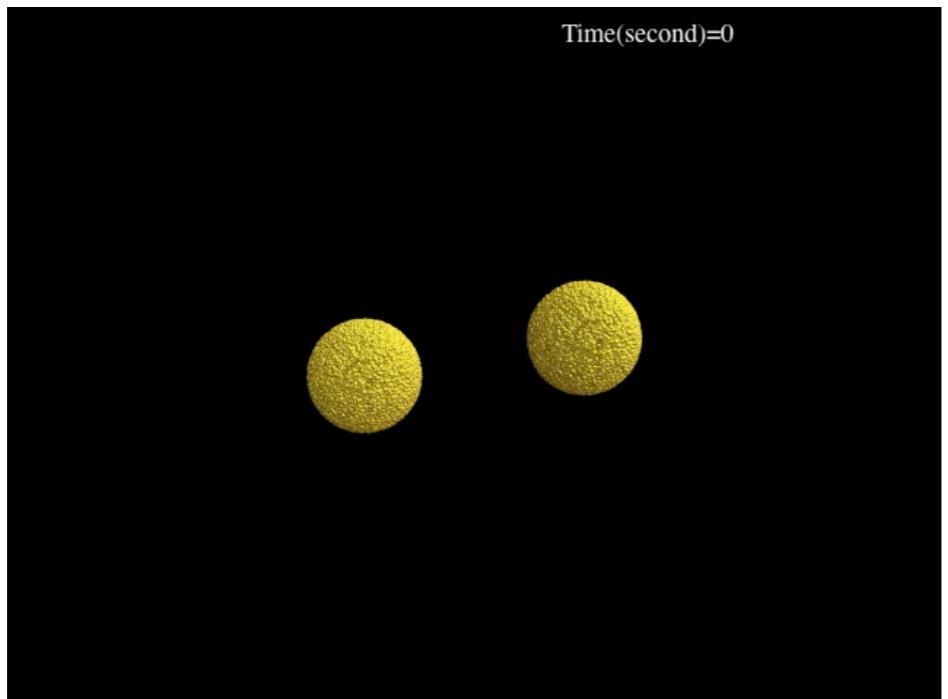
離心率が大きくなりすぎてしまう
離心率を下げるメカニズムが必要

微惑星同士の衝突・破壊

- 「衝突・破壊」 … 衝突した際に様々なサイズの破片を放出

- Catastrophic

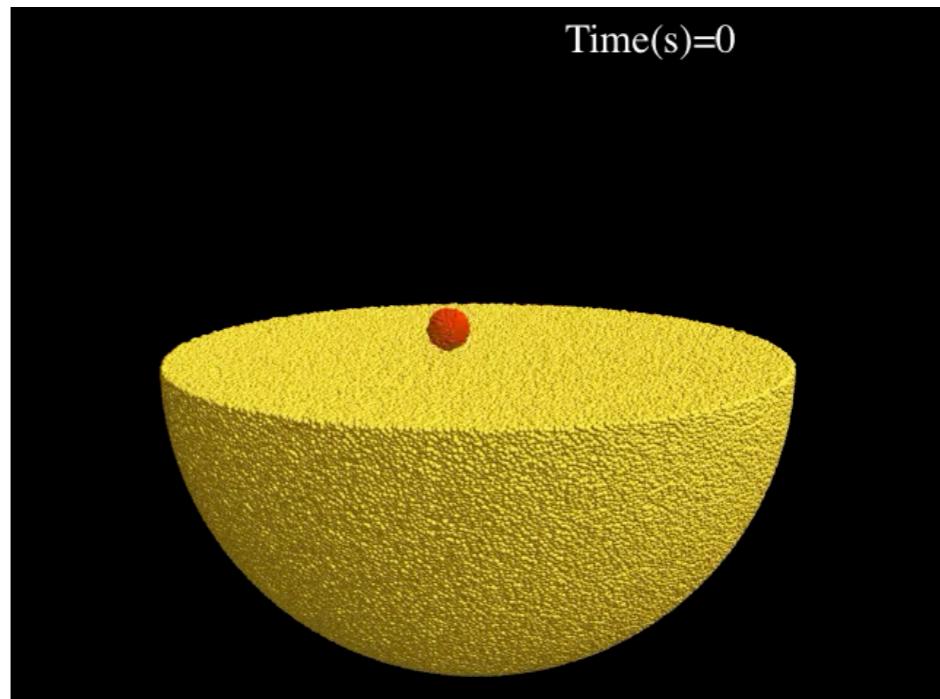
$$R = 50\text{km}, v = 0.3\text{km/s}$$



提供：杉浦（名大）

- Cratering

$$R = 5\text{km}, v = 10\text{km/s}$$



提供：伊藤（名大）

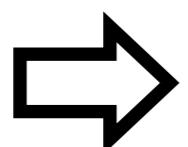
離心率~0.1をもつ10kmサイズの微惑星の場合

$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} \sim 300 \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{R}{10\text{km}} \right)^{-1.36} \left(\frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-1}$$

破壊は当然起こる！ (Benz & Asphaug 1999)

衝突・破壊の効果：面密度減少

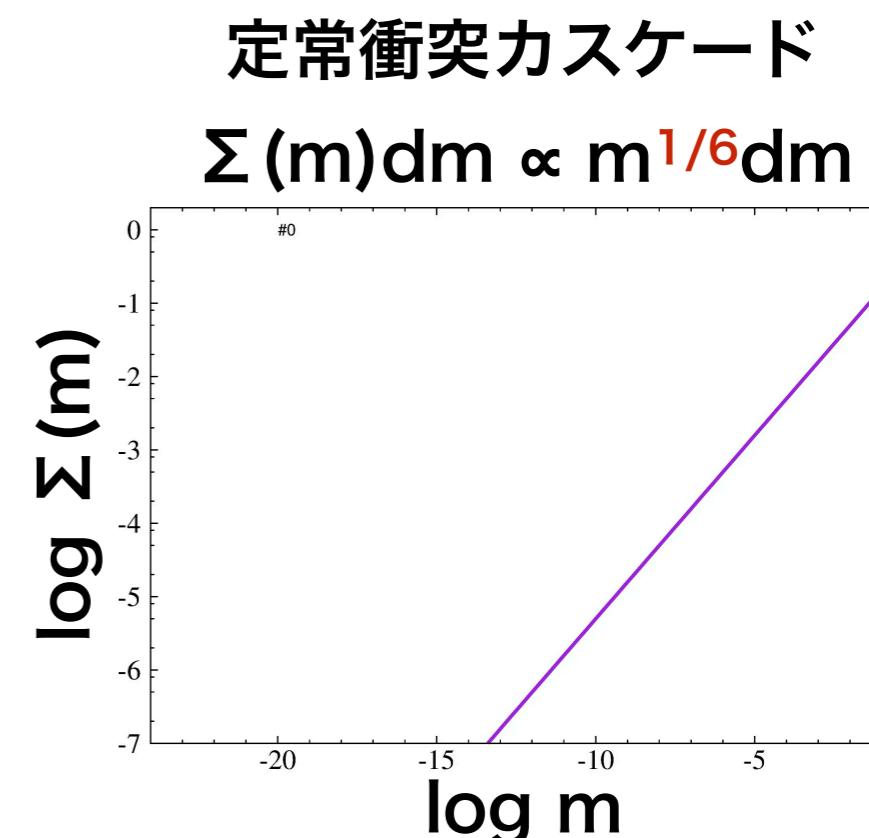
- 衝突・破壊にともなう微惑星円盤の進化
 - 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる = 衝突力スケード
(e.g., Tanaka et al. 1996)
 - $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる



微惑星円盤の面密度は減少する

- 面密度減少の解析解
(Kobayashi & Tanaka 2010)

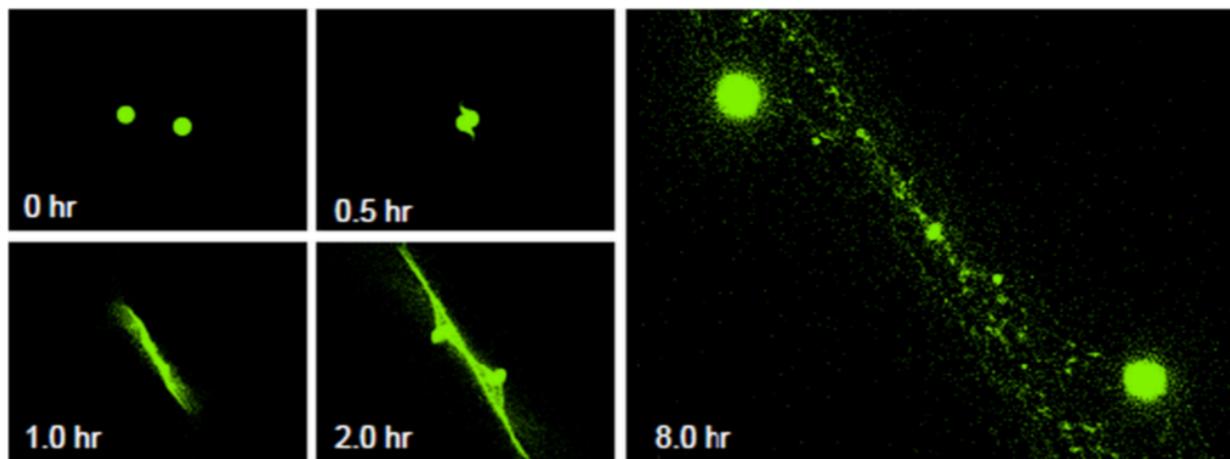
- 破片の面密度はべき一定のまま減少
- 面密度減少のタイムスケール
 $\propto 1/\text{面密度}$



巨大衝突とデブリ円盤

- 衝突体質量の約10%は破片として放出

(Agnor & Asphaug, 2004; Genda et al., 2012)



(Genda et al., 2015)

- 放出破片はデブリ円盤を形成

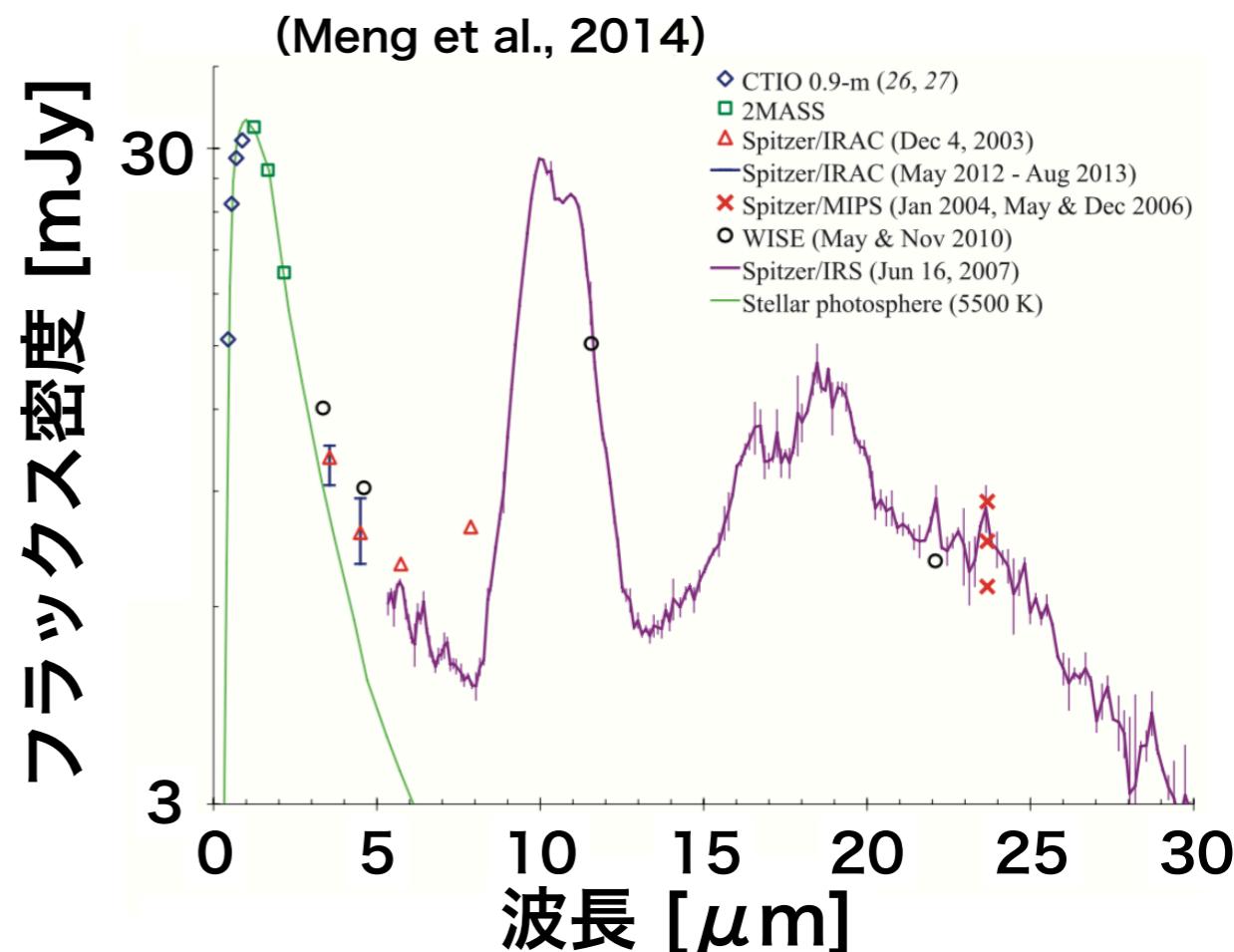
(Meng et al. 2014; Genda et al., 2015)

