

巨大衝突ステージにおける 惑星-微惑星間の力学的摩擦と 微惑星間の衝突・破壊の関係

磯谷和秀 (名古屋大 Ta研 M2)
共同研究者 小林浩

目次

1. イントロダクション

- ・ 地球型惑星形成
- ・ 先行研究

2. 研究目的

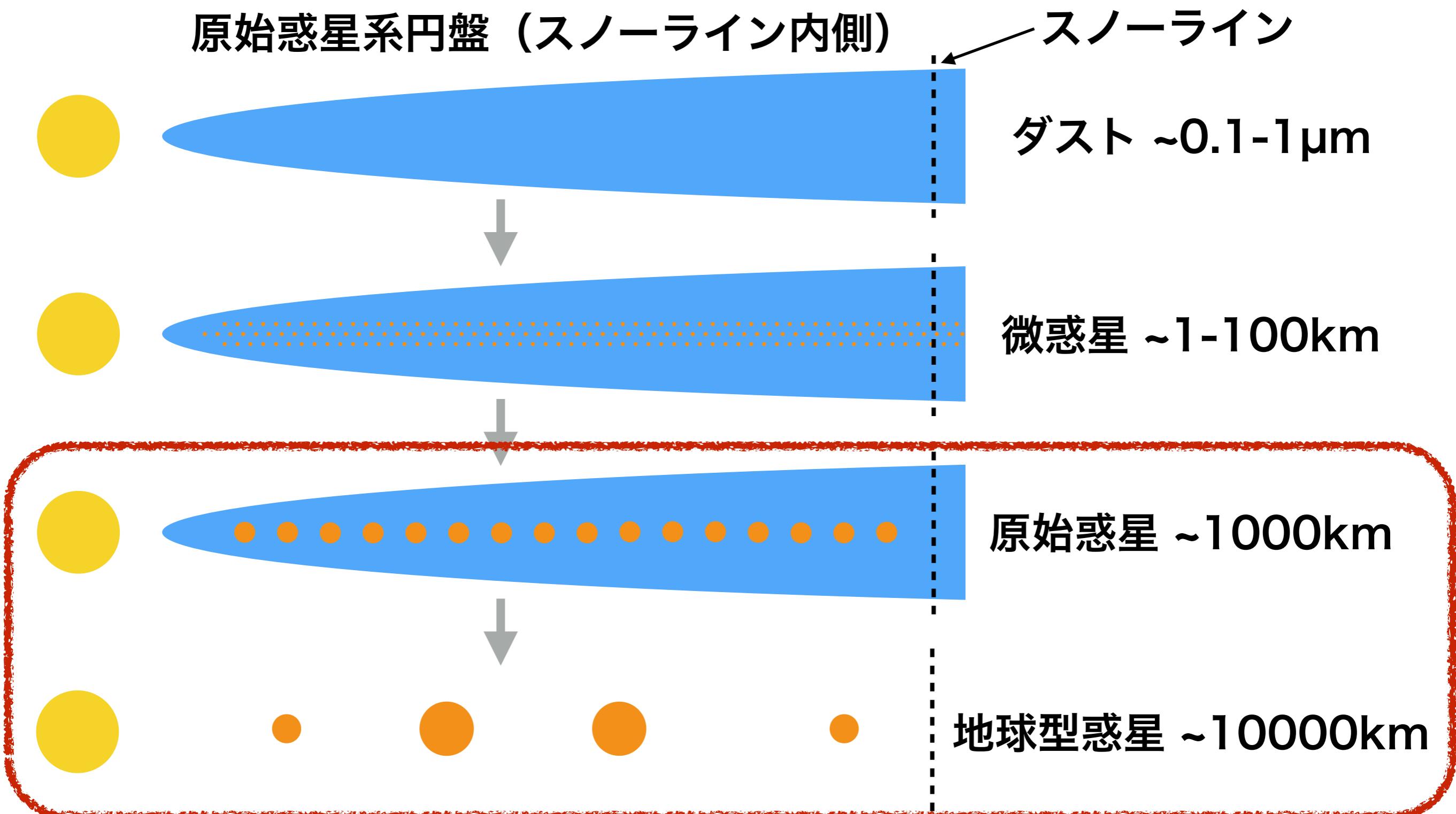
3. 手法

- ・ N体計算と統計的手法のハイブリッド
- ・ 破壊の取り扱い方

4. 結果

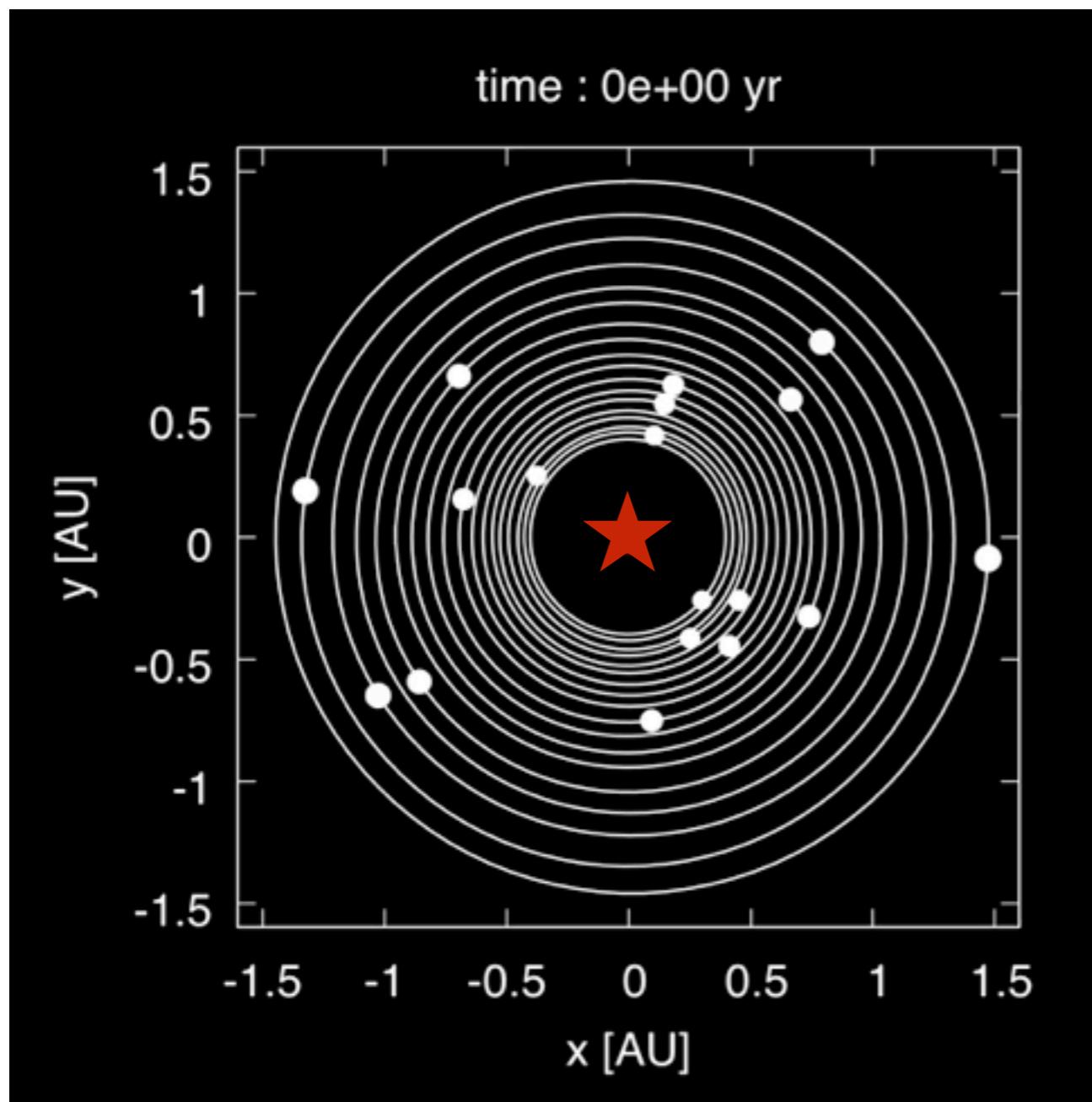
5. まとめと今後の課題

地球型惑星形成（標準モデル）



巨大衝突ステージ：地球型惑星の軌道・質量を特徴付ける

N体計算による原始惑星の衝突成長



初期条件

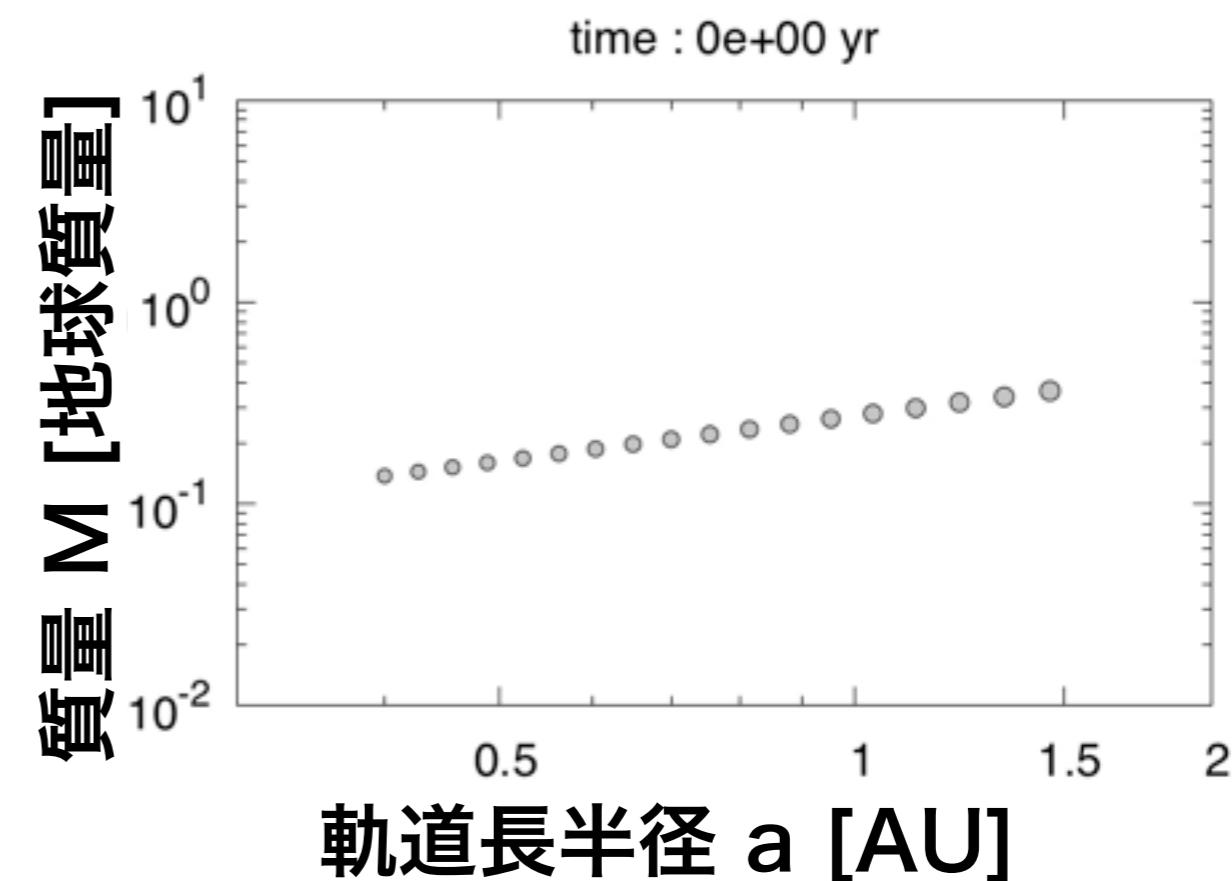
2MMSN

$e=0.01$

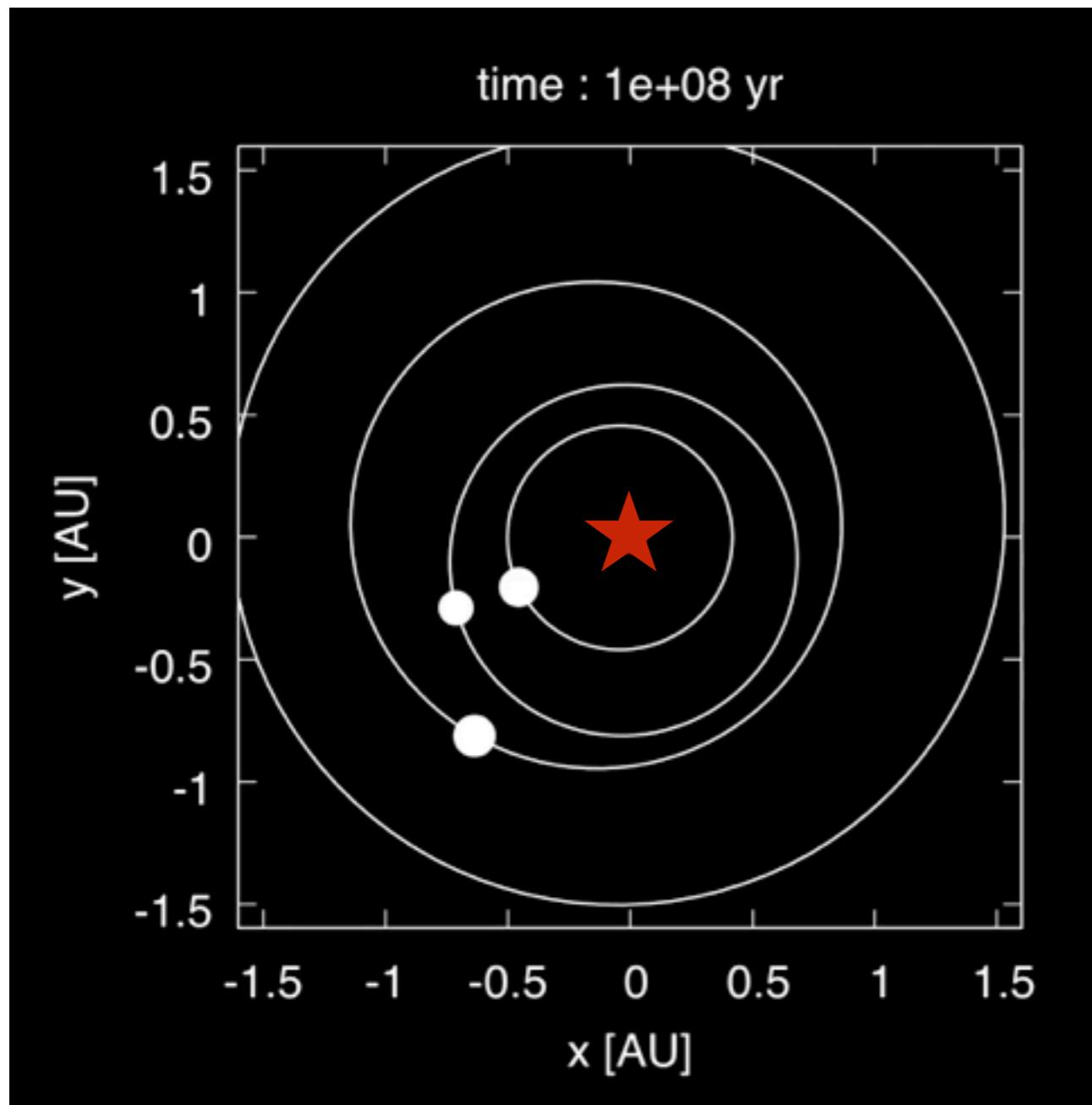
$a=0.4-1.5\text{AU}$

$i=0.005$

$\Delta a=10R_{H,M}$



N体計算による原始惑星の衝突成長



初期条件

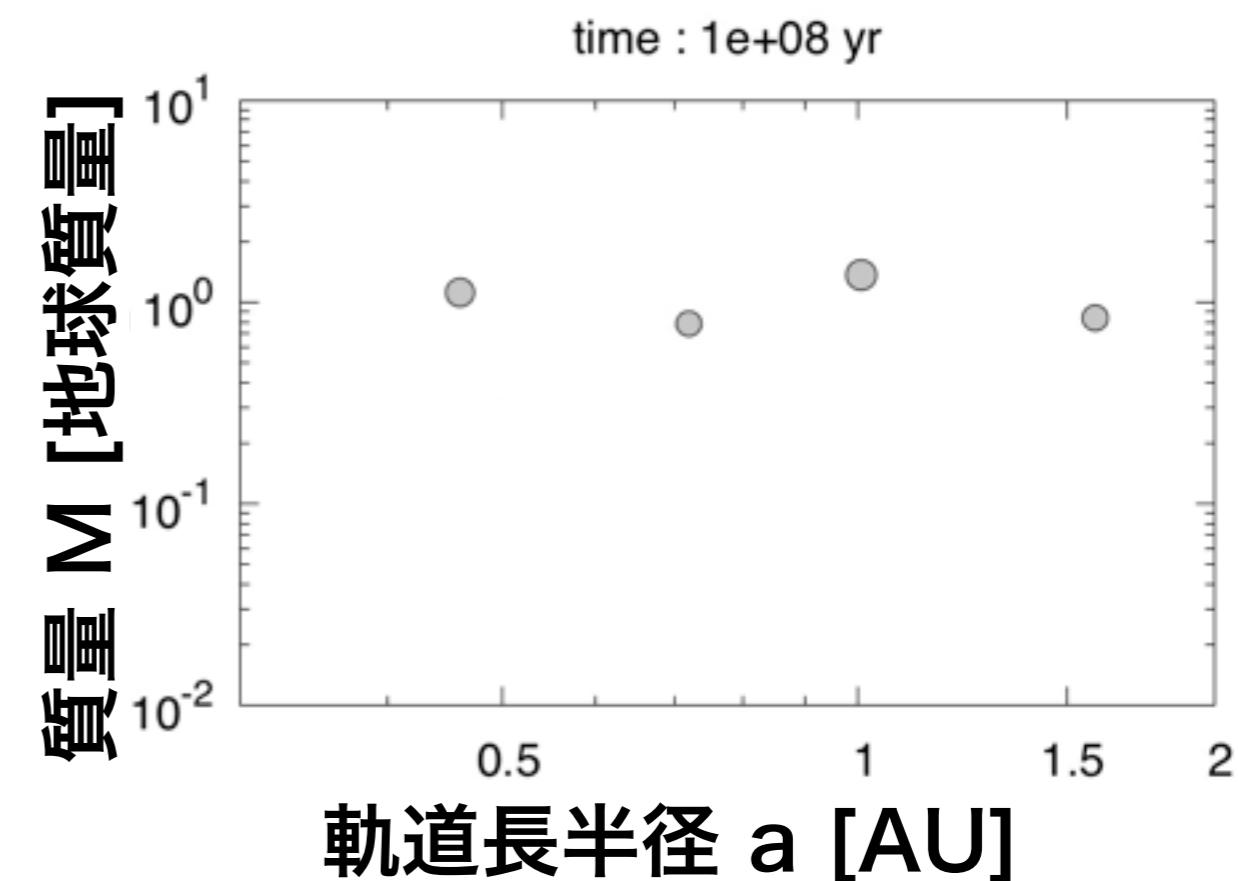
2MMSN

$e=0.01$

$a=0.4-1.5\text{AU}$

$i=0.005$

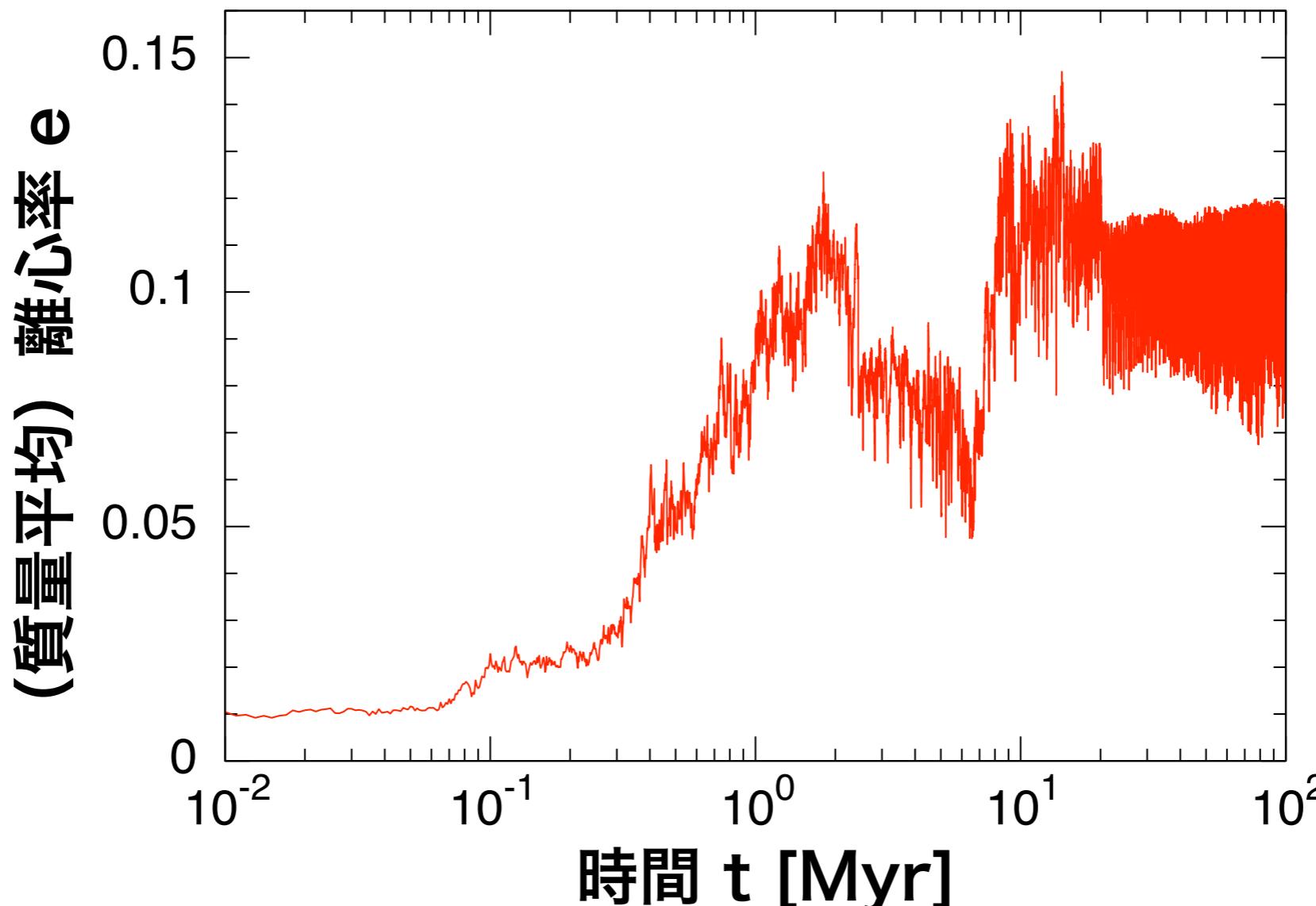
$\Delta a=10R_{H,M}$



1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

(e.g., Chambers & Wetherill 1998; Agnor et al. 1999;
Kominami & Ida 2002; Kokubo et al. 2006)

問題点：離心率上昇

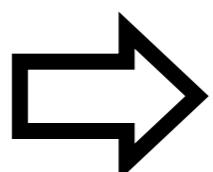


1億年後の離心率 : ~ 0.1

>>

現在の地球の離心率 : 0.0167

離心率が大きくなりすぎてしまう

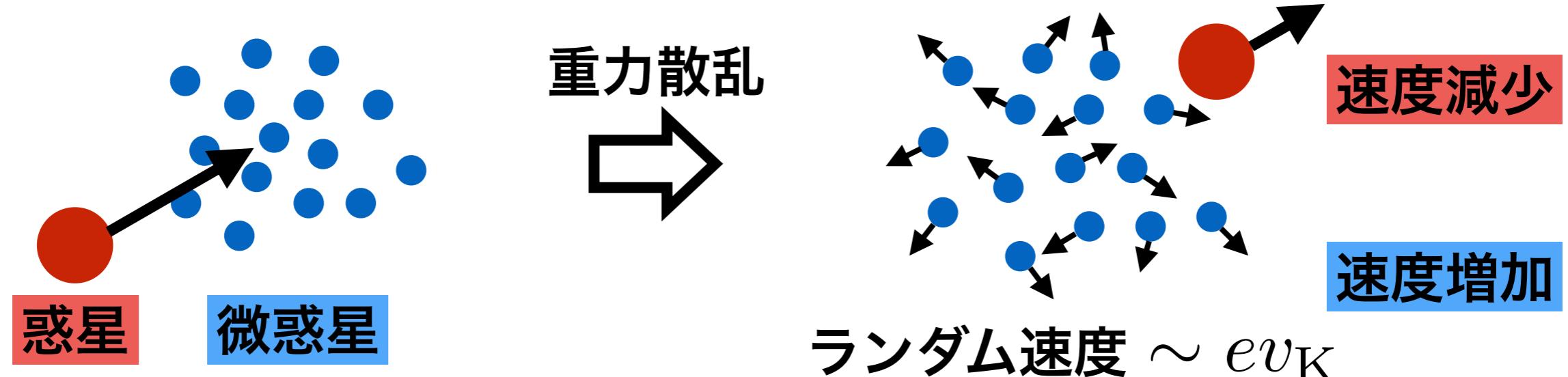


離心率を下げるメカニズムが必要

離心率を下げるメカニズム

残存微惑星との力学的摩擦

e.g., O'Brien et al. 2006;
Morishima et al. 2010



$$\left(\frac{d\langle e_{\text{惑}}^2 \rangle}{dt} \right)_{\text{df}} \propto - \sum_{\text{微}} \left(M \langle e_{\text{惑}}^2 \rangle - m \langle e_{\text{微}}^2 \rangle \right)$$

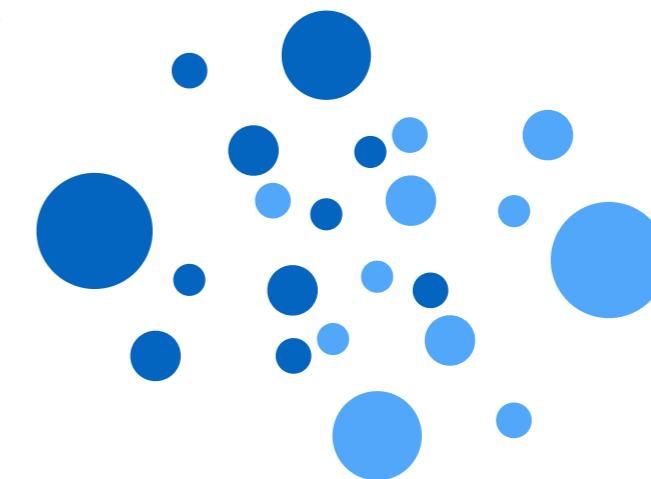
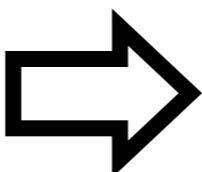
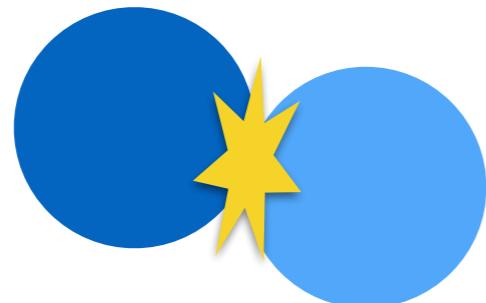
e.g., Ohtsuki et al. 2002
面密度 エネルギー等分配

残存微惑星との力学的摩擦により地球型惑星の離心率は下がる！

残存微惑星の面密度は変わらないのか？

微惑星同士の衝突・破壊の効果

「衝突・破壊」…衝突した際に破片を放出



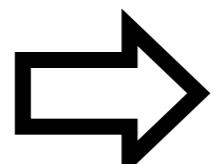
衝突速度 $\sim ev_K$

様々なサイズの破片

$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} \sim 10^3 \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453}$$

