

巨大惑星の移動に伴う 小天体の力学的進化

共鳴現象から太陽系の歴史を探る

名古屋大学理学部物理学科4年
理論宇宙物理学研究室 磯谷和秀

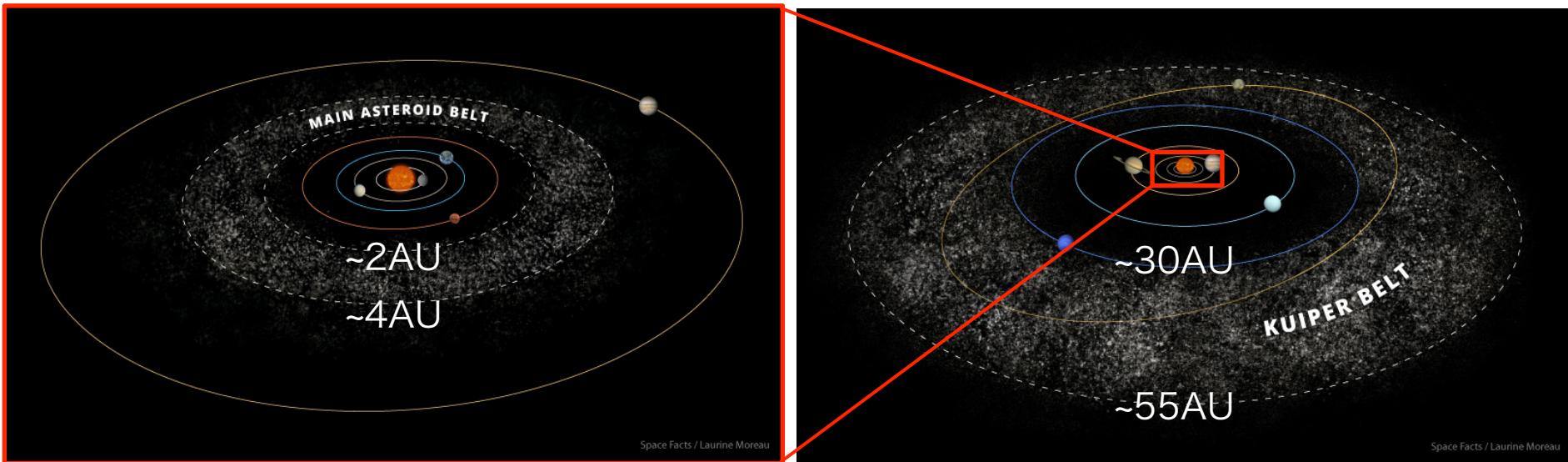
指導教官 小林浩 助教

目次

1. 背景
2. 基礎知識
3. 觀測
4. 数値計算
5. 今後の課題
6. まとめ

背景

現在の太陽系には「小惑星帯」や「カイパーベルト」のような、小天体の軌道が集中した領域が存在し、惑星にならなかった微惑星の残りだと言われている。

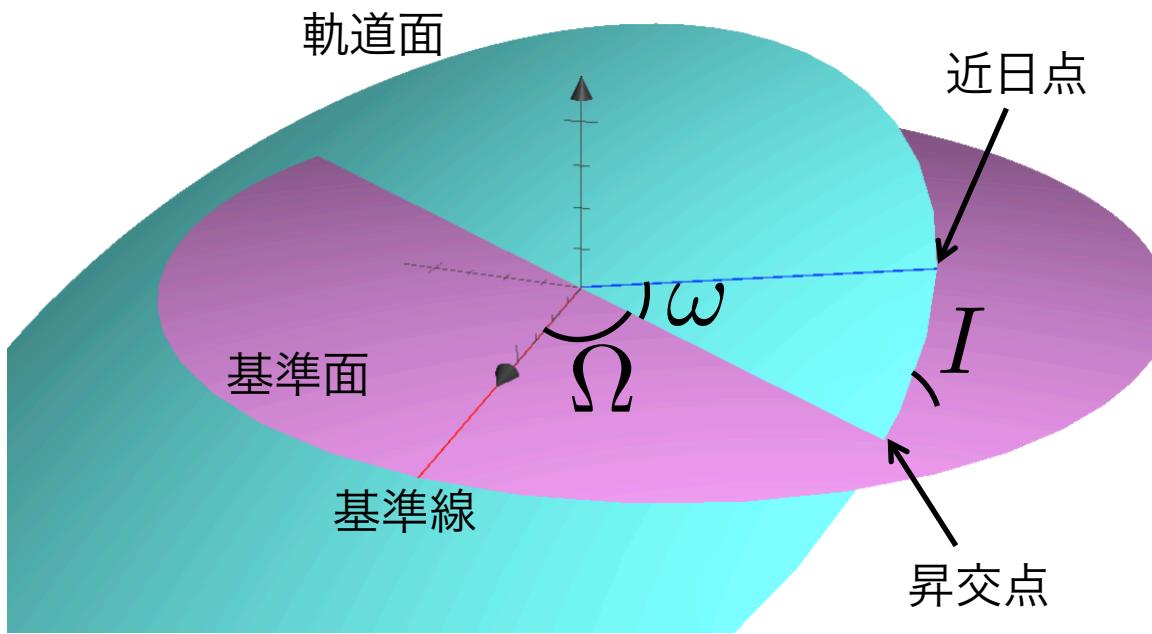


Credit : Space Facts / Laurine Moreau

これらの領域の小天体は数が多く、分布の特徴を統計的に扱うことで、太陽系の歴史を探ることができるかもしれない。

軌道を決定する変数：軌道要素

橍円軌道の場合



橍円の形を決定

軌道長半径 a

離心率 e

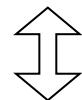
軌道面の位置を決定

昇交点経度 Ω

近日点引数 ω

軌道傾斜角 I

位置と速度の 6 変数



軌道要素 6 つ

天体の位置を決定

離心近点離角 E

平均運動共鳴

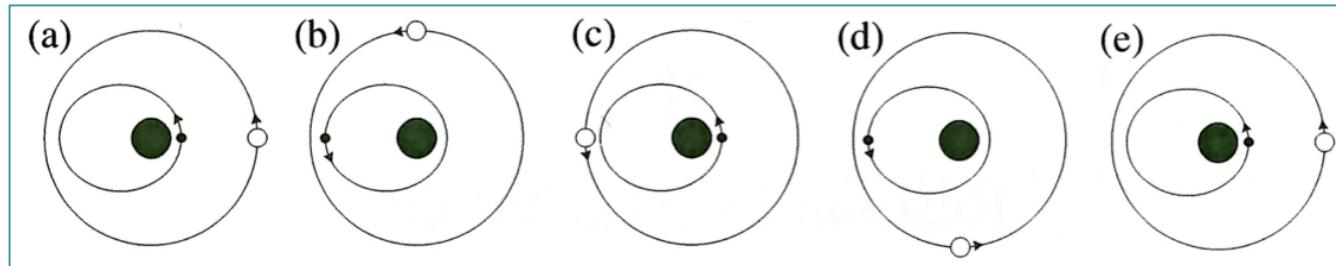
- 平均運動共鳴 (Mean Motion Resonance)

軌道周期の比 $T : T'$ が整数比 \rightarrow 離心率, 傾斜角上昇

例) 2:1共鳴にある小天体

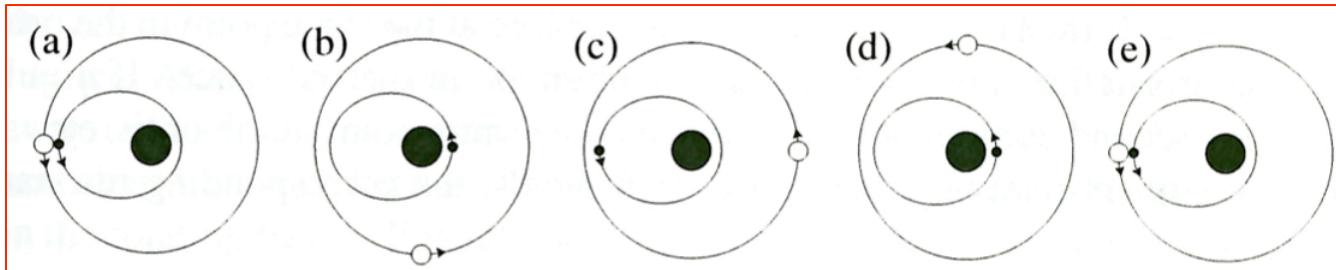
近日点にきたときに惑星に最接近

「点」と「点」
の相互作用



遠日点

安定



不安定

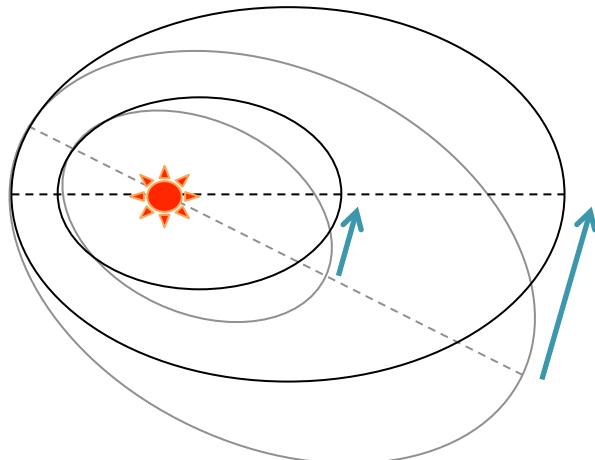
Murray & Dermott 1999, Solar System Dynamics

永年共鳴

- 永年共鳴 (Secular Resonance)

天体間の重力相互作用によって軌道の形は振動、回転する

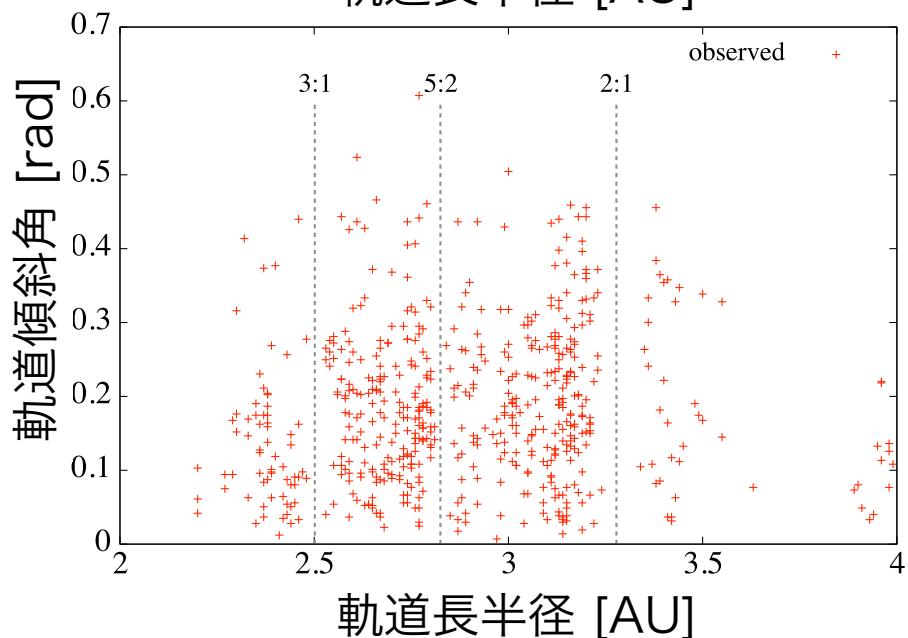
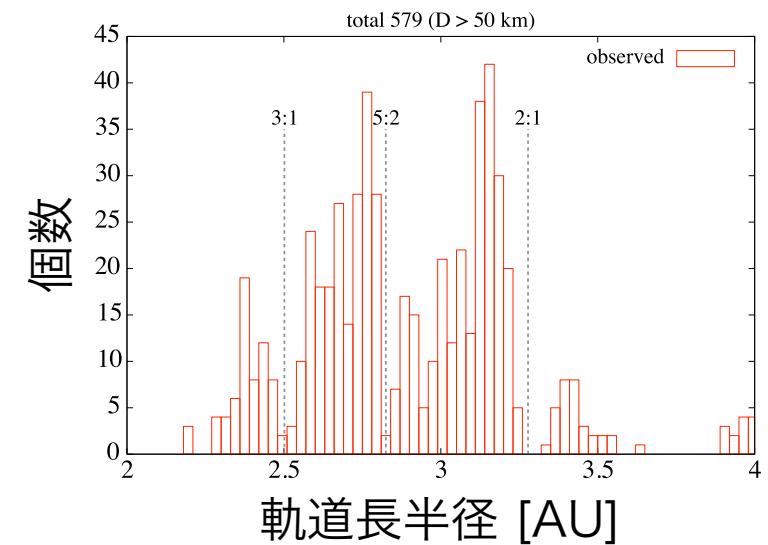
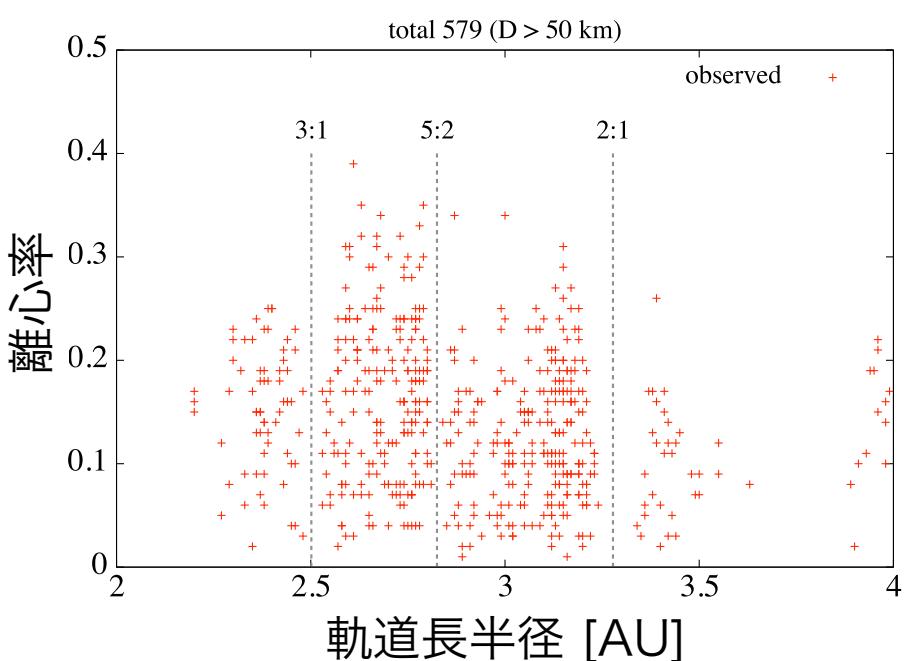
惑星と小天体の 
 「近日点」移動角速度が一致 ⇒ 離心率上昇
 「昇交点」移動角速度が一致 ⇒ 傾斜角上昇
 軌道の相対関係が変わらない



