第 5 回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020 年 10 月 29 日

定理 3.1. 標本空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ において, 写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が確率変数であるための必要十分条件は , X が,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \omega \mid X(\omega) \leq x \in \mathcal{A} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすことである。

Proof. $(\Rightarrow)$

X が確率変数ならば, 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して,
$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$
なので, $B = (-\infty, x]$ とすれば
$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x]\}$
$= \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

$(\Leftarrow)$

$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \in x\} \in \mathcal{A} \qquad (x \in \mathbb{R})$ とする
ここで, $B = (-\infty, x](x \in \mathbb{R})$ とし,
$\{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ となる集合 B の全体を B_0とする
B_0が完全加法族とすることを示す

i) $\mathbb{R} \in \Omega$とする

$$\begin{aligned}\{\omega \mid X(\omega) \in \Omega\} &= \{\omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \in (\infty, n]\} \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

ii) $B \in B_0$ならば　(定義 2.2 完全加法族 ii より)

$$\{\omega \mid X(\omega) \in B^c\} = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}^c \in \mathcal{A}$$

よって, $B^c \in \mathcal{B}$

iii) $B_i \in B_0 (i = 1, 2, \ldots)$　(定義 2.2 完全加法族 iii より)

$$\{\omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \in B_i\} \in \mathcal{A}$$

よって, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in B_0$

以上より, B_0は完全加法族である
さらに, $B_0 = B$ となることを示す

まず, $B \in B_0$とする
$B = (-\infty, x], x \in R$ より $B \in \mathcal{B}$ となり,
$B_0 \subset \mathcal{B}$ となる

次に, $B \in \mathcal{B}$ とする
$B = (-\infty, x], (a, b \in R)$ なので

$$\{\omega \mid X(\omega) \in B\} = \{\omega \mid X(\omega) \in (a, b)\}$$
$$= \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, b]\} \cap \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}^c$$

が成り立つ。また,

$$\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, b]\} \in \mathcal{A}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}^c \in \mathcal{A}$$

なので, $B \in B_0$となる

以上より $B_0 = \mathcal{B}$
よって, 任意の集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$$

よって, X は確率変数である　□

定理 3.2. 標本空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の, 写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ に関する次の 4 つの命題は同値である

i) $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

ii) $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

iii) $\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

iv) $\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

Proof. $i) \to iv)$

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}^c$$
$$\text{なので, (完全加法族の) 定義より,}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}$$

$iii) \to ii)$ も同様に示される

$iv) \to iii)$

$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} = \lim_{n\to\infty}\{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\}$$
$$\text{ここで}, iv) \text{ の仮定より,}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ なので}$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ が導かれる}$$

$ii) \to i)$

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \lim_{n\to\infty}\{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\}$$
$$\text{ここで}, ii) \text{ の仮定より,}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ なので}$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ が導かれる}$$

□

例 3.1. X を標本空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とすれば,
$aX+b(a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0), X^2, \sqrt{X}(X\geq 0)$ も確率変数となる。

Proof. (1) aX + b

i) $a>0$ のとき, $\{aX+b\leq x\}=\{X\leq \frac{x-b}{a}\}\in\mathcal{A}$

ii) $a<0$ のとき, $\{aX+b\leq x\}=\{X\geq \frac{x-b}{a}\}\in\mathcal{A}$

iii) $a=0$ のとき,

$$\{aX+b\leq x\}=\{aX\leq x-b\}=\begin{cases}\Omega & (x-b\geq 0)\\ \phi & (x-b<0)\end{cases}\in\mathcal{A}\qquad(※\ aX=0)$$

(2) X^2

$$\{X^2<x\}=\begin{cases}\phi & (x\leq 0)\\ \sqrt{x}<X<\sqrt{x} & (x>0)\end{cases}\in\mathcal{A}\text{であり,}$$
$$\{-\sqrt{x}<X<\sqrt{x}\}=\{X<\sqrt{x}\}\cap\{X>-\sqrt{x}\}\in\mathcal{A}$$