破壊は当然起こる！

- ・ 微惑星は衝突をくりかえし小さくなる（衝突力スケード）
- ・ $1\mu\text{m}$ 以下の破片は輻射圧により系外へふきとばされる

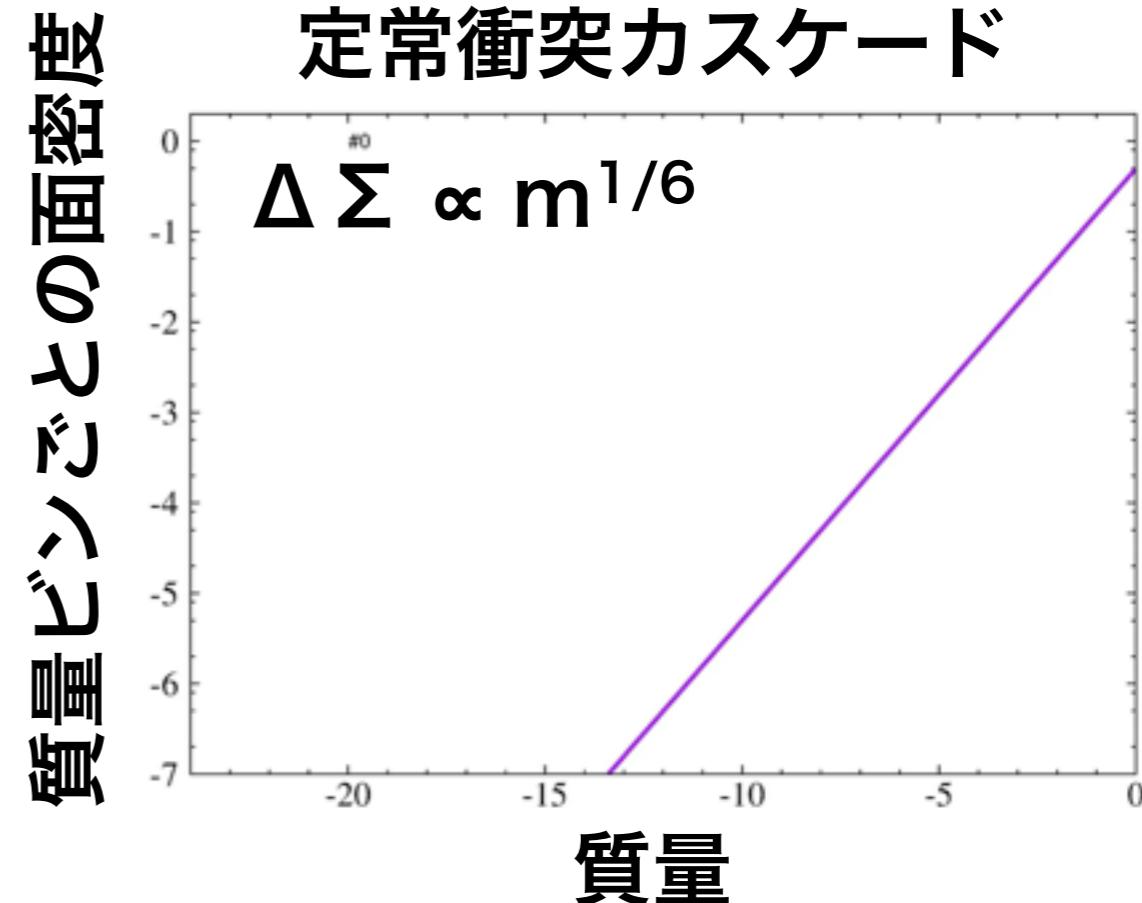


微惑星円盤の面密度は減少する

微惑星の減少

Kobayashi & Tanaka (2010)

- ・ 破片の面密度はべき一定のまま減少していく
- ・ 面密度減少のタイムスケールは以下のようになる



$$\tau_{\text{dep}} = 130 \left(\frac{Q_0}{1.16 \times 10^8 \text{erg/g}} \right)^{0.679} \left(\frac{m}{10^{19} \text{g}} \right)^{0.641} \left(\frac{a}{1 \text{AU}} \right)^{4.18} \left(\frac{\Delta a/a}{0.126} \right) \\ \times \left(\frac{e}{0.01} \right)^{-1.36} \left(\frac{\rho}{3 \text{g/cc}} \right)^{1.04} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{10 M_{\oplus}} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{-1.18} \text{yr}$$

破壊を考慮して巨大衝突ステージを調べる必要がある

研究目的

先行研究（N体計算）の問題点：微惑星の破壊をしていない

破壊を考慮すると…

微惑星円盤の面密度が減少

- ➡ 残存微惑星による力学的摩擦の効率低下
- ➡ 地球型惑星の離心率を下げるか？

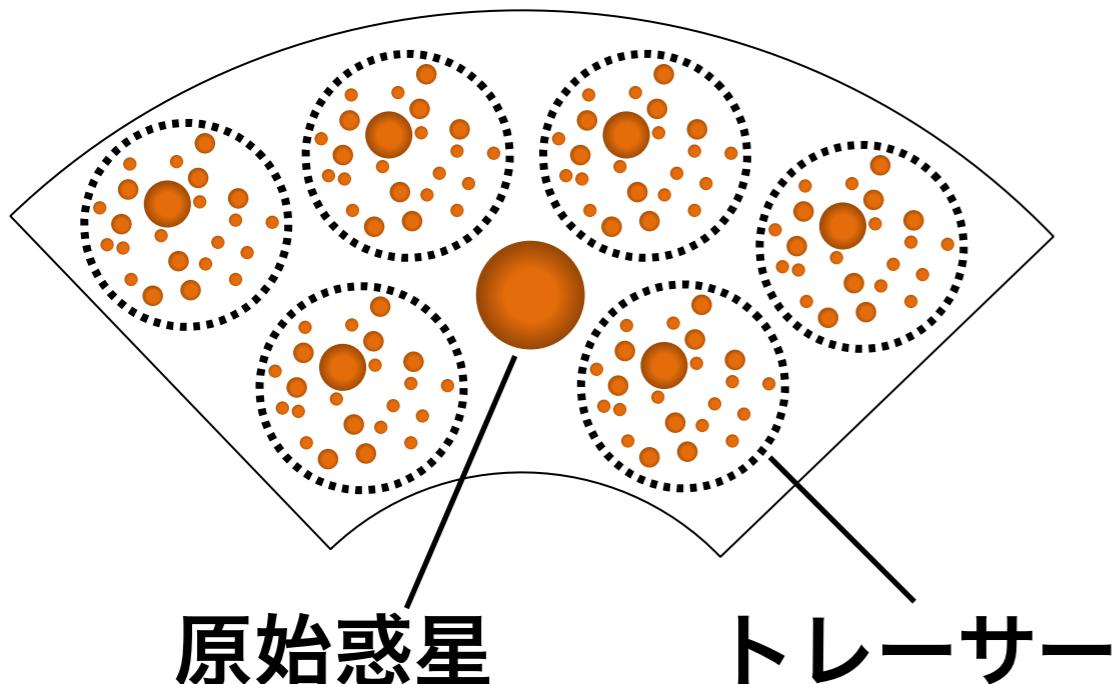
「長期的軌道進化」と「破壊」の両方を
考慮したシミュレーションを行い、
破壊が力学的摩擦に与える影響を調べる

手法

ハイブリッドコード

純粋なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(∴破壊に伴う破片~ 10^{35} 個)



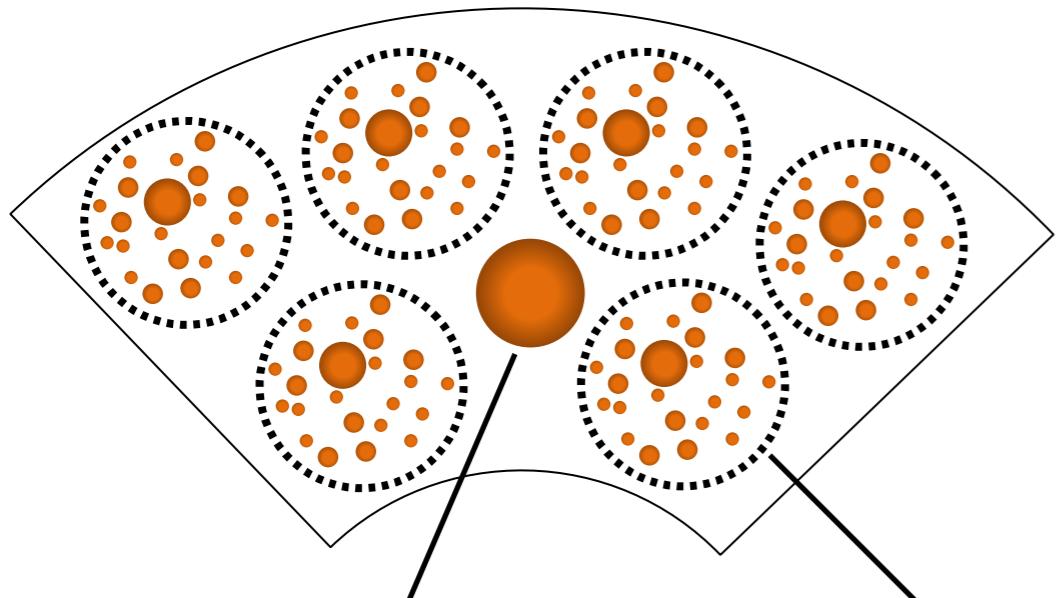
複数の微惑星を1つの粒子とみなす
(スーパー粒子近似)

→ N体計算のコストを削減

ハイブリッドコード

純粋なN体計算 … 破壊の取り扱いは非常に困難！

(\because 破壊に伴う破片~ 10^{35} 個)



原始惑星

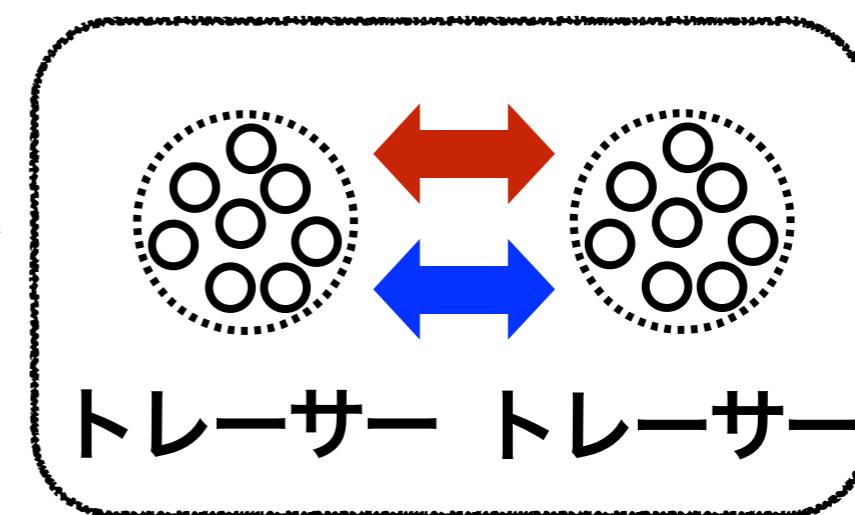
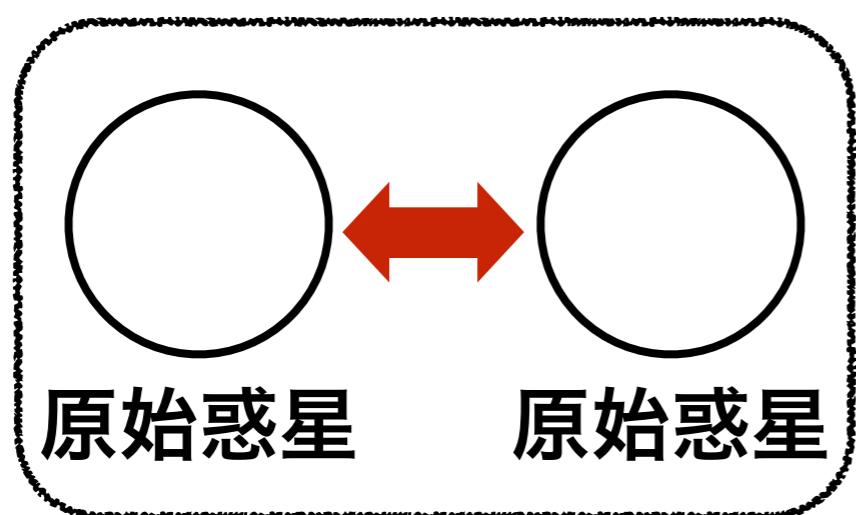
トレーサー

N体計算 (4次のエルミート法)

重力相互作用を取り扱う

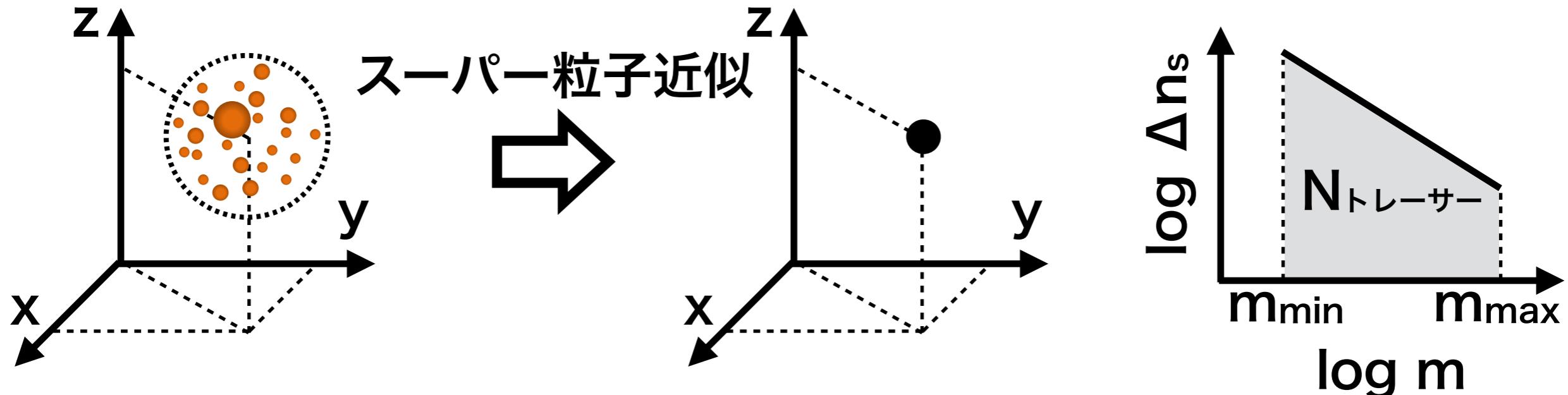
+ 統計的計算

衝突・破壊を取り扱う



ハイブリッドコード

トレーサー … 計算上は質点、質量はべき分布（定常衝突力スケード）

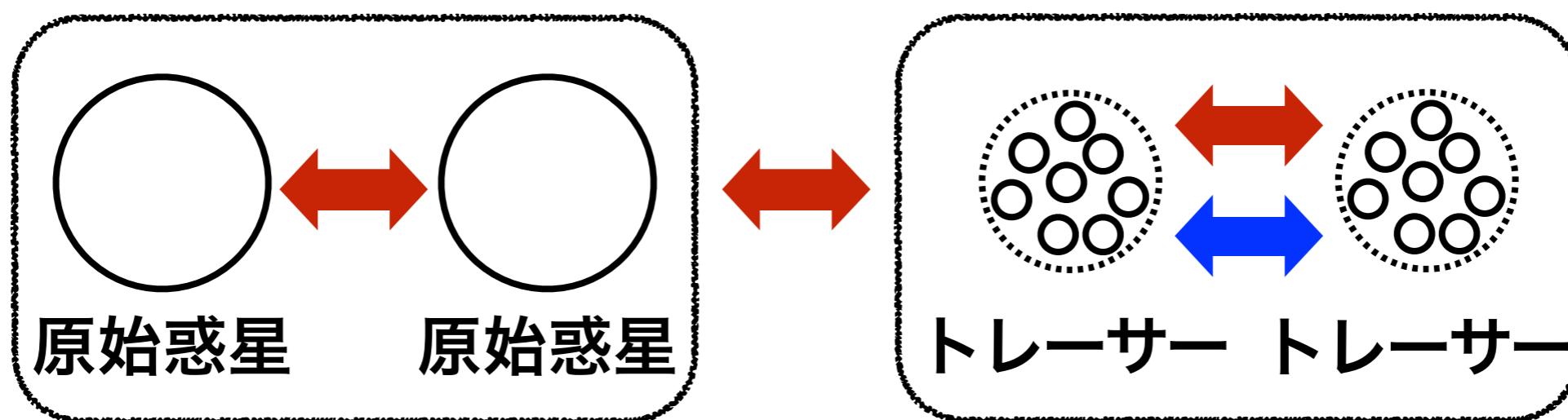


N体計算 (4次のエルミート法)

重力相互作用を取り扱う

統計的計算

衝突・破壊を取り扱う



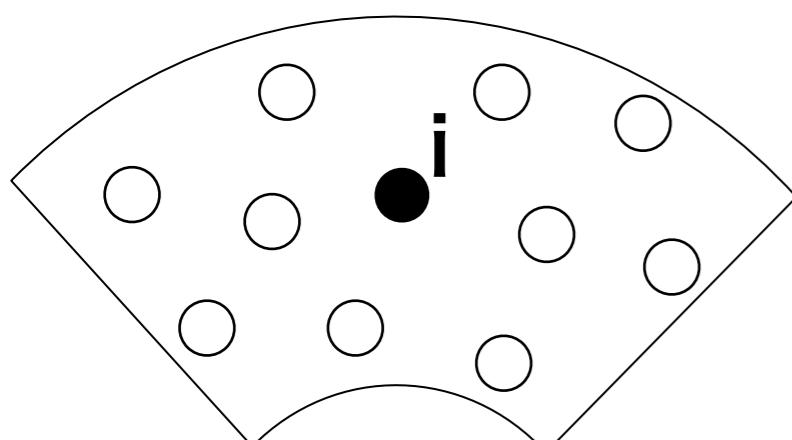
破壊の取り扱い方：統計的手法

トレーサー内の微惑星の個数 $N_{\text{トレーサー}}$ の進化

Kobayashi & Tanaka 2010

$$\frac{dN_{\text{tracer},i}}{dt} = -C N_{\text{tracer},i} \left(\frac{\Sigma_i}{m_{\max}} \Omega_K \pi R_{\max}^2 \right) \left(\frac{v_i (m_{\max})^2}{2Q_D^* (m_{\max})} \right)^{\alpha-1}$$

定数 軌道分布に依存
 m_{\max} 同士の衝突頻度 低質量・高速度衝突



→ 面密度 Σ_i 、衝突速度 v_i が重要

ハイブリッドコードでは軌道がわかるため、

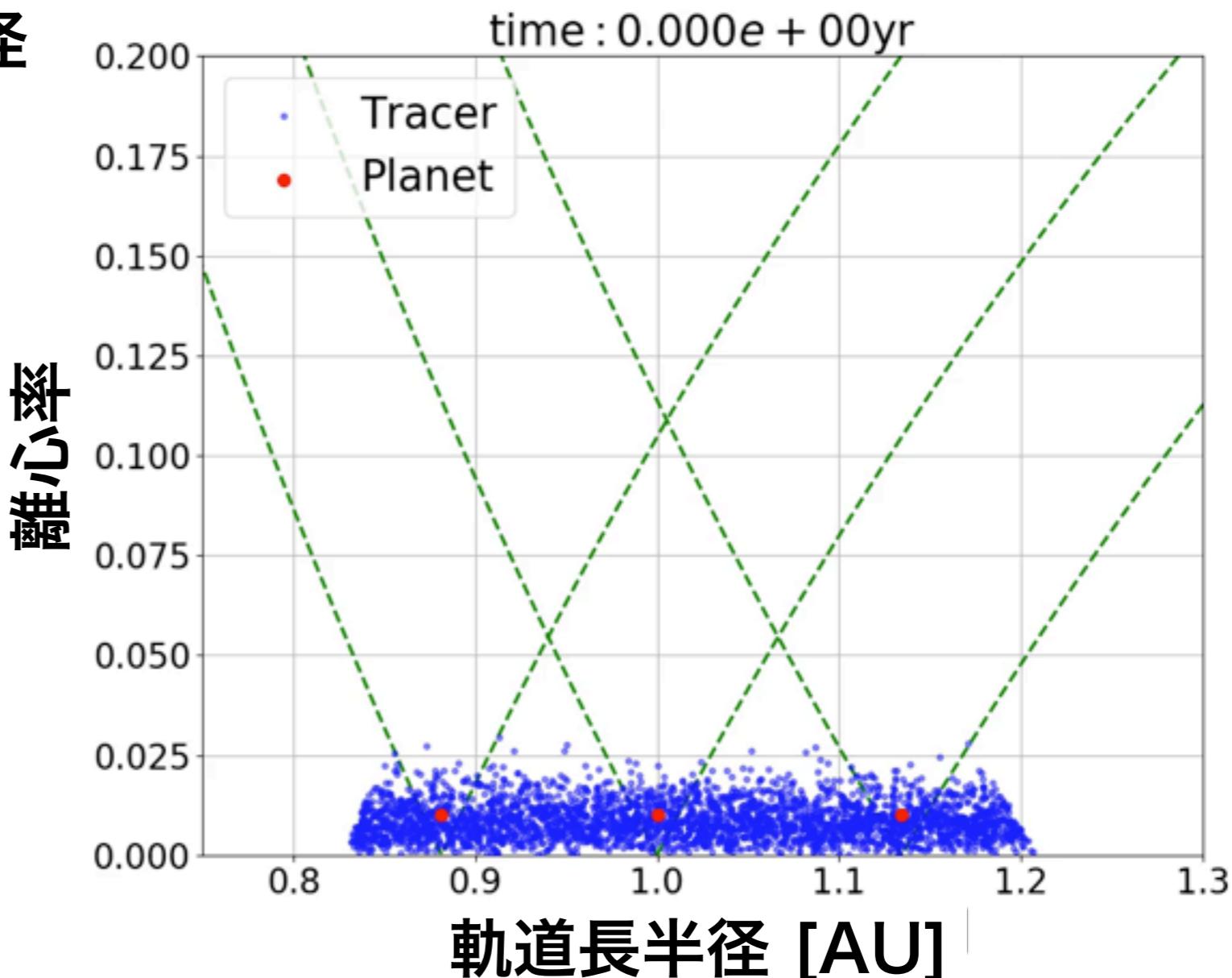
近傍トレーサーの分布・相対速度から計算可能

破壊なし力学的摩擦のテスト

力学的摩擦のテスト

初期条件

- ・ 質量 $1M_E$ の惑星3体
 - ・ 総質量 $30M_E$ の微惑星3000体
 - ・ 円盤の幅~30相互ヒル半径
 - ・ 破壊なし、集積なし
- 赤点：惑星 青点：微惑星
緑破線：等ヤコビエネルギー線



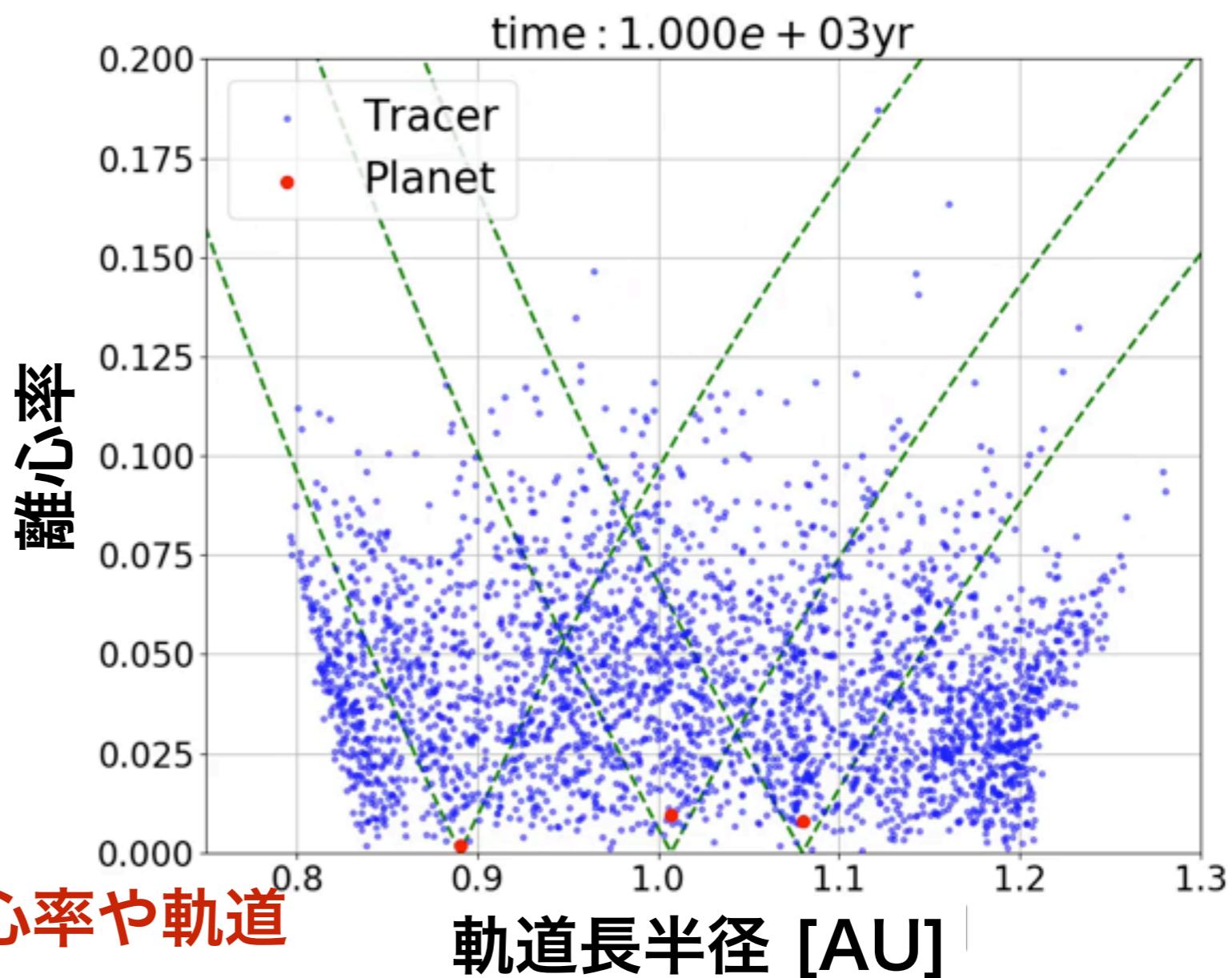
力学的摩擦のテスト

結果

- ・惑星の離心率は減少
- ・等ヤコビエネルギー線に沿って微惑星の離心率は上昇
- ・真ん中の惑星は、微惑星を近接散乱しても隣の惑星から微惑星が供給される
- ・真ん中の惑星は移動量が少ない可能性がある