地球型惑星形成領域 ($> 300\text{K}$)

➡ 「暖かい」 デブリ円盤

太陽系外の巨大衝突ステージは暖かいデブリ円盤として観測されている

天体名：ID8 年齢： $\sim 35\text{Myr}$



暖かいデブリ円盤の明るさ進化

円盤の明るさに注目

増加：円盤総質量が増加

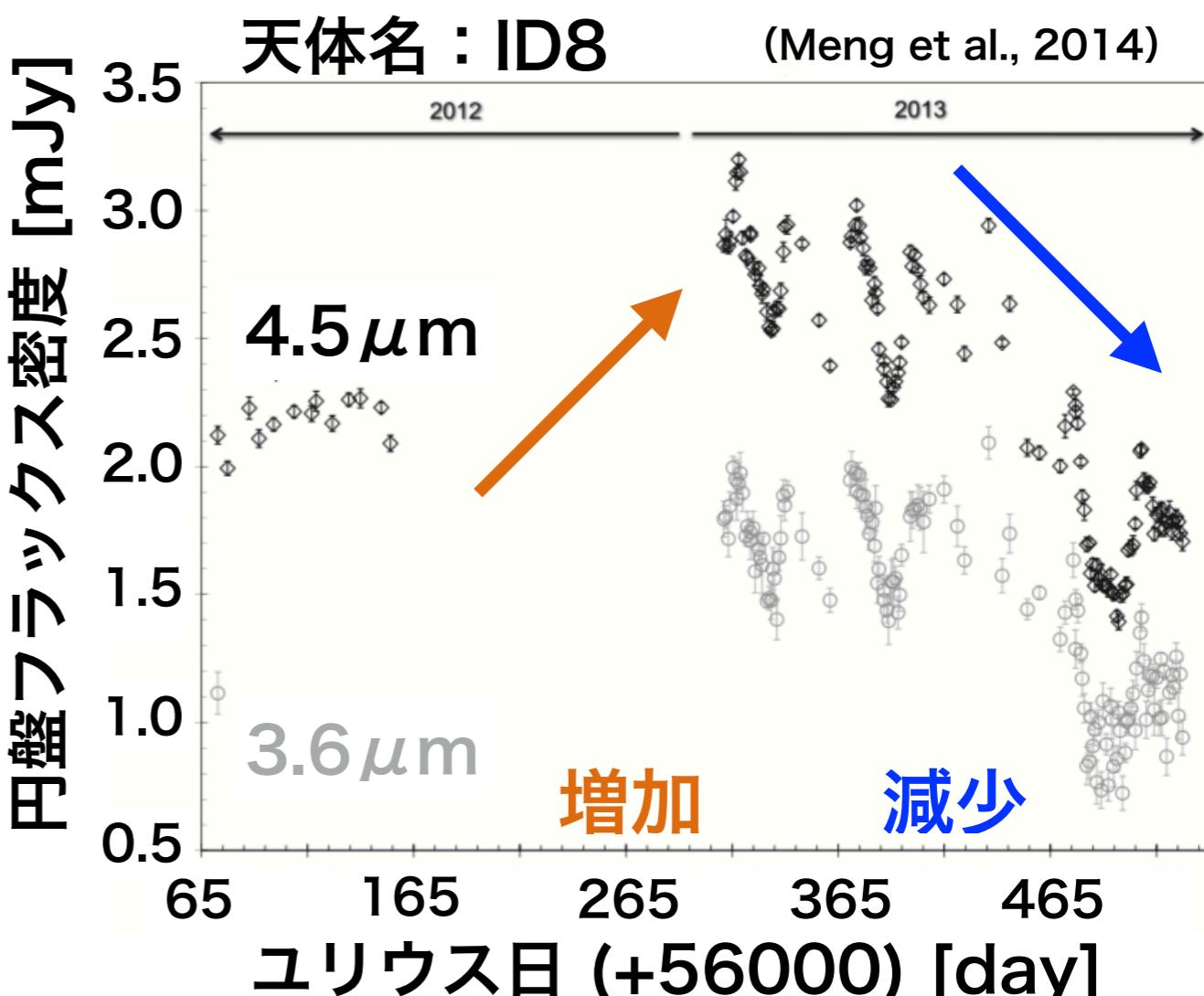
- ・ 破片の供給源が存在

➡ **原始惑星同士の巨大衝突**

減少：円盤総質量が減少

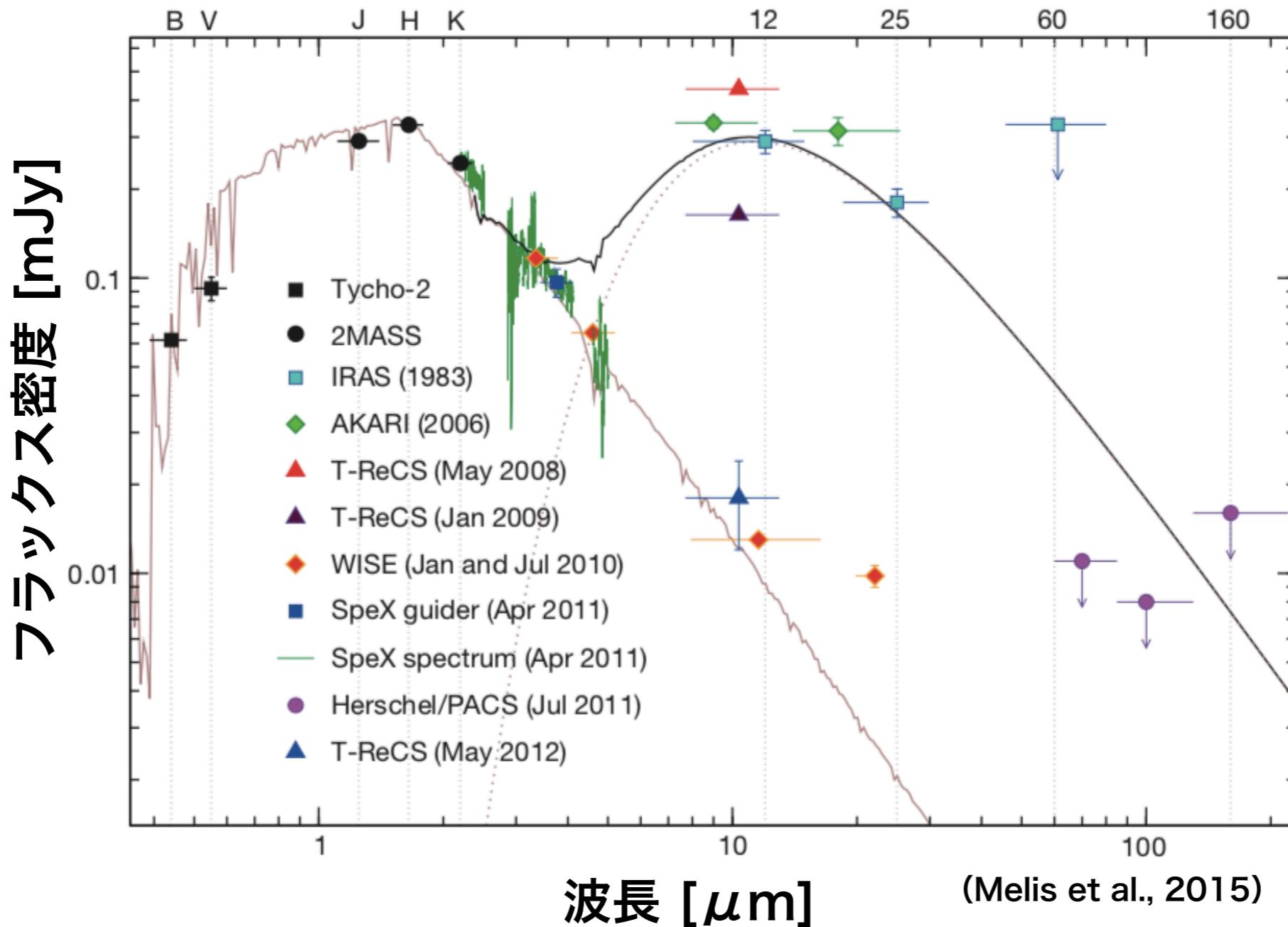
- ・ 破片同士は衝突をくりかえし小さくなる = 衝突力スケード
(e.g., Tanaka et al. 1996)
- ・ $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる

➡ **供給源がない場合、デブリ円盤の総質量は減少する**



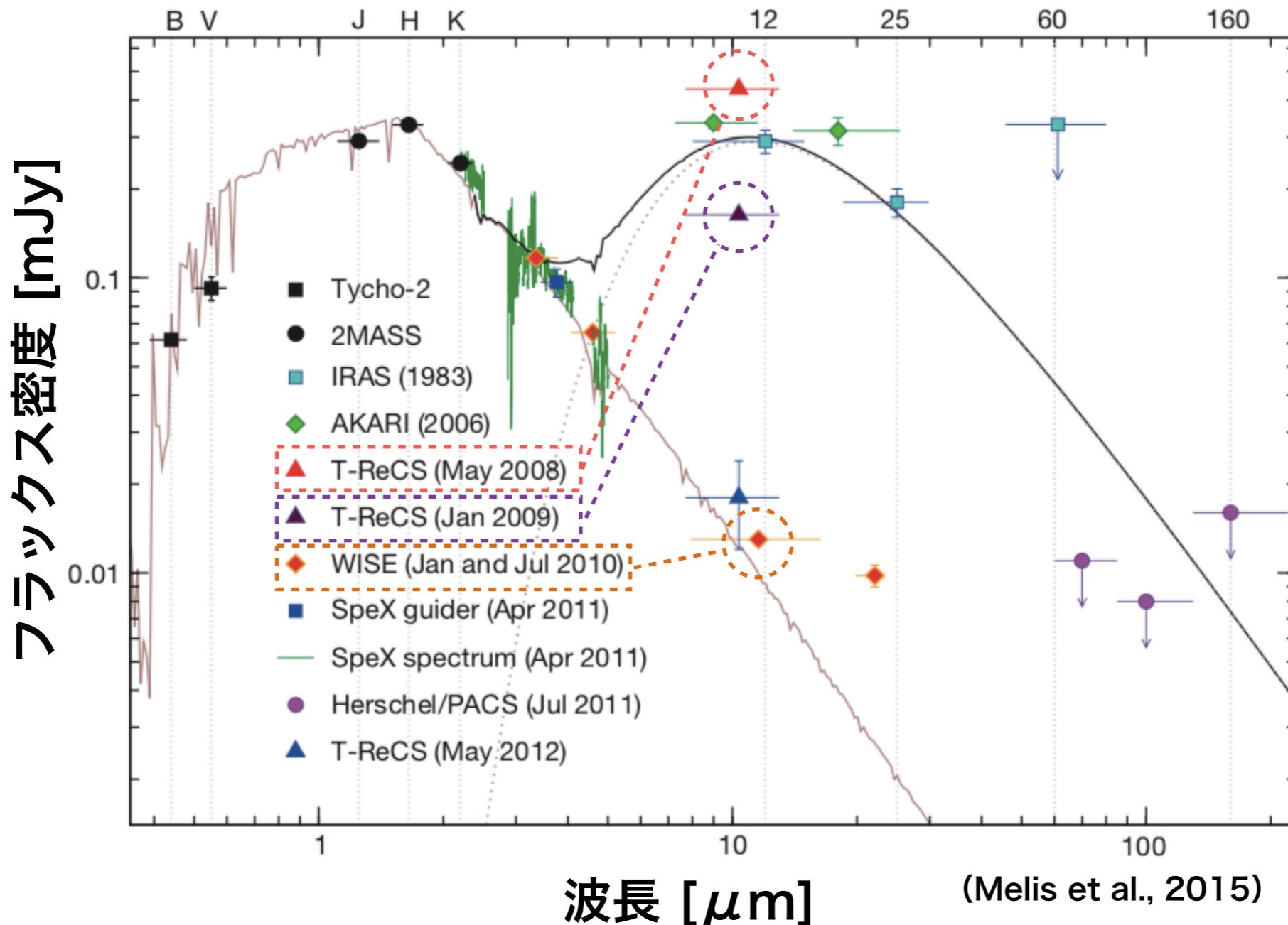
急激な明るさの変化をしたデブリ円盤

天体名：TYC 8241 2652 1 年齢： $\sim 10 \text{ Myr}$



急激な明るさの変化をしたデブリ円盤

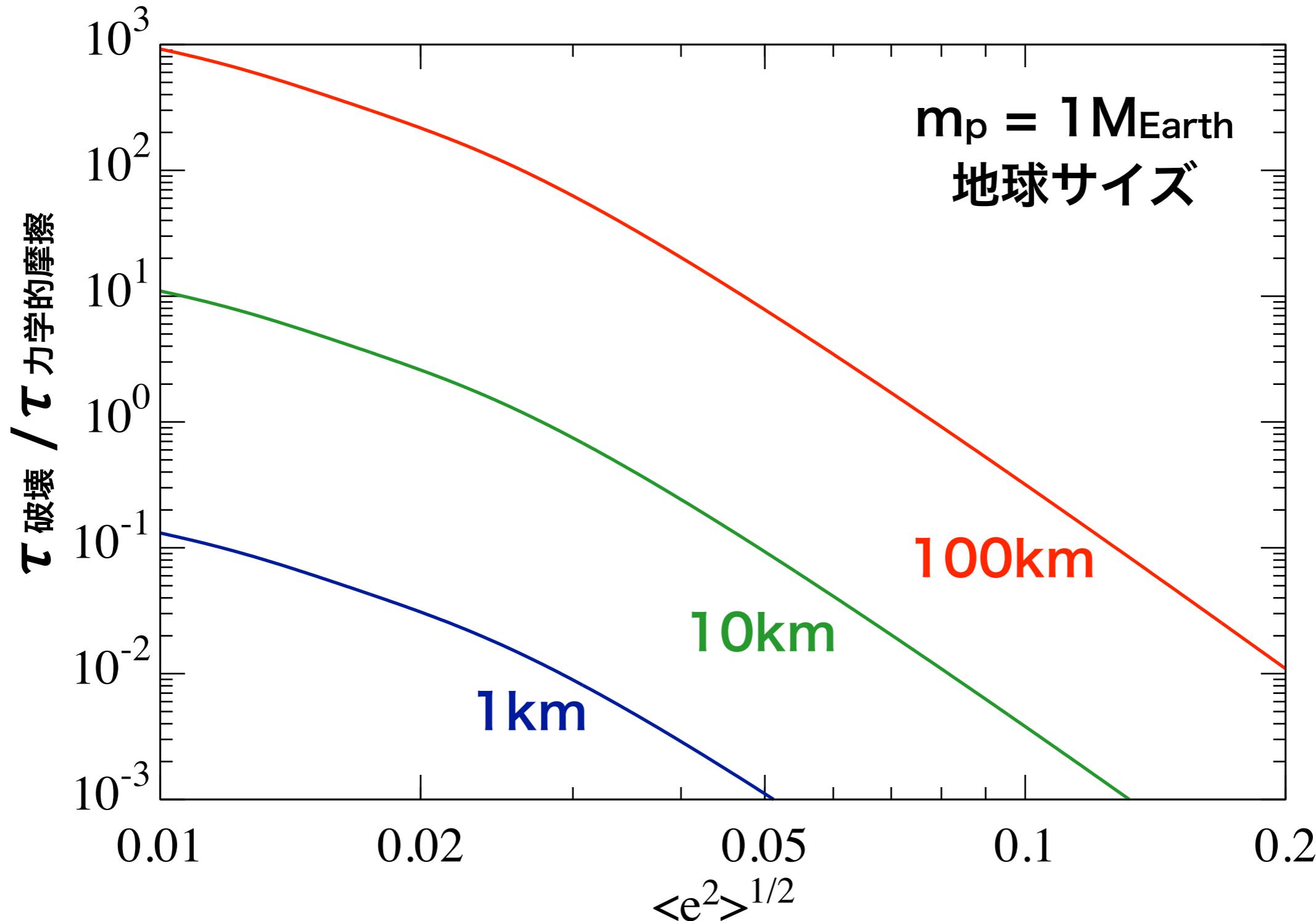
天体名：TYC 8241 2652 1 年齢： $\sim 10 \text{ Myr}$