「輪ゴム」と「輪ゴム」で例えると
 輪ゴムが伸び縮み：離心率が振動
 輪ゴムが回転：近日点が移動

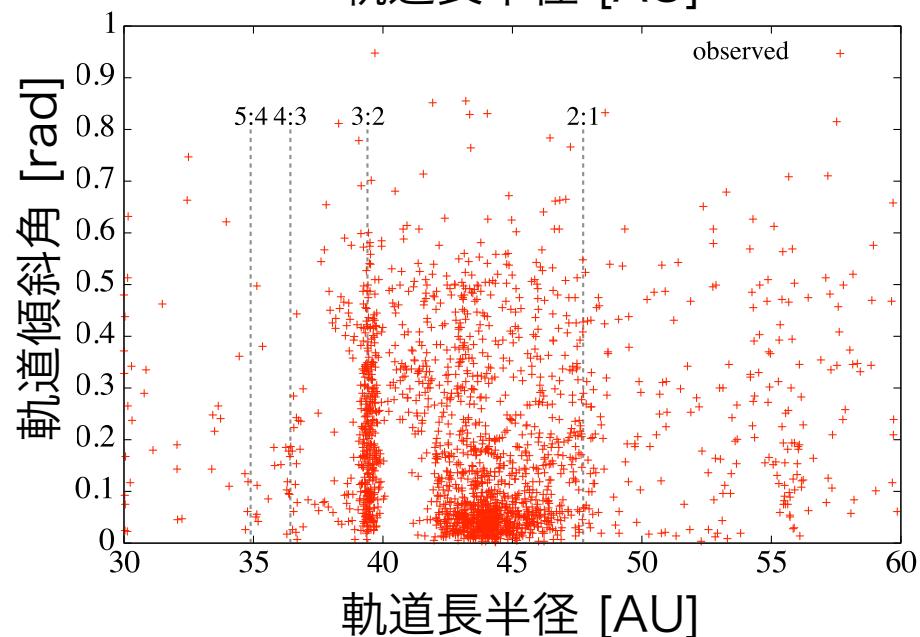
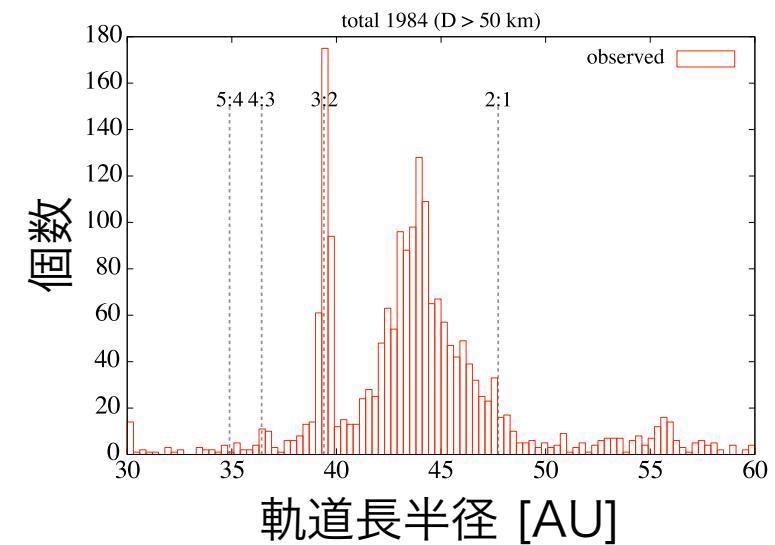
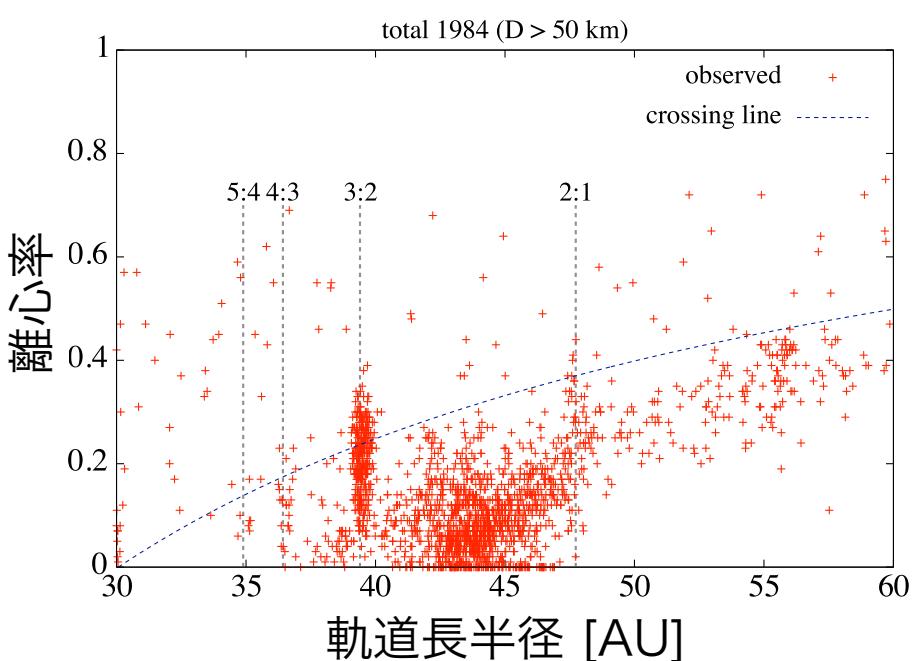
観測データ：小惑星帯

軌道長半径：2~4AU
直径：50km以上
合計：579個
(IAU Minor Planet Center)



観測データ：カイパーベルト

軌道長半径 : 30~60AU
直径 : 50km以上
合計 : 1984個
(IAU Minor Planet Center)



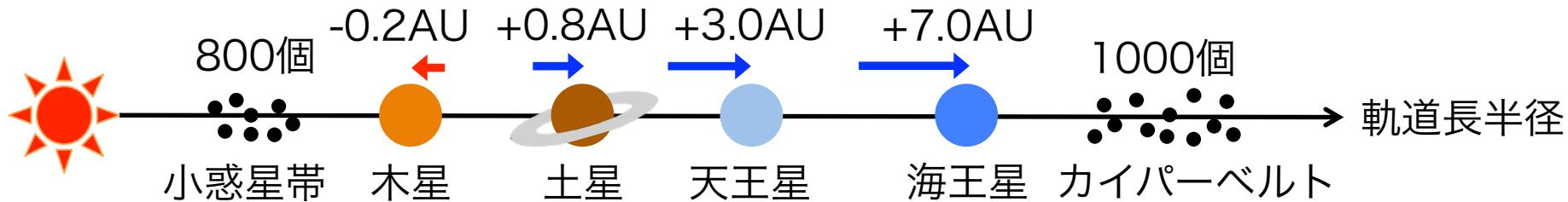
先行研究：巨大惑星移動の痕跡

- ・ 海王星が外側へ「7.0AU」だけ移動したときの数値計算と、実際のカイパーベルトの離心率の分布がよく一致する。
(Malhotra, R. 1995)
- ・ 木星が内側へ「0.2AU」だけ移動したときの数値計算と、実際の小惑星帯の離心率の分布がよく一致する。さらに小惑星帯の小天体の数の減少から、永年共鳴の通過の効果が重要であり、土星が外側へ「0.8AU」だけ移動する必要がある。
(Minton, D. A. & Malhotra, R. 2009)

本研究の目的

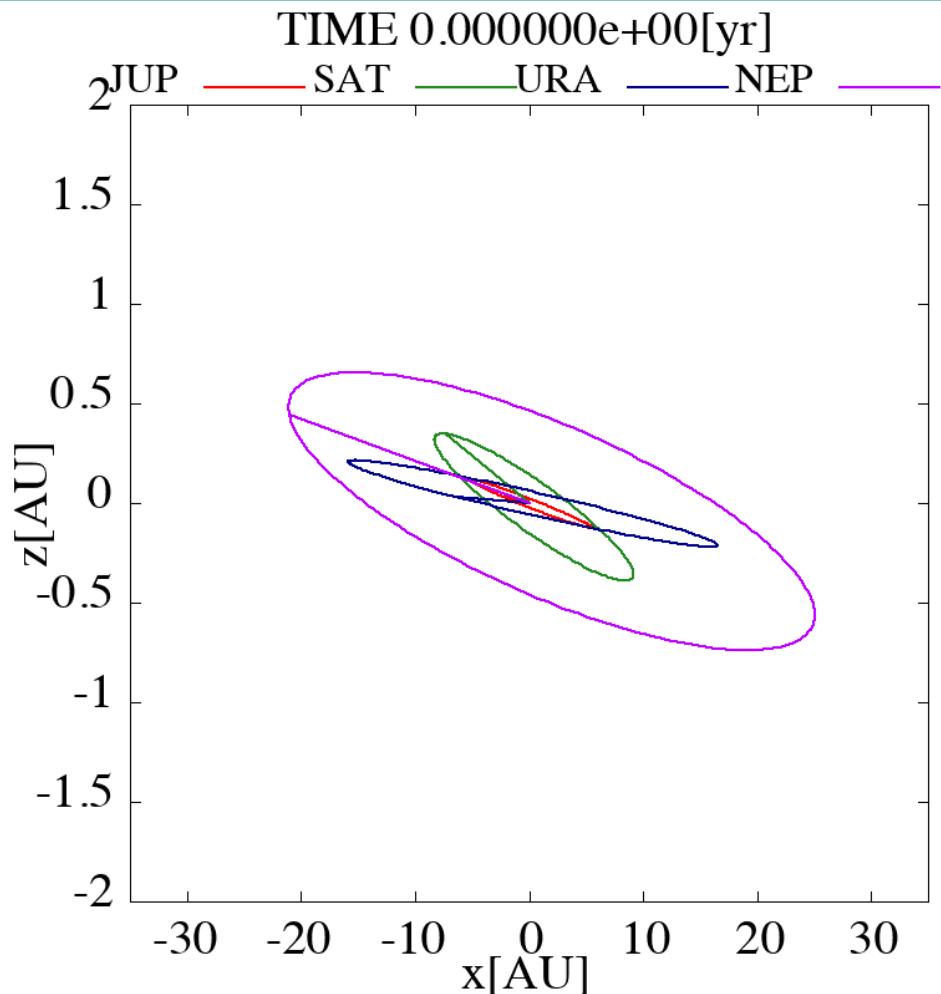
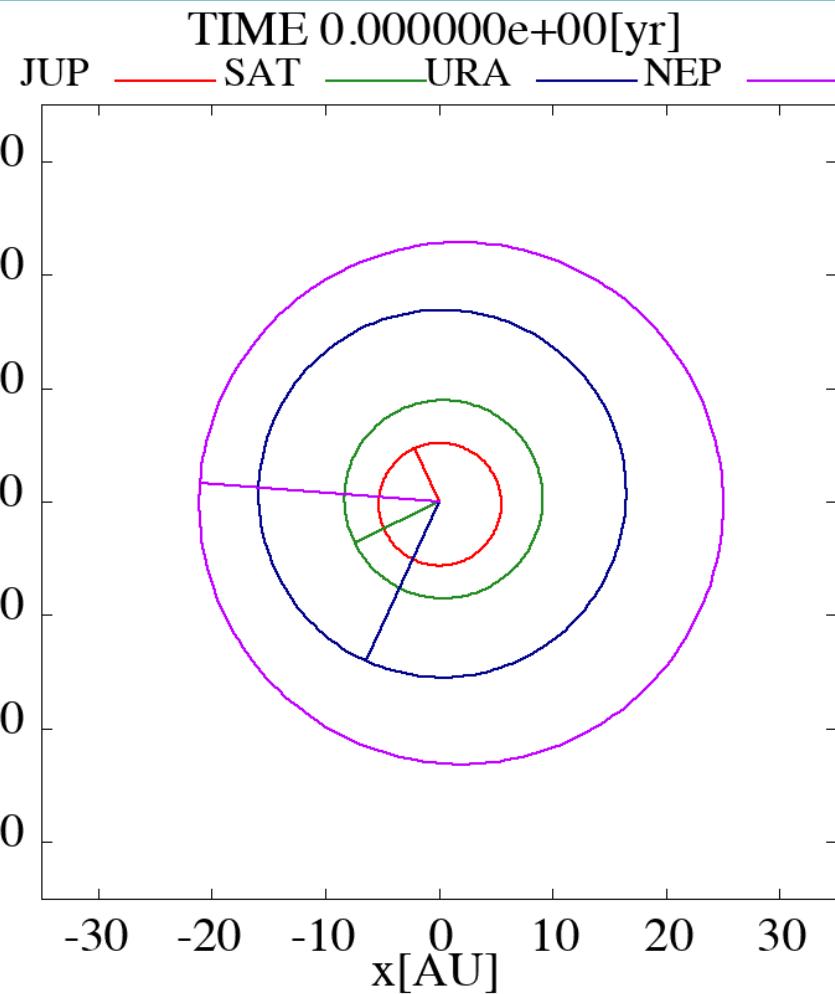
先行研究のような惑星移動を考えることで、本当に小天体の特徴的な分布が説明できるのかを数値計算で確かめる。

目的に合わせた数値計算



1. テスト粒子なしの巨大惑星4体シミュレーション
目的：「重力相互作用」と「永年共鳴の移動」を確かめる
2. カイパーベルト領域にテスト粒子1000個
目的：平均運動共鳴による「小天体の捕獲」を確かめる
3. 小惑星帯領域にテスト粒子800個
目的：平均運動共鳴による「小天体の捕獲」と「永年共鳴通過の効果」を確かめる