真ん中の惑星に注目し、離心率や軌道傾斜角を比較・議論することは可能

赤点：惑星 青点：微惑星
緑破線：等ヤコビエネルギー線



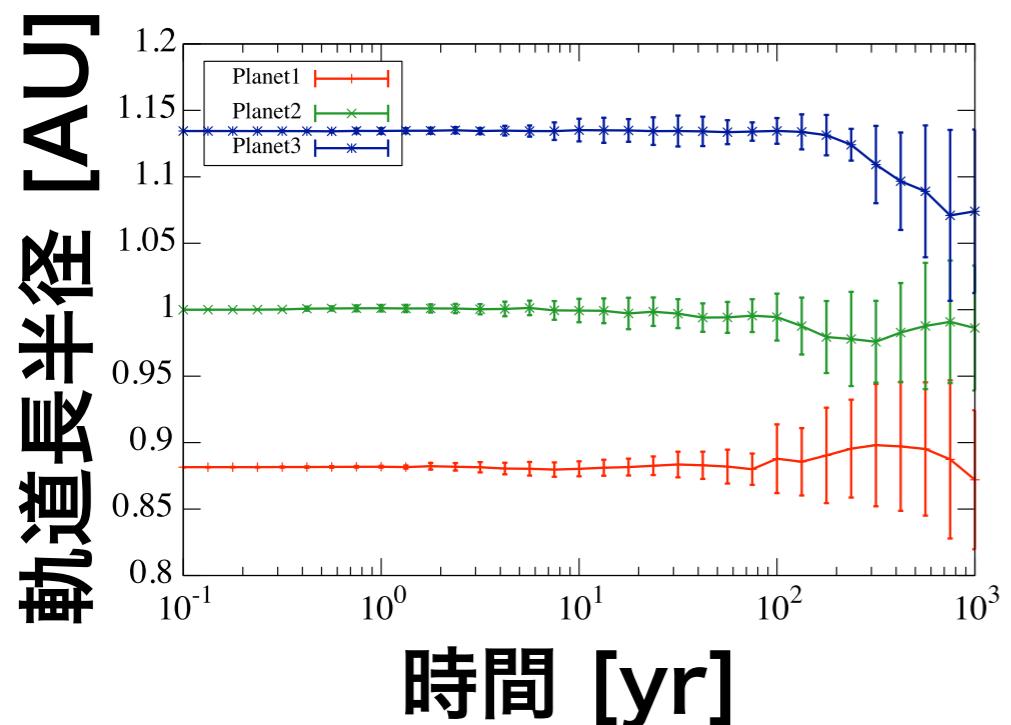
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

破壊なし、集積なし

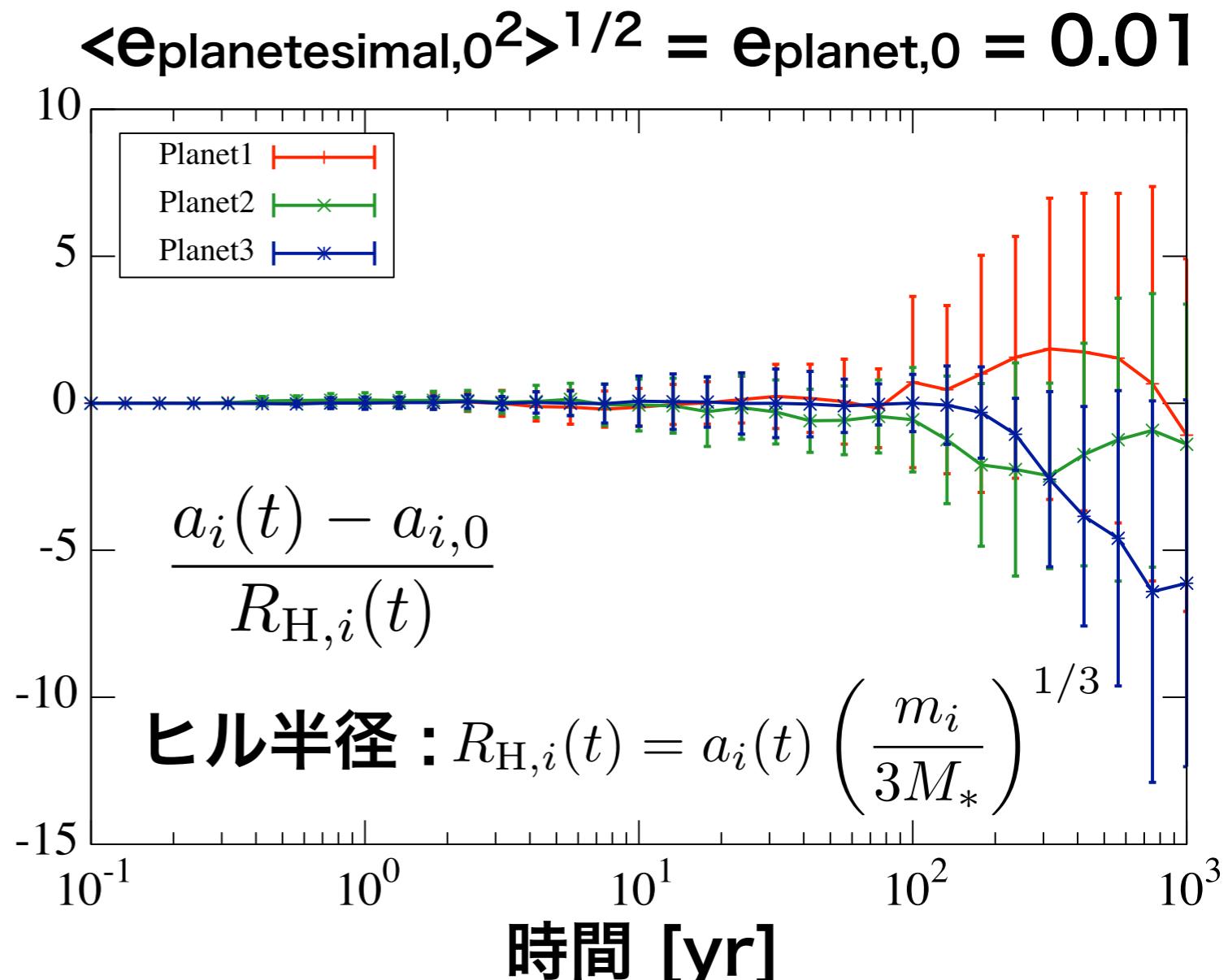


点：平均値

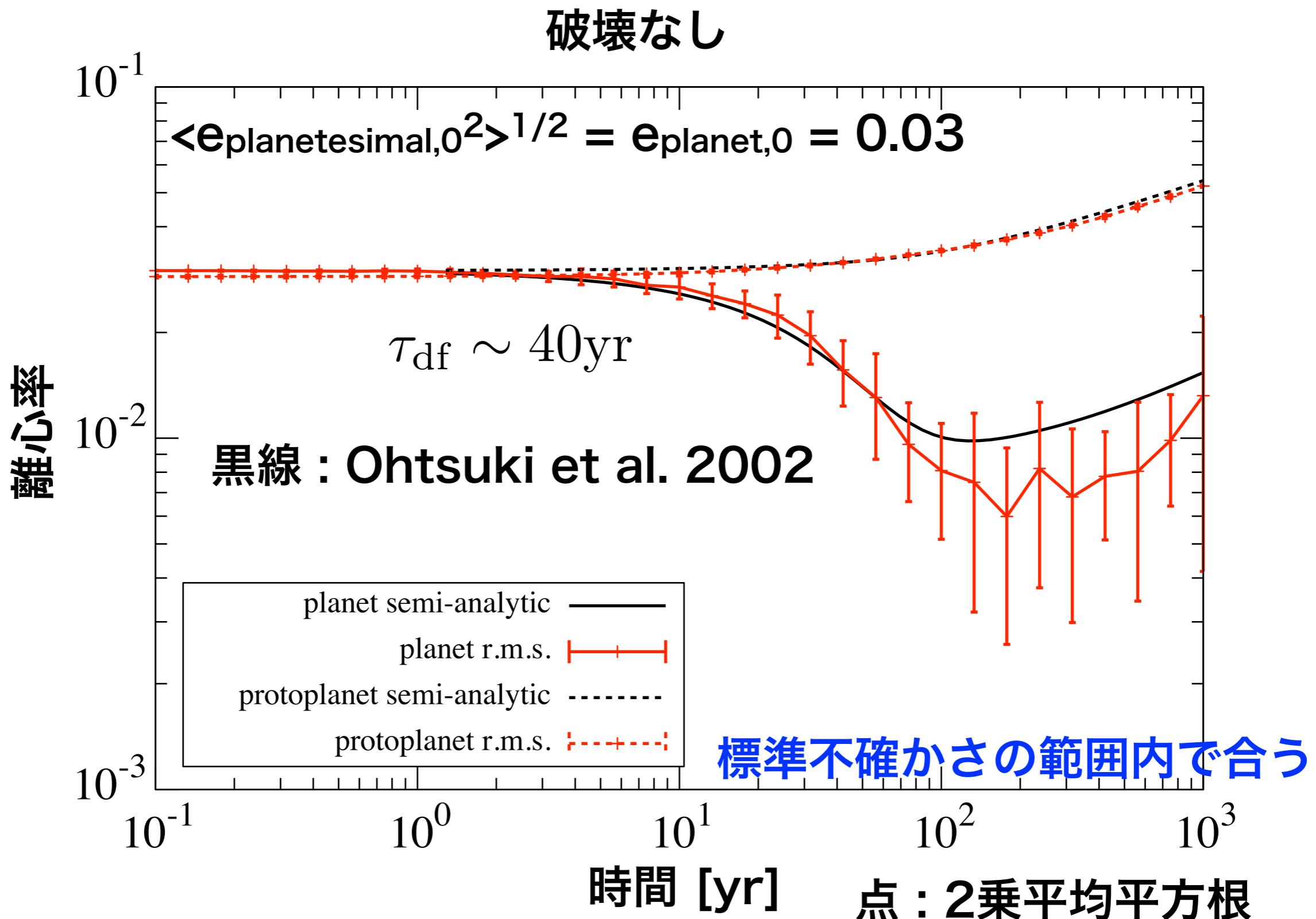
エラーバー：13runの標準偏差 σ

確かに、真ん中の惑星は移動量が少なくなっている

ここからは真ん中の惑星の離心率に注目する



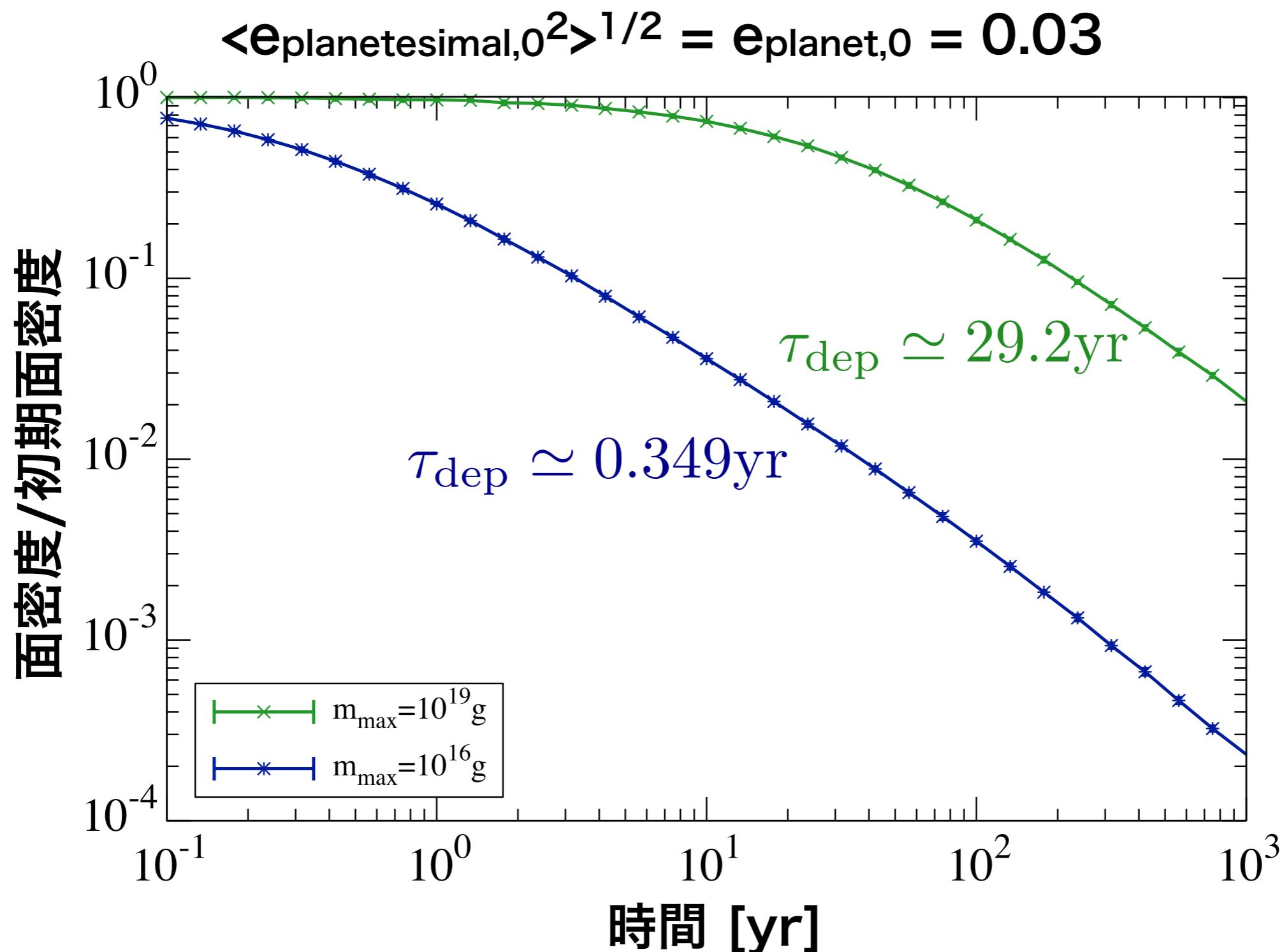
離心率進化



破壊ありの場合との比較

面密度進化（離心率0.03）

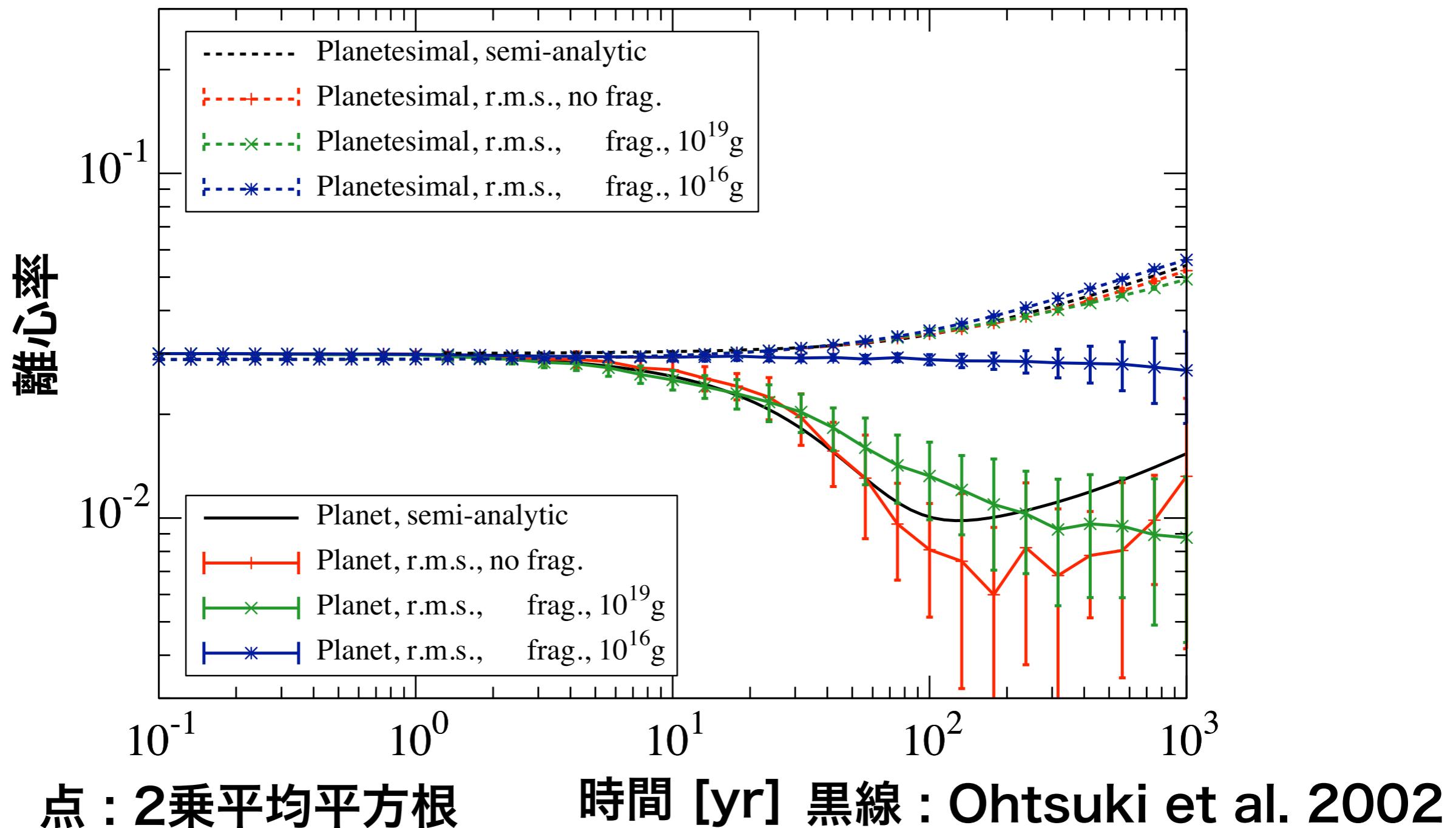
m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

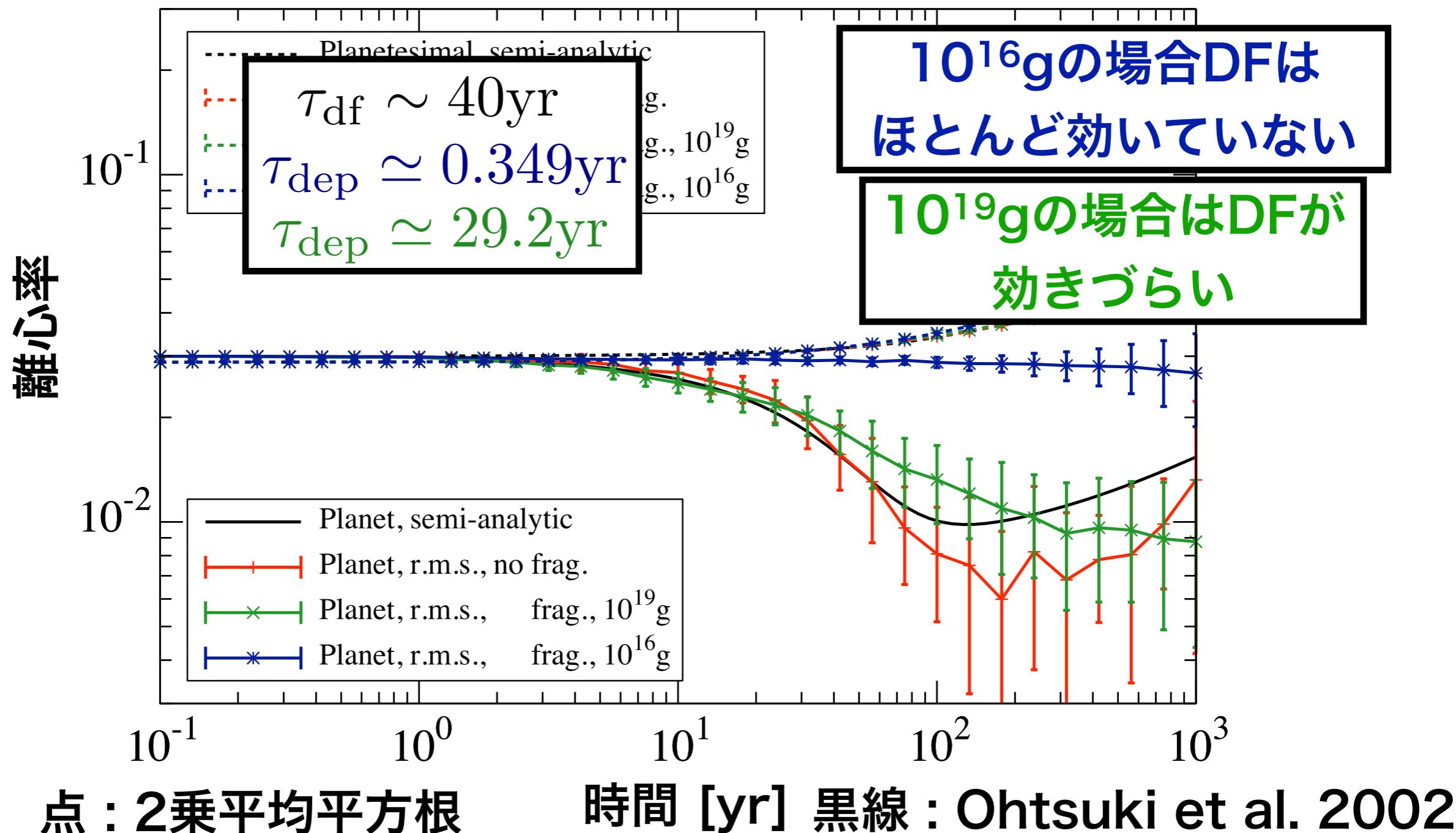
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.03$$



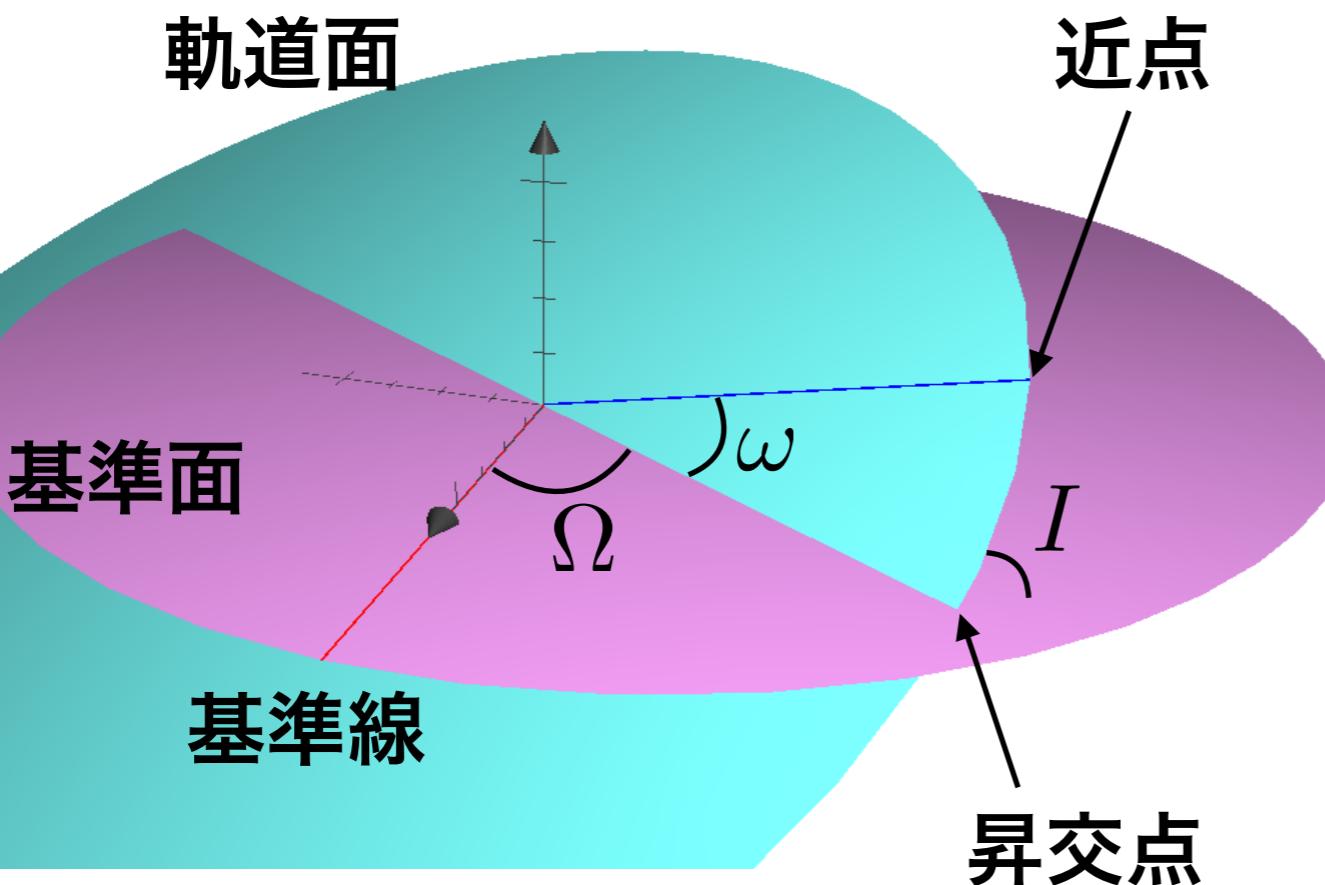
まとめと今後の課題

- ・ 微惑星同士の衝突・破壊による面密度減少を考慮すると、力学的摩擦の効率が下がることを実際に確かめた。
- ・ $\tau_{\text{dep}} \lesssim \tau_{\text{df}}$ である場合には、残存微惑星円盤の面密度減少が当然起こるため、本研究のハイブリッドコードを用いる必要がある。
- ・ 今後は、微惑星円盤の面密度減少と微惑星駆動惑星移動(PDM)の関係について調べていく。