2年間で明るさが1/10以下に変化 衝突・破壊のみでは説明できない

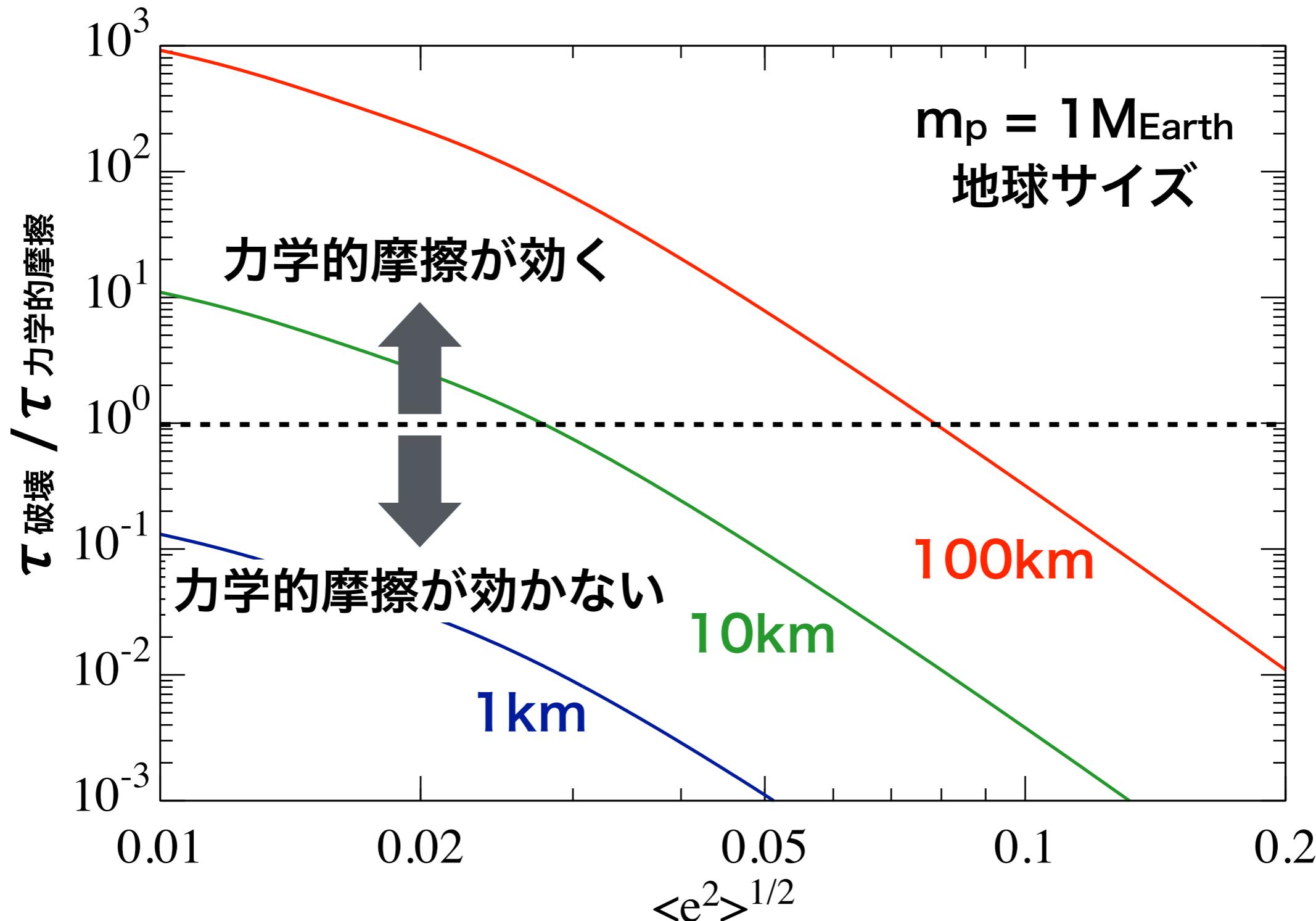
タイムスケールの比較

- $\tau_{\text{破壊}} / \tau_{\text{力学的摩擦}}$: 残存微惑星円盤の面密度に依存しない

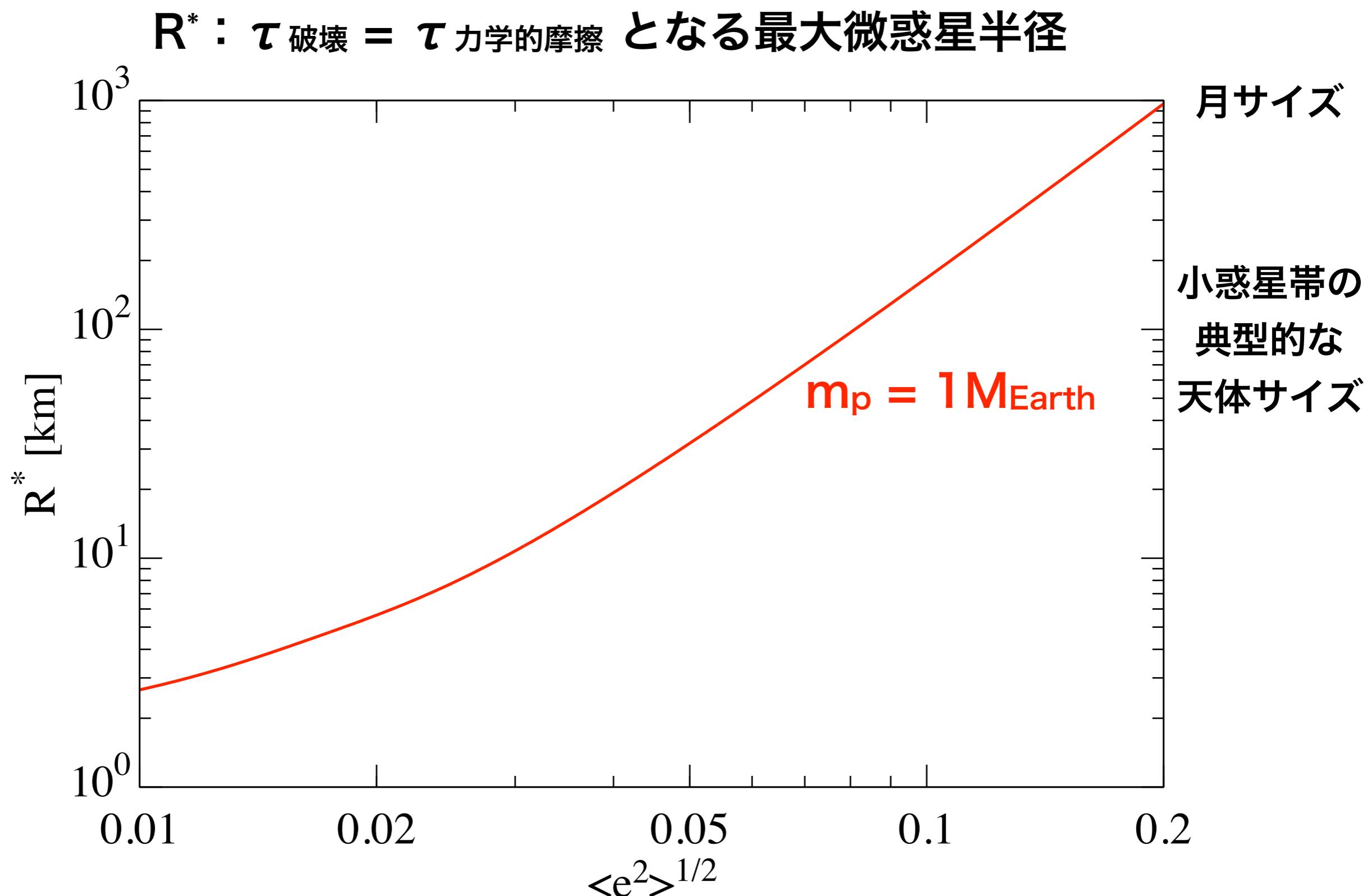


タイムスケールの比較

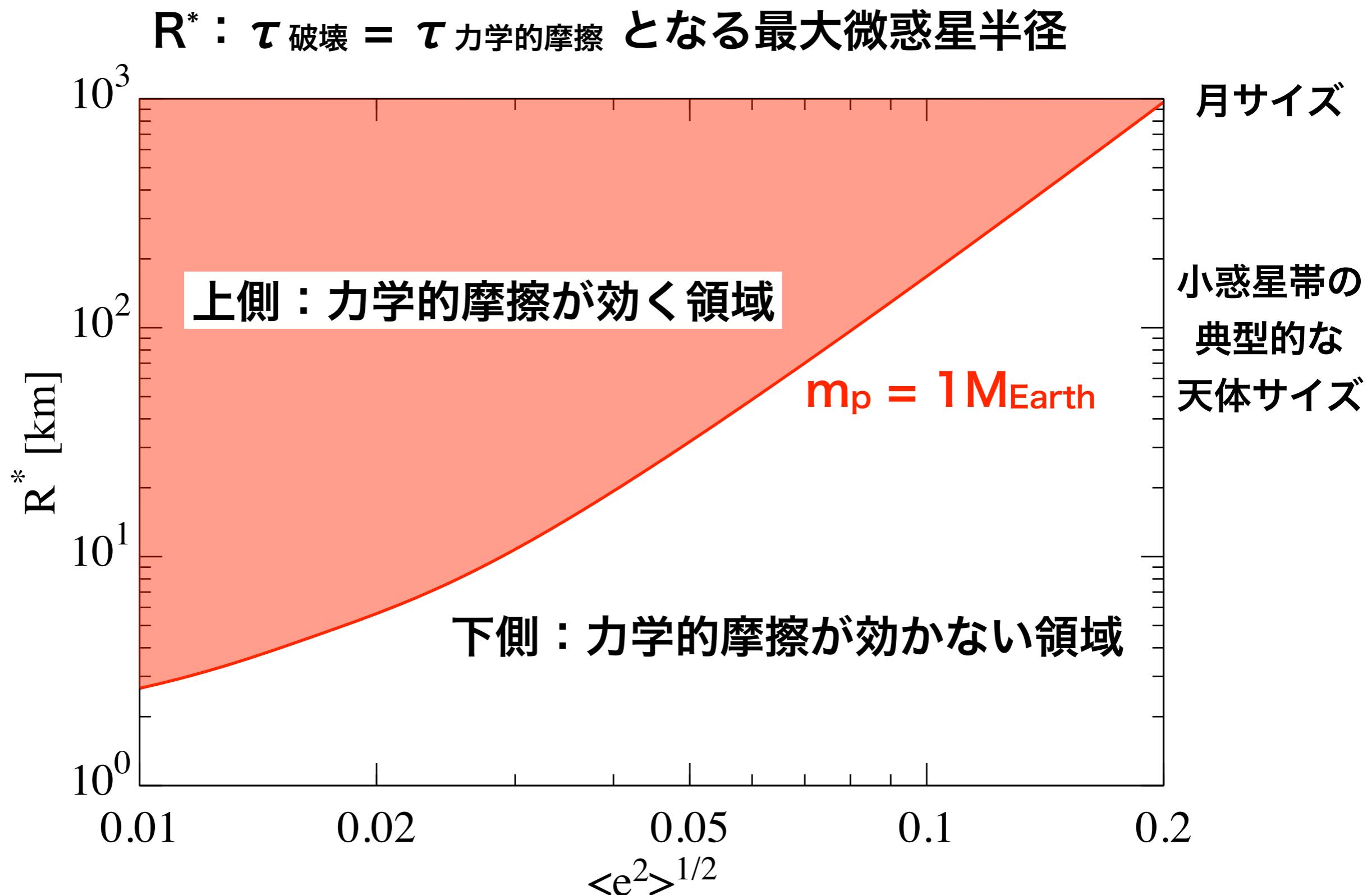
- $\tau_{\text{破壊}} / \tau_{\text{力学的摩擦}}$: 残存微惑星円盤の面密度に依存しない



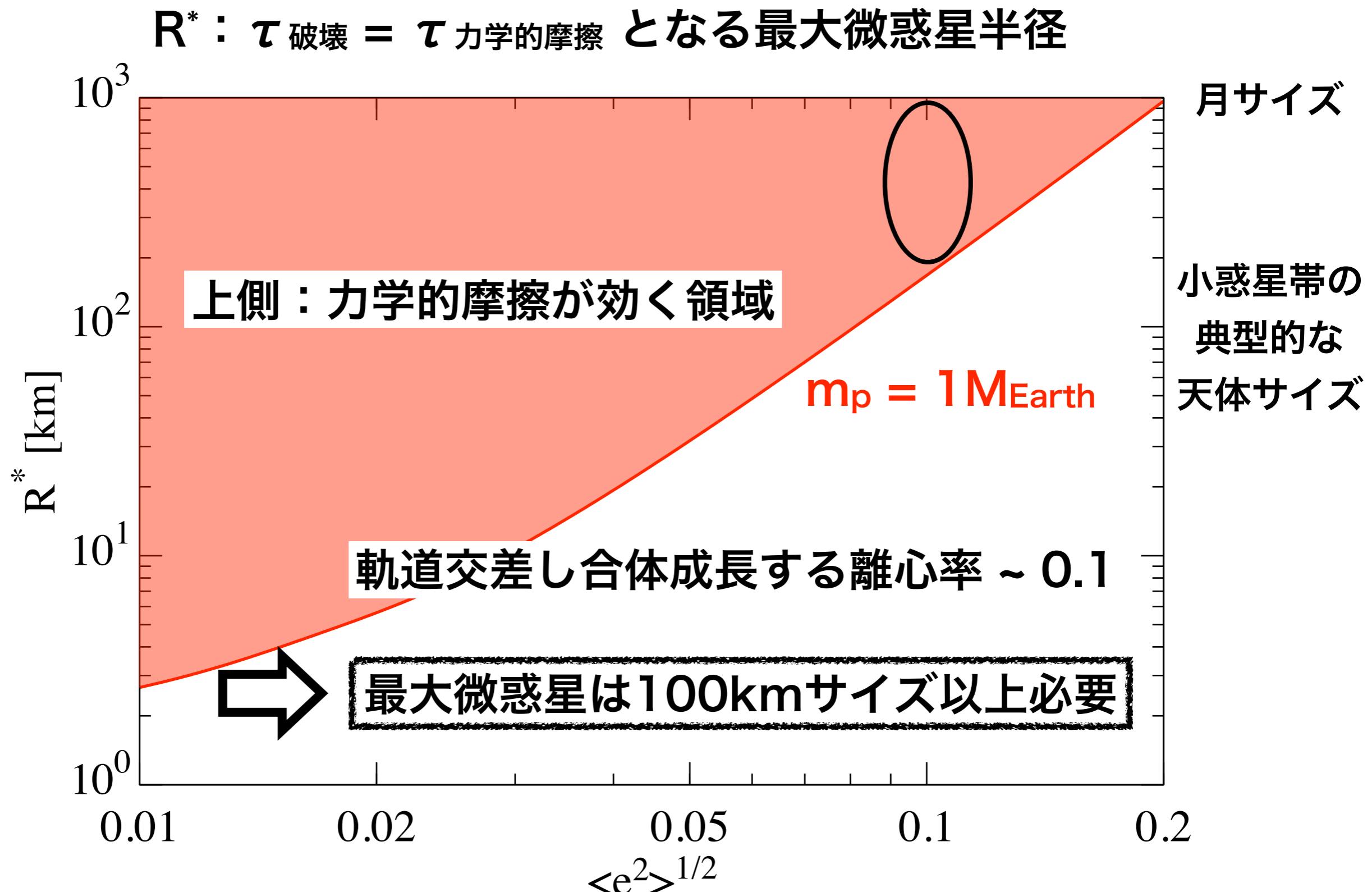
力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ



力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ

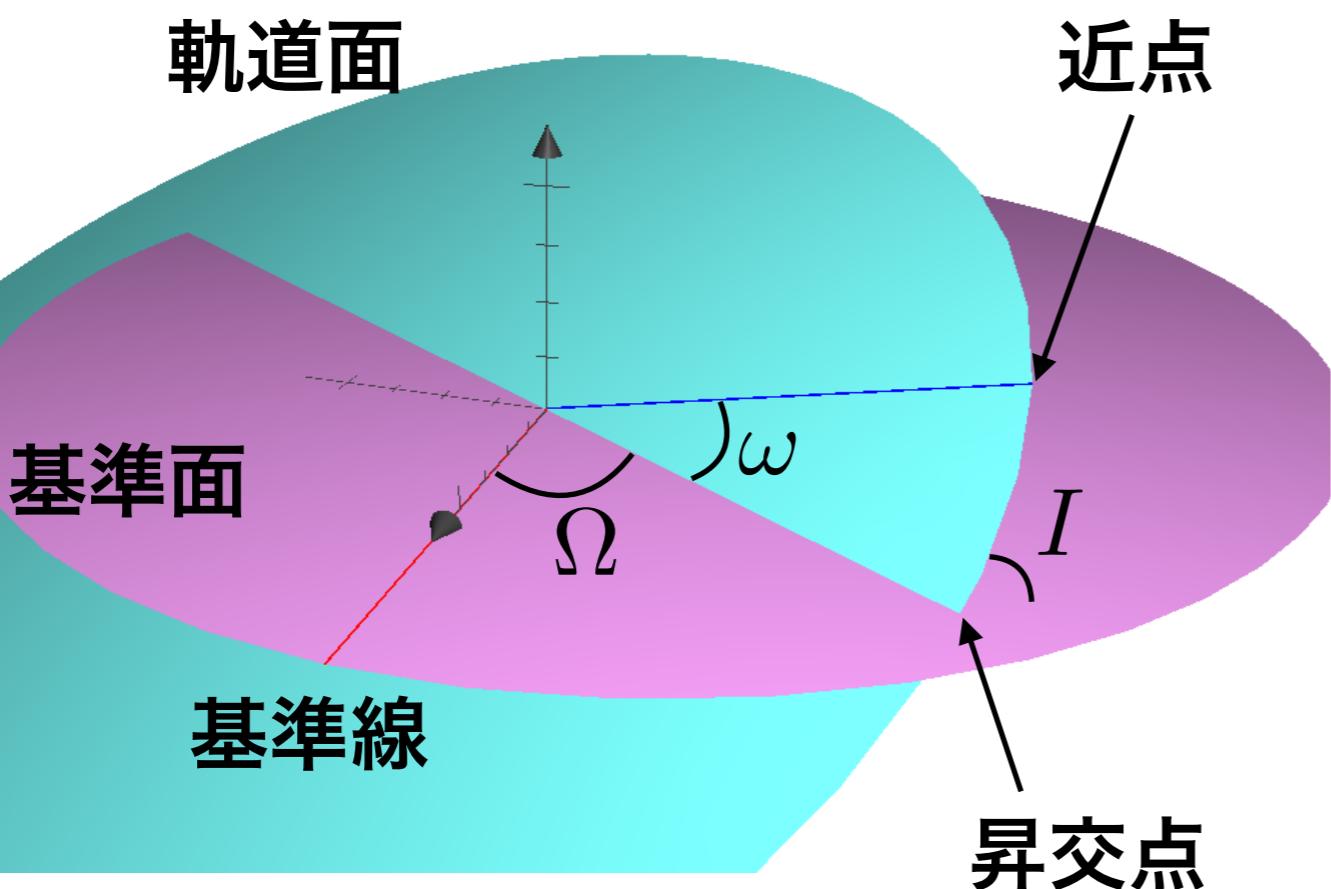


力学的摩擦が効く最大微惑星の大きさ



軌道要素

橢円軌道の場合



橢円の形を決定：

軌道長半径 a

離心率 e

軌道面の位置を決定：

昇交点経度 Ω

近点引数 ω

軌道傾斜角 I

位置と速度の6変数



軌道要素6つ

天体の位置を決定：

近点通過時刻 T

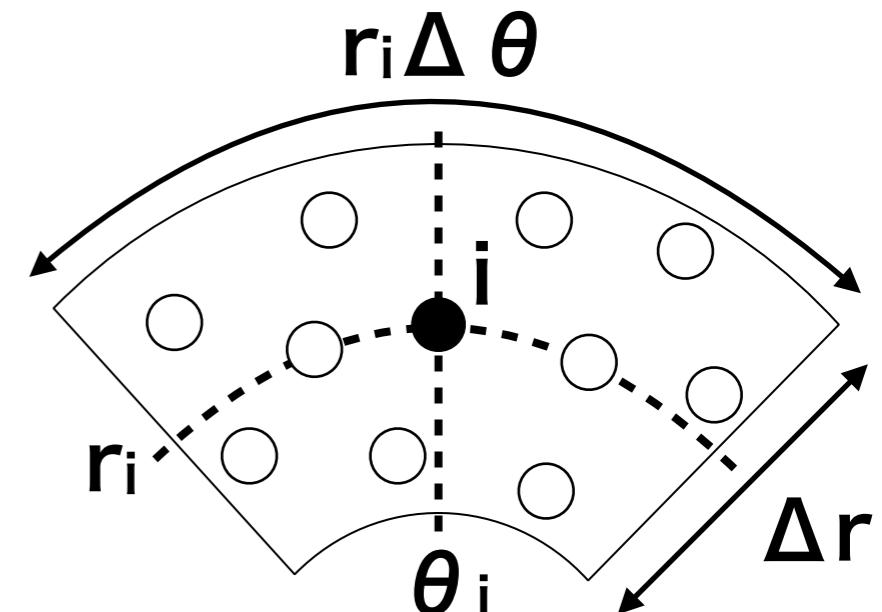
面密度と衝突速度

step1：トレーサー i のまわりに扇形領域 i を作る (Morishima, 2015)

step2：この領域の面密度を
トレーサー i の面密度 Σ_i とする

$$\Sigma_i = \frac{m_i + \sum_j^N m_j}{r_i \Delta r \Delta \theta}$$

j ：領域 i 内の
トレーサー
 N ： j の総和



step3： i と j の相対速度をランダム速度で近似

ランダム速度 $\sqrt{e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2} v_{K,i}$

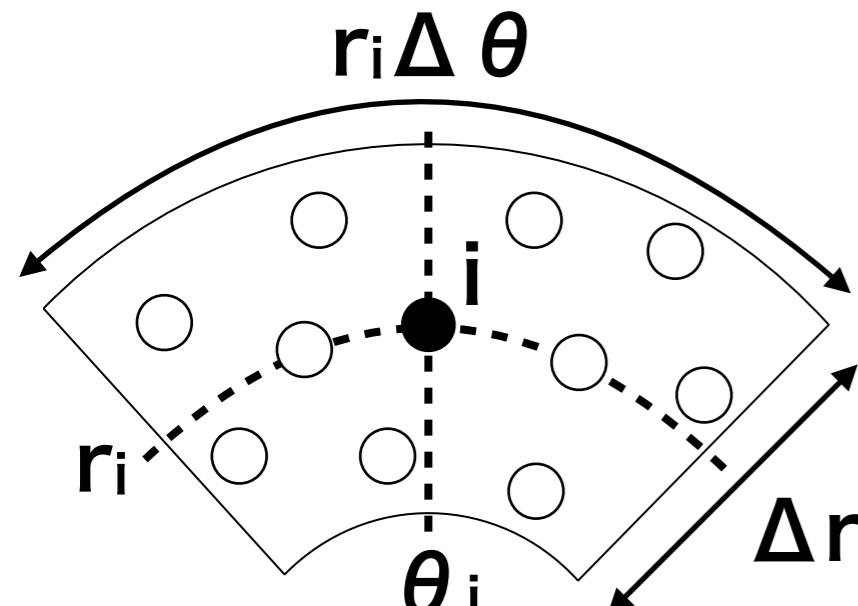
$e_{i,j}$ ：相対離心率
 $i_{i,j}$ ：相対軌道傾斜角
 $v_{K,i}$ ： i のケプラー速度

step4：相対速度の2乗平均平方根を i の衝突速度 $v_{\text{imp},i}$ だとみなす

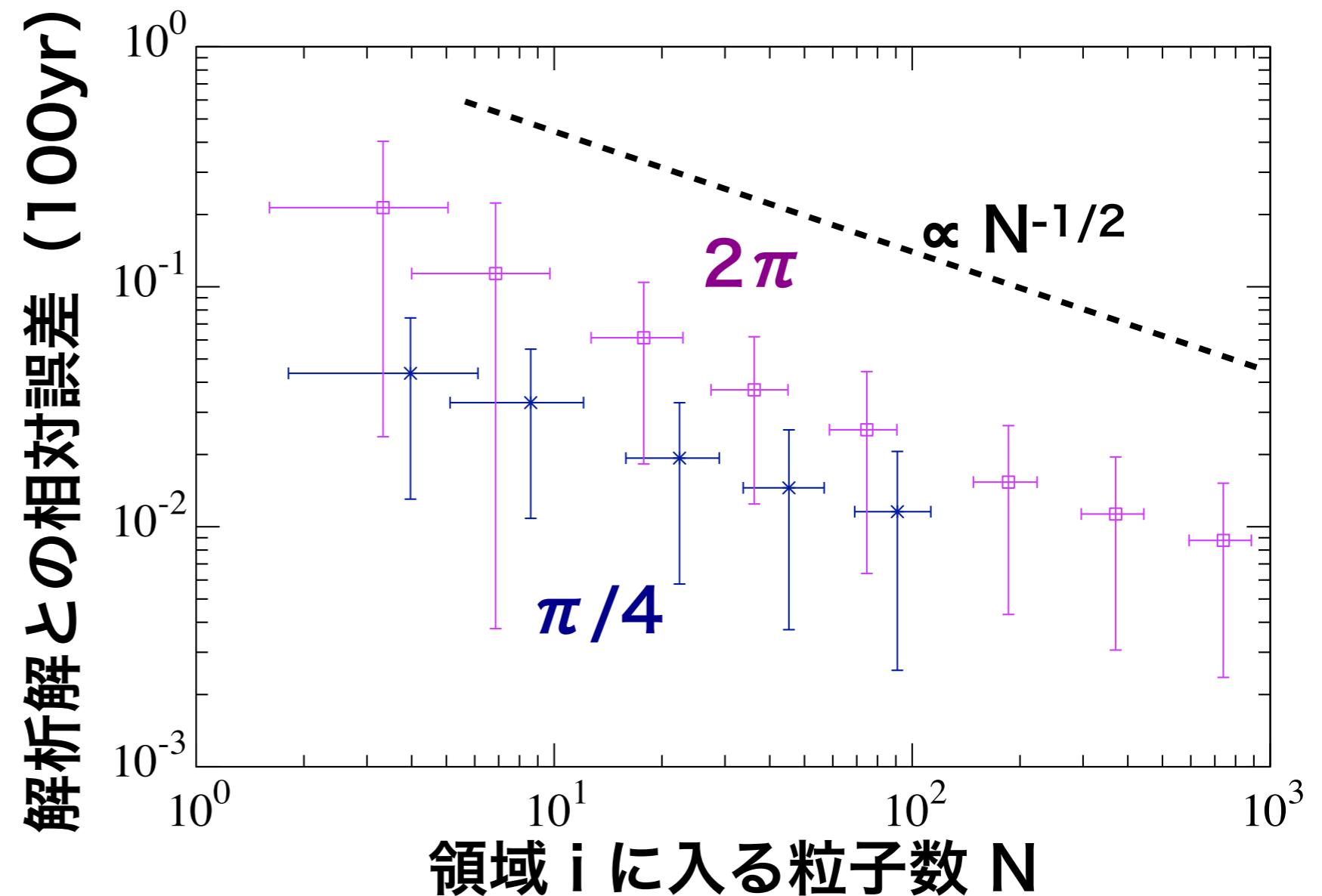
$$v_{\text{imp},i} = \sqrt{\frac{\sum_j^N (e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2) v_{K,i}^2}{N}}$$

破壊計算の精度と粒子数の関係

- 微惑星の個数：
 $\{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000\}$ 体
- $\Delta\theta = 2\pi, \pi/4$
- $\Delta r = 0.02\text{AU}$