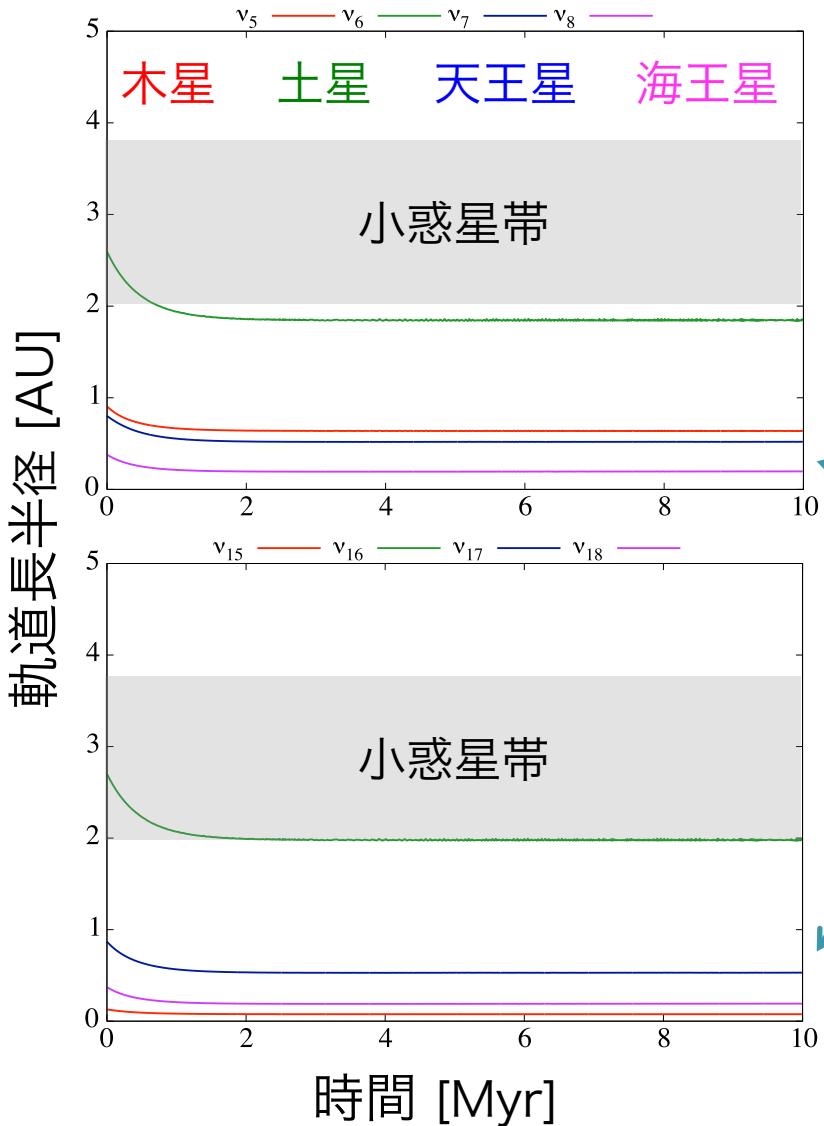
結果：4体シミュレーション



木星 土星 天王星 海王星

直線は原点（太陽）と近日点を結んでいる

結果：永年共鳴の位置の移動



左上図：離心率の永年共鳴位置

左下図：軌道傾斜角の永年共鳴位置

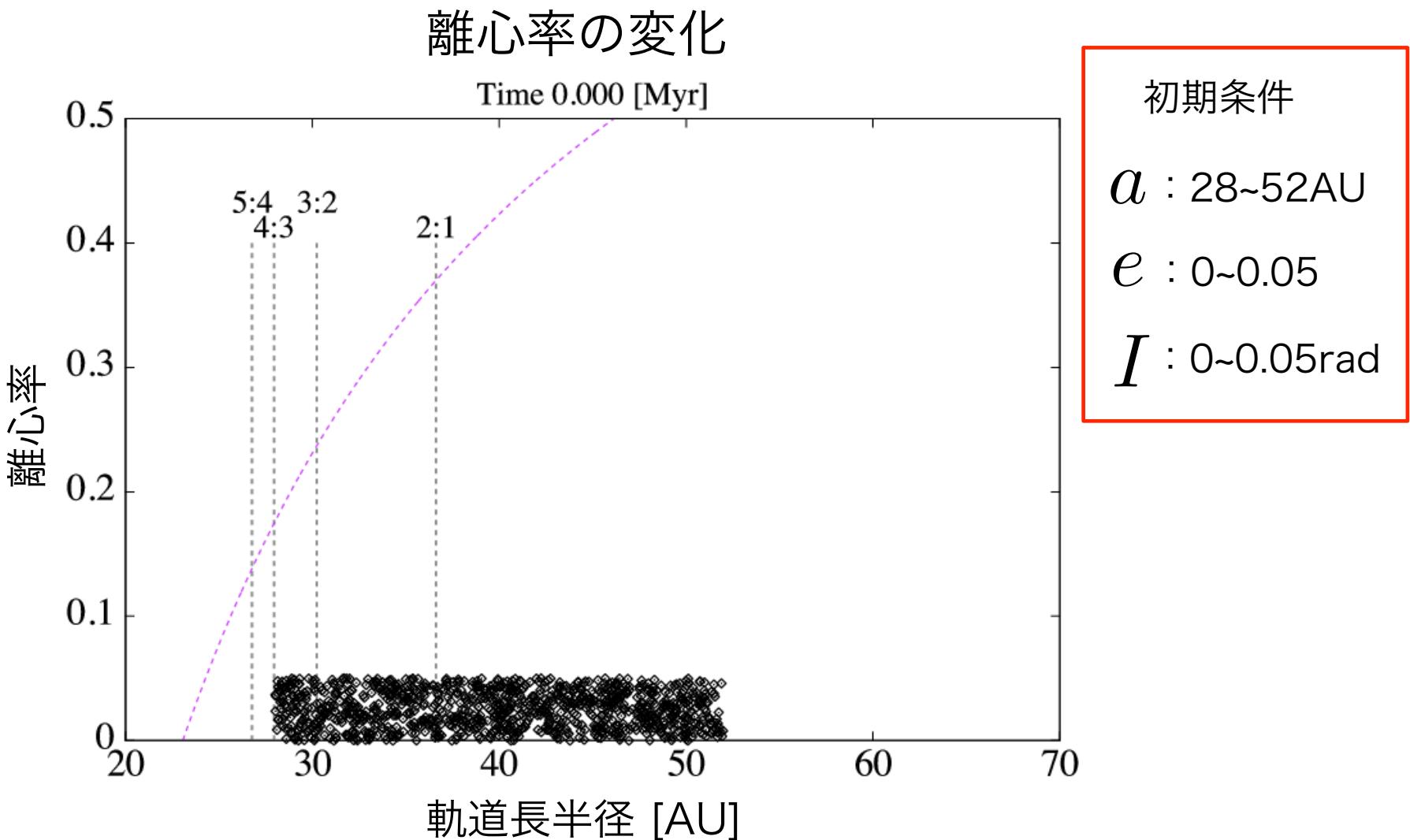
惑星移動に伴って永年共鳴の位置も移動している

小惑星帯領域を拡大

離心率、軌道傾斜角両方とも、
土星の永年共鳴の位置が
小惑星帯を通過する

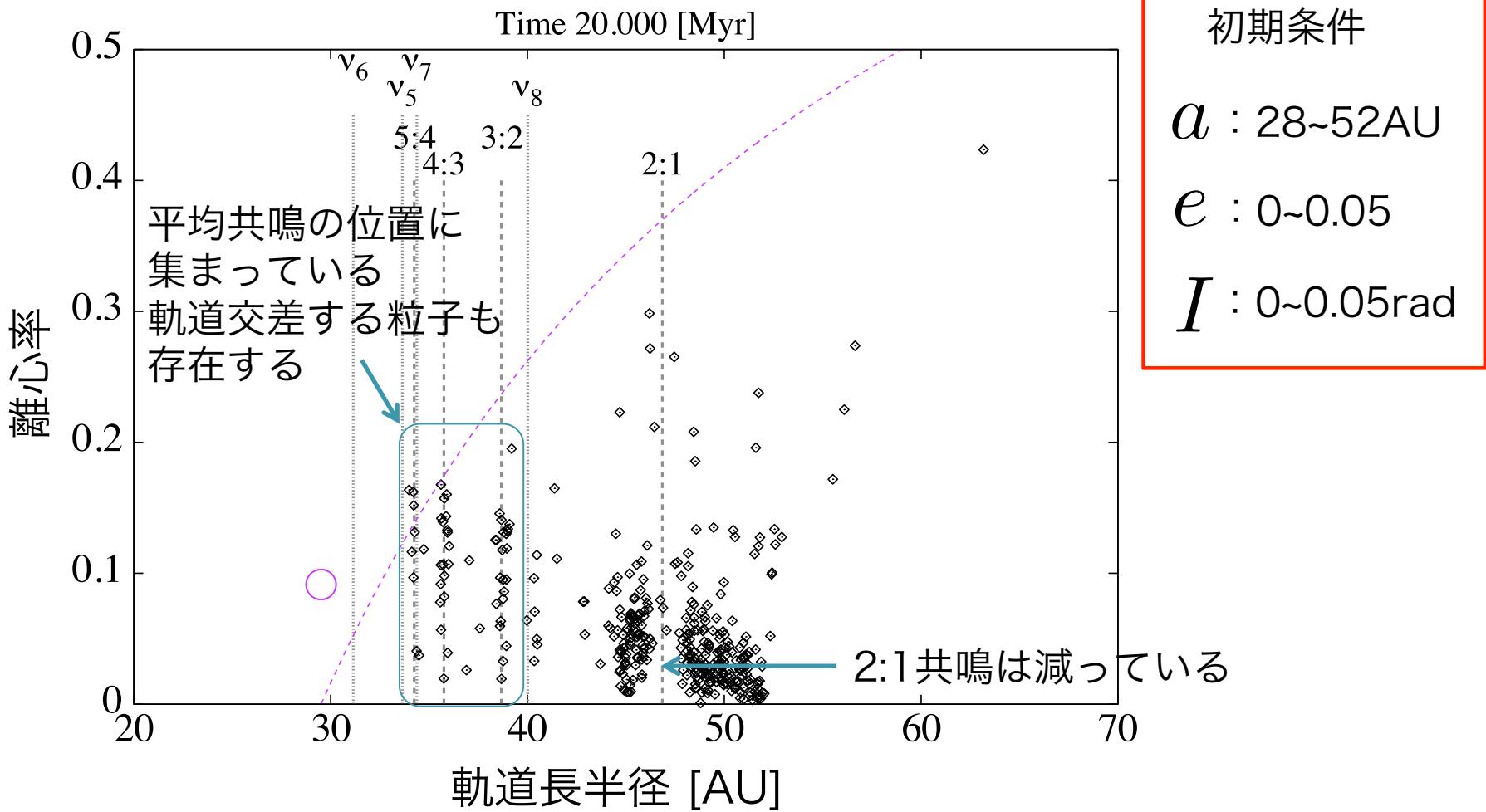
小惑星帯にその痕跡が
みられるはず

結果：カイパーベルト領域



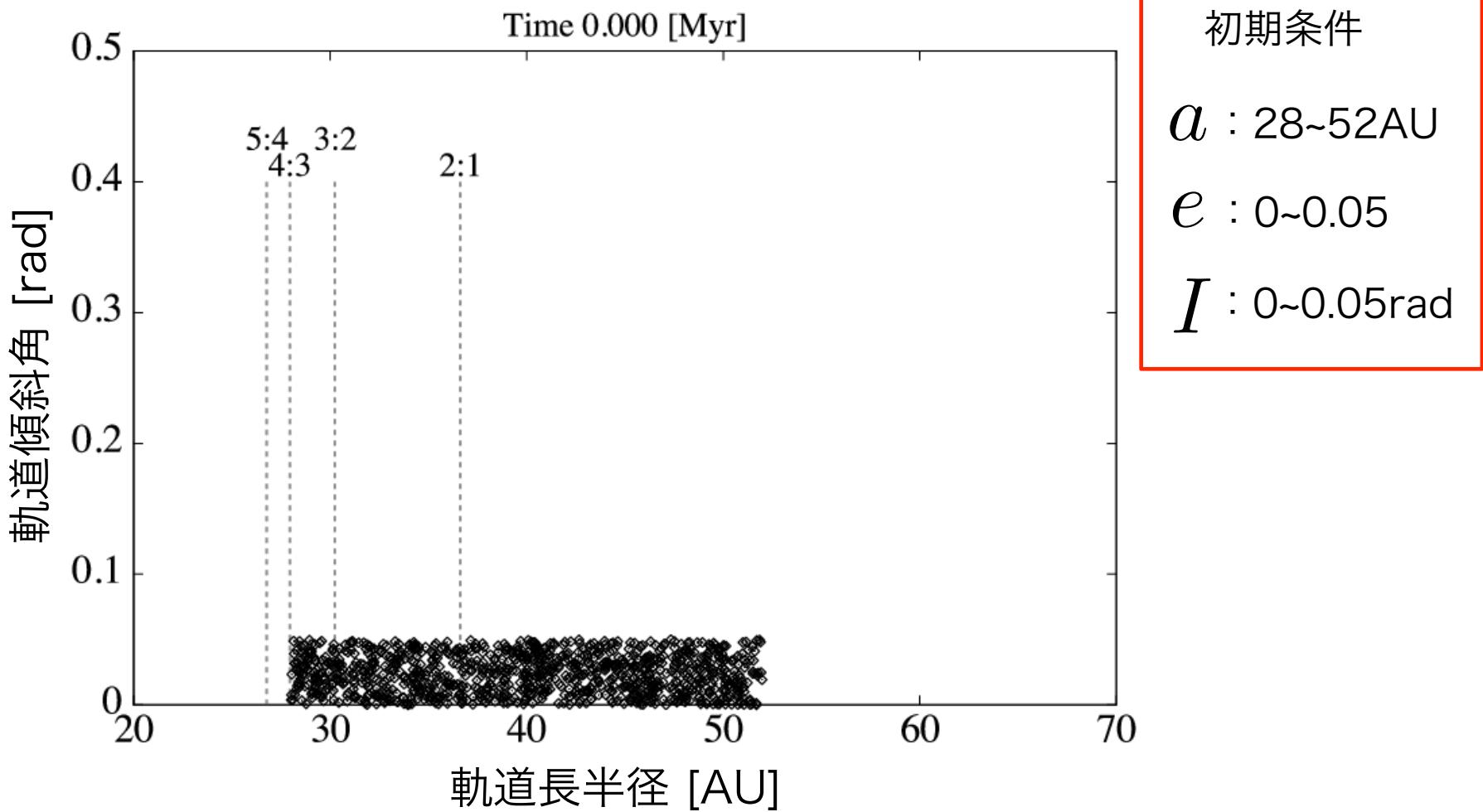
結果：カイパーベルト領域

離心率の変化



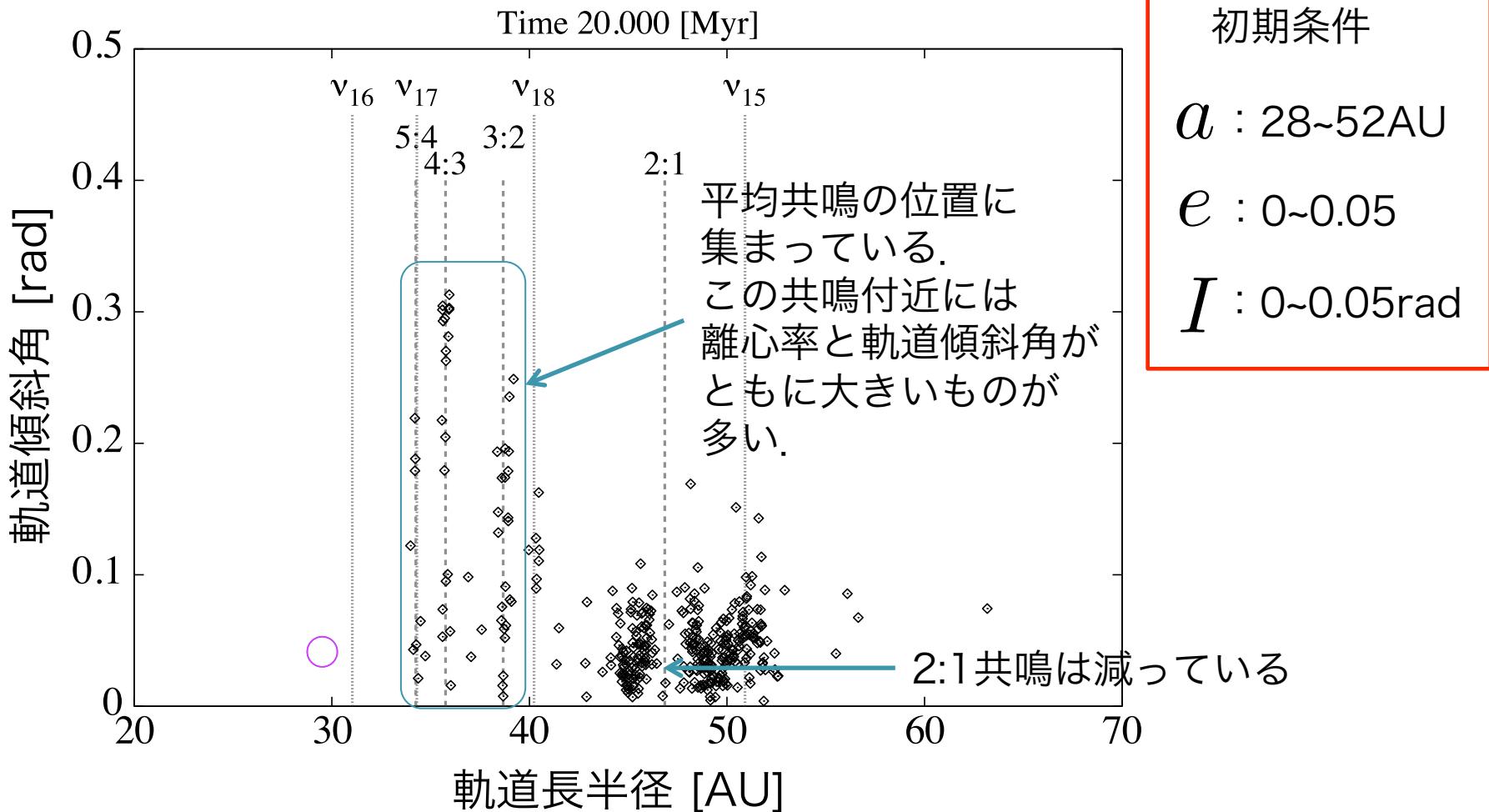
結果：カイパーベルト領域

軌道傾斜角の変化

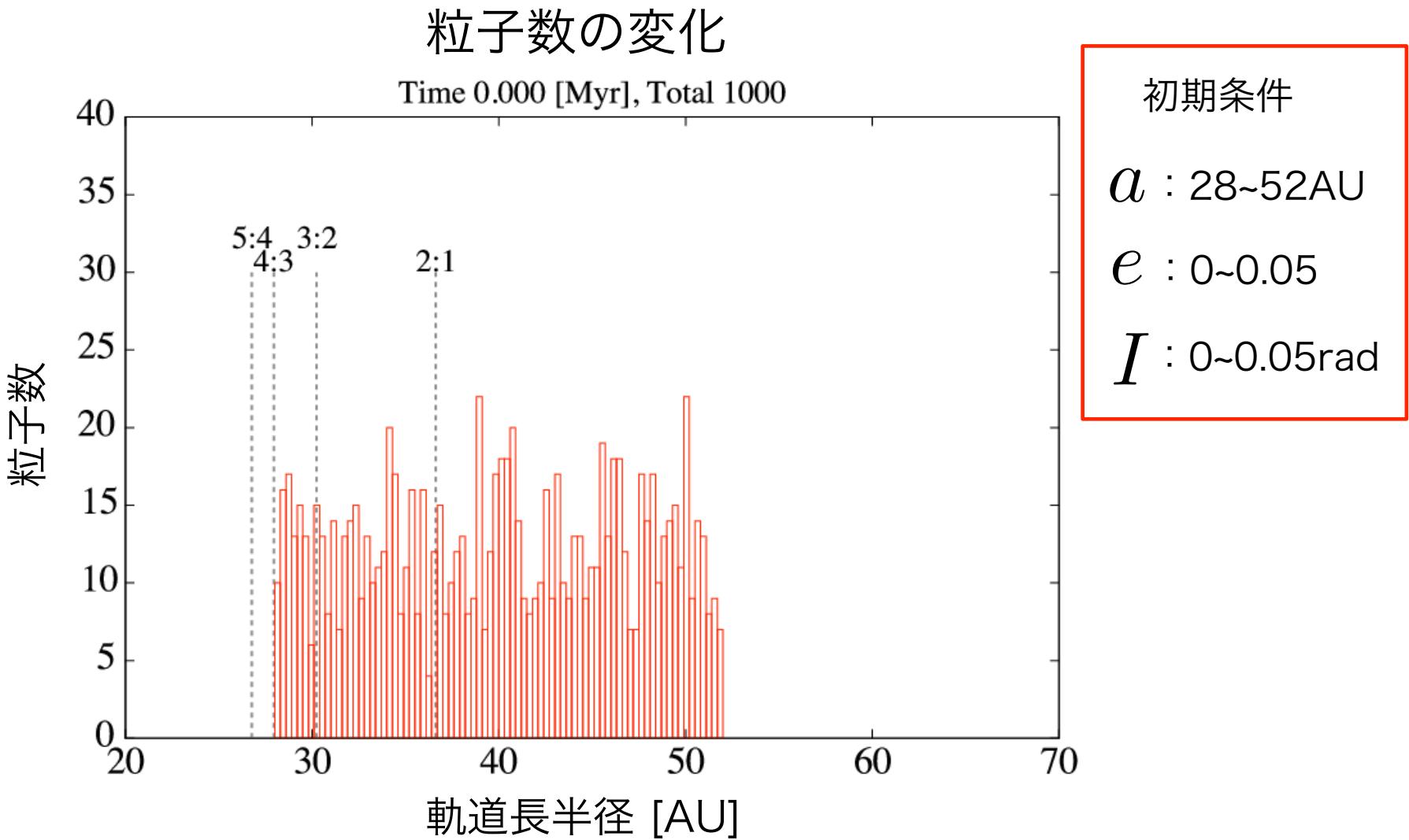


結果：カイパーベルト領域

軌道傾斜角の変化

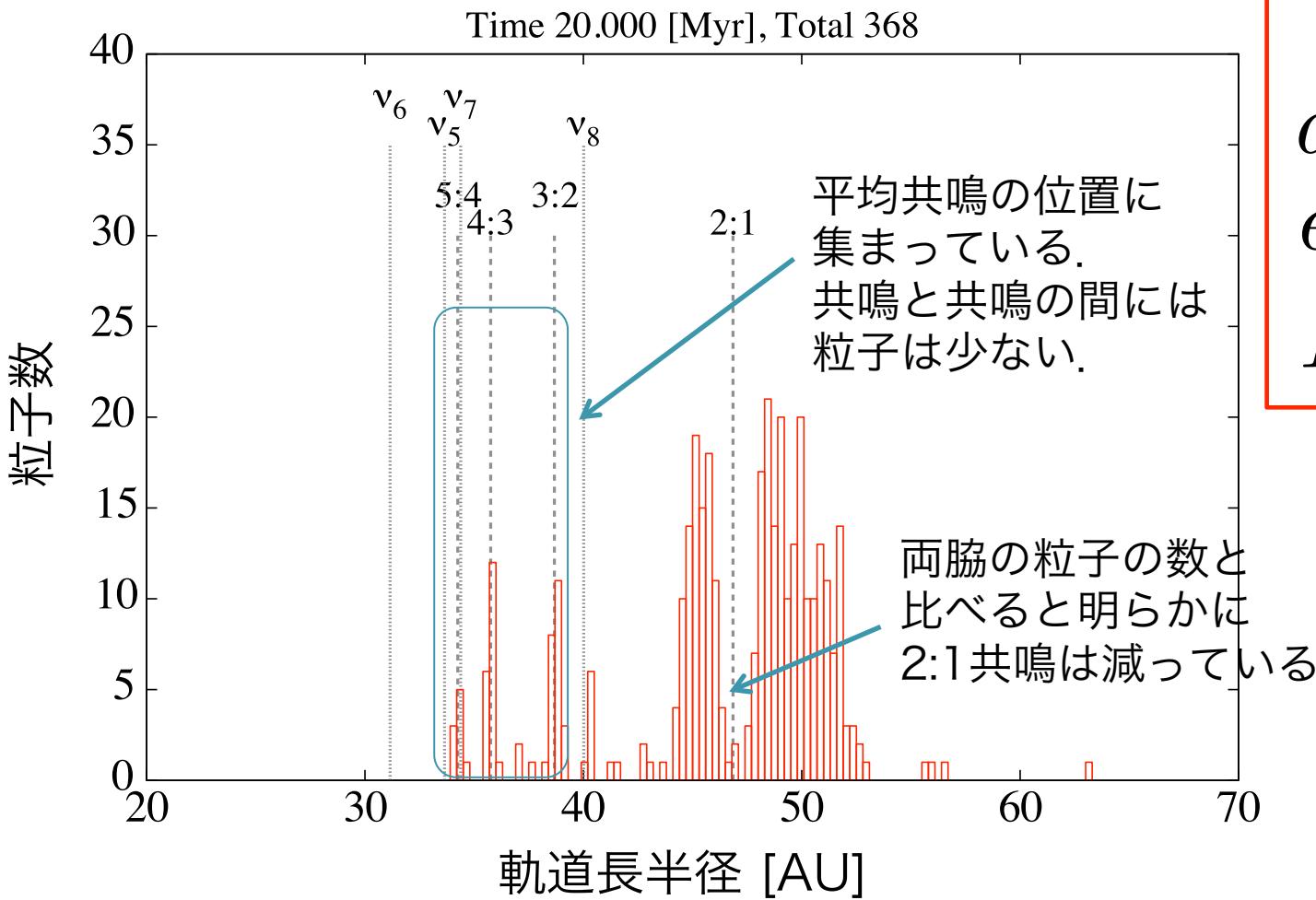


結果：カイパーベルト領域

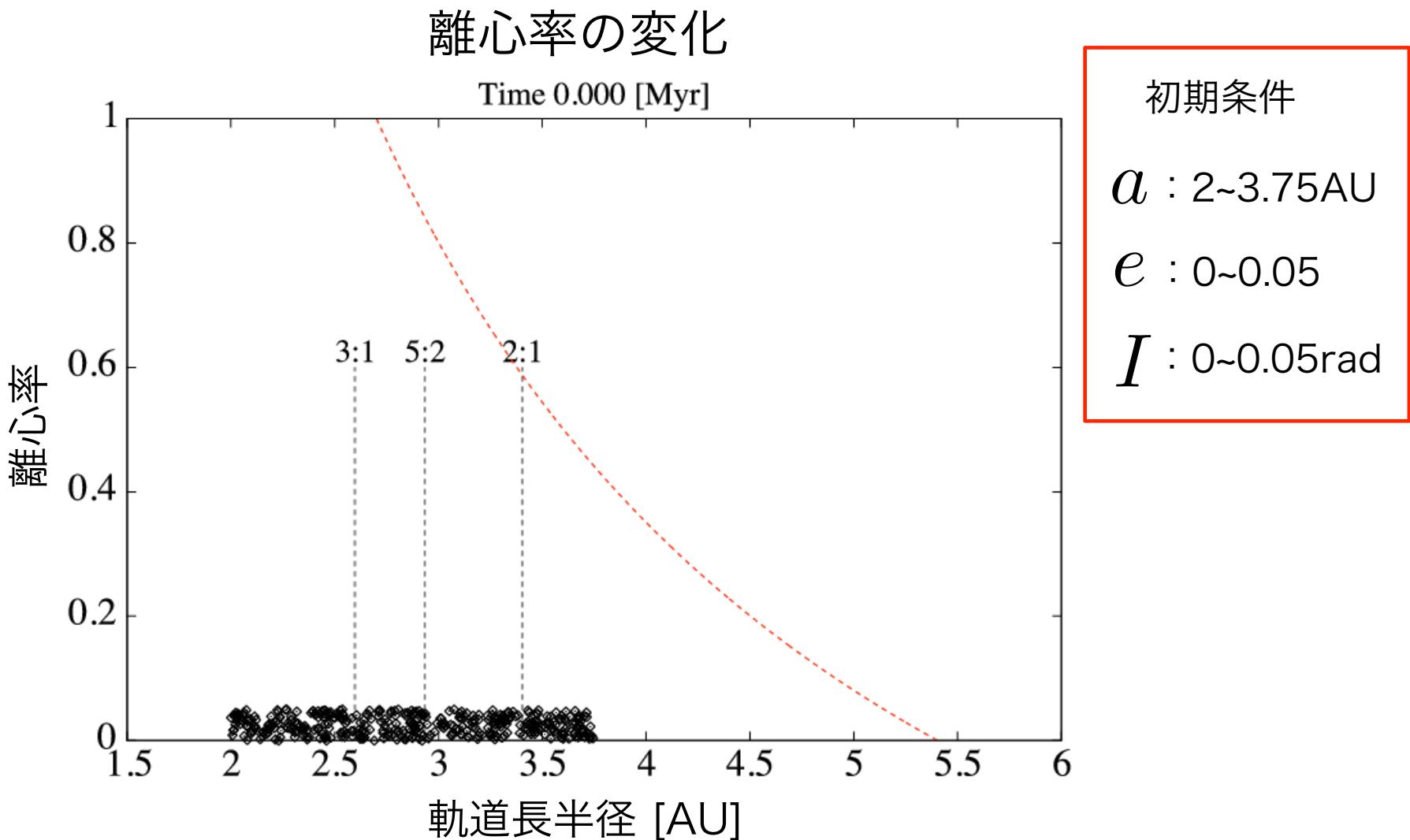


結果：カイパーベルト領域

粒子数の変化

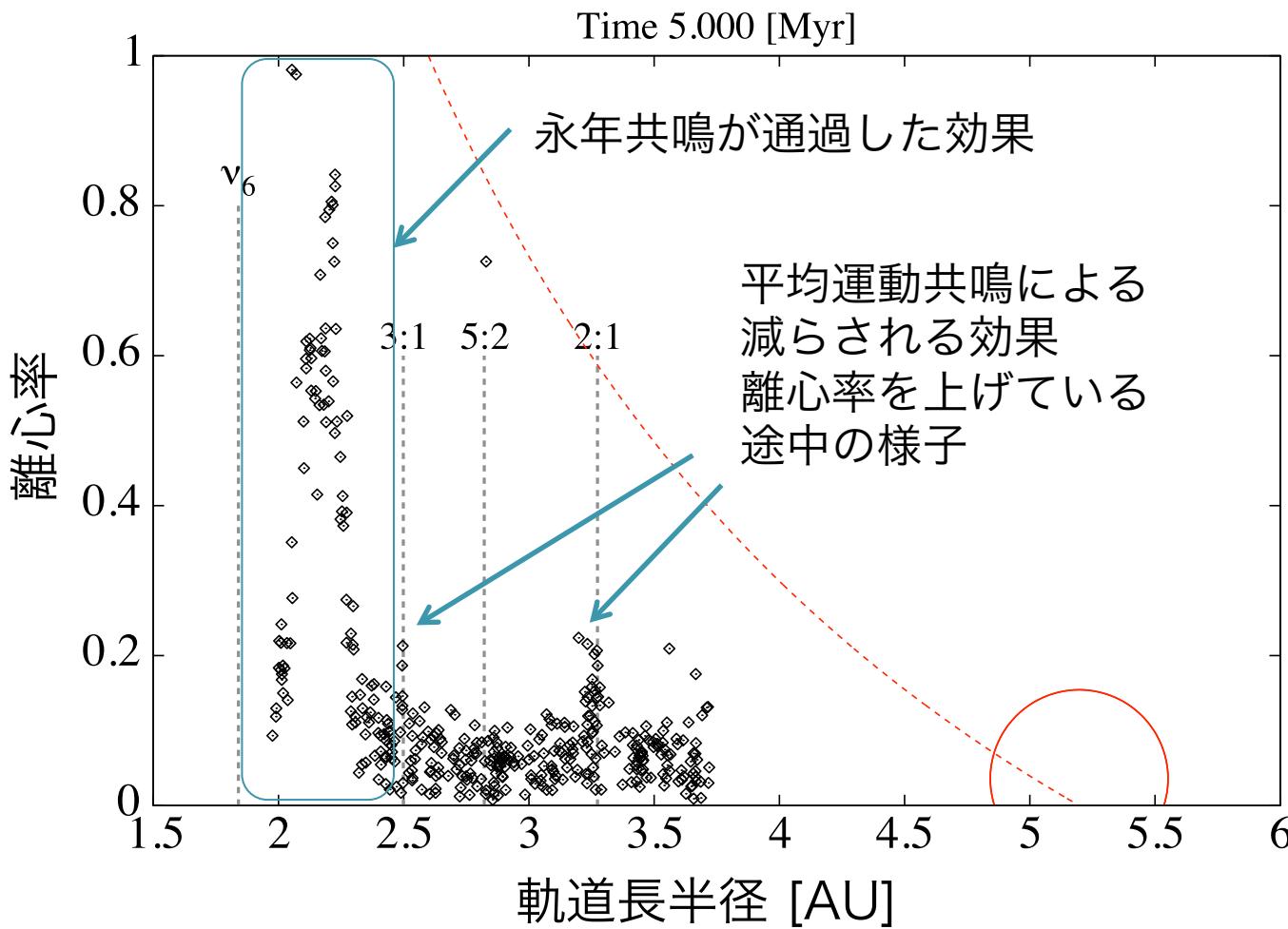


結果：小惑星帯領域



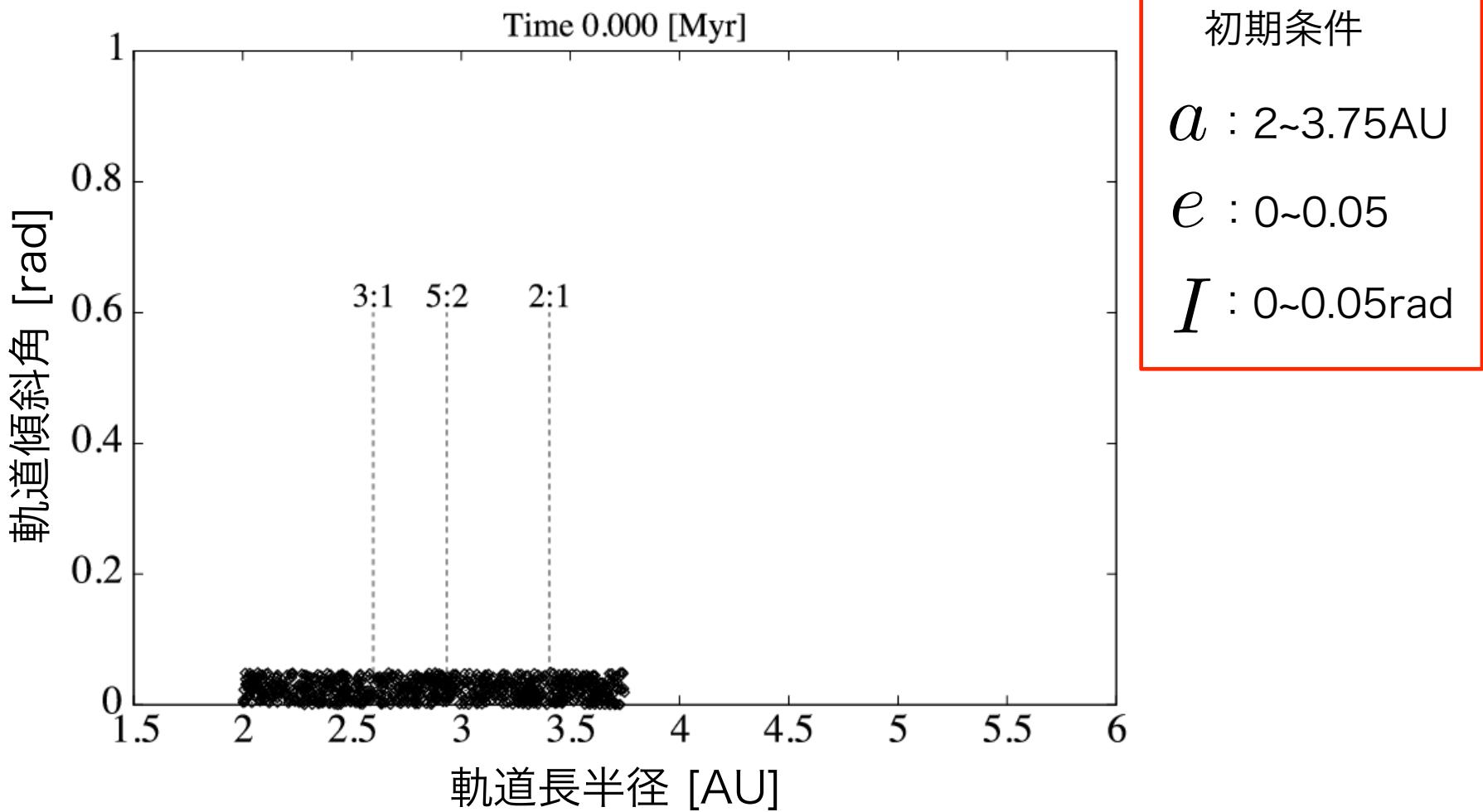
結果：小惑星帯領域

離心率の変化



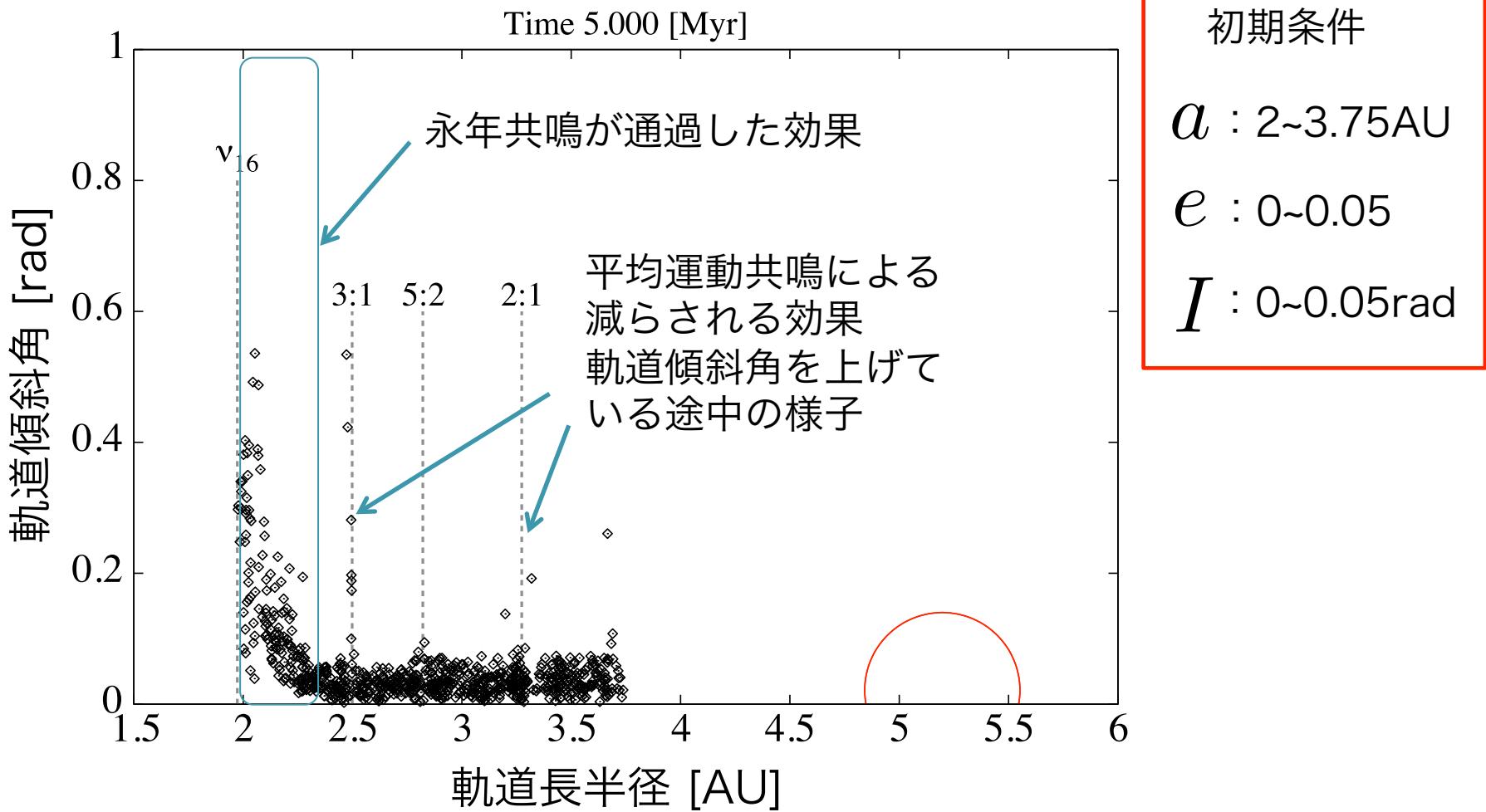
結果：小惑星帯領域

軌道傾斜角の変化



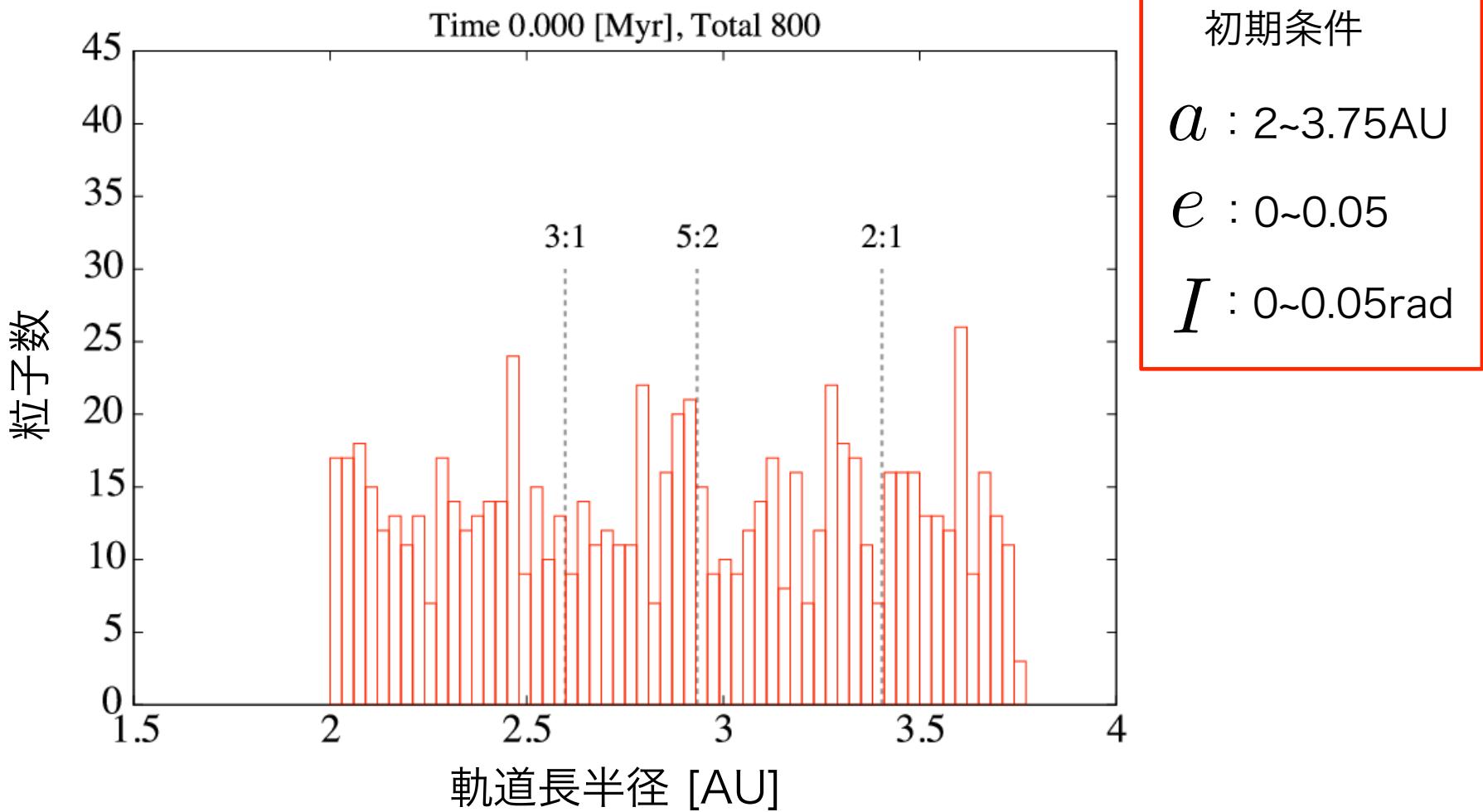
結果：小惑星帯領域

軌道傾斜角の変化



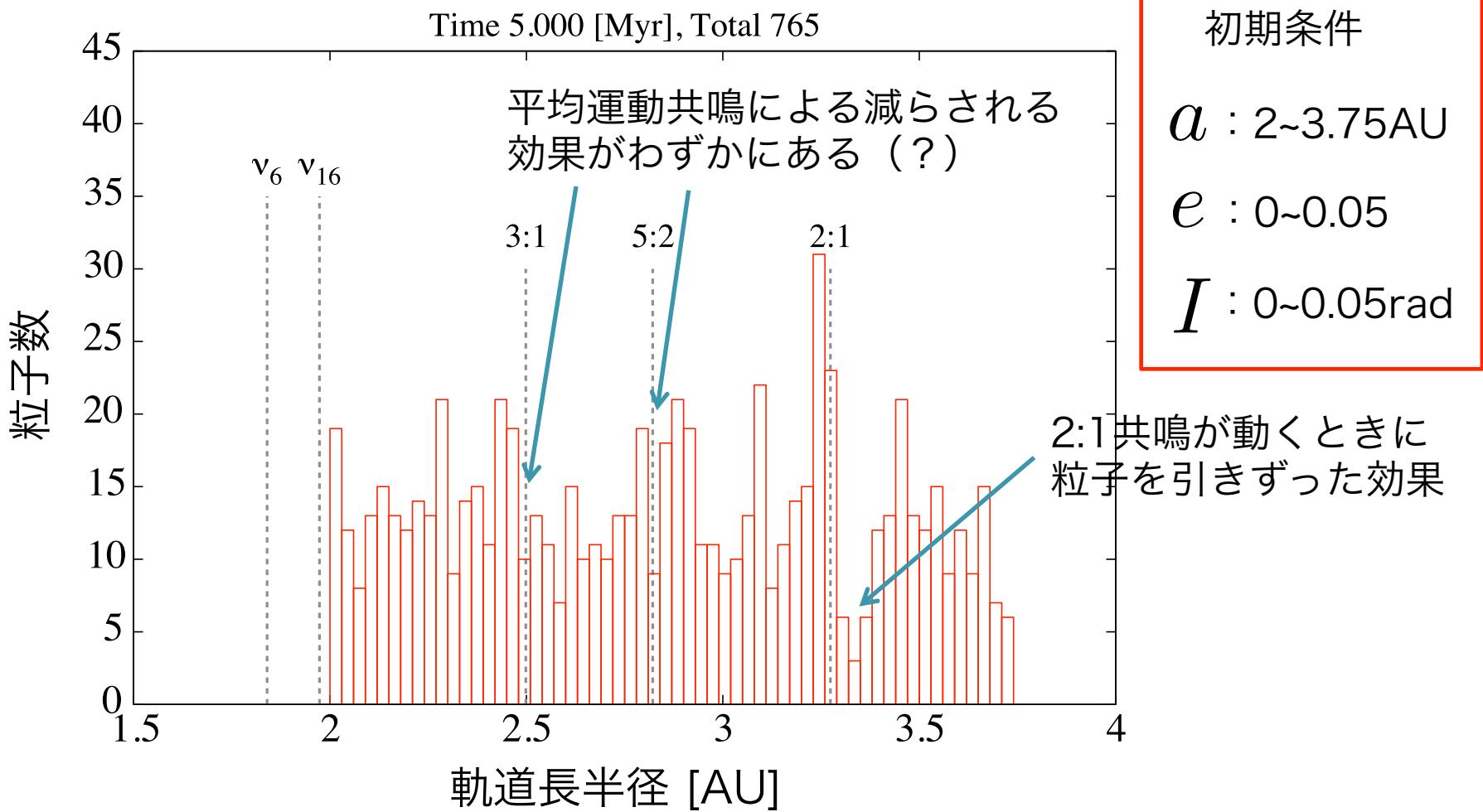
結果：小惑星帯領域

粒子数の変化



結果：小惑星帯領域

粒子数の変化



数値計算結果のまとめ

1. テスト粒子なしの巨大惑星4体シミュレーション