Appendix

軌道要素

橢円軌道の場合



位置と速度の6変数



軌道要素6つ

橢円の形を決定：

軌道長半径 a

離心率 e

軌道面の位置を決定：

昇交点経度 Ω

近点引数 ω

軌道傾斜角 I

天体の位置を決定：

近点通過時刻 T

巨大衝突ステージの先行研究

1. Chambers & Wetherill, 1998, Icarus, 136, 304

- ・ N体シミュレーション & 衝突・合体
- ・ ガス円盤無し、破壊無し、原始惑星から惑星まで

2. Morishima et al., 2010, Icarus, 207, 517

- ・ N体シミュレーション & 衝突・合体
- ・ ガス円盤有り、破壊無し、微惑星から惑星まで

3. Kobayashi & Tanaka, 2010, Icarus, 206, 735

- ・ 統計的シミュレーション & 衝突・破壊
- ・ 微惑星間の衝突・破壊による面密度の減少

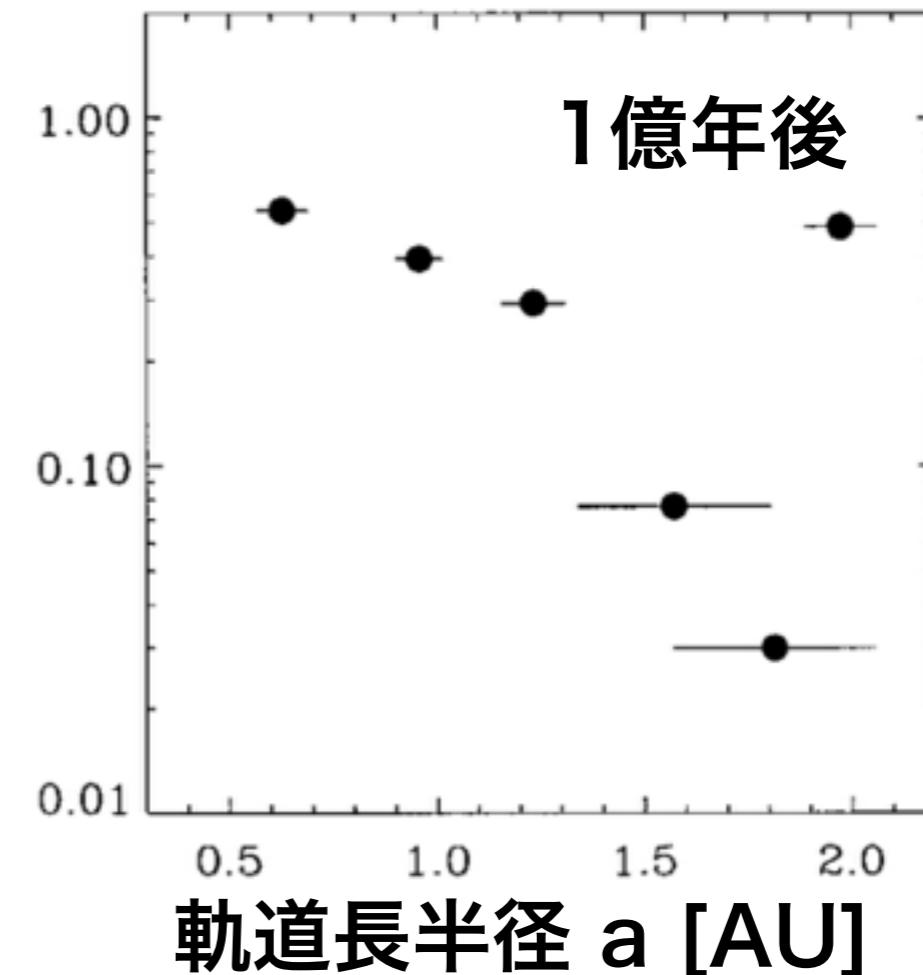
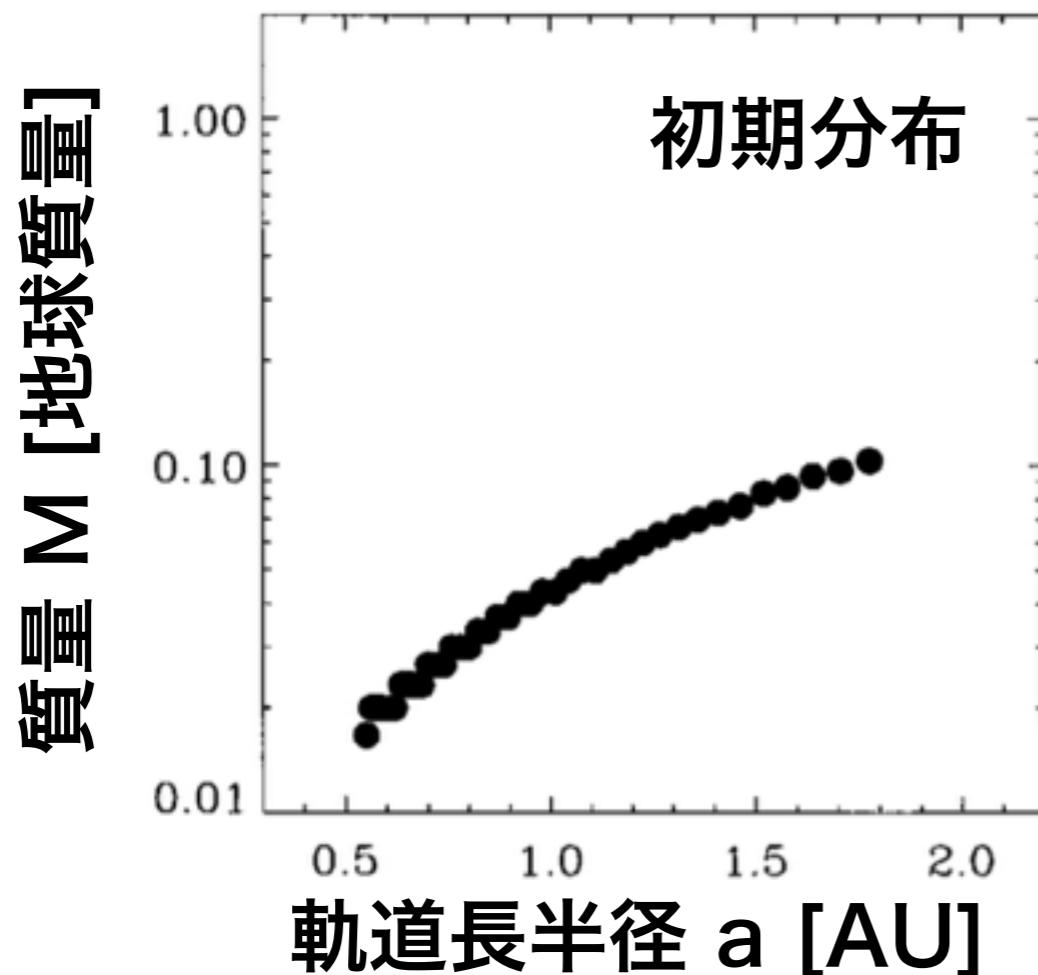
先行研究1：原始惑星のN体計算による衝突成長

Chambers & Wetherill (1998)

初期条件

固体面密度 : $6 \text{ [g/cm}^2\text{]} @ 1 \text{ AU}$, 軌道長半径に反比例

原始惑星の間隔 : 相互ヒル半径の7倍

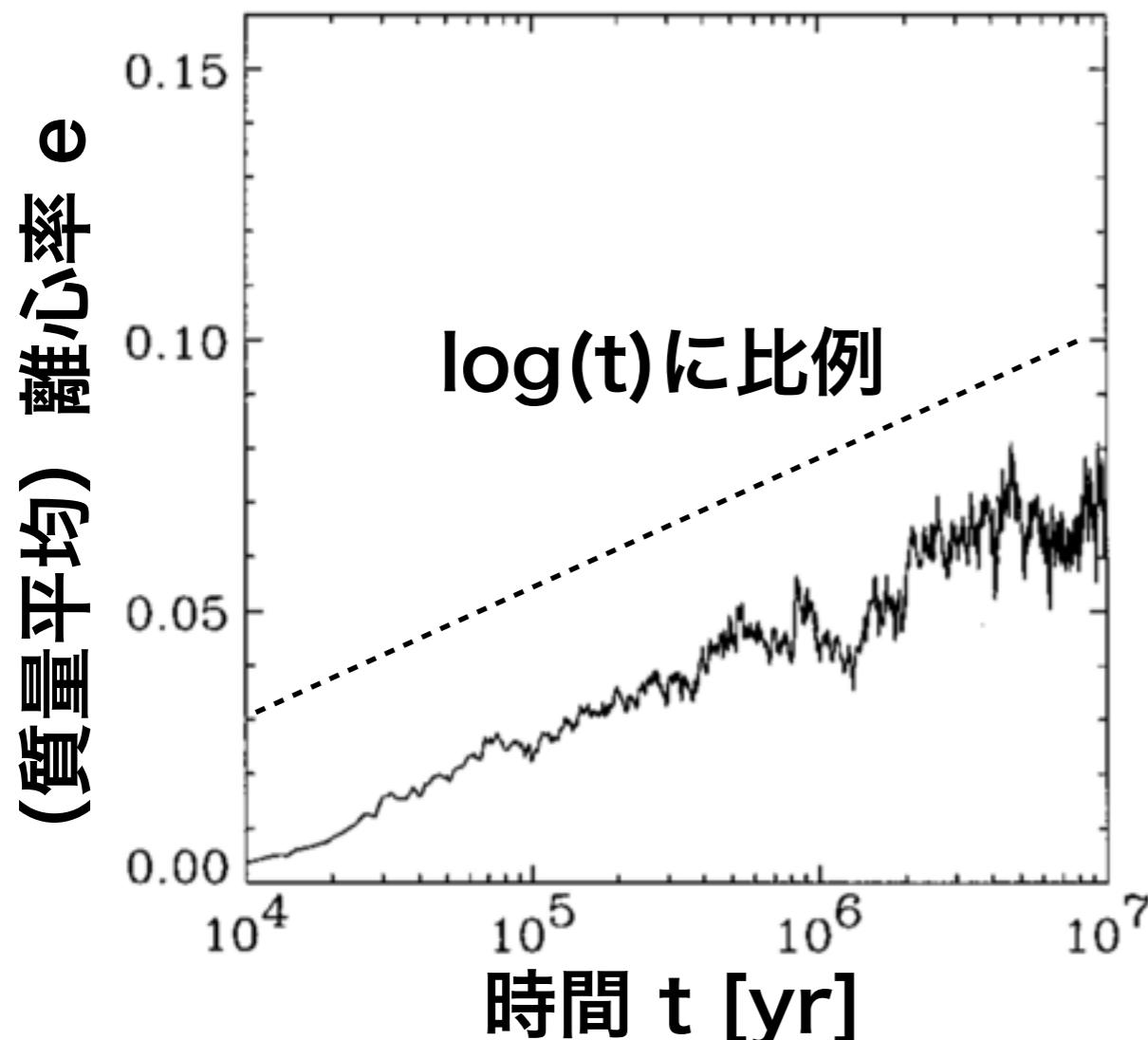


1億年程度でいくつかの地球サイズの惑星が形成される

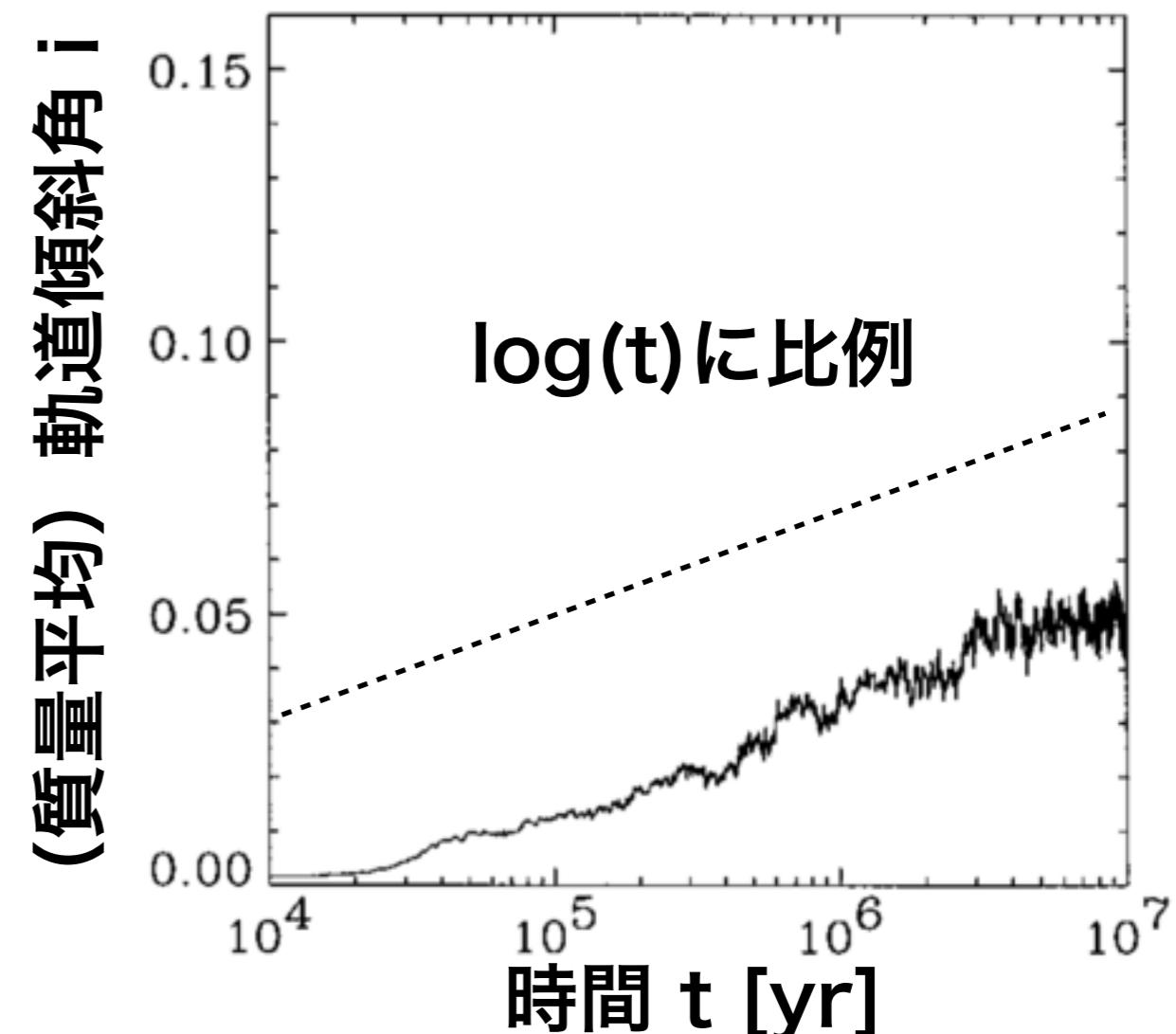
(e.g., Agnor et al. 1999; Kominami & Ida 2002;
Kokubo et al. 2006)

先行研究1の問題点：離心率上昇

Chambers & Wetherill (1998)



衝突に伴い離心率が上昇



1億年後の離心率 : ~ 0.1

>>

現在の地球の離心率 : 0.0167

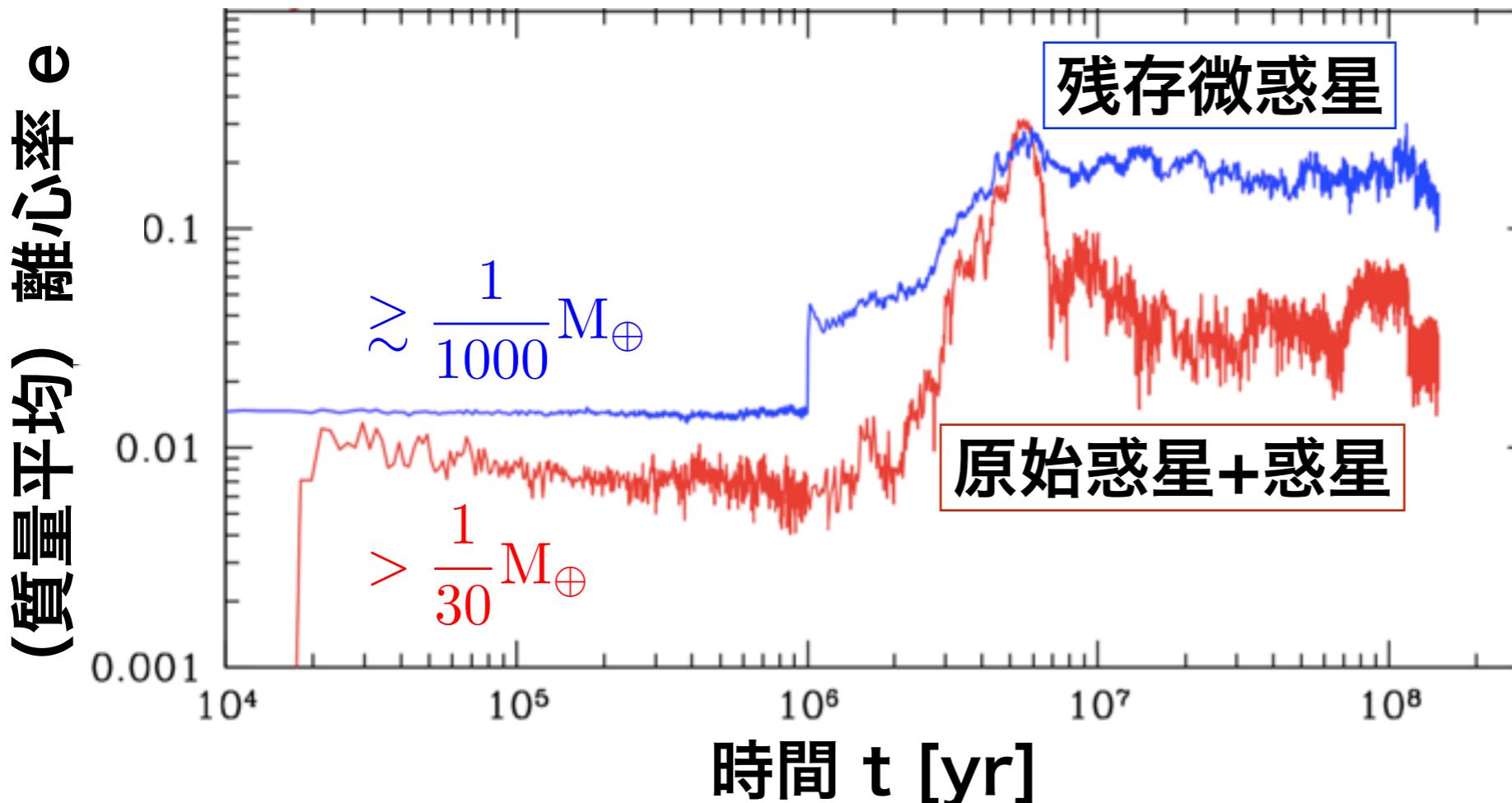
離心率が大きくなりすぎてしまう

微惑星円盤と原始惑星成長

Morishima et al. (2010)

微惑星 ($\sim 10^{25}$ [g]) のN体計算

原始惑星形成・成長を一貫してシミュレーション

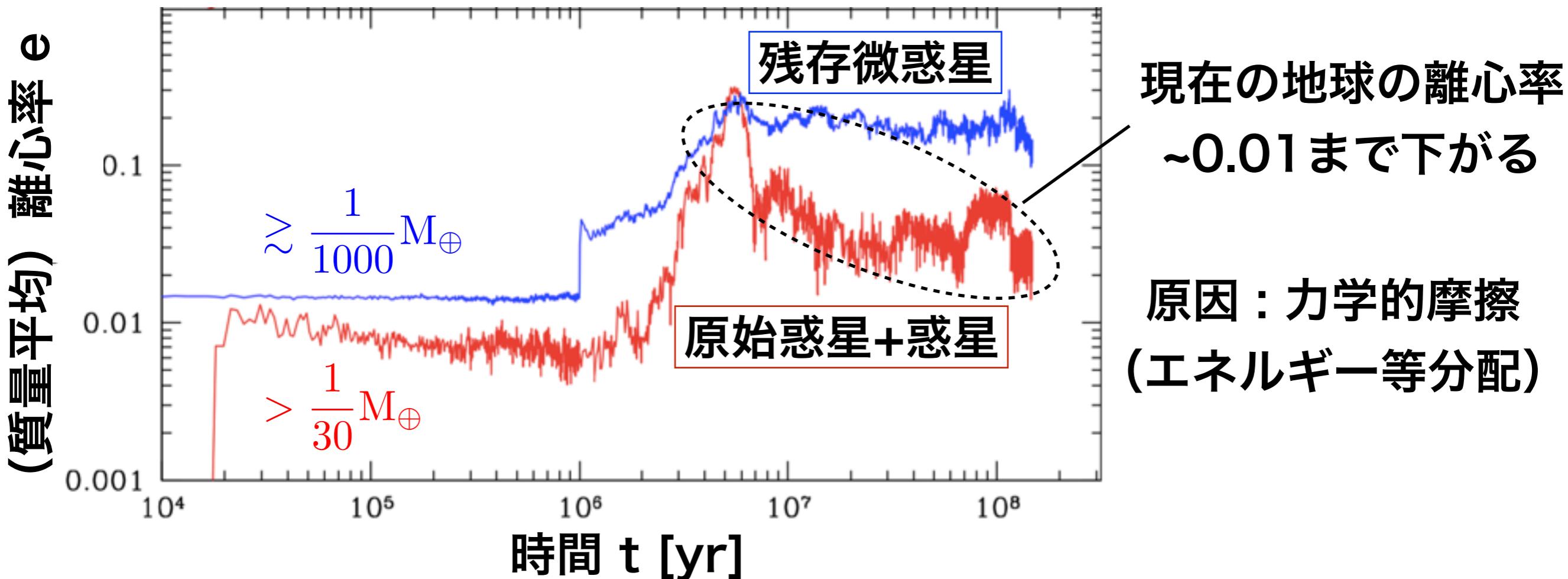


微惑星円盤と原始惑星成長

Morishima et al. (2010)

微惑星 ($\sim 10^{25}$ [g]) のN体計算

原始惑星形成・成長を一貫してシミュレーション

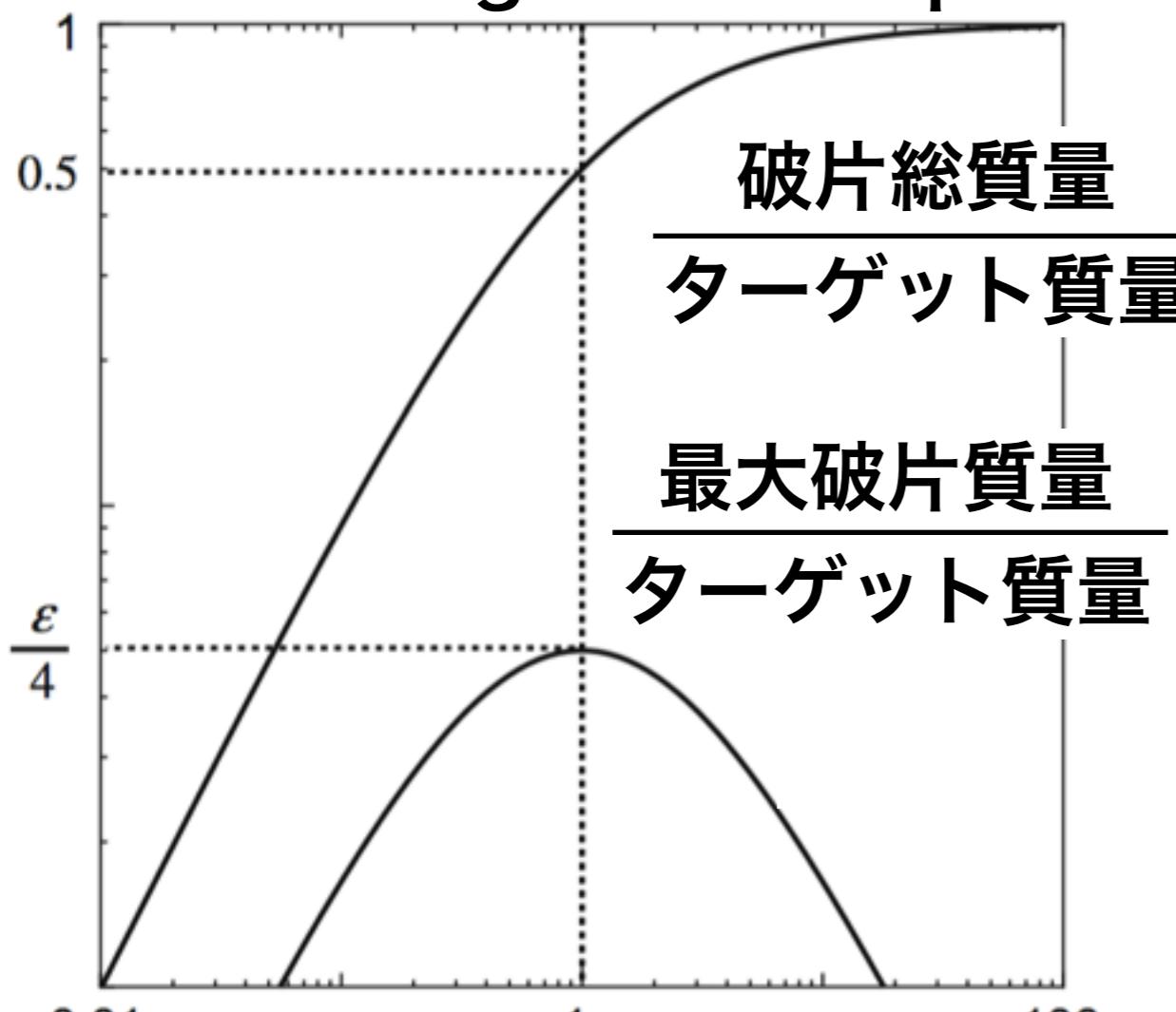


残存微惑星による力学的摩擦により原始惑星の離心率を下げる
しかし離心率~0.1の微惑星衝突(~3km/s)により破壊が起きる

先行研究3：衝突・破壊のモデル

Kobayashi & Tanaka 2010

cratering catastrophic

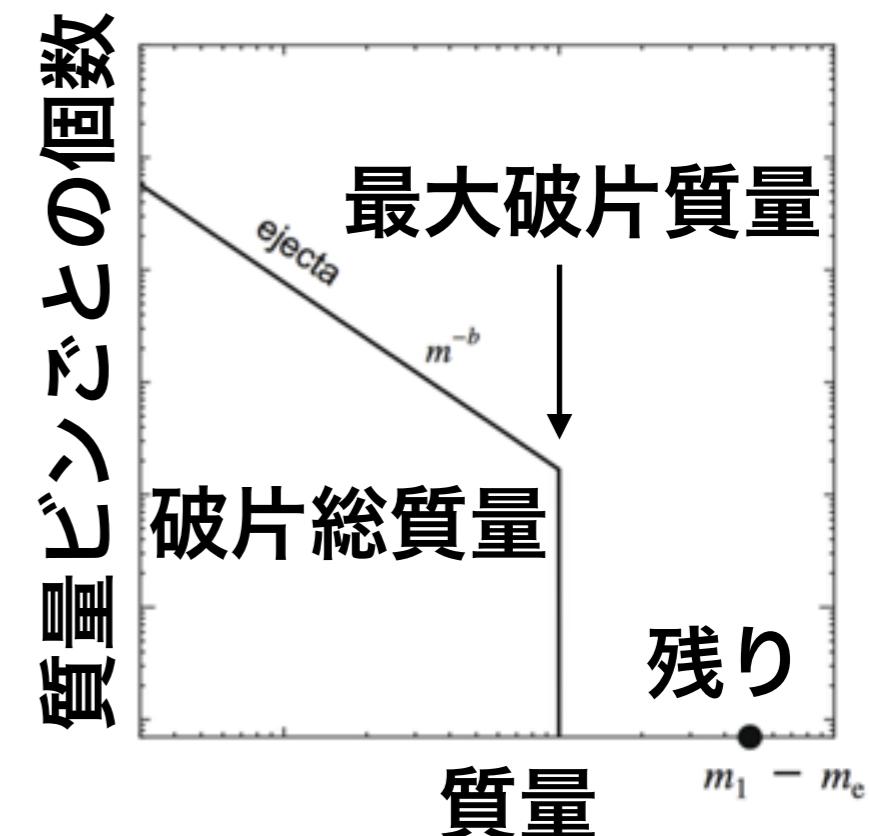


$$\frac{\text{衝突エネルギー}}{\text{破壊に必要なエネルギー}} = \phi$$

$$\frac{\text{破片総質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\phi}{1 + \phi}$$
$$\frac{\text{最大破片質量}}{\text{ターゲット質量}} = \frac{\varepsilon \phi}{(1 + \phi)^2}$$

$\phi=1$ のときターゲット
質量の半分が吹き飛ぶ

Q_D^* の定義



破壊を起こす衝突速度

$$\frac{v_{\text{esc}}^2}{Q_{\text{D}}^*} = 1.23 \times 10^{-2} \left(\frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.213} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.213}$$