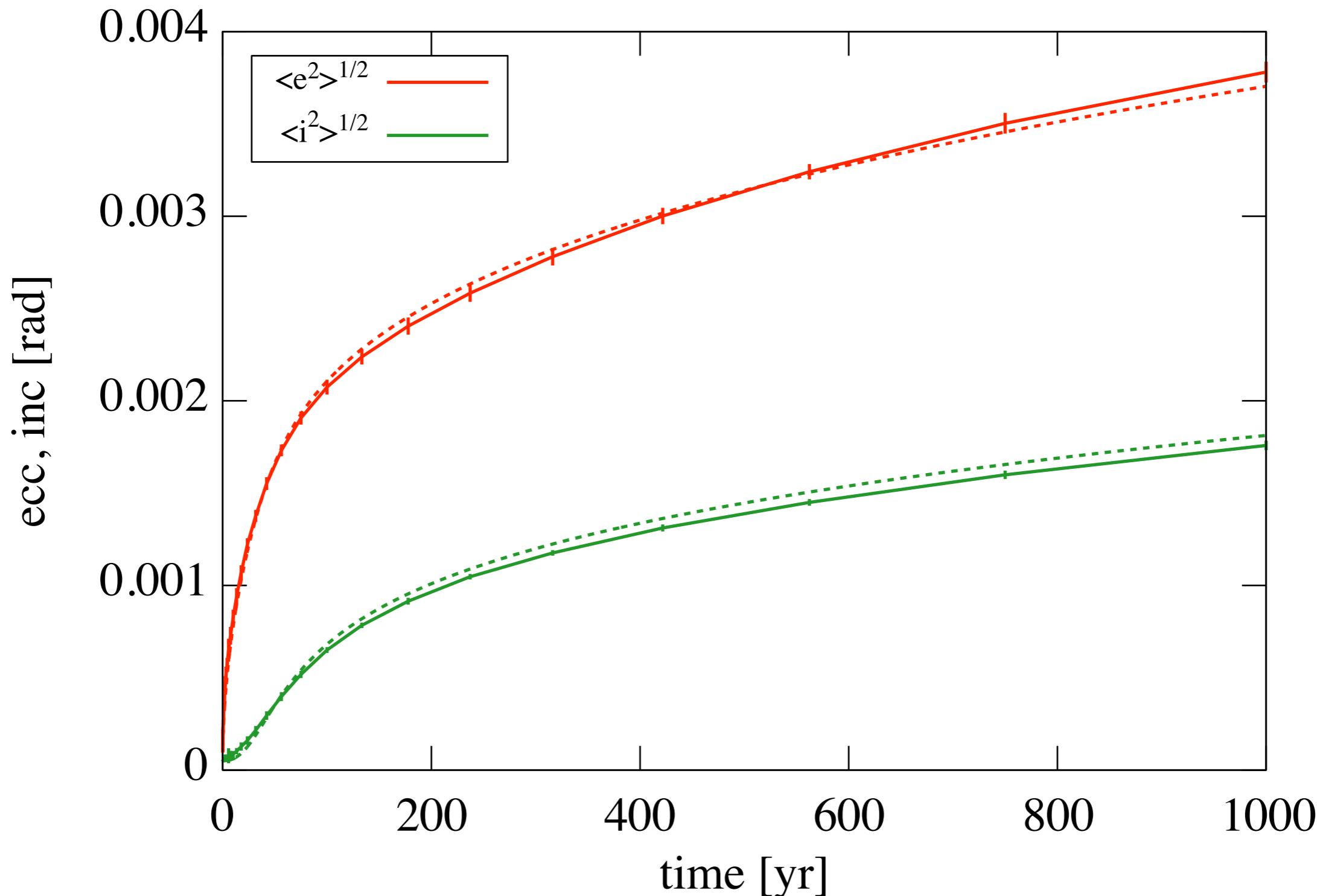


$\pi/4$ は時間経過で粒子が入れ替わるため、
 2π に比べ約8倍の粒子平均が取れている

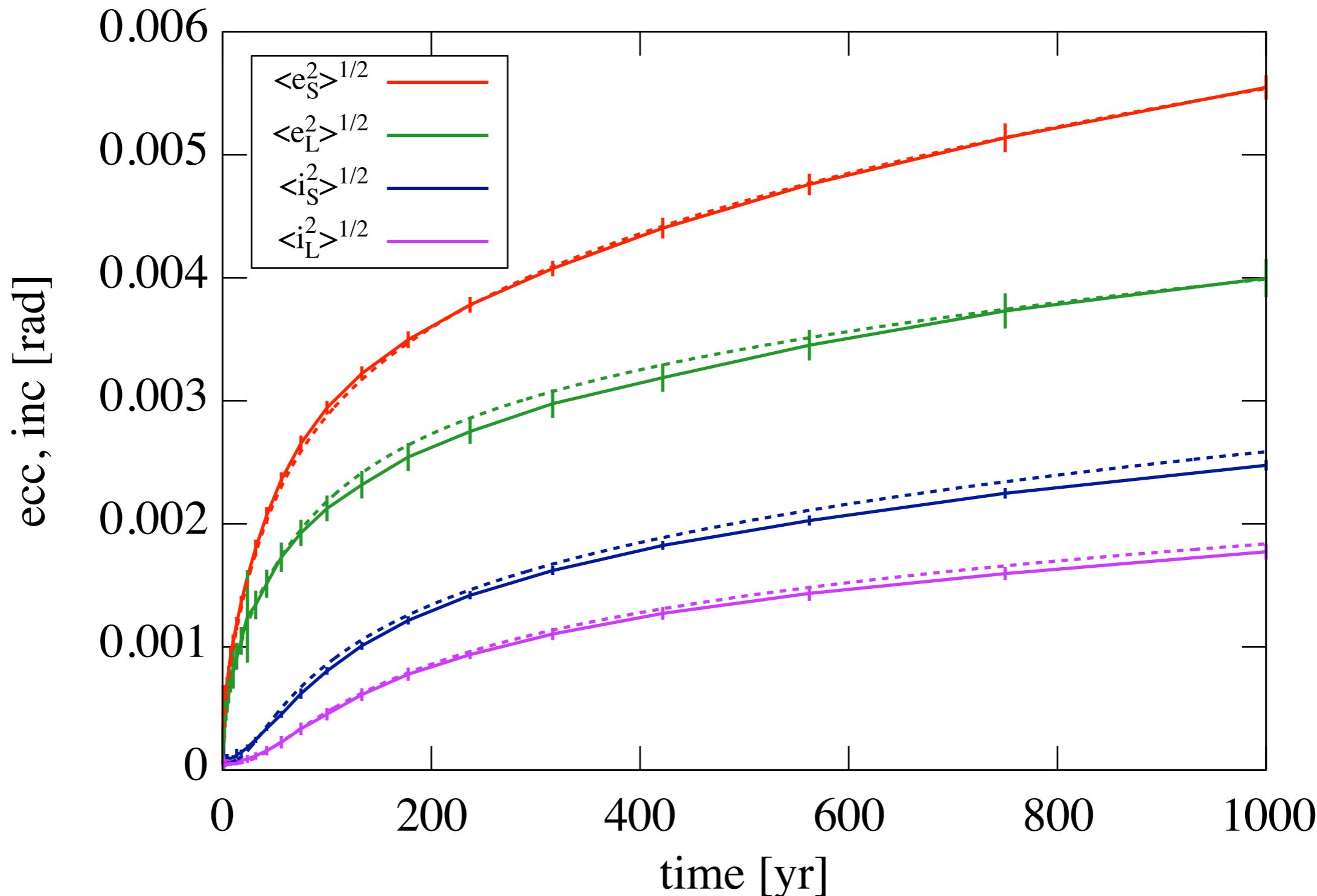


→ 約√8倍誤差が小さい

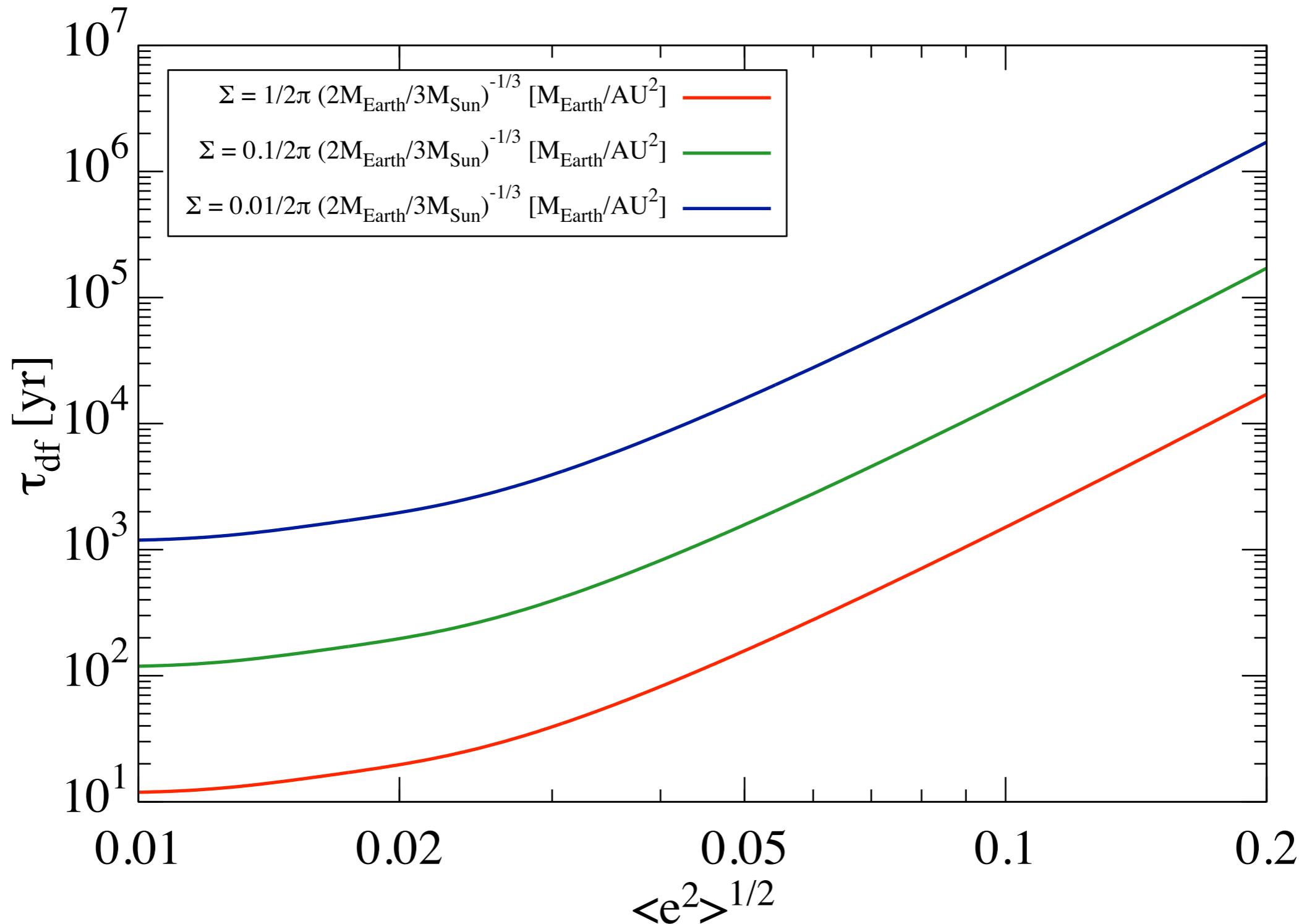
N体計算のテスト



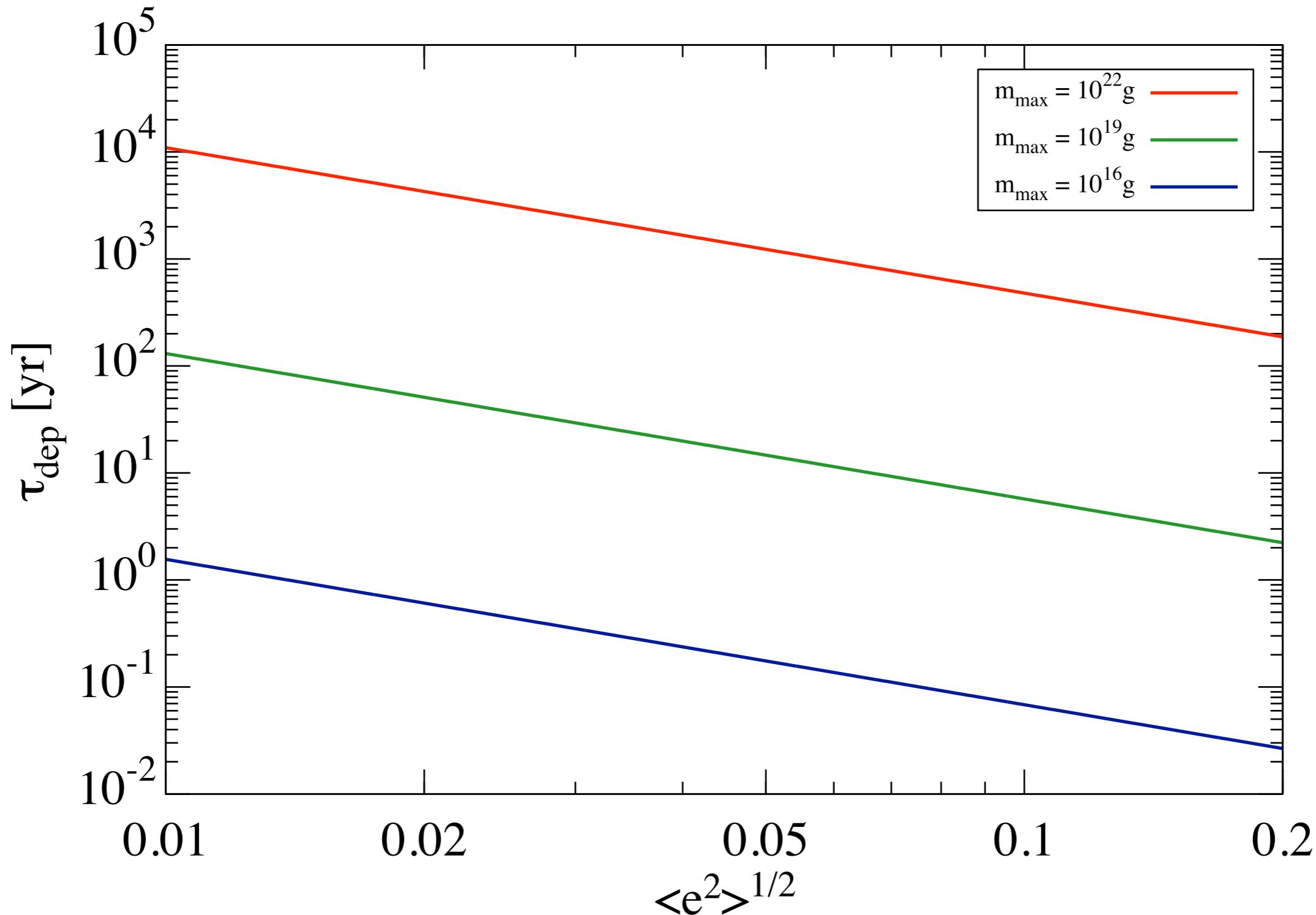
N体計算のテスト



力学的摩擦のタイムスケール



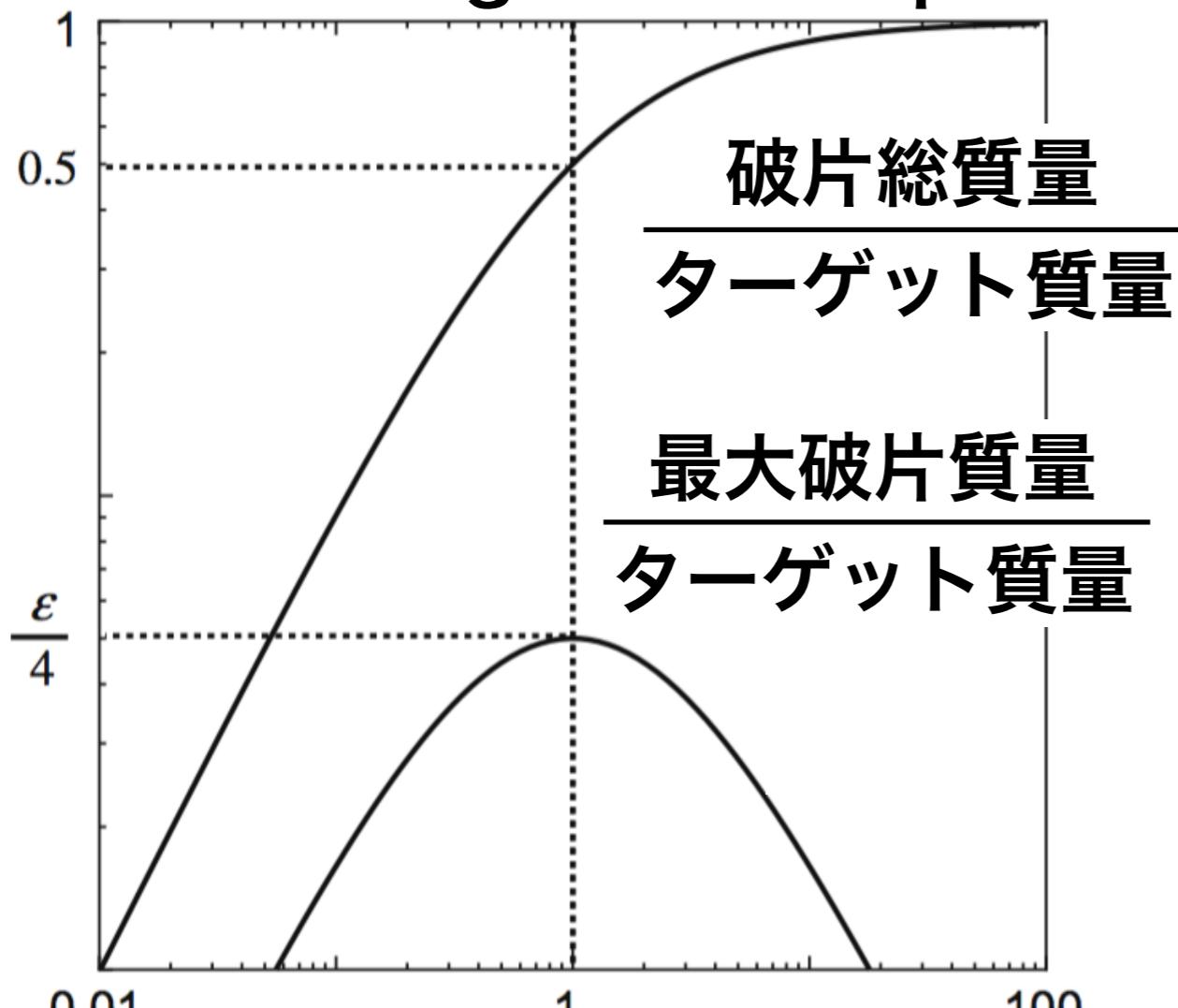
破壊のタイムスケール



衝突・破壊のモデル

(Kobayashi & Tanaka, 2010)

cratering catastrophic

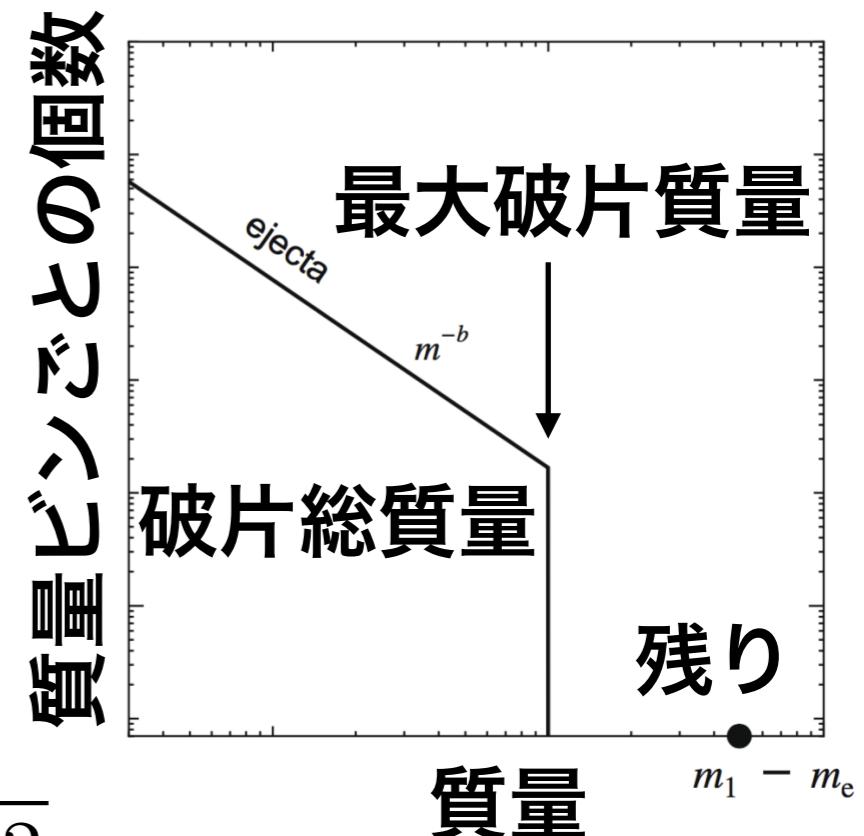


$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} = \phi$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{破片総質量}}{\text{ターゲット質量}} &= \frac{\phi}{1 + \phi} \\ \frac{\text{最大破片質量}}{\text{ターゲット質量}} &= \frac{\varepsilon\phi}{(1 + \phi)^2} \end{aligned}$$

$\phi=1$ のときターゲット
質量の半分が吹き飛ぶ

Q_D^* の定義



破壊を起こす衝突速度

(Benz & Asphaug, 1999)

- 脱出速度の10倍以上で衝突すると破壊が起きる

$$\frac{v_{\text{esc}}^2}{2Q_D^*} = 6.44 \times 10^{-3} \left(\frac{R}{10\text{km}} \right)^{0.640}$$
$$= 6.14 \times 10^{-3} \left(\frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-0.213} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.213}$$