 - 重力相互作用によって近日点、昇交点は移動する。
 - 土星の永年共鳴の位置は小惑星帯を通過する。
2. カイパーベルト領域にテスト粒子1000個
 - 平均運動共鳴に捕獲され、軌道が安定化した粒子と不安定化した粒子の両方が確認できた。
3. 小惑星帯領域にテスト粒子800個
 - 永年共鳴の位置が通過した効果がはっきりみられた。しかし、平均運動共鳴が粒子の数を減らす効果を確認できなかった。

今後の課題

- 特に小惑星帯は計算時間が足りていない
- 小惑星帯を1億年分計算をしたい
- 小惑星帯領域の計算がとても時間がかかる
- そのため計算コードをさらに高速化したい
- 計算を重ね、粒子数を増やしたデータと観測の比較をしたい。
- モデルに従うだけではなく、移動距離のパラメータの制限を付ける研究もしたい。

まとめ

- 惑星の軌道進化の歴史は小惑星帯や
カイパーベルトに残っているかもしれない。
- 2種類の重要な共鳴：平均運動共鳴 永年共鳴
- 数値計算により、惑星の移動を考えると小天体
の特徴的な分布を説明できることが確認できた。

Appendix

数値計算の方法

- 計算コード
「4次のエルミート法」 & 独立タイムステップ

- 設定

軌道長半径 : Minton & Malhotra (2009) の惑星移動モデルを模擬

$$a(t) = a_f - \Delta a \exp(-t/0.5[\text{Myr}]) \quad a_f : \text{現在}$$

木星と海王星の移動距離は先行研究からほぼ決定

$$\Delta a_{\text{JUP}} = -0.2[\text{AU}] \quad \Delta a_{\text{NEP}} = +7.0[\text{AU}]$$

土星と天王星は不確かではあるがモデルに合わせる

$$\Delta a_{\text{SAT}} = +0.8[\text{AU}] \quad \Delta a_{\text{URA}} = +3.0[\text{AU}]$$

質量 : 5Myr かけて線形増加させる

太陽 : 原点から移動しない 重力は外場扱い

多体問題の解析的扱い方：摂動

例) 中心星 M_c , 内側の天体 m_i , 外側 m_j の 3 体問題