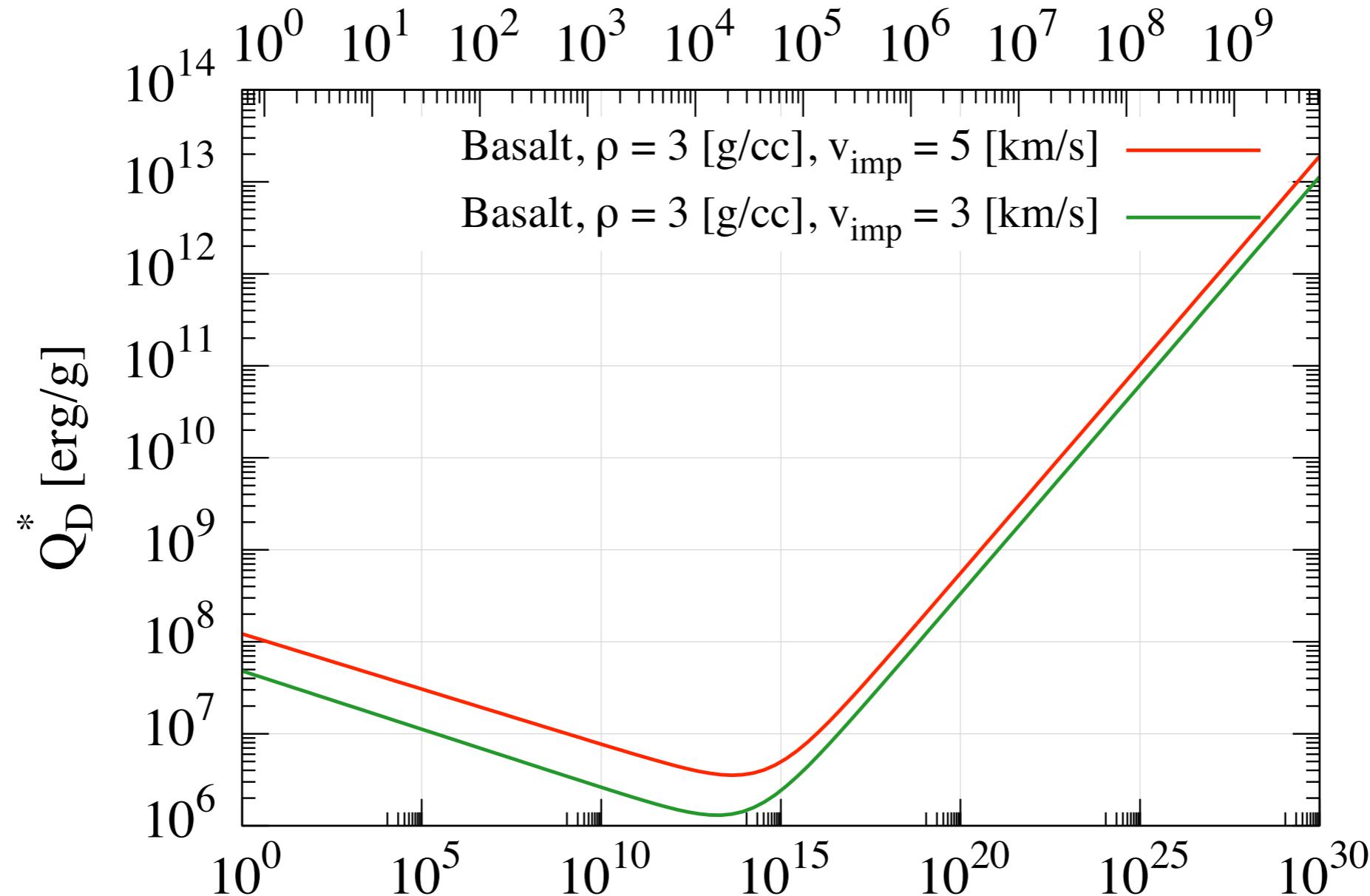
脱出速度の約10倍で衝突すれば破壊が起こる

$$\frac{(e^2 + i^2)v_{\text{K}}^2}{Q_{\text{D}}^*} = 948 \left(\frac{e}{0.1} \right)^2 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{-0.547} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{-0.453} \left(\frac{M_*}{\text{M}_{\odot}} \right)$$

離心率が0.1のときには破壊に必要なエネルギーの1000倍で衝突する

Benz & Asphaug 1999

radius [cm]



Basalt, 3km/s

mass [g]

$$Q_D^* \simeq 1.16 \times 10^8 \left(\frac{\rho}{3\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{0.547} \left(\frac{m}{10^{19}\text{g}} \right)^{0.453} \text{erg/g}$$

N体計算の手法

4次のエルミート法

Makino & Aarseth 1992

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

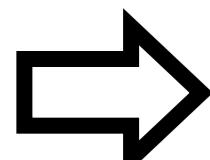
step3：加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算（4次精度）

&

独立タイムステップ

粒子は別々の時間とタイムステップを持つ

加速度 大 → タイムステップ 小



近接遭遇を精度よく効率的に解くことができる

物理半径を用いた衝突合体（惑星への集積）も取り扱っている

破壊の取り扱い方：統計的手法

破壊による面密度進化

Kobayashi & Tanaka 2010

ケプラー角速度

面数密度： $n_s(m)dm \propto m^{-\alpha} dm$

$$\frac{d\Sigma}{dt} = - \int_m^\infty \underline{dm_1} \int_0^\infty \underline{dm_2} \Omega_K P_{\text{col}} n_s(m_1) n_s(m_2)$$

衝突断面積 $\sim \sigma_{\text{col}}$

m_1 から放出される
m以下の破片の総質量

破壊の取り扱い方：統計的手法

破壊による面密度進化

Kobayashi & Tanaka 2010

$$\frac{d\Sigma}{dt} = - \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \Omega_K P_{\text{col}} n_s(m_1) n_s(m_2) \times m_1 f(m, m_1, m_2)$$

↓
m₁, m₂の積分

mトレーサーの進化

$$\frac{dm_{\text{tracer},i}}{dt} = -C m_{\text{tracer},i}$$
 定数

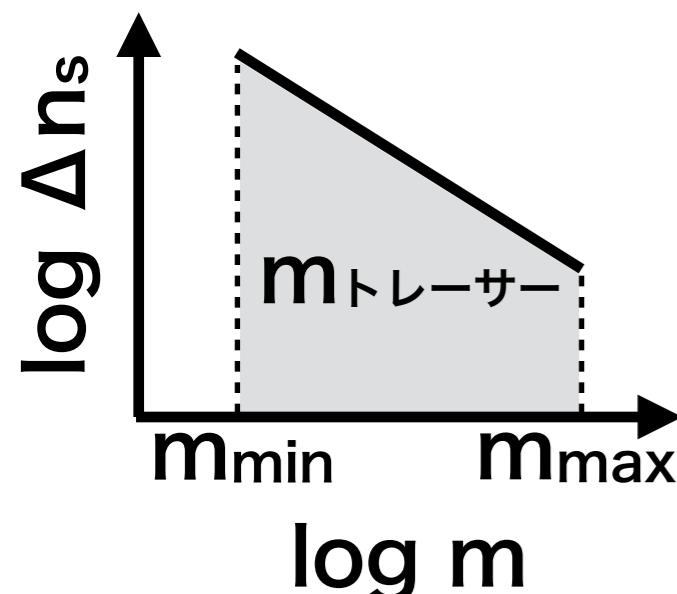
軌道分布に依存する

$$\left(\frac{\Sigma_i}{m_{\max}} \Omega_K \pi R_{\max}^2 \right) \left(\frac{v_i(m_{\max})^2}{2Q_D^*(m_{\max})} \right)^{\alpha-1}$$

m_{max}同士の衝突頻度 低質量・高速度
衝突の効果

面密度進化には面密度 Σ_i 、衝突速度 v_i が重要

近傍トレーサーの分布から計算



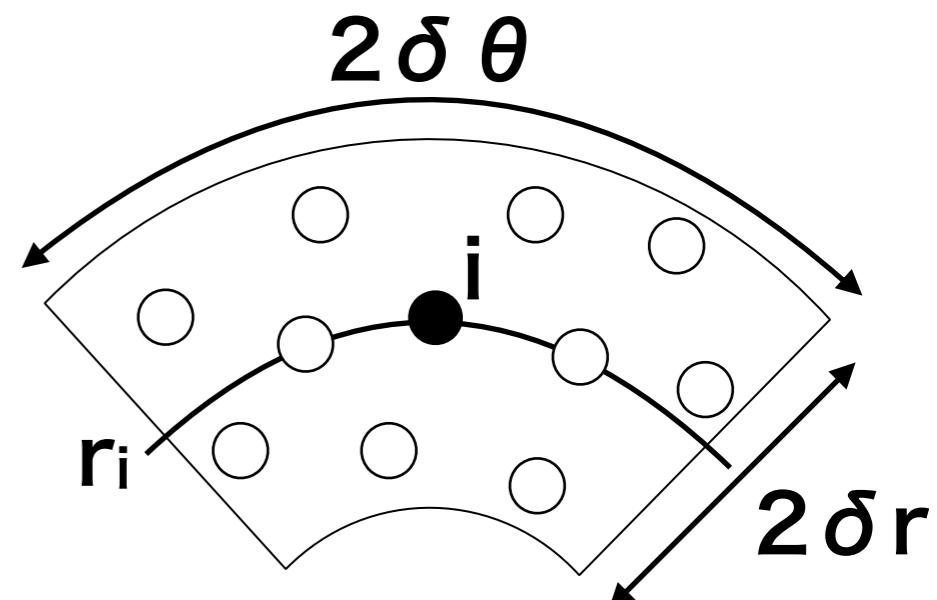
面密度と衝突速度

step1：トレーサー i のまわりに扇形領域 i を作る Morishima 2015

step2：この領域の面密度を
トレーサー i の面密度 Σ_i とする

$$\Sigma_i = \frac{m_i + \sum_j^N m_j}{4r_i \delta r \delta \theta}$$

j ：領域 i 内の
トレーサー
 N ： j の総和



step3： i と j の相対速度をランダム速度で近似

ランダム速度 $\sqrt{e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2} v_{K,i}$

$e_{i,j}$ ：相対離心率
 $i_{i,j}$ ：相対軌道傾斜角
 $v_{K,i}$ ： i のケプラー速度

step4：平均相対速度を i の衝突速度 $v_{imp,i}$ だとみなす

$$v_{imp,i} = \frac{\sum_j^N \sqrt{e_{i,j}^2 + i_{i,j}^2} v_{K,i}}{N}$$

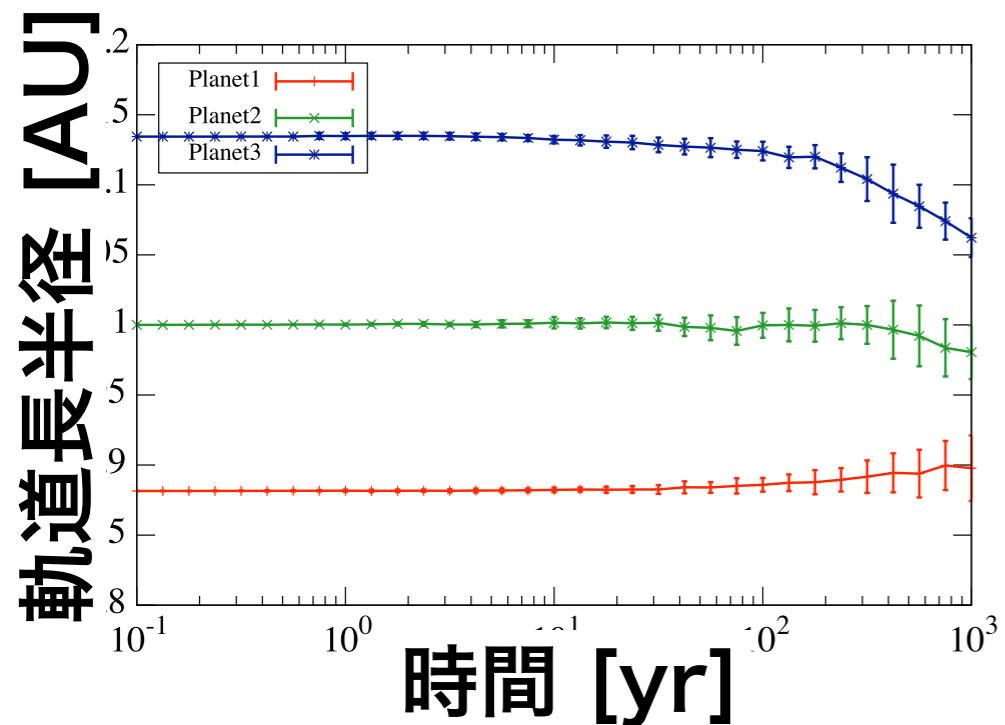
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

青：外側の惑星

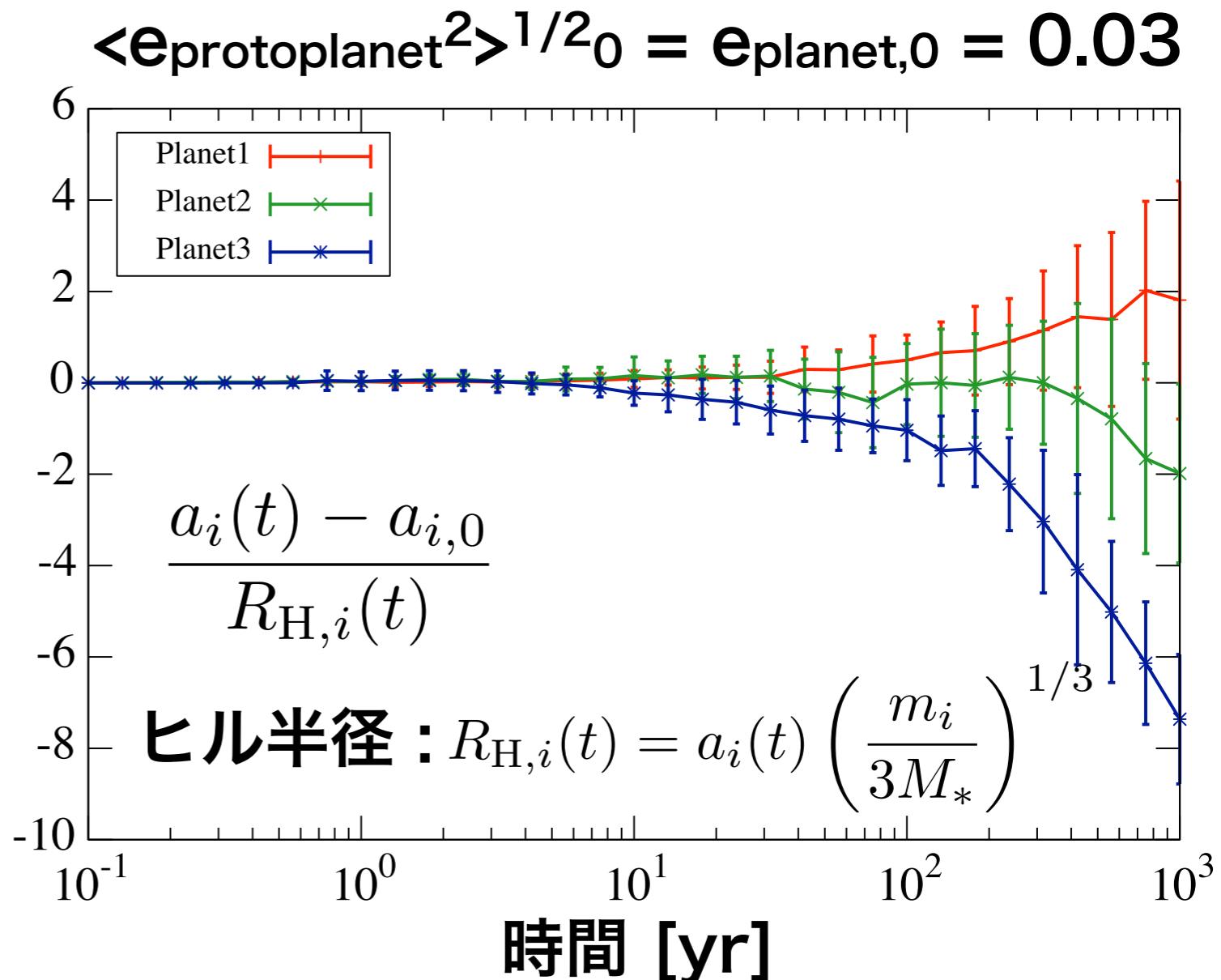
破壊なし、集積なし



点：平均値

エラーバー：13runの標準偏差 σ

規格化した移動距離



確かに、真ん中の惑星は移動量が少なくなっている

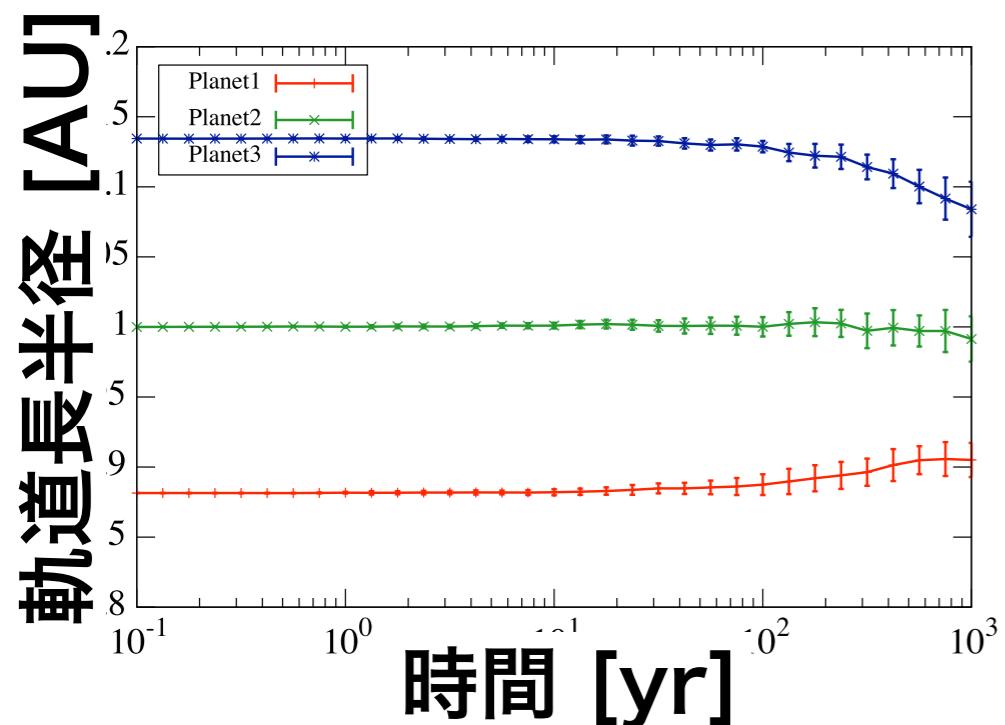
軌道長半径の時間進化

赤：内側の惑星

緑：真ん中の惑星

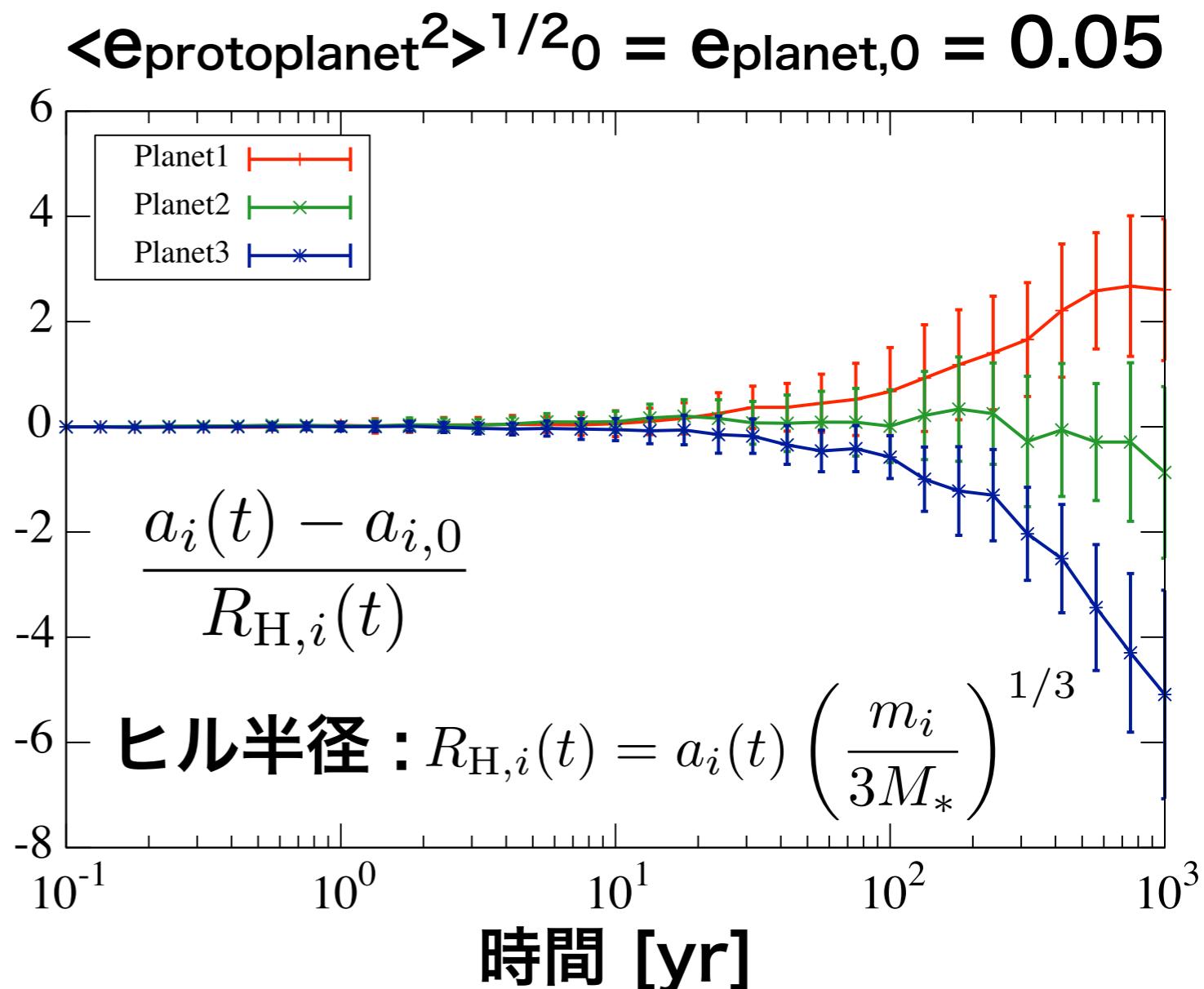
青：外側の惑星

破壊なし、集積なし



点：平均値
エラーバー：13runの標準偏差 σ

規格化した移動距離

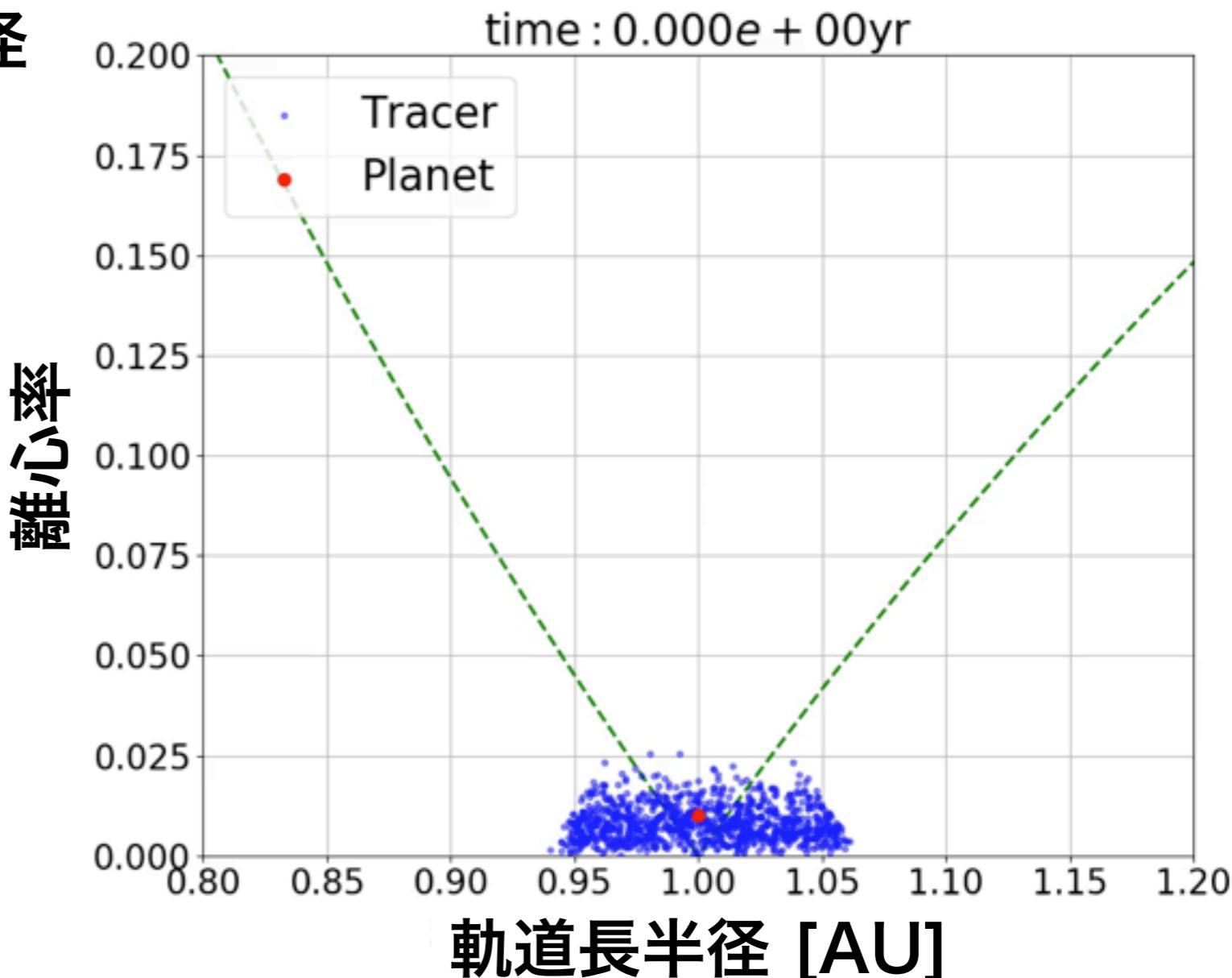


確かに、真ん中の惑星は移動量が少なくなっている

力学的摩擦のテスト1

初期条件

- ・ 質量 $1M_E$ の惑星1体
 - ・ 総質量 $10M_E$ の微惑星1000体
 - ・ 円盤の幅~10相互ヒル半径
 - ・ 破壊なし、集積なし
- 赤点：惑星 青点：微惑星
緑破線：等ヤコビエネルギー線

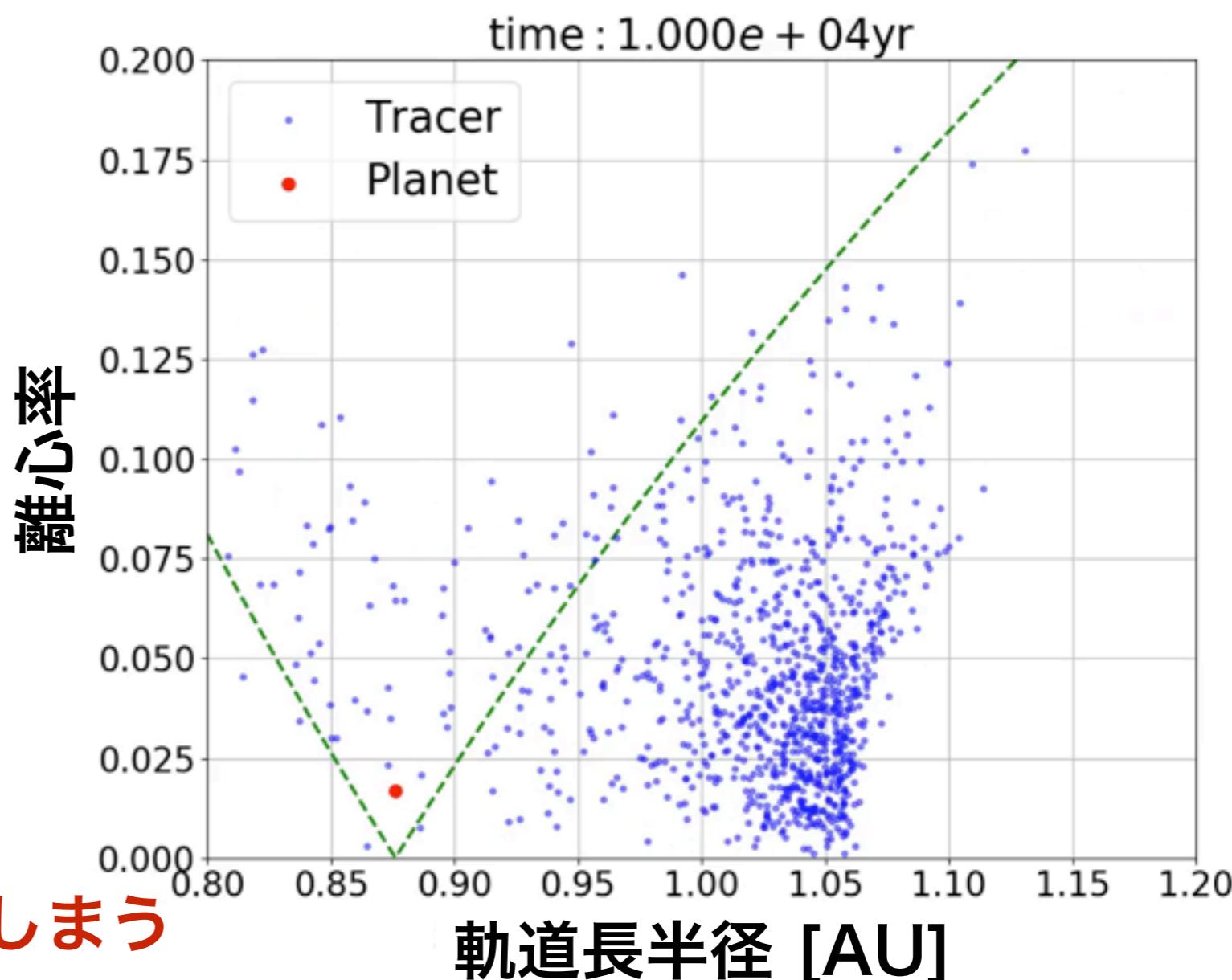


力学的摩擦のテスト1

結果

- ・惑星の離心率は減少
- ・等ヤコビエネルギー線に沿って微惑星の離心率は上昇
- ・微惑星駆動惑星移動(Planetesimal-Driven Migration)による内側移動
(e.g., Ida et al. 2000; Kirsh et al. 2009)