- 離心率が0.1程度で衝突すると必ず破壊が起きる

$$\frac{e^2 v_K^2}{2Q_D^*} = 342 \left(\frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-1} \left(\frac{R}{10\text{km}} \right)^{-1.36} \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{\text{M}_\odot} \right)$$
$$= 379 \left(\frac{\rho}{3\text{g/cm}^3} \right)^{-0.547} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453} \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{\text{M}_\odot} \right)$$

破壊による総質量減少の解析解

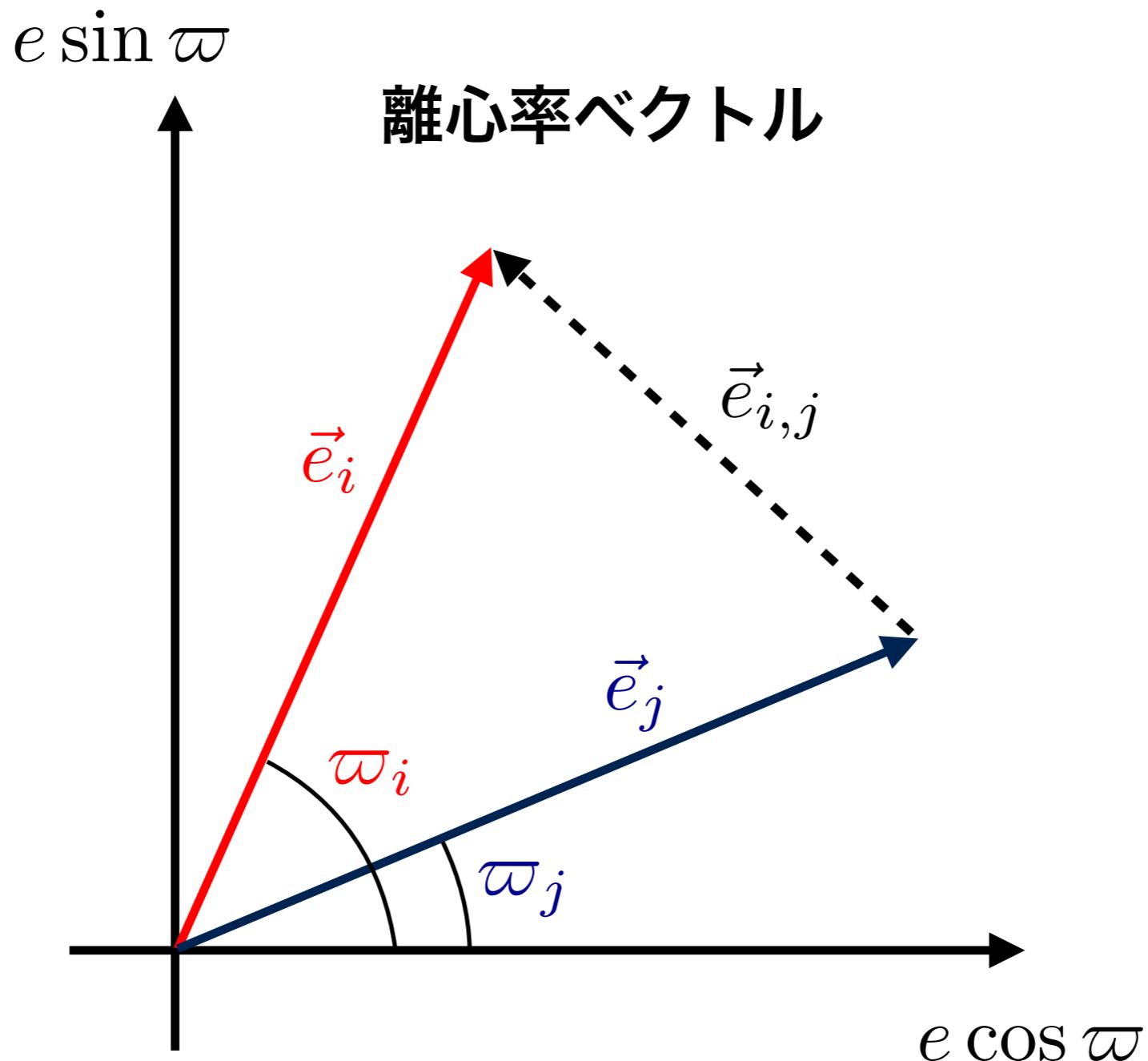
$$\frac{M_{\text{tot}}(t)}{M_{\text{tot},0}} = \frac{1}{1 + t/\tau_{\text{dep}}} \quad (\text{Kobayashi \& Tanaka, 2010})$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{dep}} &= 0.617 \left(\frac{M_{\text{tot},0}}{10M_{\oplus}} \right)^{-1} \left(\frac{m_{\text{max}}}{10^{16}\text{g}} \right)^{0.641} \left(\frac{e}{0.01} \right)^{-1.36} \\ &\times \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{4.18} \left(\frac{\Delta a/a}{0.05} \right) \left(\frac{Q_0}{5.07 \times 10^6 \text{erg/g}} \right)^{0.679} \text{yr} \end{aligned}$$