Q. 3 体以上の多体問題は「積分不可能」では？

A. 解析的には無理。制限をつければ近似解は可能！

中心星からの重力が支配的な場合 $M_c \gg m_i, m_j$

天体の運動 = 2 体問題の厳密解 + 摂動

$$m_i \text{ の相対加速度 } \ddot{\vec{r}}_i = \vec{\nabla}(U_i + \mathcal{R}_i)$$

$$U_i = G \frac{M_c + m_i}{r_i} \quad \mathcal{R}_i$$

2 体問題のポテンシャル 摂動関数 (摂動ポテンシャル)

摂動関数

摂動関数は軌道要素で展開ができる（無限項）
 $\varpi = \Omega + \omega$
 $\lambda = M + \varpi$

$$\mathcal{R} = \mu' \sum S(a, a', e, e', I, I') \cos \varphi = nt + \text{const.}$$

$$\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega \quad \text{整数 } \sum_{i=1}^6 j_i = 0$$

φ の中の偏角の組み合わせによって、各項の周期が決まる
 各項の周期によって摂動関数を分類すると、

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(\text{res})} + \mathcal{R}^{(\text{sec})} + \mathcal{R}^{(\text{other})}$$

共鳴項 永年項 その他：短周期項や微小振幅項

共鳴項	$j_1 n' + j_2 n \approx 0$	軌道周期より長い周期 $a \approx (j_1 / j_2)^{2/3} a'$
永年項	$j_1 = 0, j_2 = 0$	近日点移動、昇交点移動の周期程度

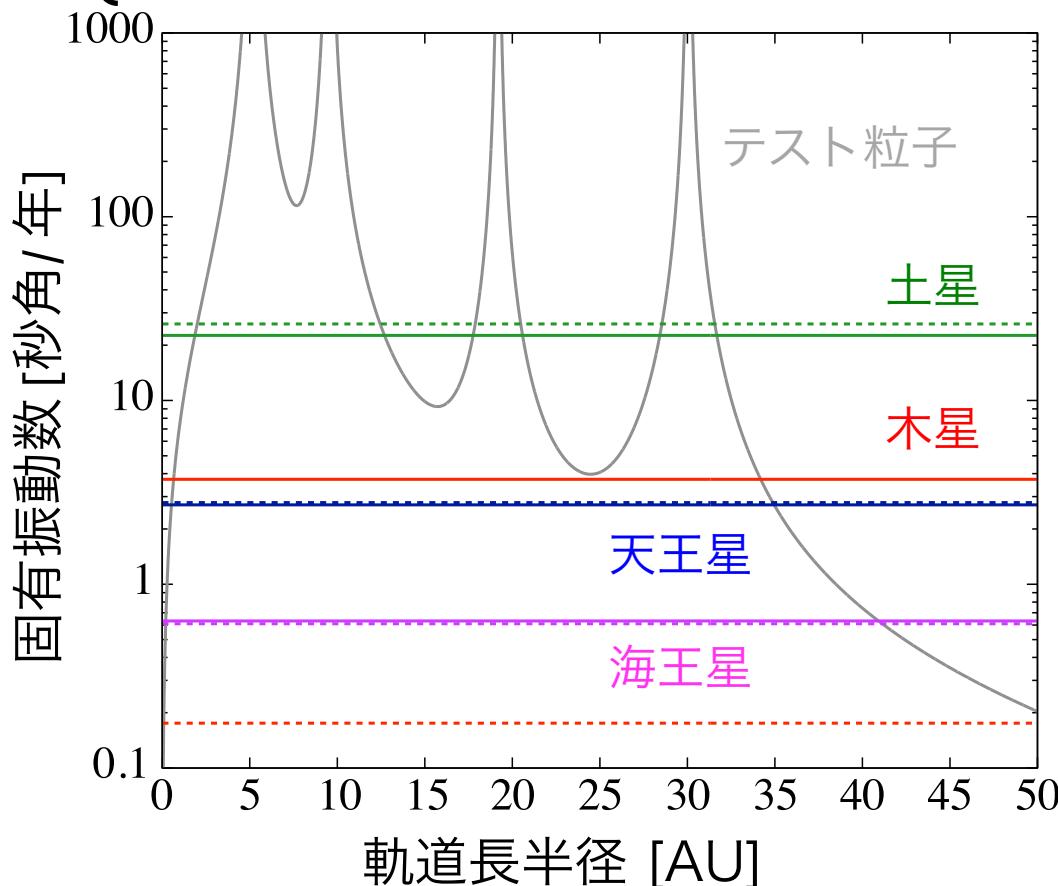
永年共鳴の位置

永年摂動論を使うと4つの巨大惑星の

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{O}(e^2), \mathcal{O}(I^2)$$