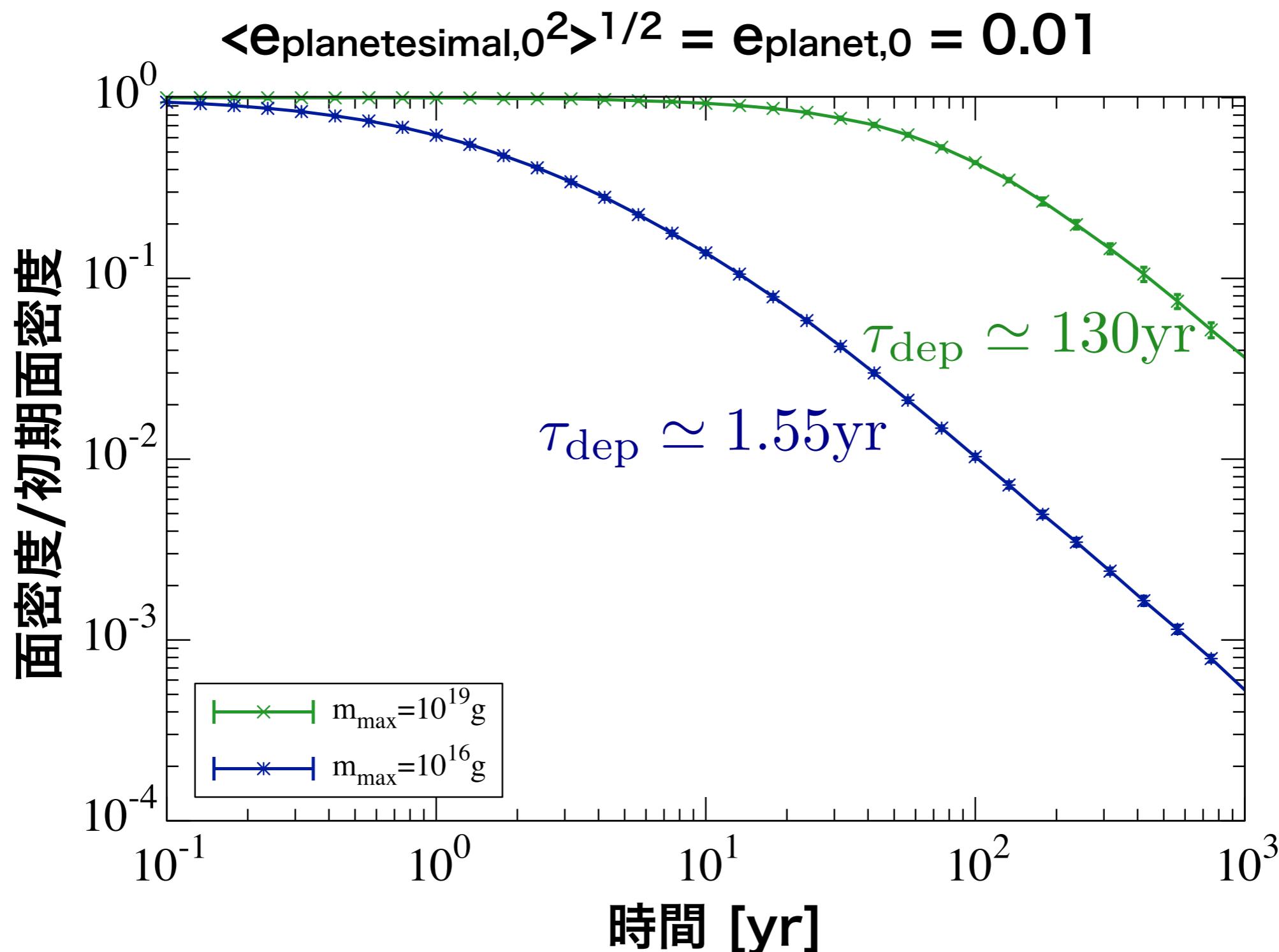
赤点：惑星 青点：微惑星
緑破線：等ヤコビエネルギー線



円盤の外へ惑星が移動してしまう
この初期条件では比較・議論できない

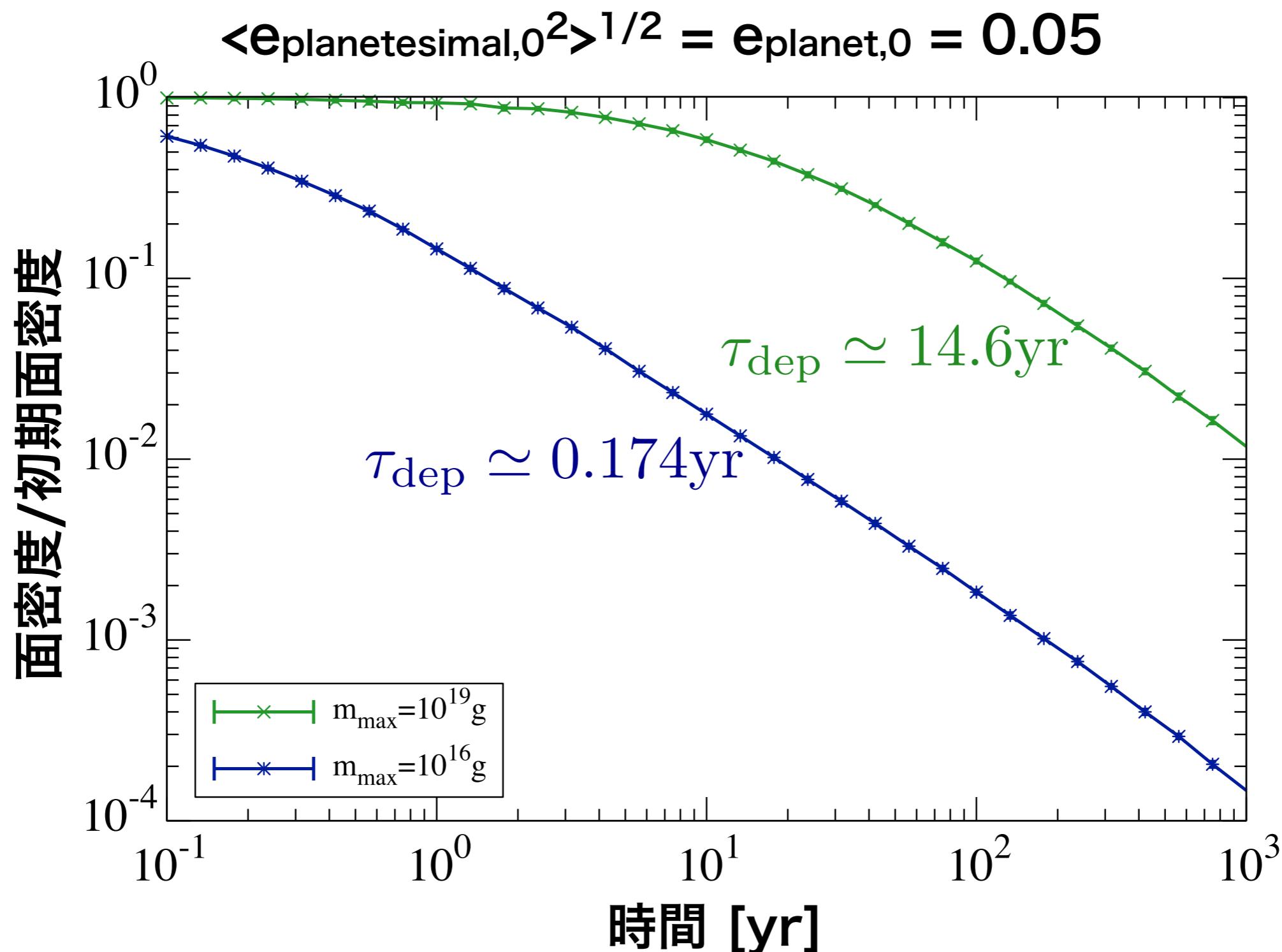
面密度進化（離心率0.01）

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定



面密度進化 (離心率0.05)

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定



離心率の平均値の変化率（解析解）

質量 M_1 の粒子集団1と質量 M_2 の粒子集団2の重力相互作用を考える

(Ida 1990; Ohtsuki et al. 1993; Stewart & Ida 2000)

$$\frac{de_1^2}{dt} \simeq \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \frac{e^2}{t_{g,12}} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_2 e_2^2 - M_1 e_1^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

Viscous Stirring

ランダム速度上昇の効果

ヤコビエネルギーの保存より
 $|a_2 - a_1|$ が増えると e, i が増える

Dynamical Friction

エネルギー等分配の効果

粒子あたりのエネルギー
 $\propto M_j e_j^2$ を一定にする働き

$$t_{g,12} = \left(\frac{1}{e^2} \frac{de^2}{dt} \right)^{-1}$$

：相対離心率が変化する
典型的なタイムスケール

$$e^2 = e_1^2 + e_2^2$$

：相対離心率の平均

de_j^2/dt を積分すれば
解析解が求まる！

力学的摩擦の特徴

力学的摩擦の項
$$\left(\frac{d{e_1}^2}{dt} \right)_{\text{df}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{{M_2 e_2}^2 - {M_1 e_1}^2}{M_1 + M_2} \frac{1}{t_{g,12}}$$

M_1 と M_2 それぞれにエネルギーが等分配されるとき

$${M_2 e_2}^2 - {M_1 e_1}^2 \approx 0 \quad \rightarrow \quad e_{1,\text{eq}} \approx \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} e_{2,\text{eq}}$$

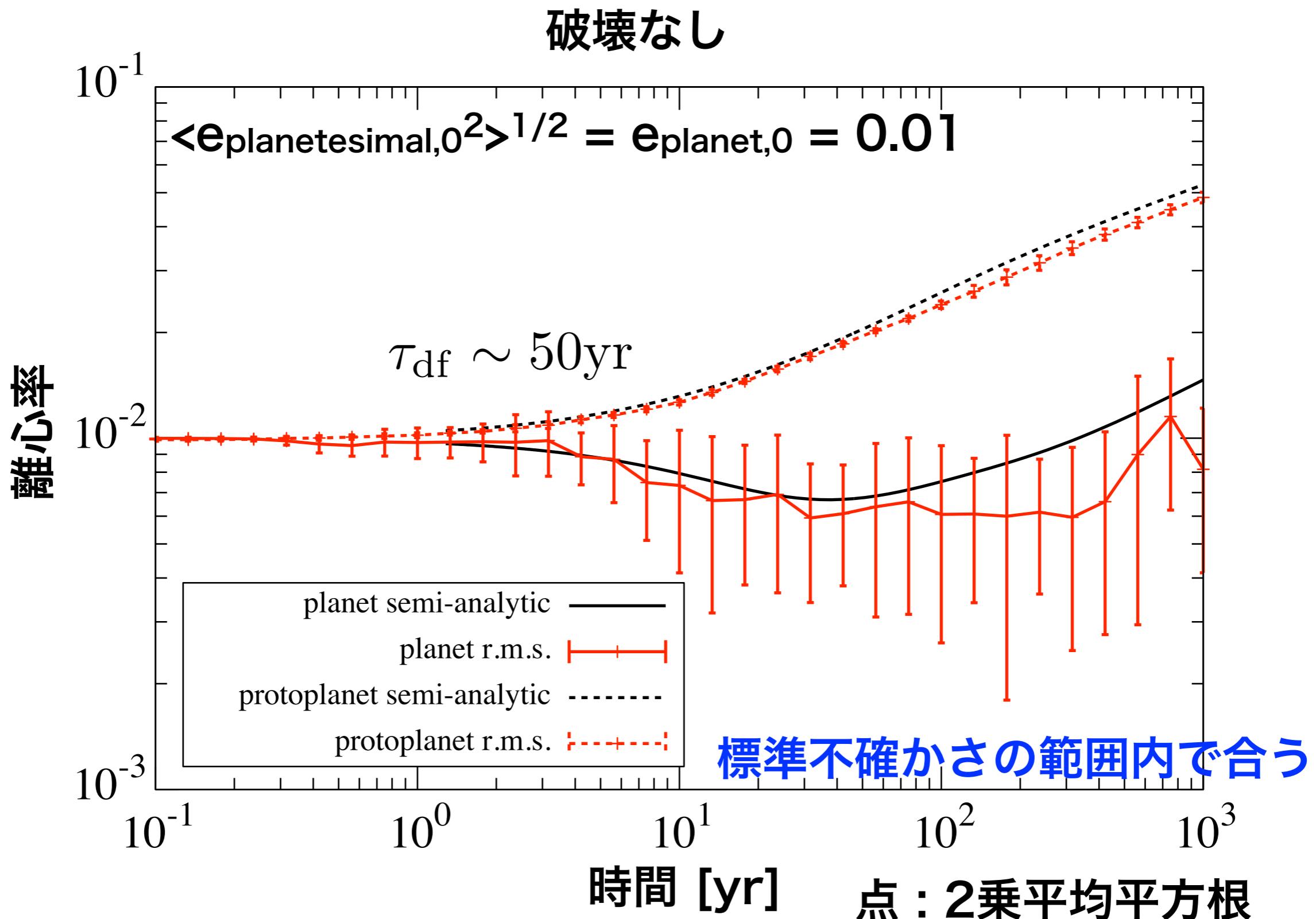
最終的な平衡状態の離心率は M_1 と M_2 の質量比、つまりN体計算では粒子数に大きく依存する

一方、力学的摩擦のタイムスケールは、 $M_1 \gg M_2$ かつ $e_1 \sim e_2$ とすると

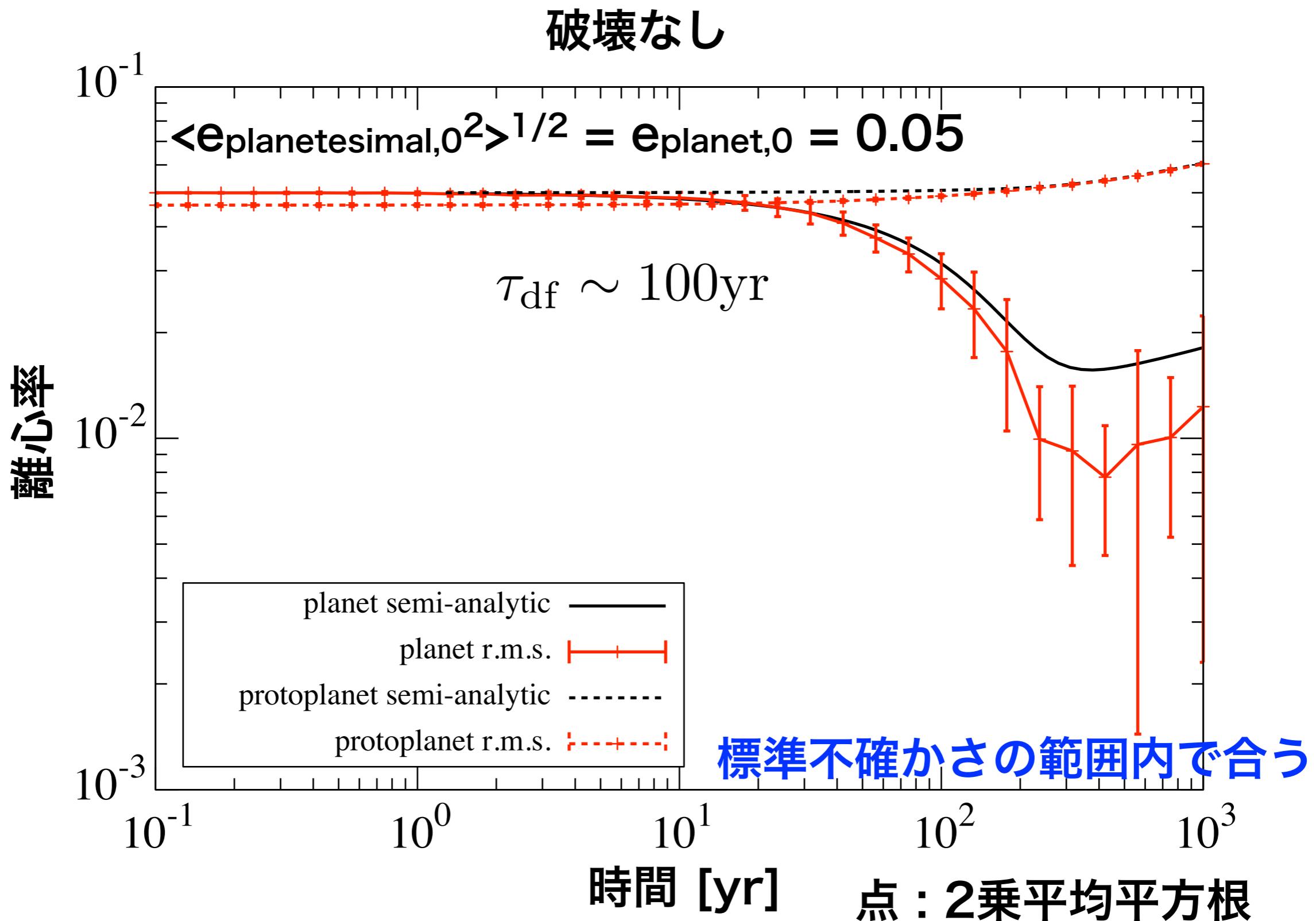
$$\tau_{\text{df}} \simeq 16 \left(\frac{a}{1\text{AU}} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta a/a}{0.126} \right) \left(\frac{e}{0.01} \right)^4 \left(\frac{\ln \Lambda}{5} \right)^{-1} \left(\frac{M_1}{M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{tot},2}}{10M_\oplus} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{3/2} \text{yr}$$

それぞれの M_2 に依存せず、集団2の総質量 $M_{\text{tot},2}$ が重要

離心率進化



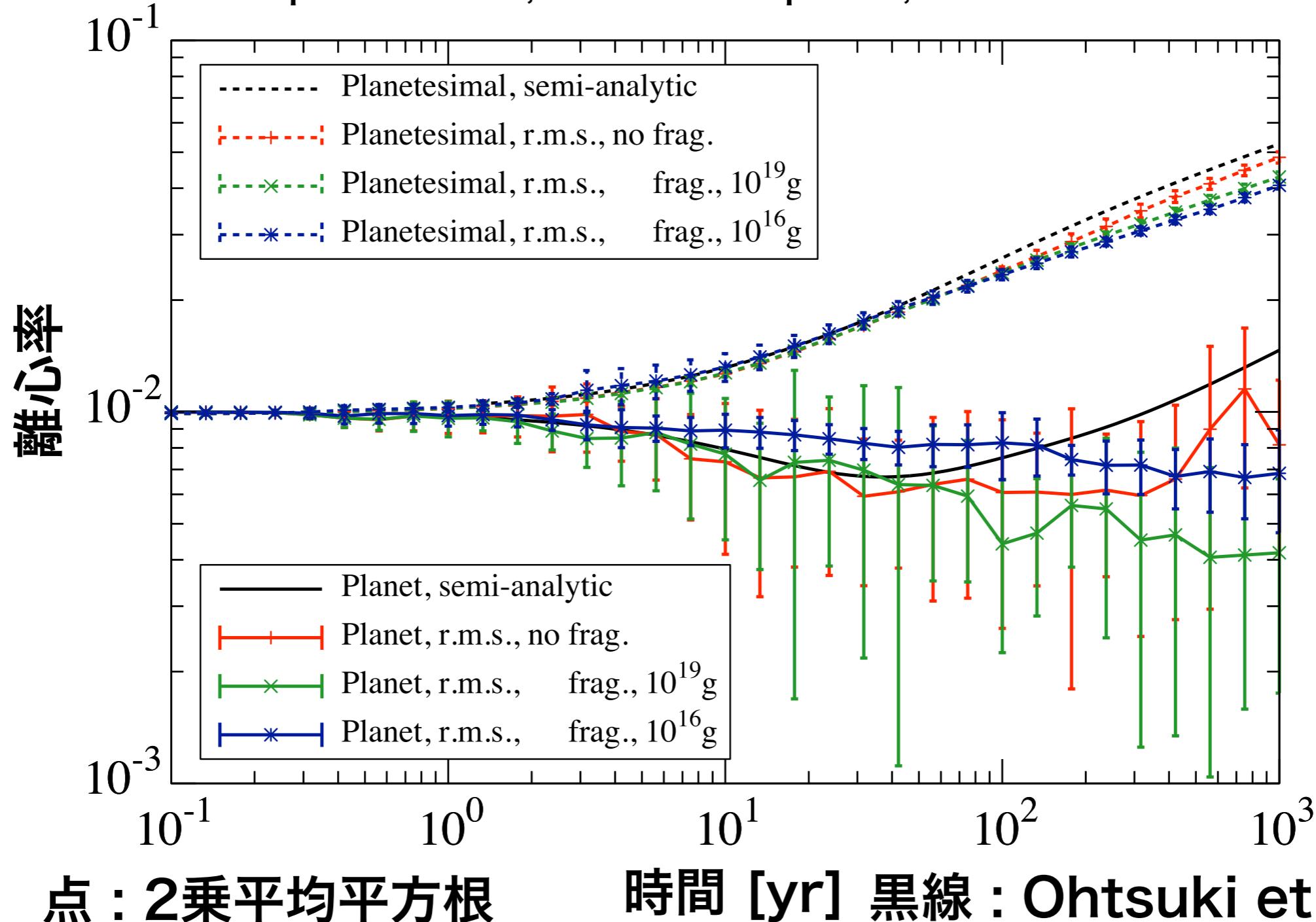
離心率進化



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

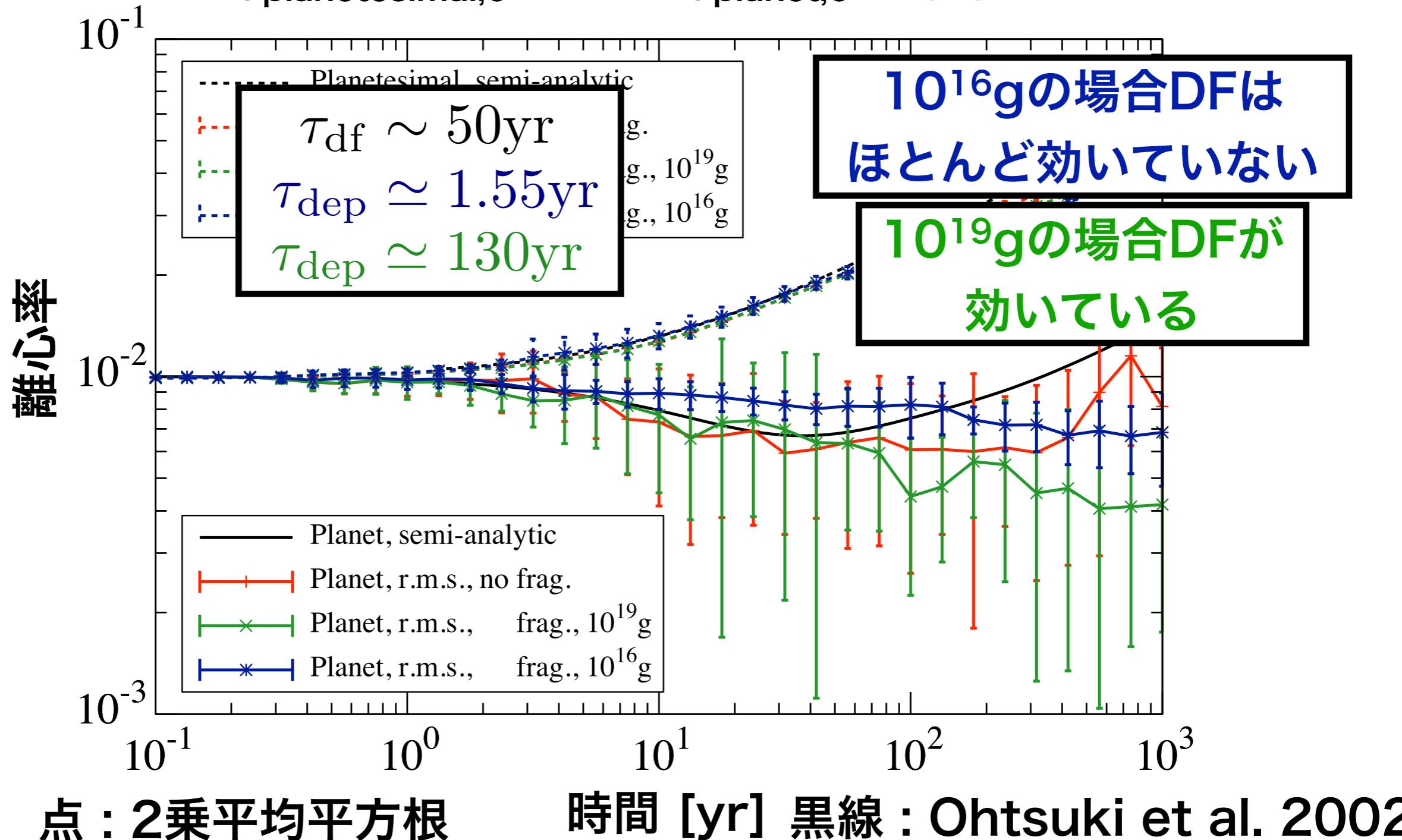
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.01$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