(3) $\sqrt{X}$

$$\{\sqrt{X}<x\}=\begin{cases}\phi & (x\leq 0)\\ \{X\leq x^2\} & (x>0)\end{cases}\in\mathcal{A}$$

□

命題 3.3. X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とすれば,
$X+Y, XY, X/Y(Y \neq 0), max(X,Y), min(X,Y)$ も確率変数となる。

Proof. i) $X+Y$ が確率変数であることを示す

すべての有理数 $r_n(n=1,2,\dots)$ に対して,

集合 $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\}\} \qquad (z \in \mathbb{R})$ とおく

$\{X < r_n\} \in \mathcal{A}, \{Y < z - r_n\} \in \mathcal{A}$ なので,

$\{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\} \in \mathcal{A}$ となり,

$A \in \mathcal{A}$

一方, 集合 $B = \{X + Y < z\}$ とおく

任意の$\omega \in A$ に対して, 有理数 r_nが存在して

$X(\omega) < r_n, Y(\omega) < z - r_n$が成り立つ

したがって, $X(\omega) + Y(\omega) < z$ となり,

$\omega \in B$ より, $A \subset B$

逆に任意の$\omega \in B$ に対して $X(\omega) + Y(\omega) < z$

となるから, $X(\omega) < z - Y(\omega)$

ここで有理数の稠密性 (切っても隣の有理数は常に存在する) より,

ある n が存在して,

$X(\omega) < r_n, Y(\omega) < z - r_n$

が成り立つ

よって, $\omega \in \{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\}$

が成り立つ

よって, $\omega \in A$ となり, $B \subset A$

以上より, $A = B$ となり

$A \in \mathcal{A}$ であるから, $B \in \mathcal{A}$

ii) XY が確率変数であることを示す

$$aX + b \in \mathcal{A} \text{ より}, a = -1, b = 0 \text{ とする}$$
$$-X \in \mathcal{A} \text{ よって } i) \text{ より},$$
$$X + (-Y) = X - Y \in \mathcal{A}$$
$$X^2 \in \mathcal{A} \text{ なので}, (X+Y)^2 \in \mathcal{A}, (X-Y)^2 \in \mathcal{A}$$
$$\text{よって},$$
$$XY = \frac{1}{4}\{(X+Y)^2 - (X-Y)^2\} \in \mathcal{A}$$

iii) X/Y が確率変数であることを示す　　$(Y \neq 0)$

$$\{Y > 0\} \cup \{Y < 0\} = \Omega$$
$$\{X/Y < x\} = \{X/Y < x\} \cap \Omega$$
$$= \{\{Y > 0\} \cap \{X/Y < x\}\} \cup \{\{Y < 0\} \cap \{X/Y < x\}\}$$
$$= \{\{Y > 0\} \cap \{X - xY < 0\}\} \cup \{\{Y < 0\} \cap \{X - xY < 0\}\} \in \mathcal{A}$$

iv) $max\{X, Y\}$ が確率変数であることを示す

$$max\{X, Y\} = Z,\ I = (a, b],\ (a, b \in \mathbb{R}, a < b)$$
$$\{Z \in I\} = \{a < max\{X, Y\} \leq b\}$$
$$= \{\{a < X \leq b\} \cap \{Y \leq b\}\} \cup \{\{a < Y \leq b\} \cap \{X \leq b\}\} \in \mathcal{A}$$

v) $min\{X, Y\}$ が確率変数であることを示す

$$min\{X, Y\} = Z,\ I = (a, b],\ (a, b \in \mathbb{R}, a < b)$$
$$\{Z \in I\} = \{a < min\{X, Y\} \leq b\}$$
$$= \{\{a < X \leq b\} \cap \{a \leq Y\}\} \cup \{\{a < Y \leq b\} \cap \{b \leq X\}\} \in \mathcal{A}$$

$\square$