「近日点」 「昇交点」 移動速度は

それぞれの惑星の質量と軌道長半径の比のみで一意に決まる（固有振動数）



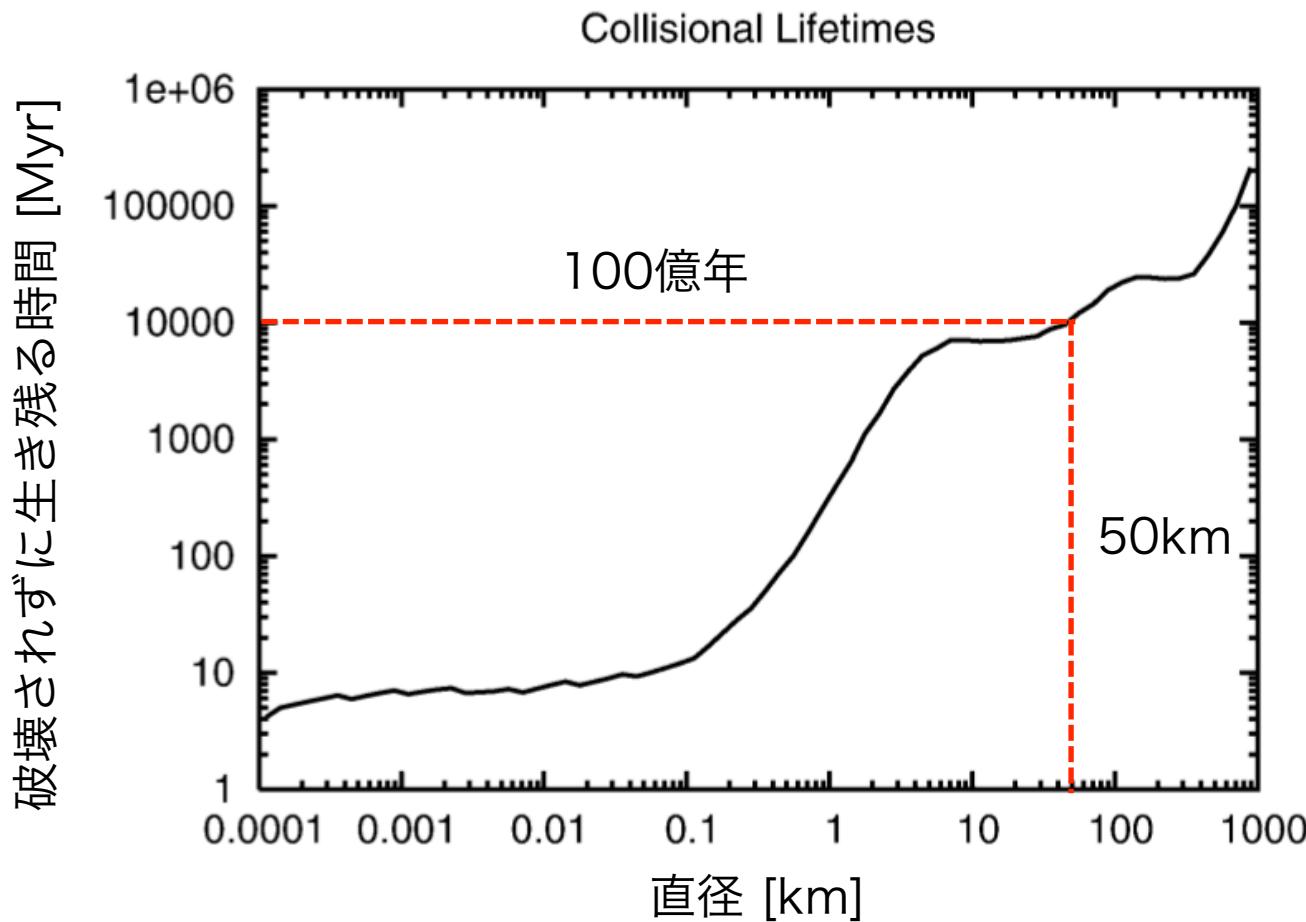
実線：近日点移動速度

破線：昇交点移動速度

惑星の固有振動数と
テスト粒子の固有振動数が
一致する交点

→ 永年共鳴の位置

観測：直径50km以上の理由



O'Brien, D. P. & Greenberg, R. 2005

観測：直径と絶対等級の関係

入射光に対する反射光の比のことをアルベドと呼ぶ。

太陽系の惑星や小天体の絶対等級 H , アルベド A , 小天体の直径 D の関係は次のようになる。

$$H = m_{\odot} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{D^2 A}{2^2 (1[\text{AU}])^2} \right) \quad m_{\odot} \approx -23.7 : \text{太陽の視等級}$$

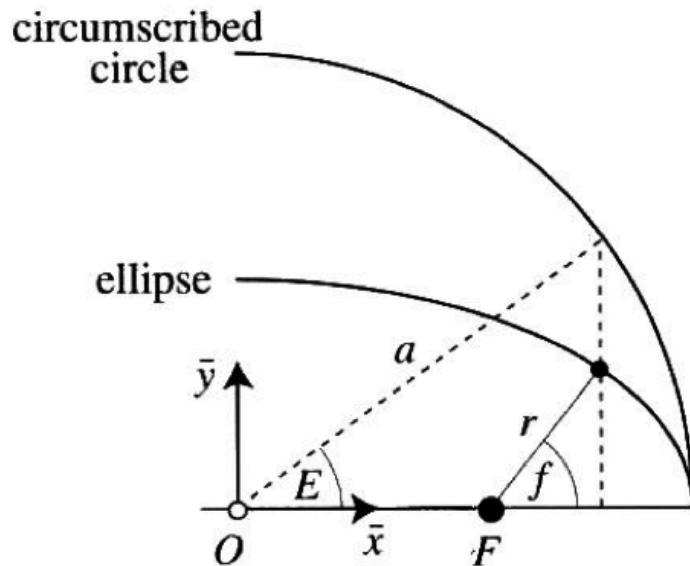
「IAU Minor Planet Center」には, これら3つのうち絶対等級しかデータがない。

本研究では, アルベドを0.09 (彗星に多い) と仮定し, 直径50km以上となる絶対等級を $H < 9.7$ と見積もって観測データをプロットしている。

ケプラー方程式

任意の時間における天体の位置を決定するには,

1. (1)から平均近点離角 M を求める τ : 近日点通過時刻
2. ケプラー方程式(2)から離心近点離角 E を求める
3. (3),(4)から軌道半径 r , 真近点離角 f を求める



$$M = n(t - \tau) \quad \cdots (1)$$

$$M = E - e \sin E \quad \cdots (2)$$

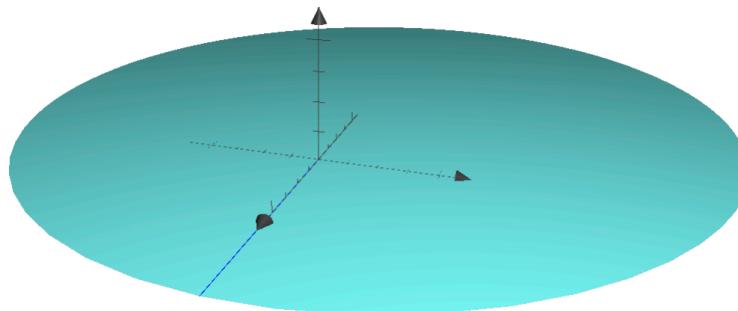
$$r = a(1 - e \cos E) \quad \cdots (3)$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad \cdots (4)$$

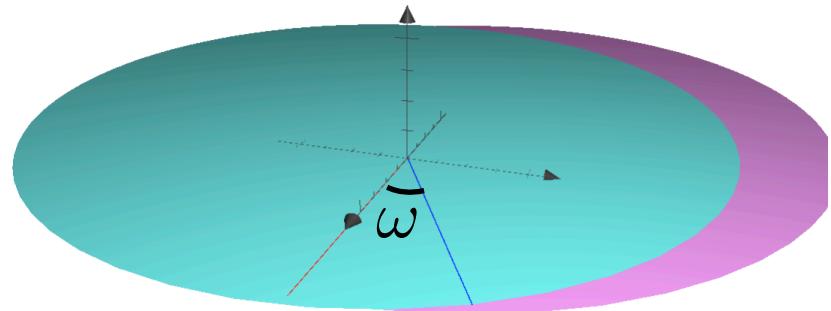
Murray & Dermott 1999, Solar System Dynamics

軌道面と基準面の位置関係

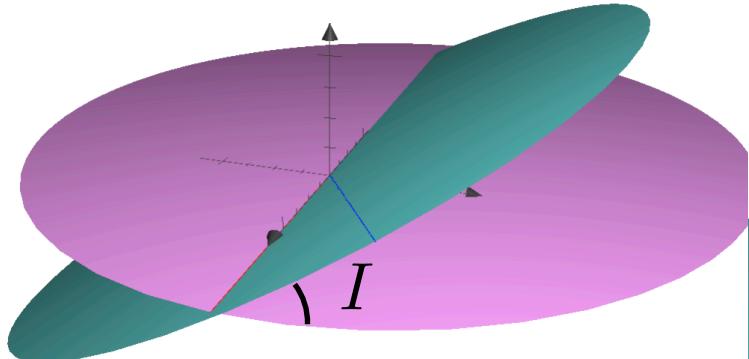
① 軌道面と基準面がそろっている



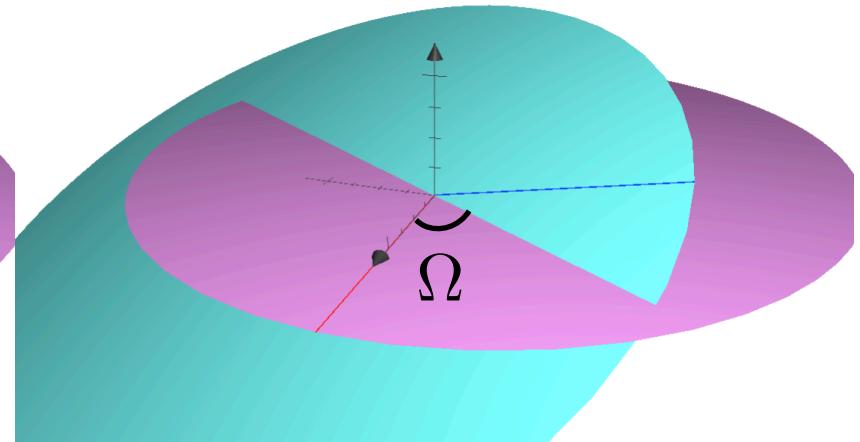
② 基準座標のz軸まわりに ω 回転



③ 基準座標のx軸まわりに I 回転



④ 基準座標のz軸まわりに Ω 回転



4次のエルミート法 1

1. 加速度と加速度の時間微分を用い、
テイラー展開によって**予測子 (predictor)** を計算する

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{p,j} = \mathbf{x}_{0,j} + \Delta t \mathbf{v}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{\mathbf{a}}_{0,j} \\ \mathbf{v}_{p,j} = \mathbf{v}_{0,j} + \Delta t \mathbf{a}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{\mathbf{a}}_{0,j} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{予測子} \\ \text{添字 } 0 \text{ は } t_0 \text{ での値} \end{array}$$

ここで $\begin{cases} \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{x}_{p,j} - \mathbf{x}_{p,k} \\ \mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{p,j} - \mathbf{v}_{p,k} \end{cases}$ とおくと, Δt 進めた加速度は

添字 1 は $t_0 + \Delta t$ での値

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \frac{\mathbf{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \\ \dot{\mathbf{a}}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} G m_k \left[\frac{\mathbf{v}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{r}_{jk})\mathbf{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \epsilon : \text{ソフトニングパラメータ} \\ \text{このままでは} \\ \underline{\text{2次精度}} \end{array}$$

4次のエルミート法 2

2. 3次のエルミート補間（実際上最適だと分かっている）
を用いて修正子（corrector）を計算する

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1,j} = \mathbf{a}_{0,j} + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_{0,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \\ \dot{\mathbf{a}}_{1,j} = \dot{\mathbf{a}}_{0,j} + \Delta t \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \end{cases} \quad \text{3次の補間多項式}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} = \frac{-6(\mathbf{a}_{0,j} - \mathbf{a}_{1,j}) - \Delta t(4\dot{\mathbf{a}}_{0,j} + 2\dot{\mathbf{a}}_{1,j})}{\Delta t^2} \\ \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} = \frac{12(\mathbf{a}_{0,j} - \mathbf{a}_{1,j}) + 6\Delta t(\dot{\mathbf{a}}_{0,j} + \dot{\mathbf{a}}_{1,j})}{\Delta t^3} \end{cases}$$


テイラー展開より修正子は

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{c,j} = \mathbf{x}_{p,j} + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \alpha \frac{\Delta t^5}{120} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \\ \mathbf{v}_{c,j} = \mathbf{v}_{p,j} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

ここで普通のテイラー展開を考えれば $\alpha = 1$ であるが,
 $\alpha \neq 1$ とする場合もある
(α -scheme)

4次のエルミート法 3

3. 修正子を用いて加速度と加速度の時間微分を計算する
そして次のタイムステップを加速度を用いて決める

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{x}_{c,j} - \mathbf{x}_{c,k} \\ \mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{c,j} - \mathbf{v}_{c,k} \end{cases} \text{とおくと,}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} Gm_k \frac{\mathbf{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \\ \dot{\mathbf{a}}_{1,j} = - \sum_{k \neq j} Gm_k \left[\frac{\mathbf{v}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{r}_{jk})\mathbf{r}_{jk}}{(r_{jk}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \end{cases} \quad \text{4次精度}$$

次のタイムステップは以下の式で求める

$$\Delta t_j = \eta \sqrt{\frac{|\mathbf{a}_{1,j}| |\mathbf{a}_{1,j}^{(2)}| + |\dot{\mathbf{a}}_{1,j}|^2}{|\dot{\mathbf{a}}_{1,j}| |\mathbf{a}_{1,j}^{(3)}| + |\mathbf{a}_{1,j}^{(2)}|^2}}$$

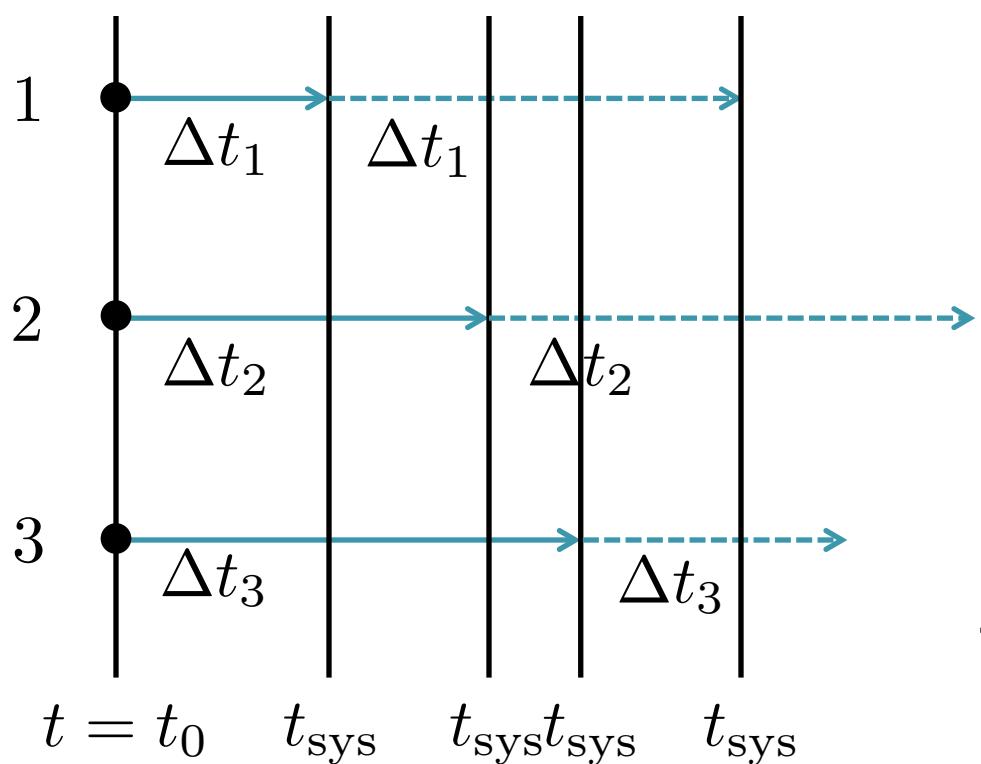
3次補間では

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1,j}^{(2)} = \mathbf{a}_{0,j}^{(2)} + \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \Delta t \\ \mathbf{a}_{1,j}^{(3)} = \mathbf{a}_{0,j}^{(3)} \end{cases}$$

非常に効率が良い表式であることが分かっている (Aarseth)