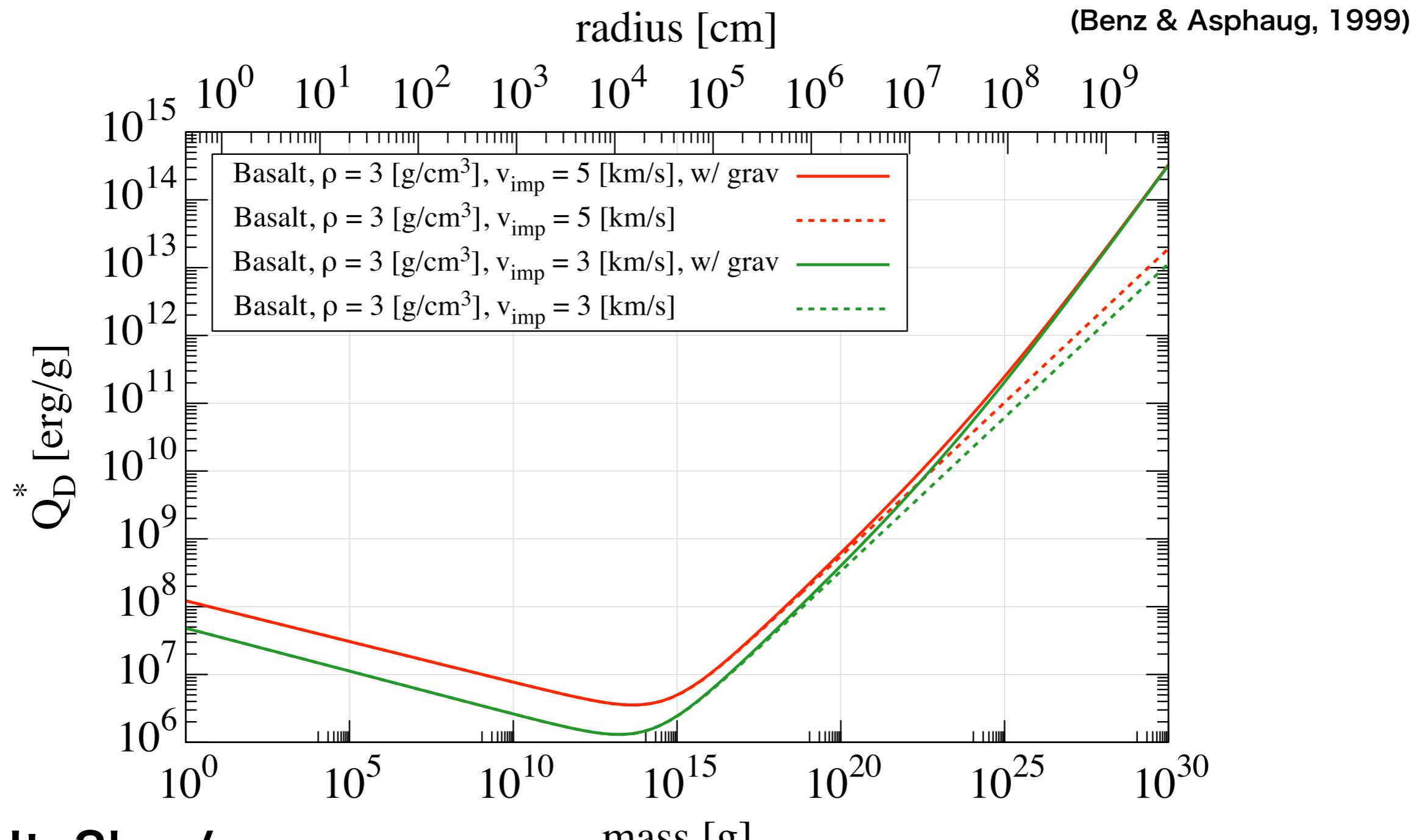
初期の1/2となるタイムスケール

相対離心率

$$e_{i,j}^2 = e_i^2 + e_j^2 - 2e_i e_j \cos(\varpi_i - \varpi_j) \quad \varpi : \text{近点経度}$$



破壊に必要な単位質量当たりのエネルギー : Q_D^*



$$Q_D^* \simeq 1.16 \times 10^8 \left(\frac{\rho}{3 \text{ g/cm}^3} \right)^{0.547} \left(\frac{m}{10^{19} \text{ g}} \right)^{0.453} \text{ erg/g}$$

N体計算の手法

- 4次のエルミート法 (Makino & Aarseth 1992) (予測子・修正子法の一種)

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算 (2次精度)

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

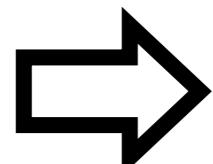
step3：加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算 (4次精度)

- 階層化タイムステップ

粒子は別々の時間とタイムステップをもつ

タイムステップは2のべき乗に設定

加速度 大 → タイムステップ 小



近接遭遇を精度よく効率的に解くことができる

物理半径を用いた衝突合体 (惑星への集積) も取り扱っている

離心率の平均値の変化率（解析解）

質量 M_1 の粒子集団1と質量 M_2 の粒子集団2の重力相互作用を考える

(Ida 1990; Ohtsuki et al. 1993; Stewart & Ida 2000)

$$\frac{de_1^2}{dt} \simeq \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \frac{e^2}{t_{g,12}} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

Viscous Stirring

ランダム速度上昇の効果

ヤコビエネルギーの保存より
 $|a_2 - a_1|$ が増えると e, i が増える

Dynamical Friction

エネルギー等分配の効果

粒子あたりのエネルギー
 $\propto M_j e_j^2$ を一定にする働き

$$t_{g,12} = \left(\frac{1}{e^2} \frac{de^2}{dt} \right)^{-1}$$

：相対離心率が変化する
典型的なタイムスケール

$$e^2 = e_1^2 + e_2^2$$

：相対離心率の平均

de_j^2/dt を積分すれば
解析解が求まる！

力学的摩擦の特徴

力学的摩擦の項
$$\left(\frac{de_1^2}{dt} \right)_{\text{df}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

M_1 と M_2 それぞれにエネルギーが等分配されるとき

$$M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2 \approx 0 \quad \rightarrow \quad e_{1,\text{eq}} \approx \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} e_{2,\text{eq}}$$

最終的な平衡状態の離心率は M_1 と M_2 の質量比、つまりN体計算では粒子数に大きく依存する

一方、力学的摩擦のタイムスケールは、 $M_1 \gg M_2$ かつ $e_1 \sim e_2$ とすると

$$\tau_{\text{df}} \simeq 16 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta a/a}{0.126} \right) \left(\frac{e}{0.01} \right)^4 \left(\frac{\ln \Lambda}{5} \right)^{-1} \left(\frac{M_1}{M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{tot},2}}{10M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{3/2} \text{yr}$$

それぞれの M_2 に依存せず、集団2の総質量 $M_{\text{tot},2}$ が重要

ヤコビエネルギー

回転系での相対運動のエネルギー

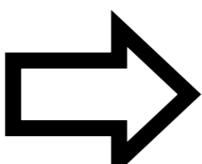
$$E_J = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2} \Omega_K^2 x^2 + \frac{1}{2} \Omega_K^2 z^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r} = \text{const.}$$

惑星による微惑星散乱では、ヤコビエネルギーを保つように軌道進化する離心率、軌道傾斜角、軌道長半径で書き換えると

$$E_J = \frac{1}{2} (e^2 + i^2) a^2 \Omega_K^2 - \frac{3}{8} \Delta a^2 \Omega_K^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r}$$

$$\equiv \frac{1}{2} v_{\text{inc}}^2$$

v_{inc} : ヒル圏への侵入速度

$|\Delta a|$ 増 

$(e^2 + i^2)$ 増

Viscous Stirringの原因

4次のエルミート法1

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

$$\begin{cases} x_{p,j} = x_{0,j} + \Delta t v_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{a}_{0,j} & \text{予測子} \\ v_{p,j} = v_{0,j} + \Delta t a_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{a}_{0,j} & \text{添字0は} t_0 \text{での値} \end{cases}$$

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

ここで $\begin{cases} r_{jk} = x_{p,j} - x_{p,k} \\ v_{jk} = v_{p,j} - v_{p,k} \end{cases}$ とおくと、 Δt 進めた加速度は

$$\begin{cases} a_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \frac{r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} & \epsilon : \text{ソフトニングパラメータ} \\ \dot{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \left[\frac{v_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(v_{jk} \cdot r_{jk}) r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] & \\ \end{cases}$$

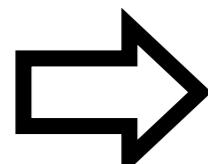
添字1は $t_0 + \Delta t$ での値

4次のエルミート法2

step2続き

$$\begin{cases} a_{1,j} = a_{0,j} + \Delta t \dot{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(3)} & \text{3次のエルミート補完} \\ \dot{a}_{1,j} = \dot{a}_{0,j} + \Delta t a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(3)} & (\text{テイラー展開}) \end{cases}$$

逆に解く



$$\begin{cases} a_{0,j}^{(2)} = \frac{-6(a_{0,j} - a_{1,j}) - \Delta t(4\dot{a}_{0,j} + 2\dot{a}_{1,j})}{\Delta t^2} \\ a_{0,j}^{(3)} = \frac{12(a_{0,j} - a_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{a}_{0,j} + \dot{a}_{1,j})}{\Delta t^3} \end{cases}$$

step3 : 加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算 (4次精度)

$$\begin{cases} x_{c,j} = x_{p,j} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(2)} + \alpha \frac{\Delta t^5}{120} a_{0,j}^{(3)} \\ v_{c,j} = v_{p,j} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(3)} \end{cases} \quad \text{修正子}$$