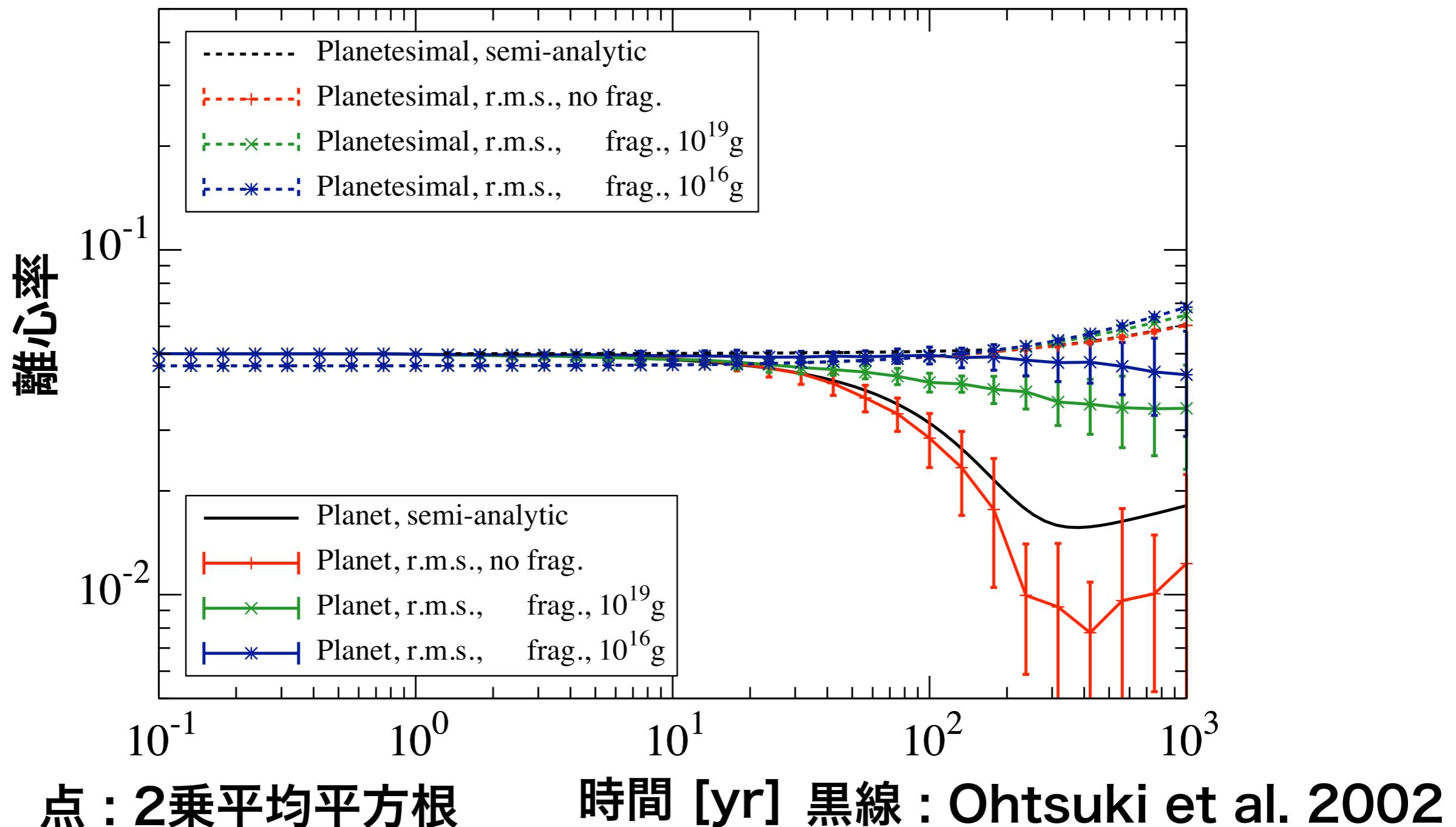
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.01$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

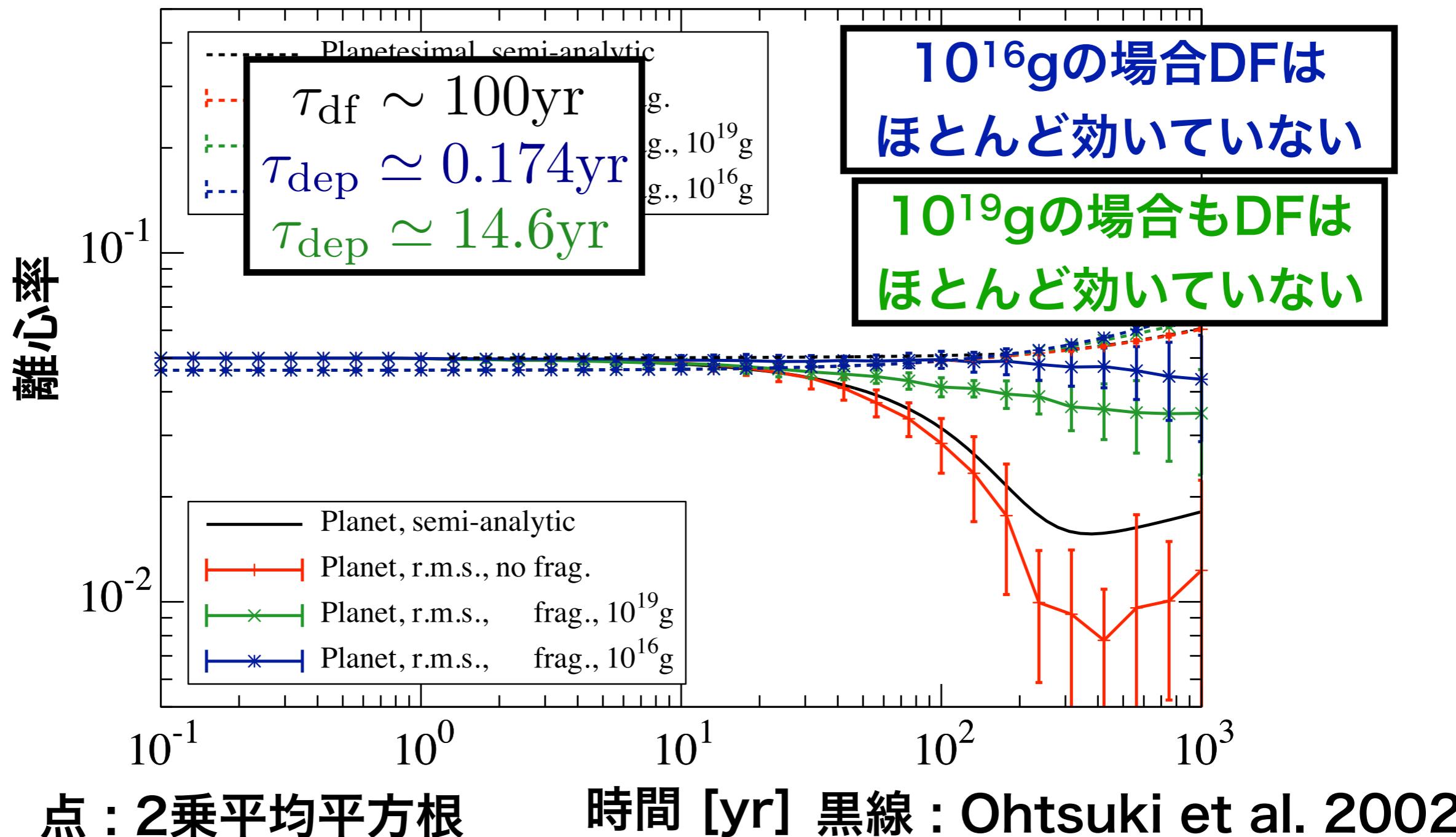
$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.05$$



破壊を考慮した時の離心率進化

m_{\max} を $10^{16}g$ (~1km) と $10^{19}g$ (~10km) に設定

$$\langle e_{\text{planetesimal},0}^2 \rangle^{1/2} = e_{\text{planet},0} = 0.05$$

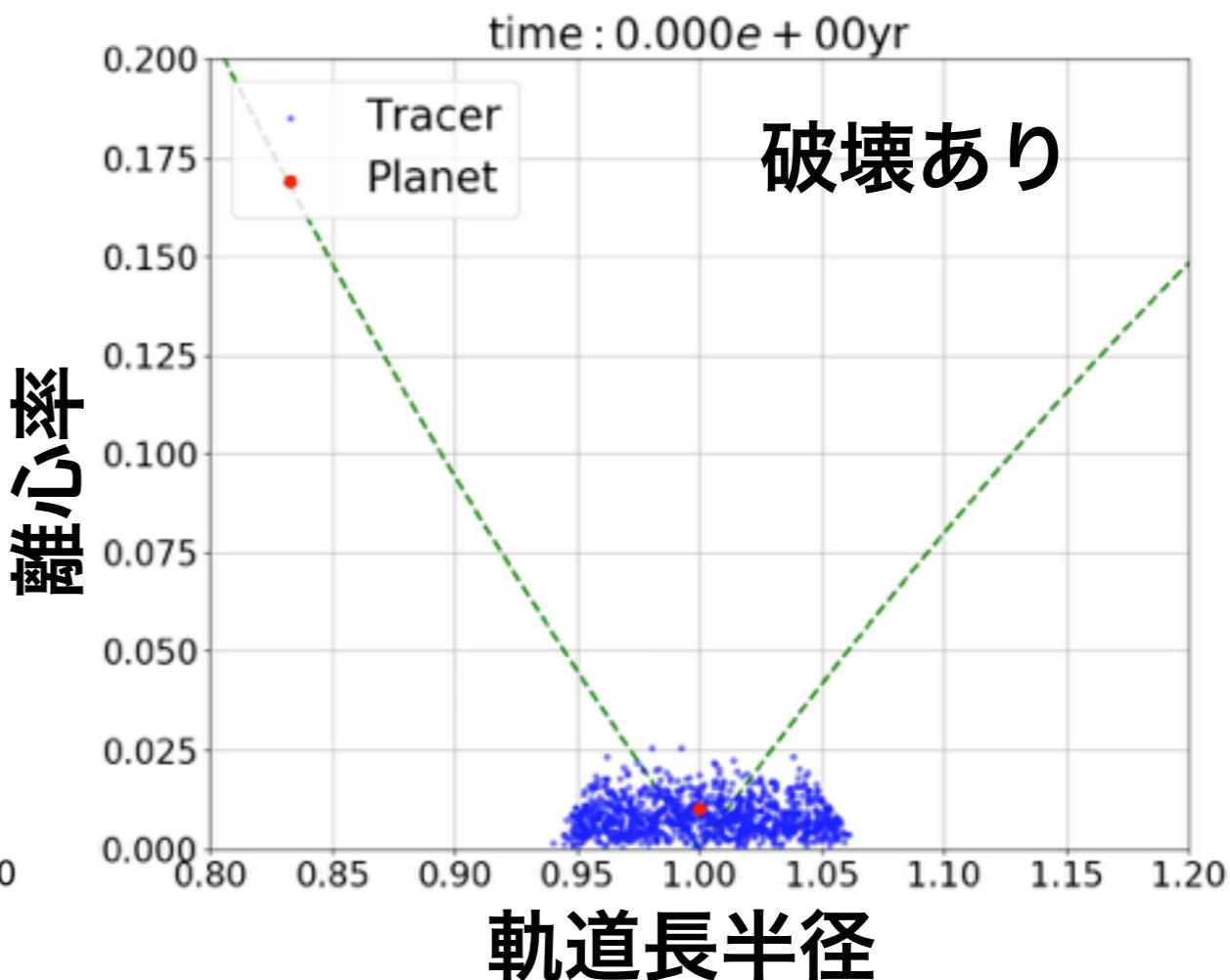
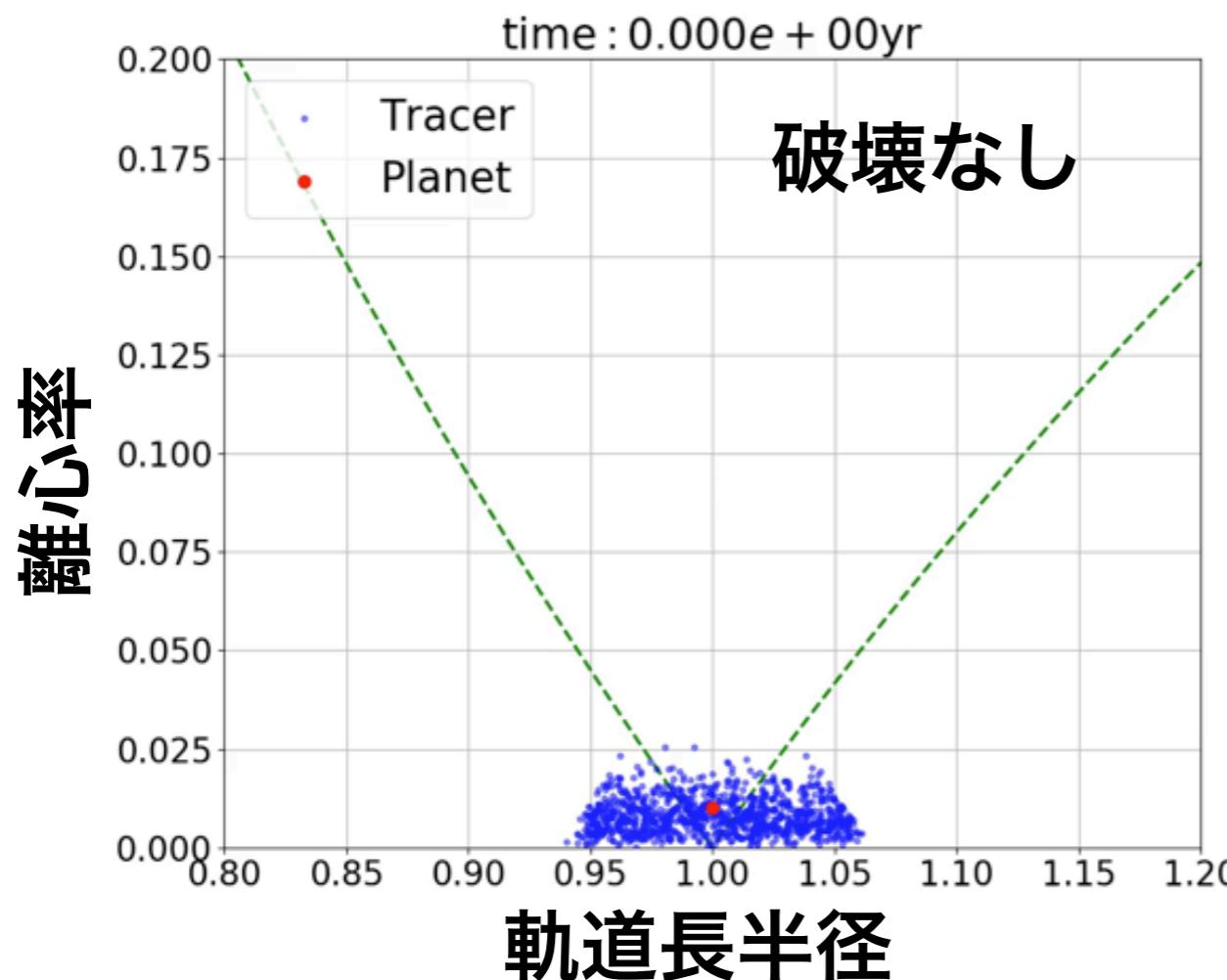


惑星移動の方向

初期条件

- ・ 質量 $1M_E$ の惑星1体
- ・ 総質量 $10M_E$ の微惑星1000体
- ・ 円盤の幅~10相互ヒル半径

でテストを行ったが、微惑星円盤の外へ惑星は移動していた

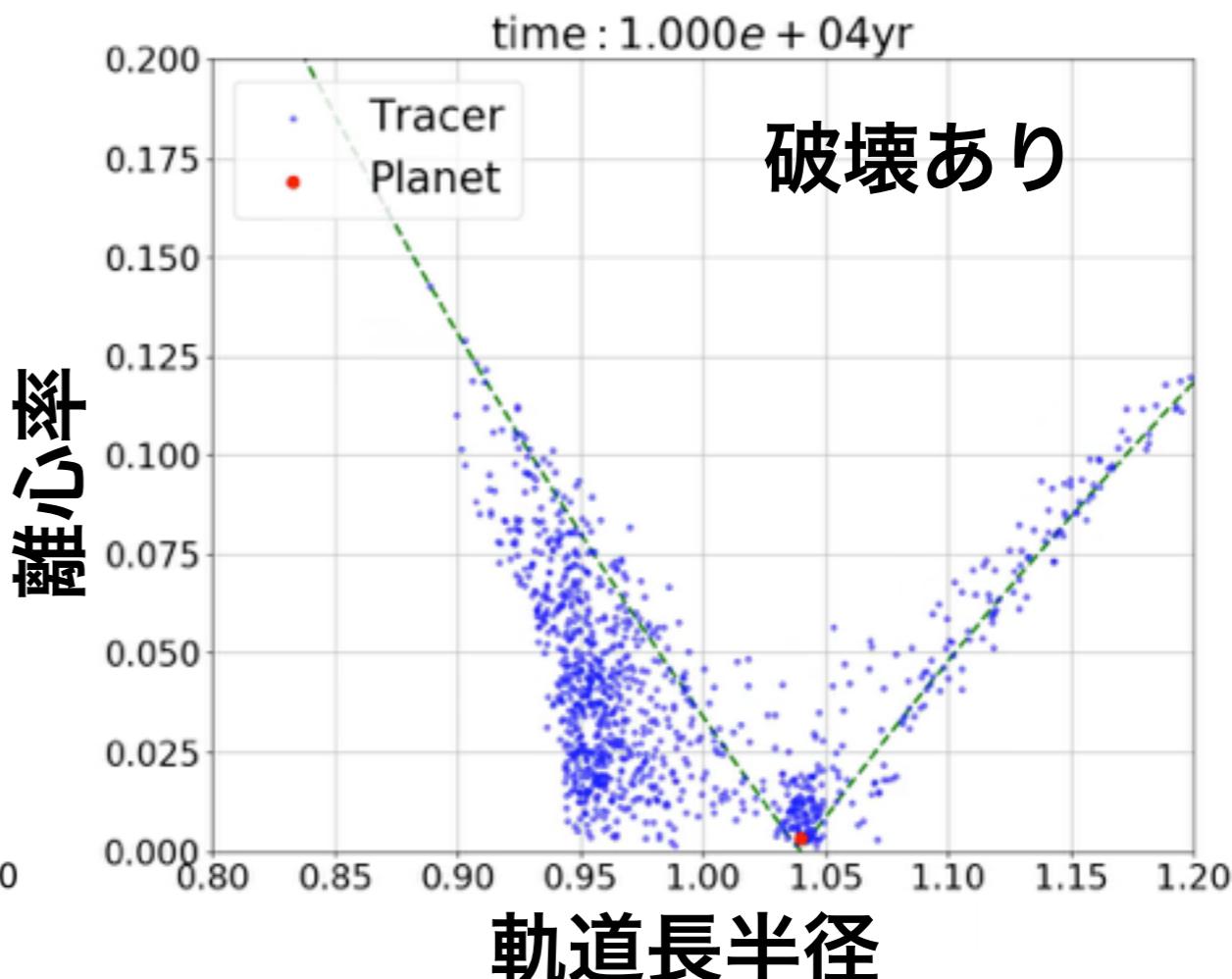
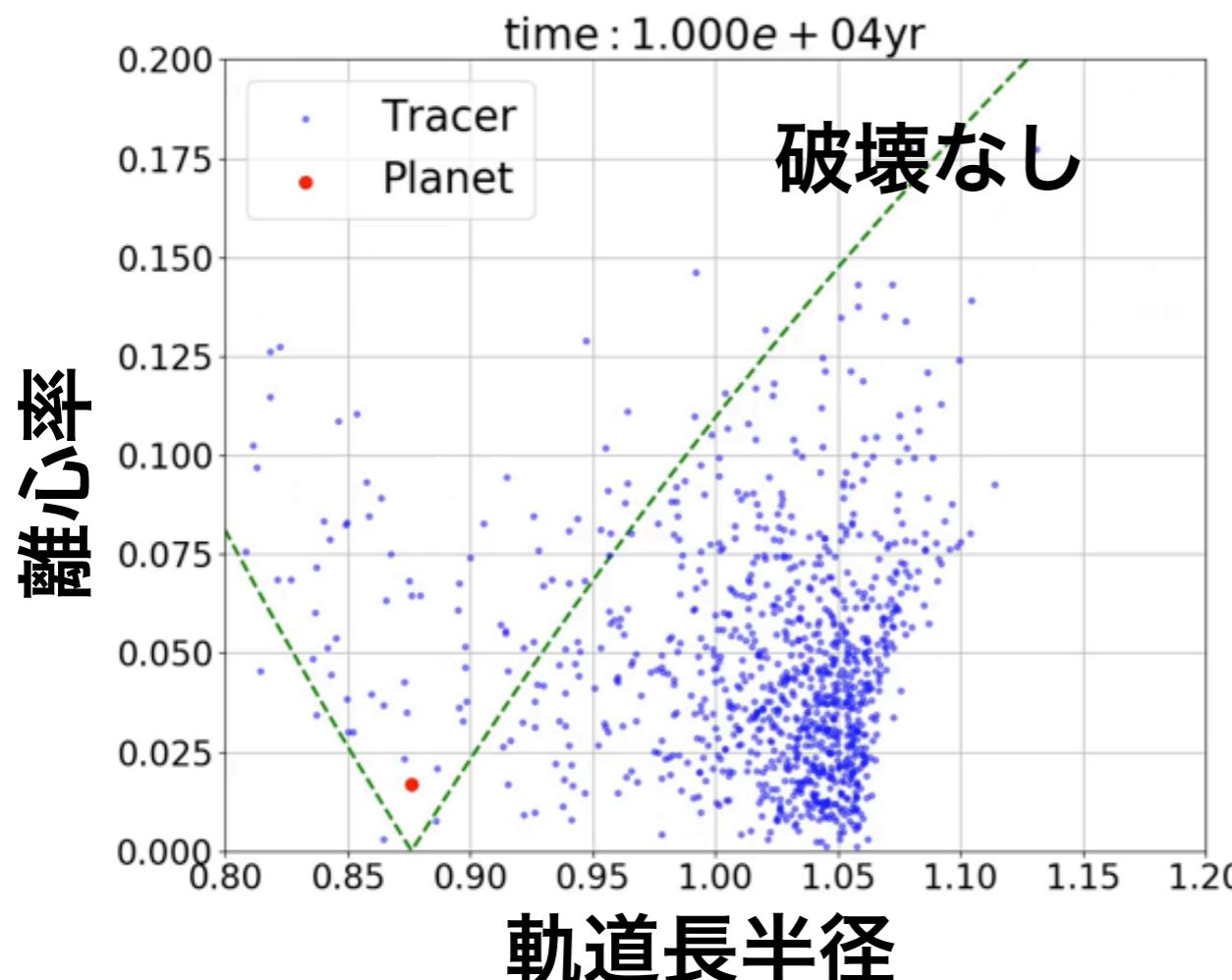


惑星移動の方向

初期条件

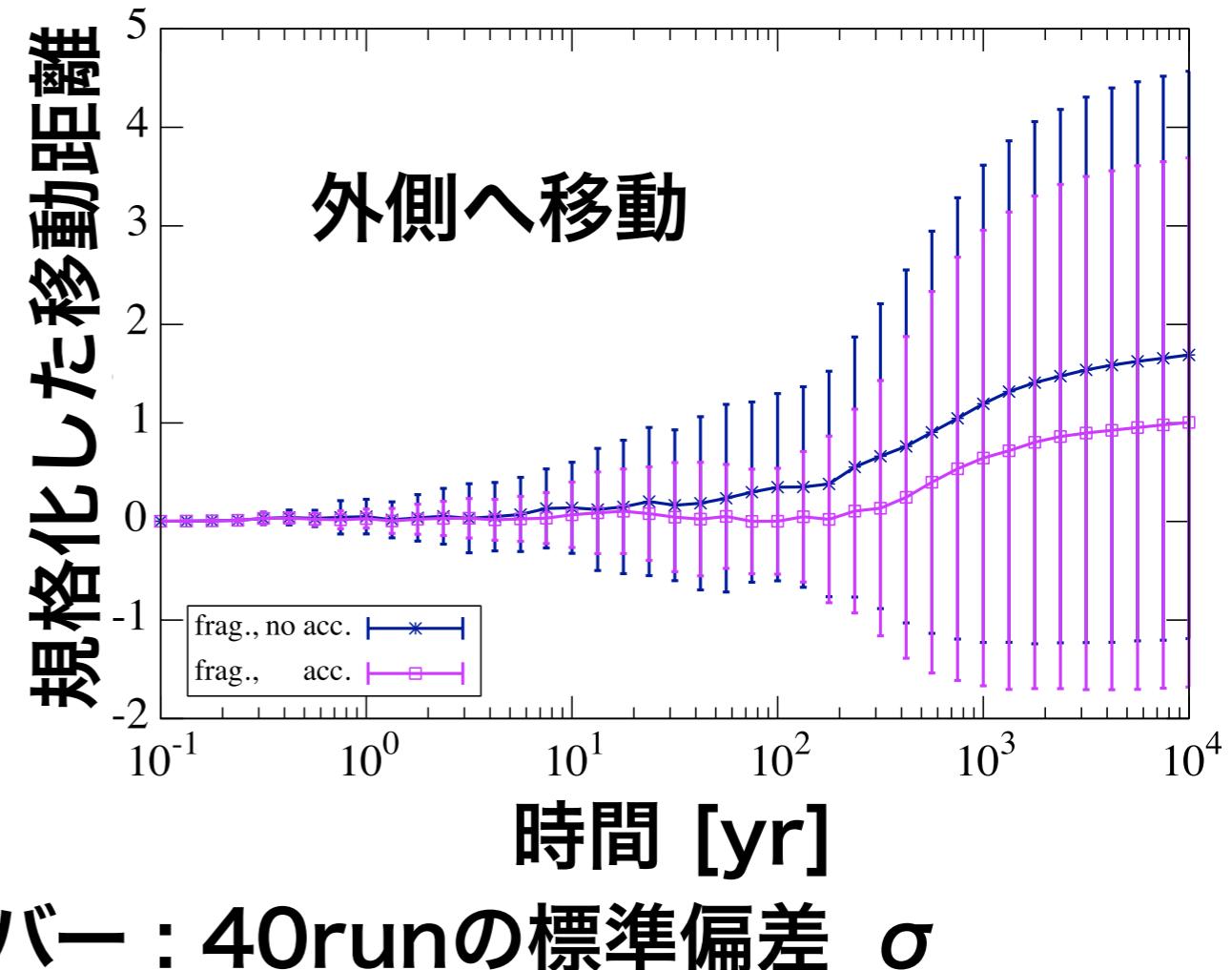
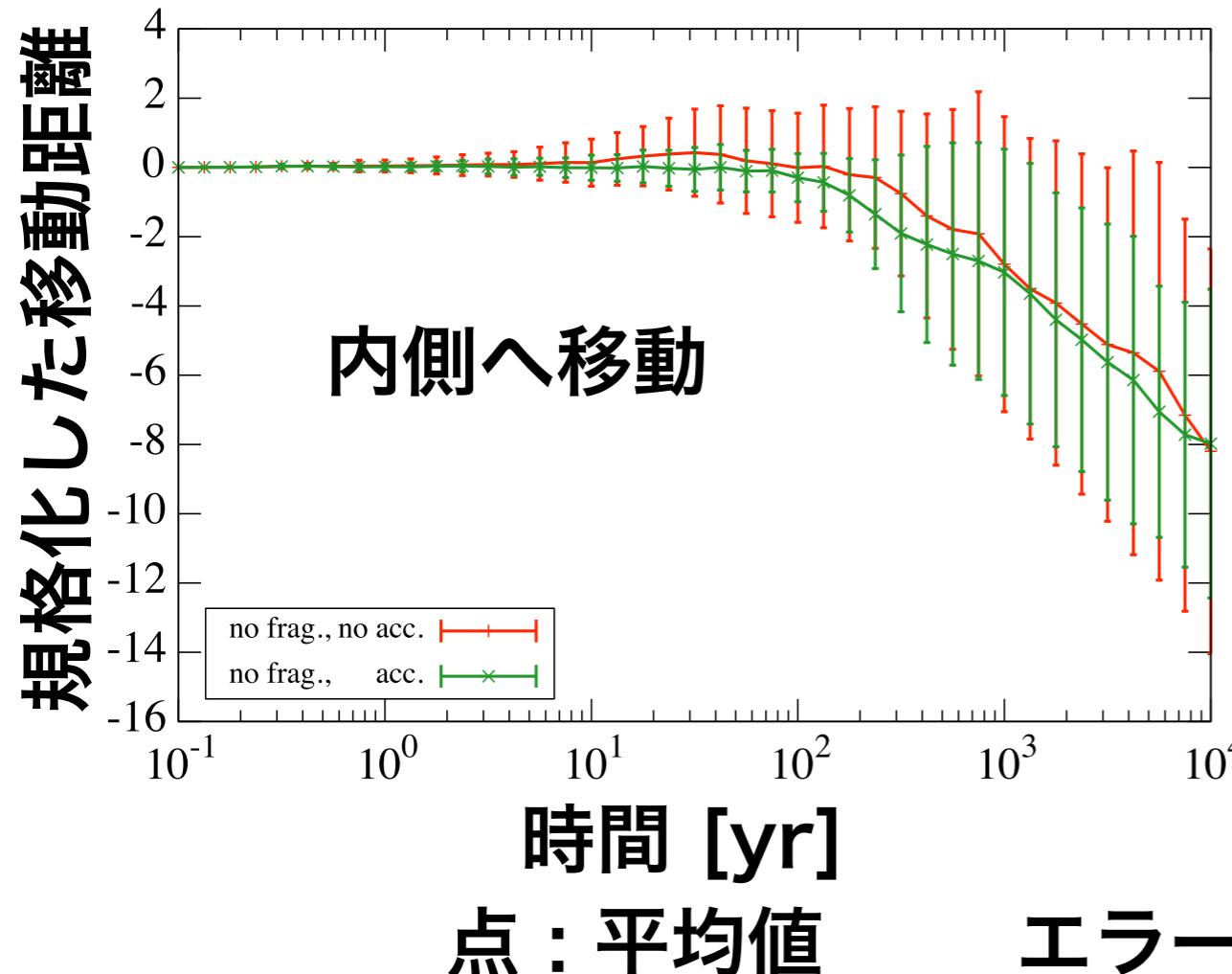
- ・ 質量 $1M_E$ の惑星1体
- ・ 総質量 $10M_E$ の微惑星1000体
- ・ 円盤の幅~10相互ヒル半径