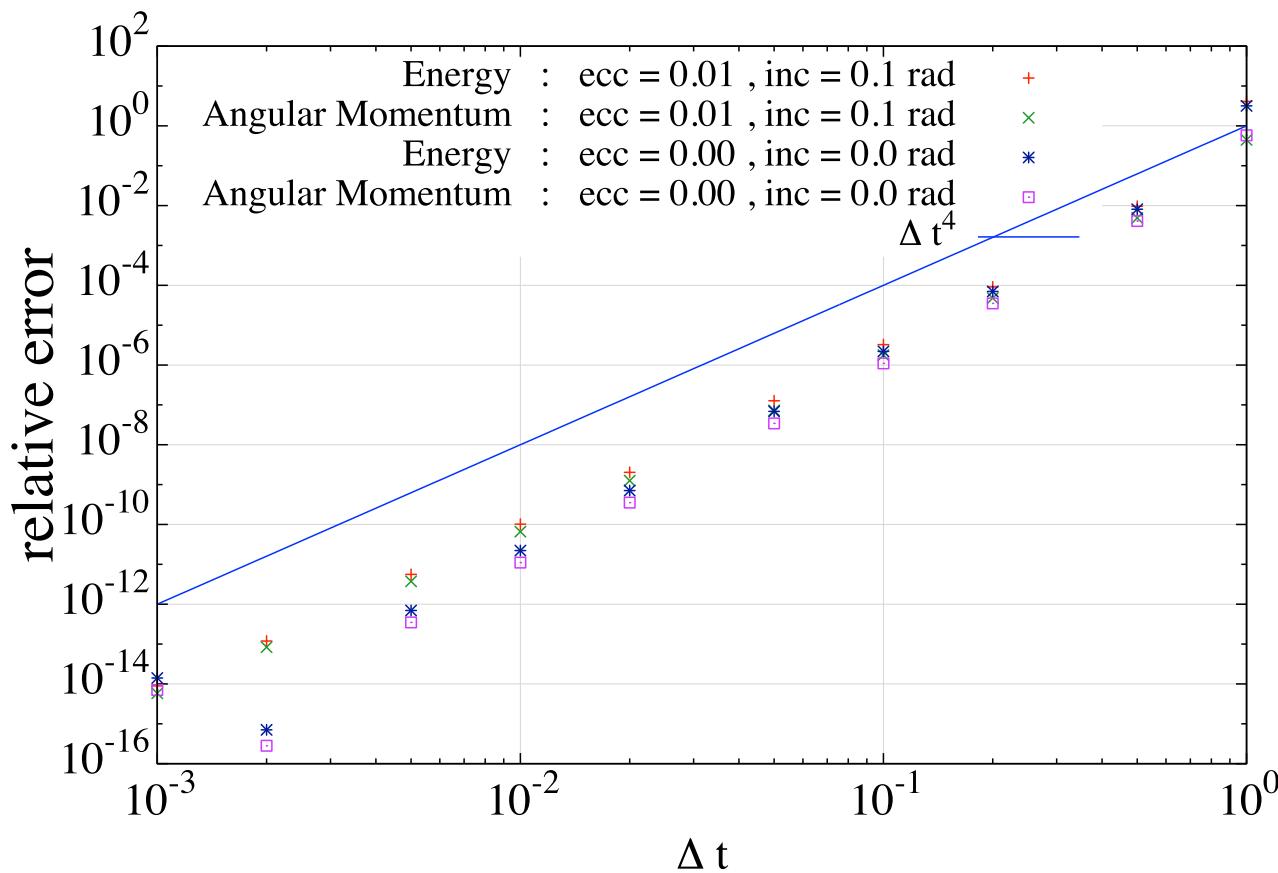
独立タイムステップ

粒子ごとに別の時間を持ち、別々に時間発展させる方法



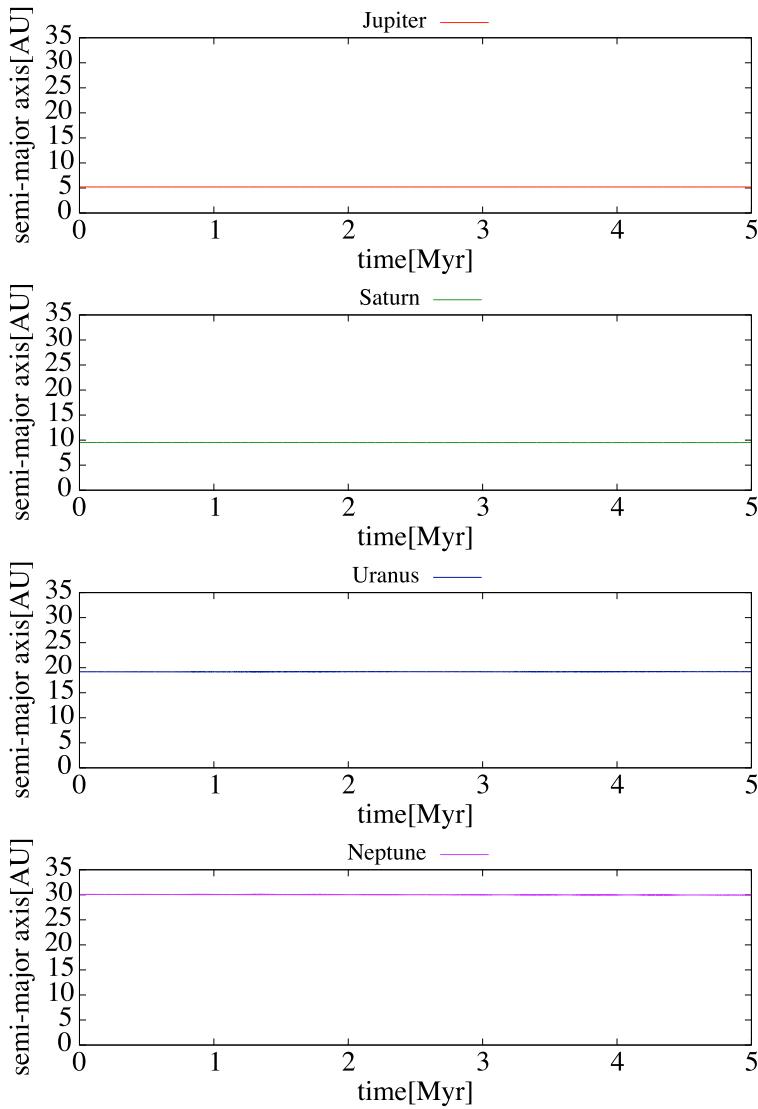
1. $t_j + \Delta t_j$ が最小となる j_{sys} を選び、その時間を t_{sys} とする。
2. t_{sys} における全ての粒子の予測子を計算する。
3. j_{sys} のみ修正子を用いて更新する。
4. 新たな $\Delta t_{j_{sys}}$ を計算し、 $t_{j_{sys}} + \Delta t_{j_{sys}}$ を新たな $t_{j_{sys}}$ として更新して 1 に戻る。このとき j_{sys} 以外は予測子を捨ててもとに戻る。

計算精度の確認

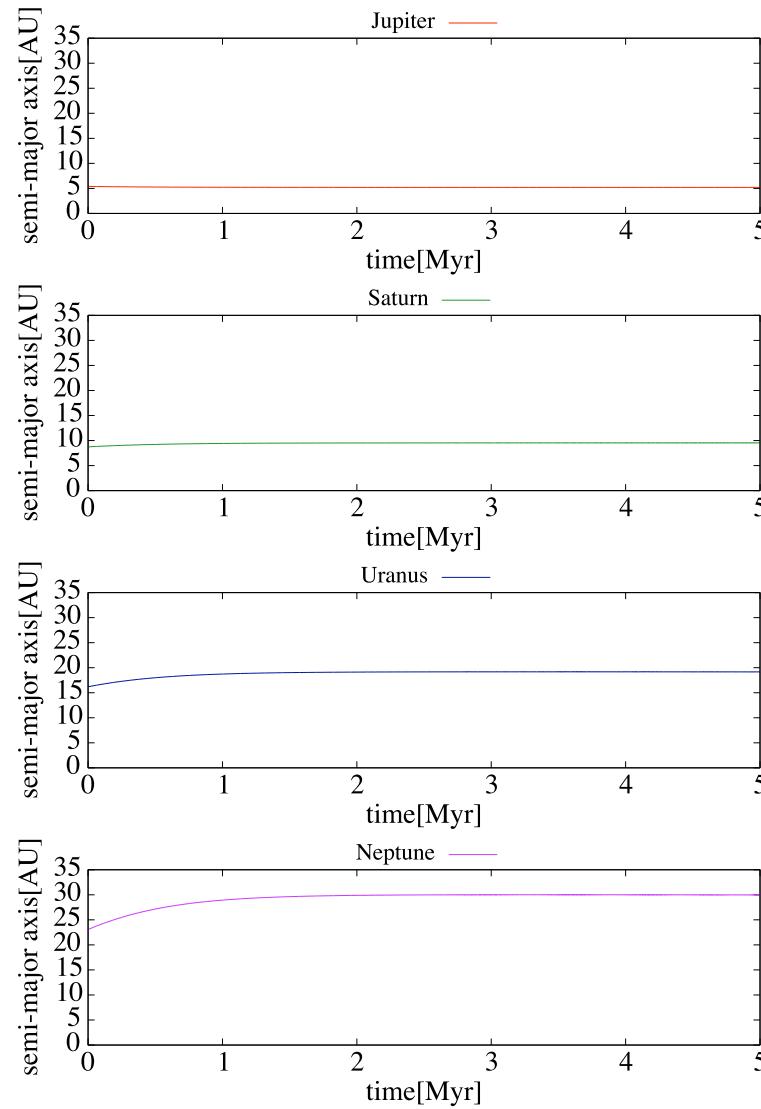


軌道長半径 (a)

左：惑星運動なしの計算

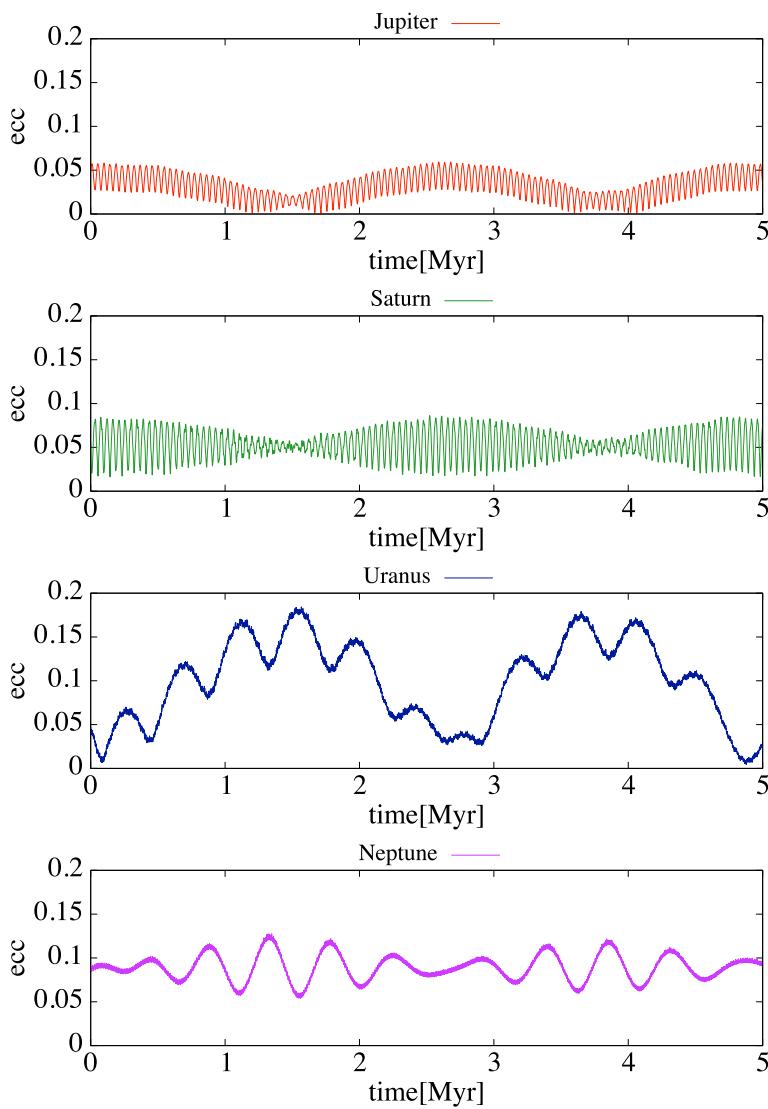


右：惑星運動の計算

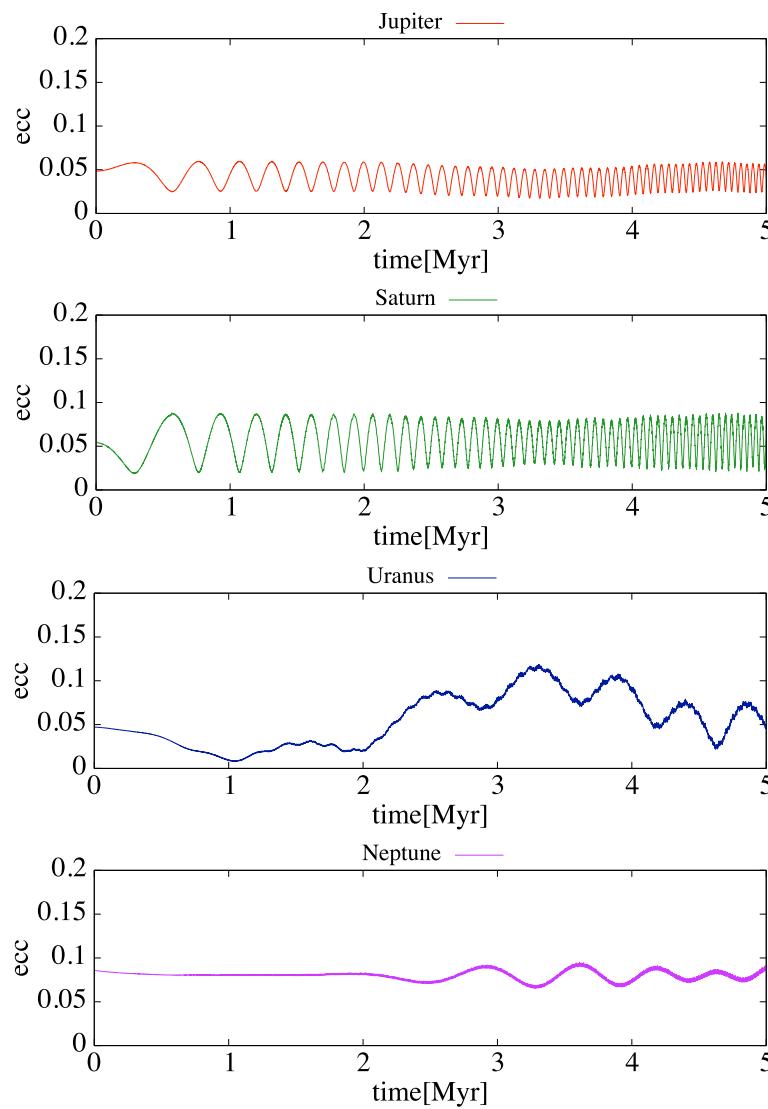


離心率 (e)

左：惑星運動なしの計算

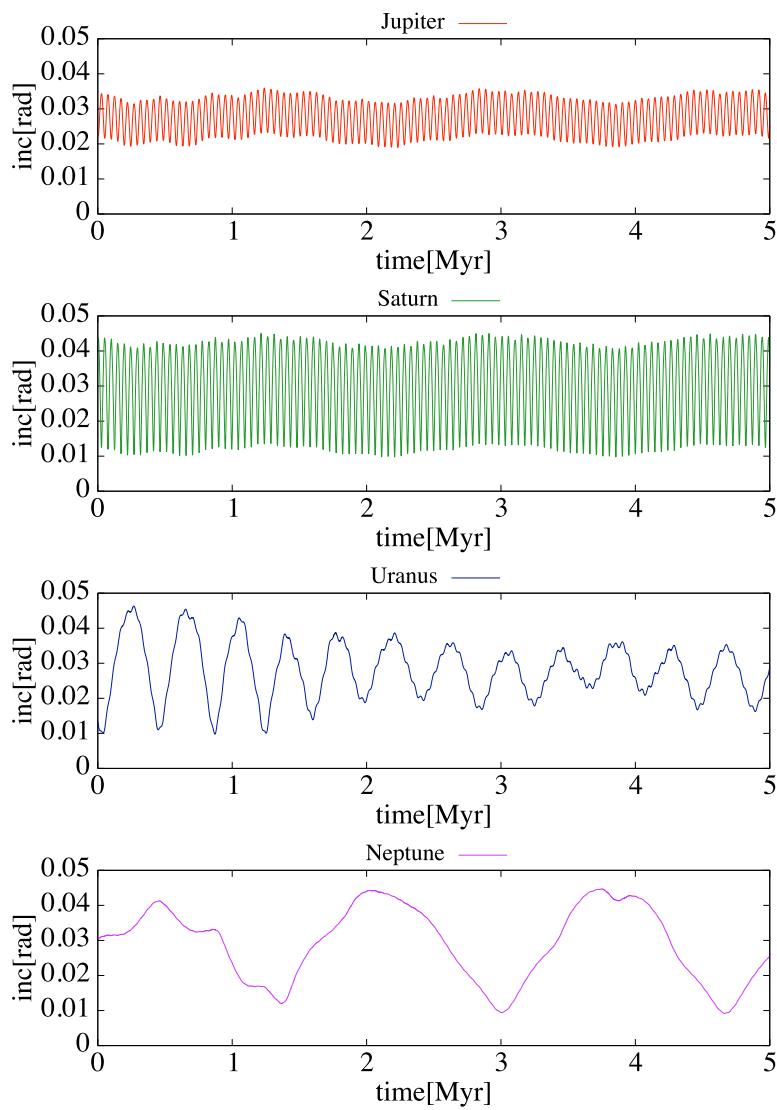


右：惑星運動の計算

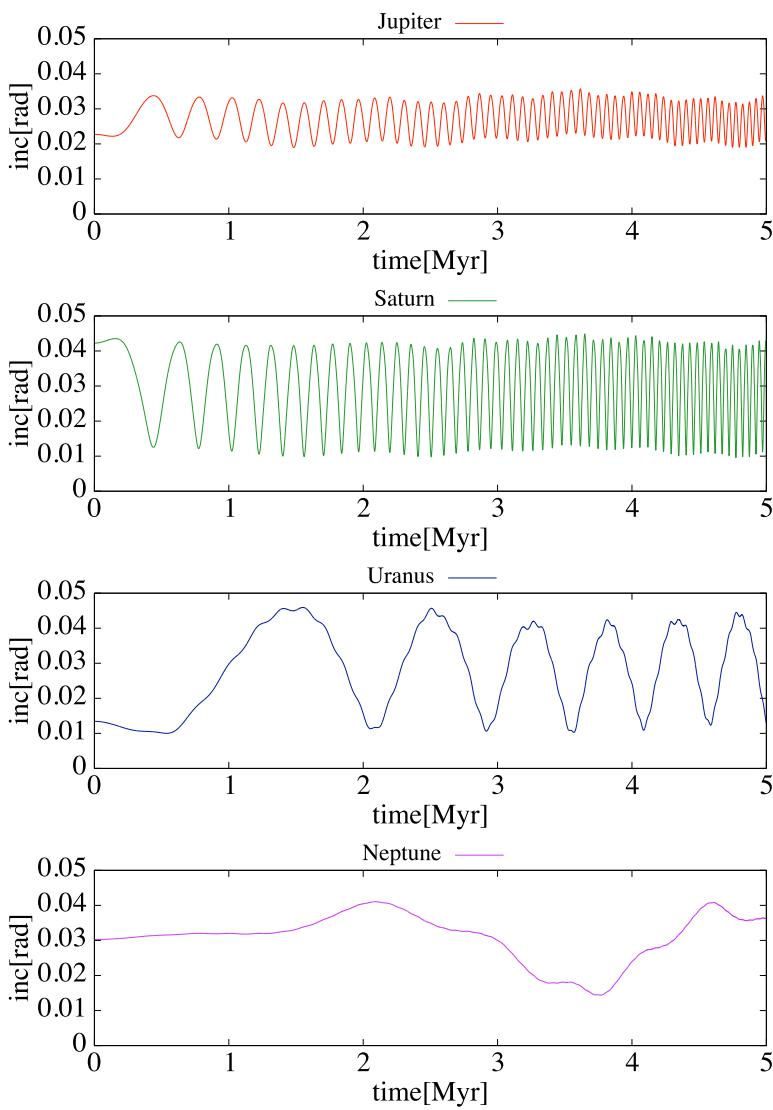


軌道傾斜角 (I)

左：惑星運動なしの計算

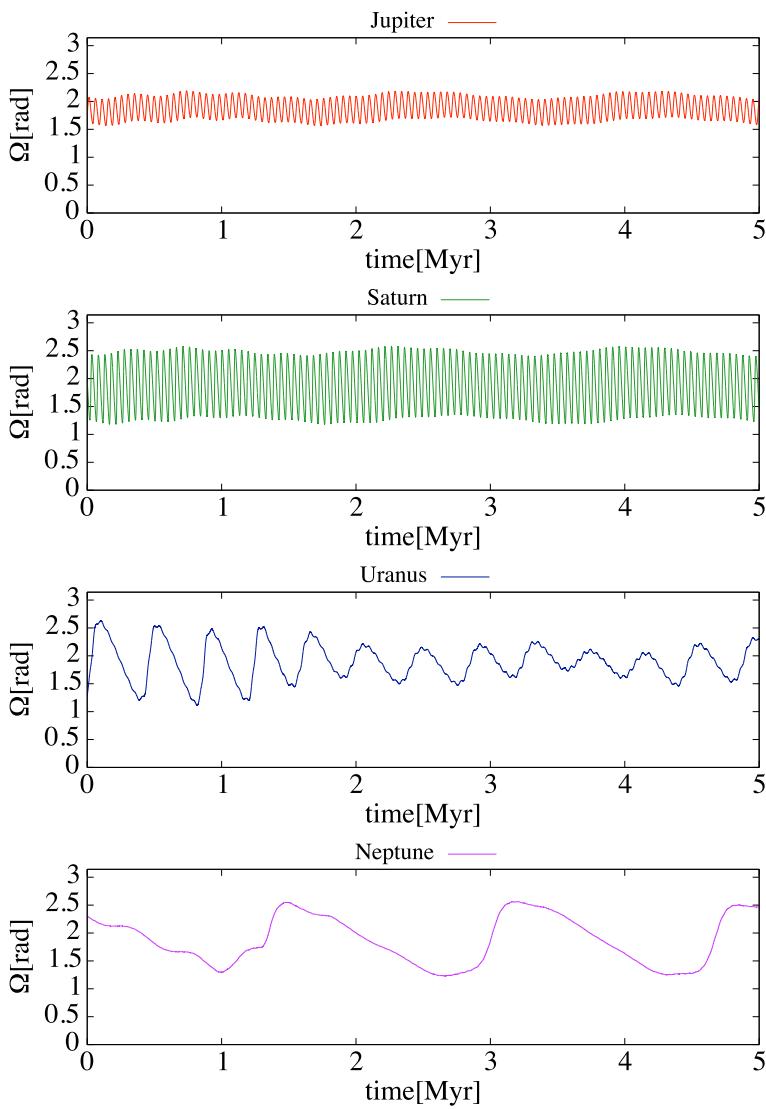


右：惑星運動の計算

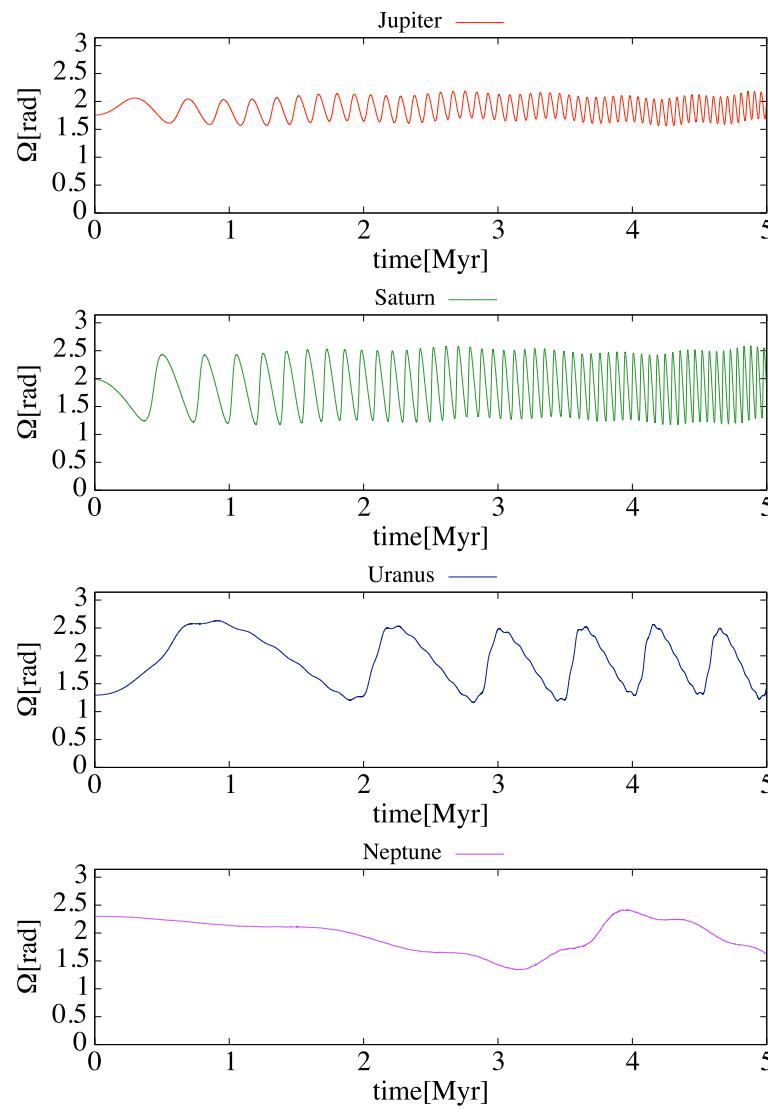


昇交点経度 (Ω)

左：惑星運動の計算

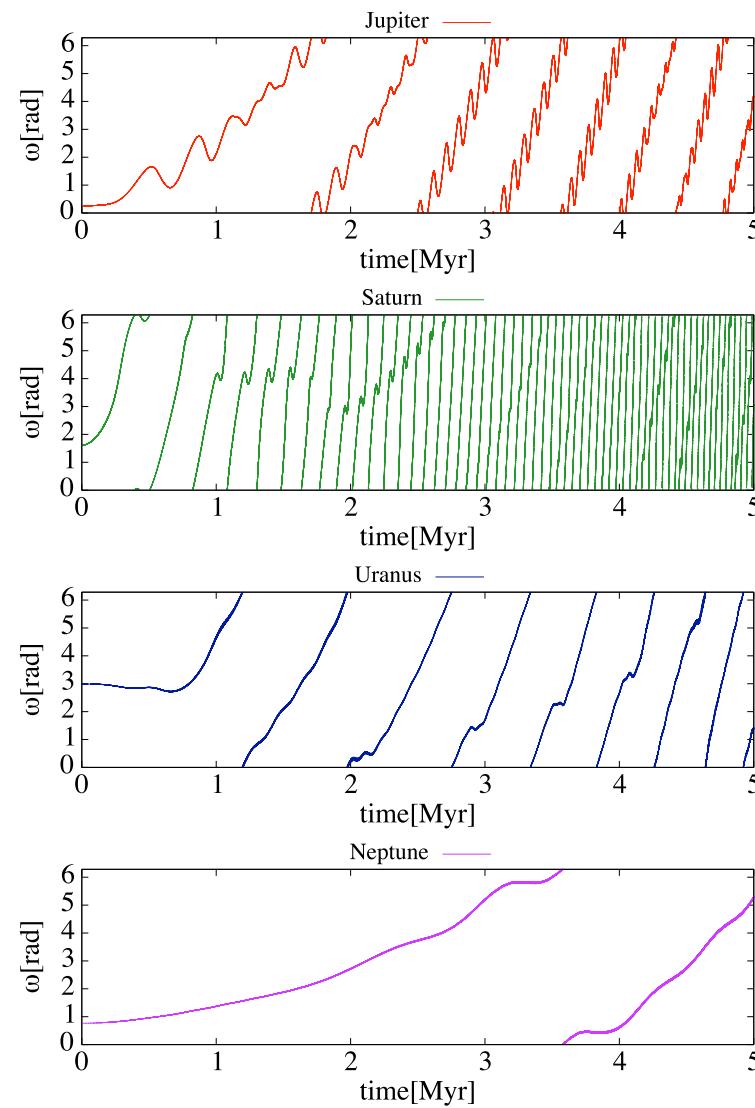
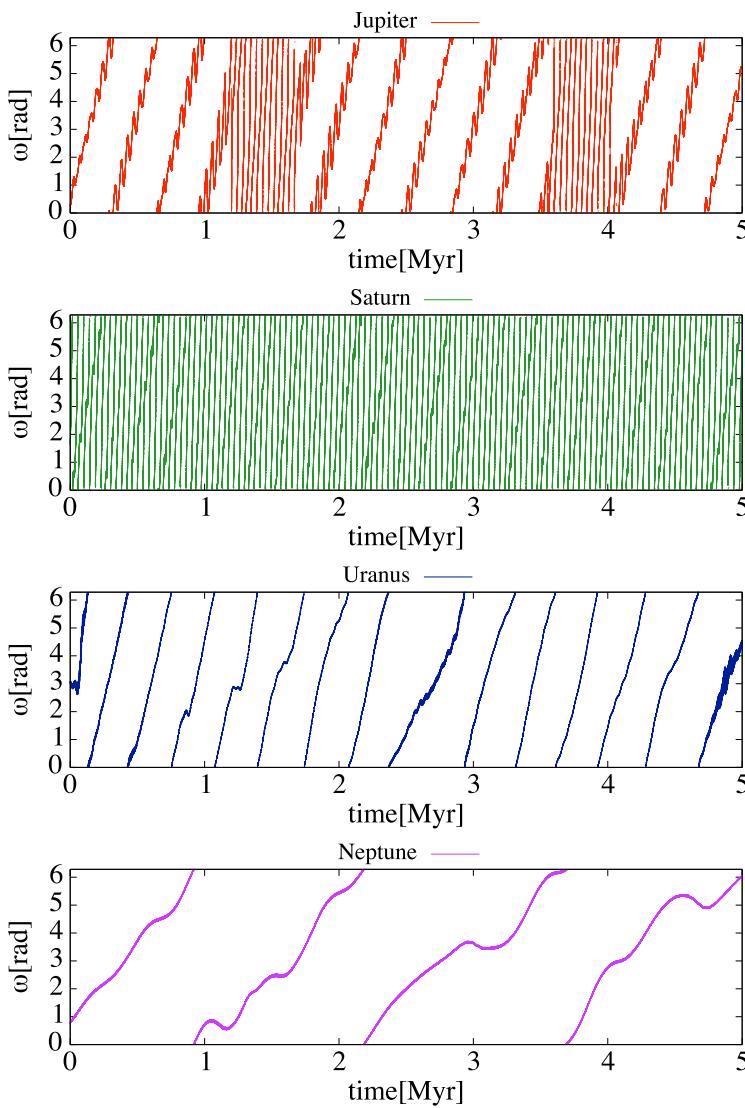


右：惑星運動の計算



近日点引数 (ω)

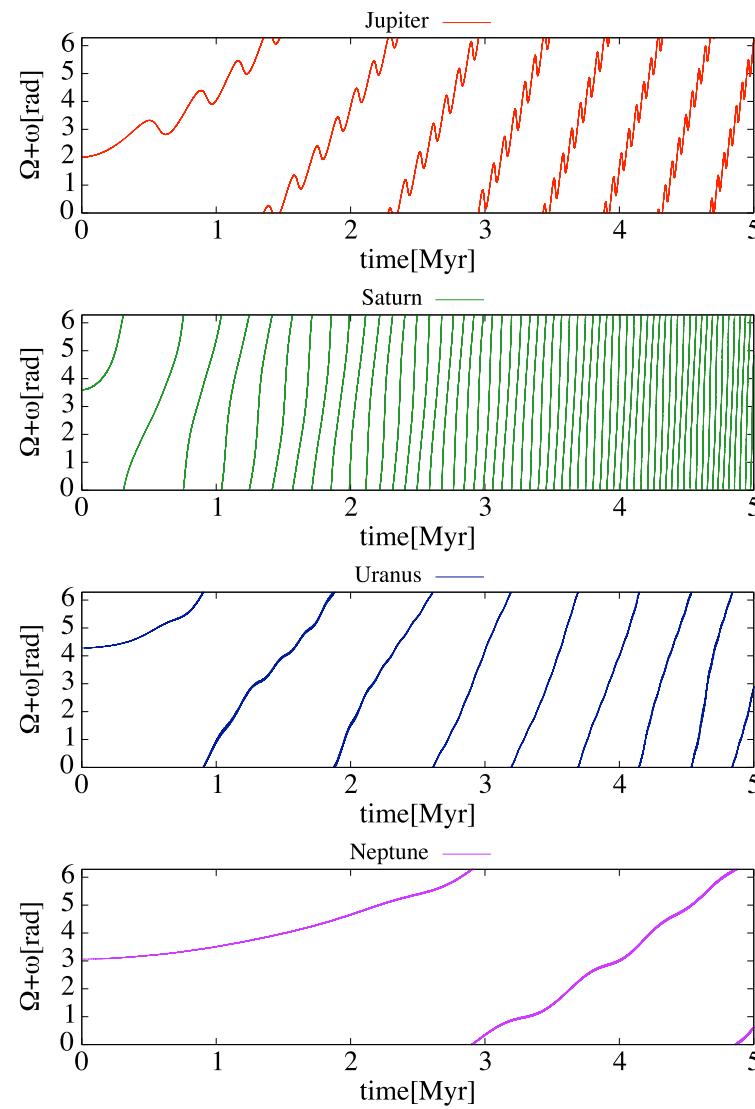
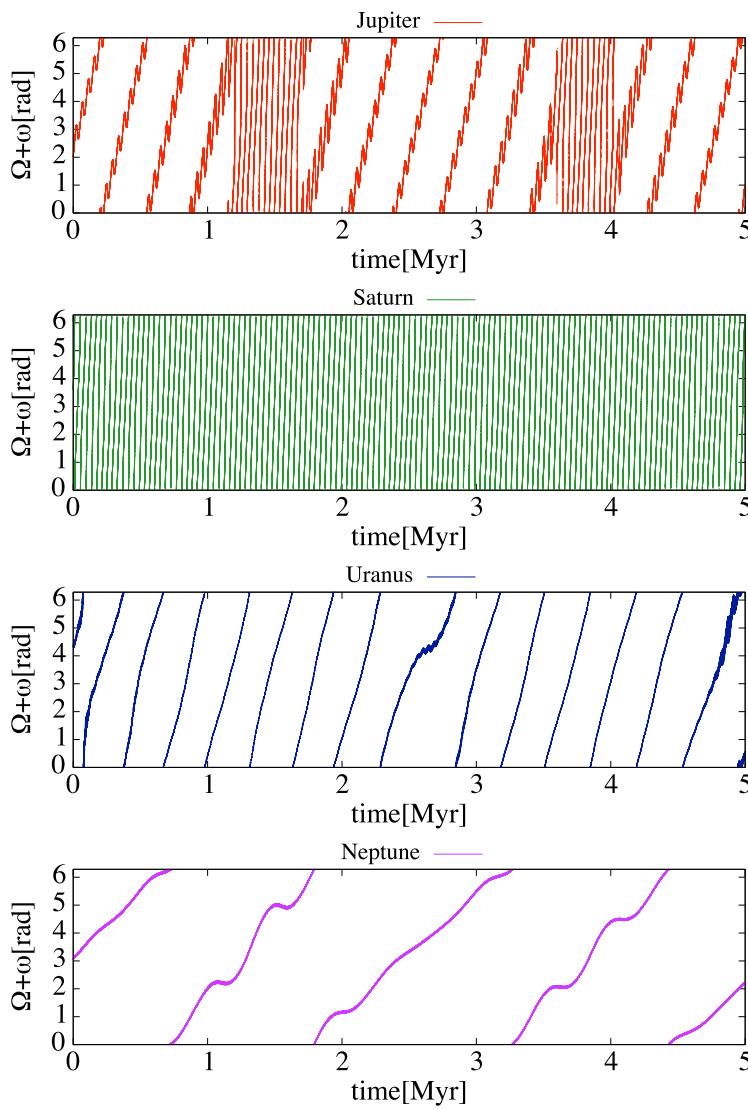
左：惑星運動の計算



右：惑星運動の計算

近日点経度 ($\Omega + \omega$)

左：惑星運動の計算



右：惑星運動の計算

計算コードの見直し

(実行時間) $\propto N^\gamma$ を仮定