でテストを行ったが、微惑星円盤の外へ惑星は移動していた



しかし、惑星移動の方向は破壊ありと破壊なしで正反対だった

惑星移動の方向と微惑星間破壊の関係



内側へ移動する理由：

内側の微惑星との角運動量交換の頻度が
外側に比べ多いため

破壊ありの場合に
面密度減少タイムスケールは内側ほど小さく、角運
外側へ移動した理由：動量交換する相手が内側にいなくなつたため（？）

まとめと今後の課題

- ・ 破壊による面密度減少によって力学的摩擦の効率が下がることを確かめた。
- ・ 微惑星円盤の減少タイムスケールは円盤内側ほど早いため、微惑星間の破壊現象が外側への惑星移動を引き起こす可能性があることを発見した。
- ・ 離心率、軌道傾斜角、面密度のそれぞれの変化率（解析解）を用い、早急に破壊のテストを完璧に行う。

ヤコビエネルギー

回転系での相対運動のエネルギー

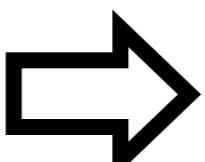
$$E_J = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2} \Omega_K^2 x^2 + \frac{1}{2} \Omega_K^2 z^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r} = \text{const.}$$

惑星による微惑星散乱では、ヤコビエネルギーを保つように軌道進化する
離心率、軌道傾斜角、軌道長半径で書き換えると

$$E_J = \frac{1}{2} (e^2 + i^2) a^2 \Omega_K^2 - \frac{3}{8} \Delta a^2 \Omega_K^2 - \frac{G(M_1 + M_2)}{r}$$

$$\equiv \frac{1}{2} v_{\text{inc}}^2$$

v_{inc} : ヒル圏への侵入速度

$|\Delta a|$ 増  $(e^2 + i^2)^2$ 増 **Viscous Stirringの原因**

4次のエルミート法1

step1：加速度と加速度の1階微分を用いて予測子を計算（2次精度）

$$\begin{cases} x_{p,j} = x_{0,j} + \Delta t v_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{a}_{0,j} & \text{予測子} \\ v_{p,j} = v_{0,j} + \Delta t a_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{a}_{0,j} & \text{添字0は} t_0 \text{での値} \end{cases}$$

step2：予測子を用いて加速度の2,3階微分を補完

ここで $\begin{cases} r_{jk} = x_{p,j} - x_{p,k} \\ v_{jk} = v_{p,j} - v_{p,k} \end{cases}$ とおくと、 Δt 進めた加速度は

$$\begin{cases} a_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \frac{r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \\ \dot{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \left[\frac{v_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(v_{jk} \cdot r_{jk}) r_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \end{cases} \quad \epsilon : \text{ソフトニングパラメータ}$$

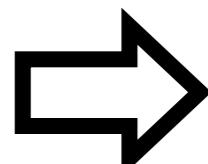
添字1は $t_0 + \Delta t$ での値

4次のエルミート法2

step2続き

$$\begin{cases} a_{1,j} = a_{0,j} + \Delta t \dot{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(3)} & \text{3次のエルミート補完} \\ \dot{a}_{1,j} = \dot{a}_{0,j} + \Delta t a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{0,j}^{(3)} & (\text{テイラー展開}) \end{cases}$$

逆に解く



$$\begin{cases} a_{0,j}^{(2)} = \frac{-6(a_{0,j} - a_{1,j}) - \Delta t(4\dot{a}_{0,j} + 2\dot{a}_{1,j})}{\Delta t^2} \\ a_{0,j}^{(3)} = \frac{12(a_{0,j} - a_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{a}_{0,j} + \dot{a}_{1,j})}{\Delta t^3} \end{cases}$$

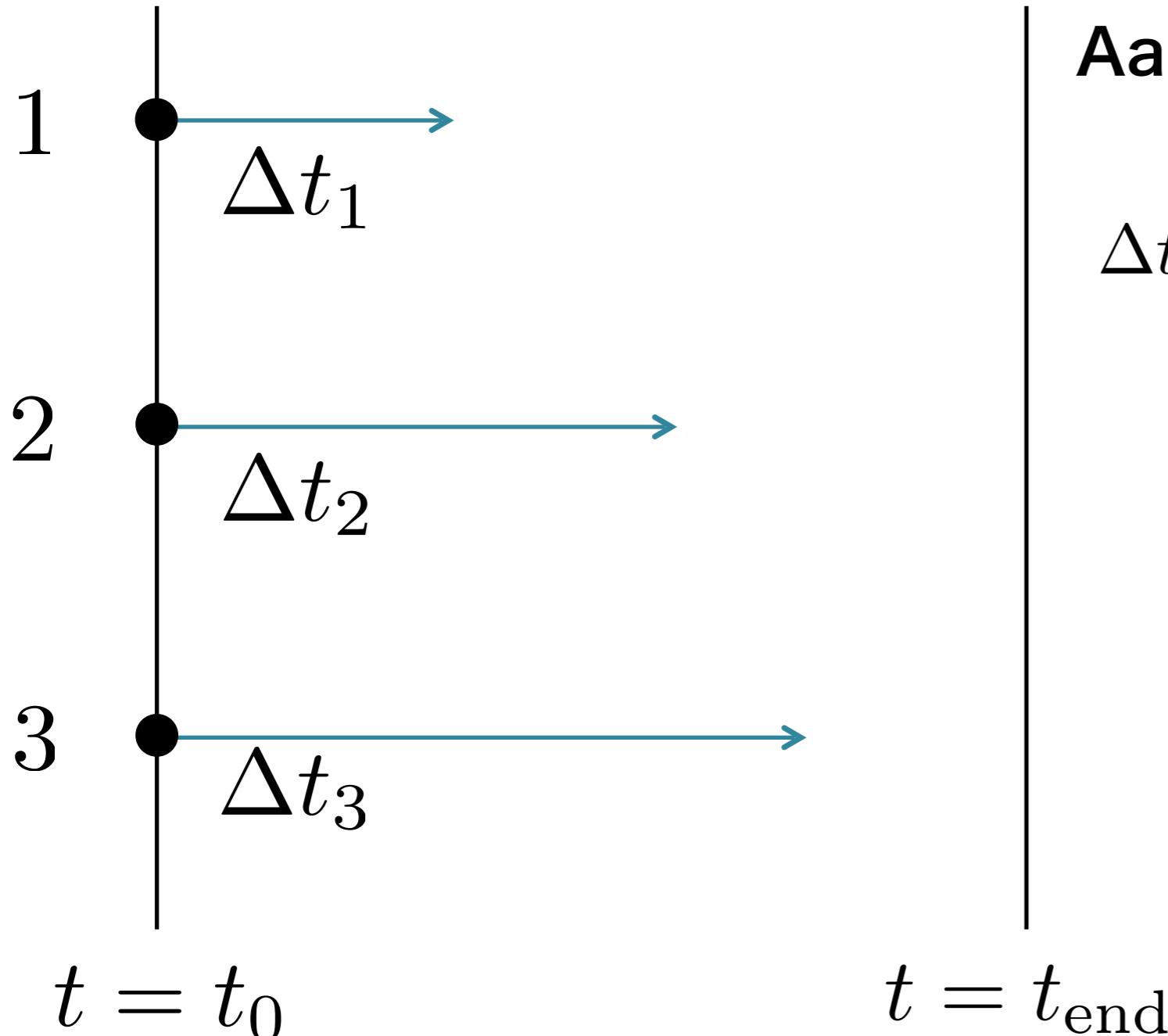
step3 : 加速度と加速度の1,2,3階微分を用いて修正子を計算 (4次精度)

$$\begin{cases} x_{c,j} = x_{p,j} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(2)} + \alpha \frac{\Delta t^5}{120} a_{0,j}^{(3)} \\ v_{c,j} = v_{p,j} + \frac{\Delta t^3}{6} a_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24} a_{0,j}^{(3)} \end{cases} \quad \text{修正子}$$

独立タイムステップ1

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

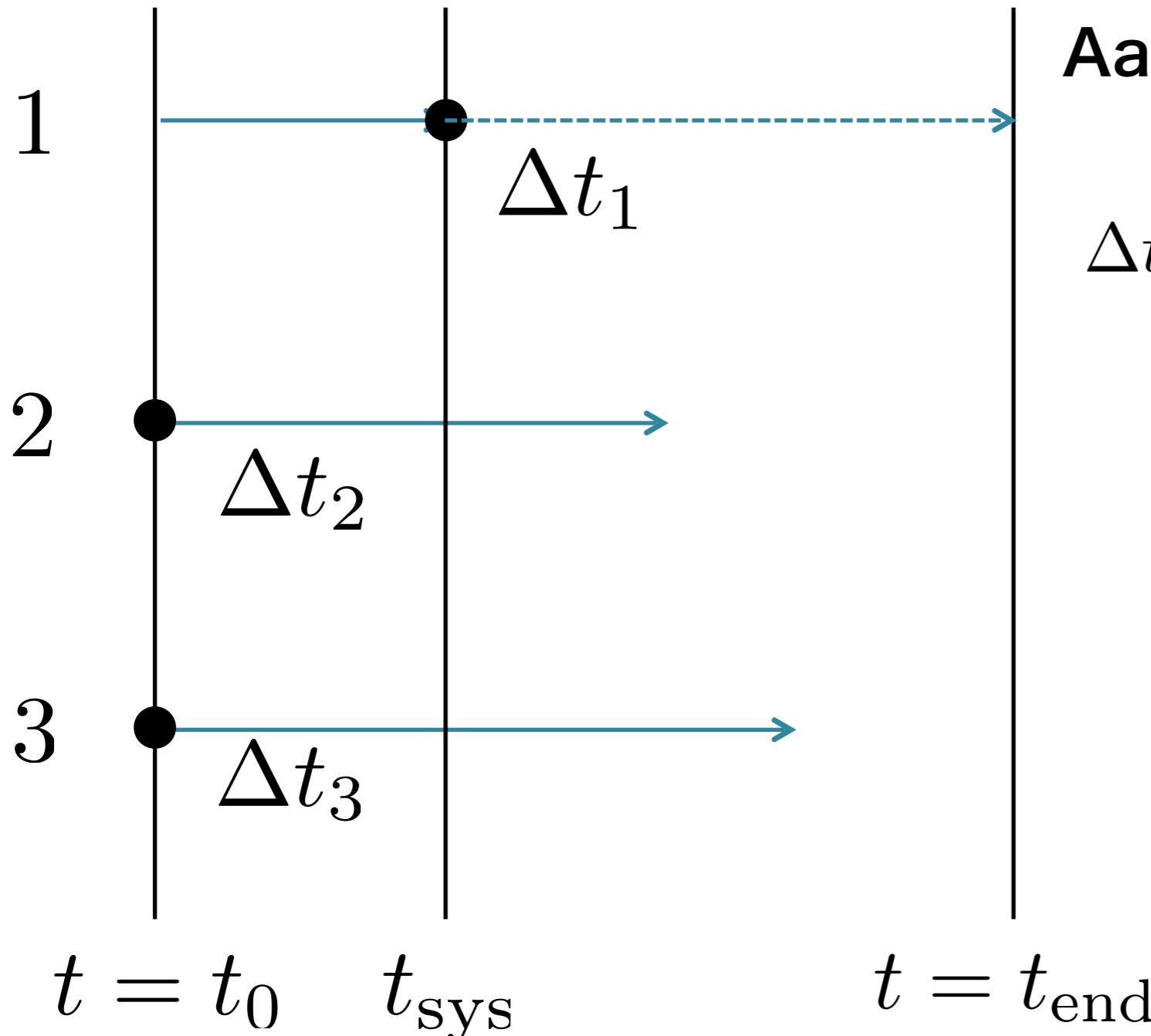
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ2

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

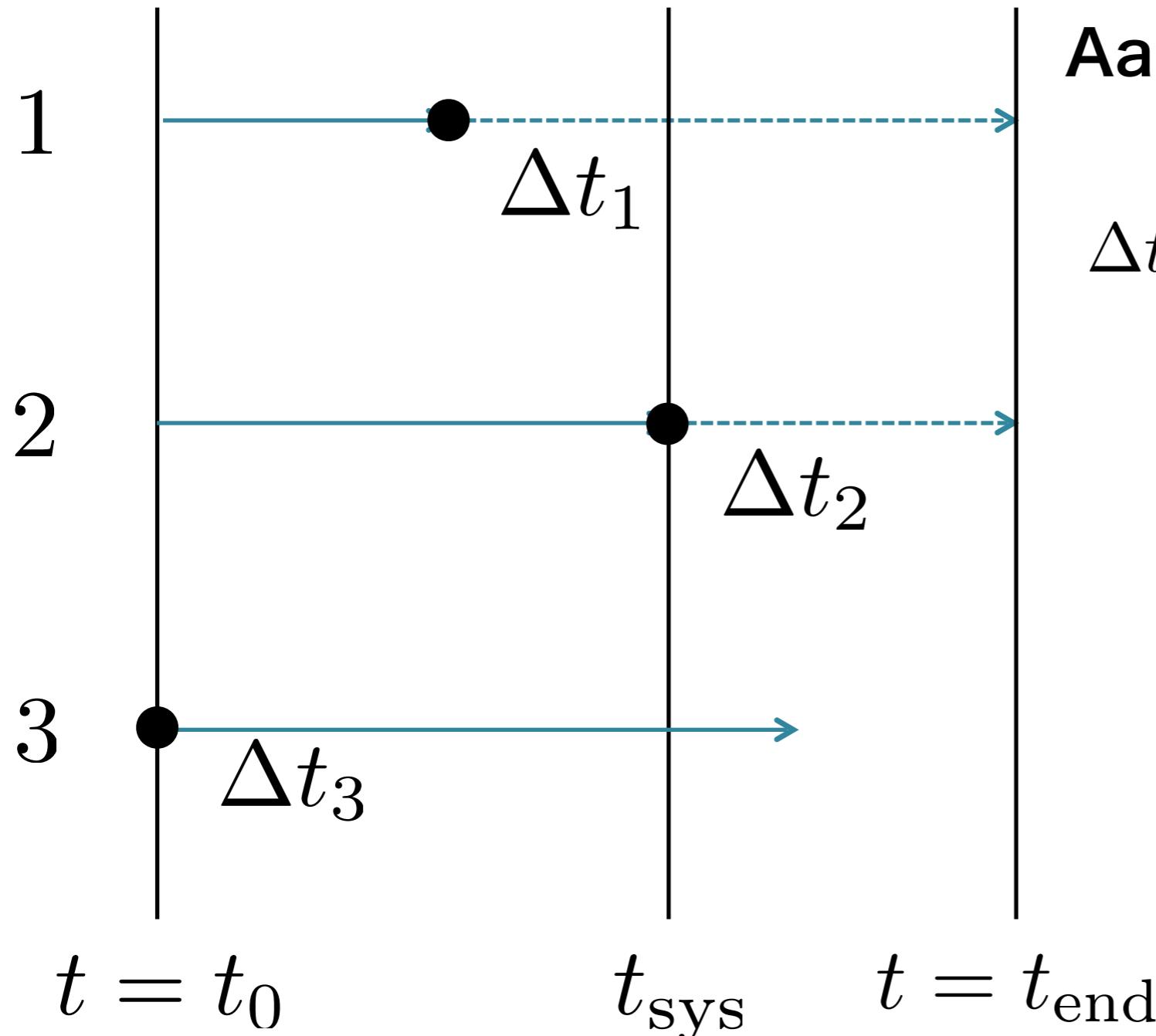
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ3

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

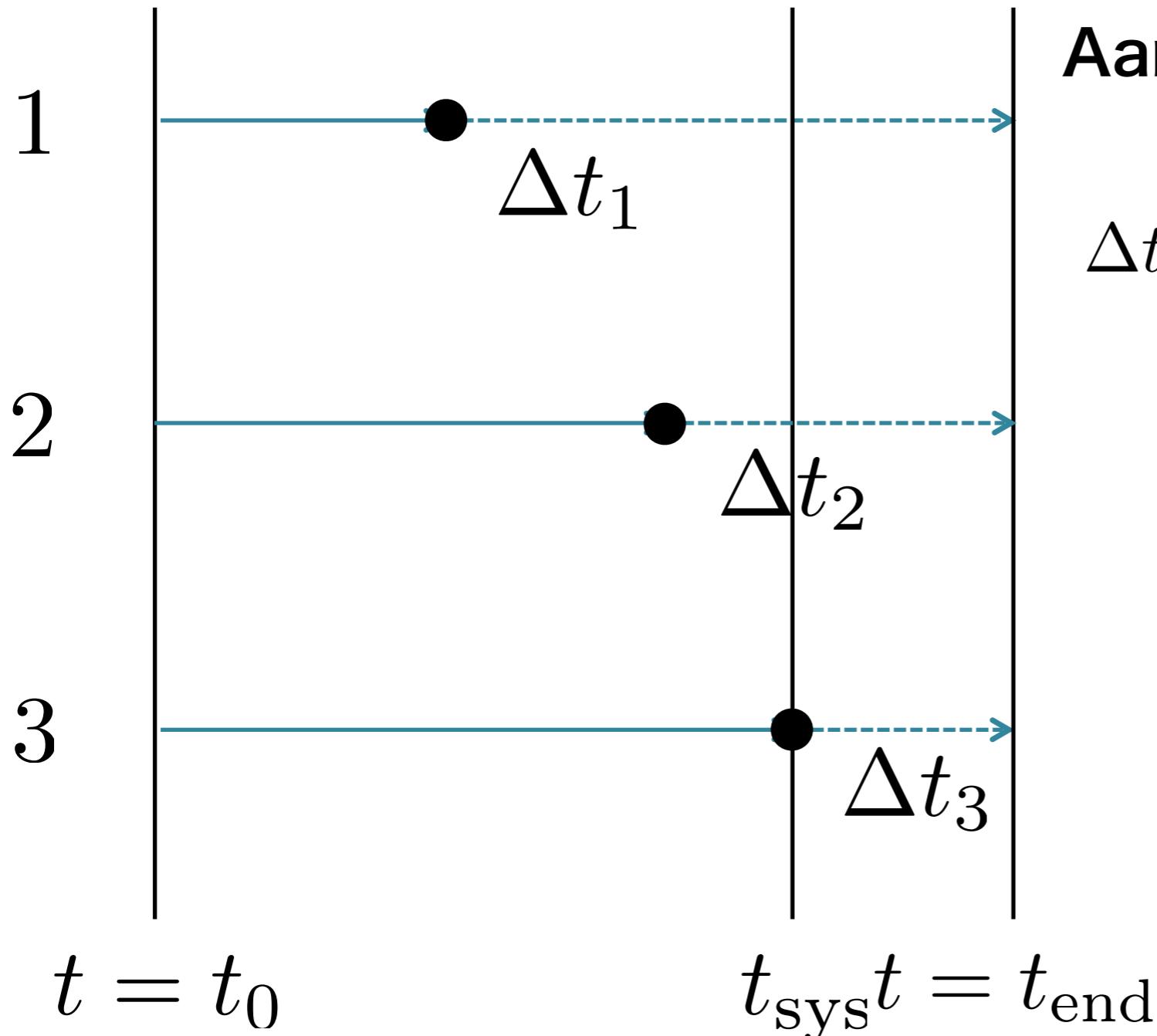
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ4

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



Aarseth 1985

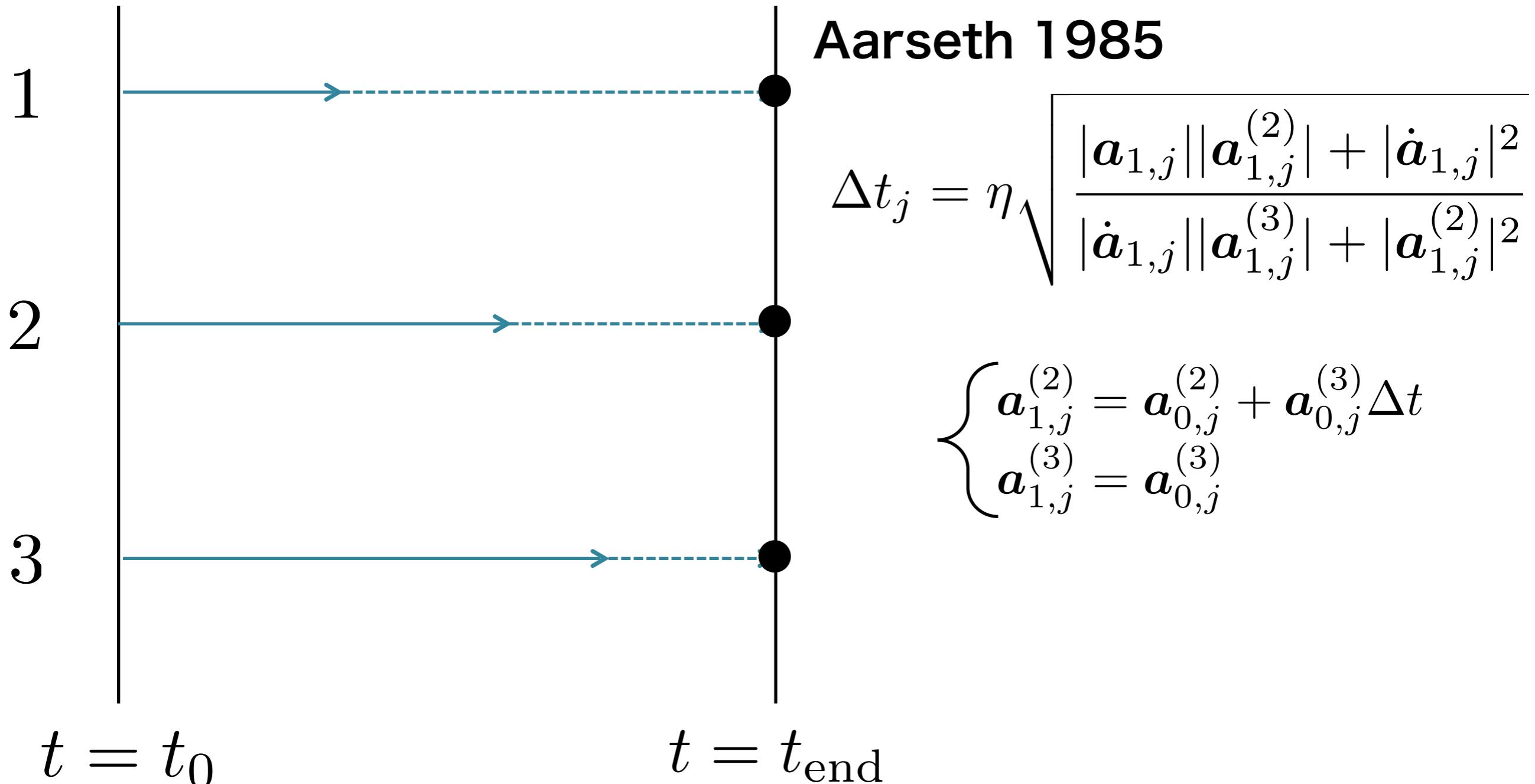
$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|a_{1,j}| |a_{1,j}^{(2)}| + |\dot{a}_{1,j}|^2}{|\dot{a}_{1,j}| |a_{1,j}^{(3)}| + |a_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{0,j}^{(2)} + a_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ a_{1,j}^{(3)} = a_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

独立タイムステップ5

加速度が大きいところほどタイムステップを小さくする

粒子ごとに別々の時間とタイムステップを持たせる



計算のパラメータ

				planetesimal					protoplanet		
run No.	collision	fragment	accretion	ecc r.m.s.	inc r.m.s. [rad]	mass [g]	total mass [g]	M _{max} [g]	ecc	inc [rad]	mass [g]
1	0	0	0	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28		1.0E-02	5.0E-03	6E+27
2	0	0	1	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28		1.0E-02	5.0E-03	6E+27
3	1	1	0	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+19	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
4	1	1	0	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+16	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
5	1	1	1	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+19	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
6	1	1	1	9.8972E-03	5.0089E-03	6E+25	6E+28	1E+19	1.0E-02	5.0E-03	6E+27
7	0	0	0	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28		3.0E-02	1.5E-02	6E+27
8	0	0	1	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28		3.0E-02	1.5E-02	6E+27
9	1	1	0	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+19	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
10	1	1	0	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+16	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
11	1	1	1	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+19	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
12	1	1	1	2.8843E-02	1.5031E-02	6E+25	6E+28	1E+19	3.0E-02	1.5E-02	6E+27
13	0	0	0	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28		5.0E-02	2.5E-02	6E+27
14	0	0	1	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28		5.0E-02	2.5E-02	6E+27
15	1	1	0	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+19	5.0E-02	2.5E-02	6E+27
16	1	1	0	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+16	5.0E-02	2.5E-02	6E+27
17	1	1	1	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+19	5.0E-02	2.5E-02	6E+27
18	1	1	1	4.6095E-02	2.5042E-02	6E+25	6E+28	1E+19	5.0E-02	2.5E-02	6E+27

$$v(m)^2/Q_{\text{D}}^*(m) \propto m^p$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{dt} = & - \frac{(2-\alpha)^2}{m_{\max}^{1/3}} \Sigma^2 \Omega_{\text{K}} h_0 \left(\frac{v(m_{\max})^2}{2Q_{\text{D}}^*(m_{\max})} \right)^{\alpha-1} \\ & \times \left[\left(-\ln \epsilon + \frac{1}{2-b} \right) s_1 + s_2 + s_3 \right] \end{aligned}$$

$${e_{i,j}}^2 = {e_i}^2 + {e_j}^2 - 2e_i e_j \cos(\varpi_i - \varpi_j) \quad \alpha = \frac{11+3p}{6+3p}$$

$${i_{i,j}}^2 = {i_i}^2 + {i_j}^2 - 2i_i i_j \cos(\Omega_i - \Omega_j)$$