2020年 12月 16日

第12回 数理統計 レポート

小森 一輝

6.1 母集団, 母集団確率変数, 標本, 統計量

6.1.1 母集団, 標本

定義6.1 母集団, 母集団分布, 母数, 母数空間

興味の対象となる集合全体を **母集団** (population) という. 特に, 属する対象の個数が有限の場合には, **有限母集団** (finite distribution) とよび, 無限の場合には, **無限母集団** (infinite population) とよぶ.

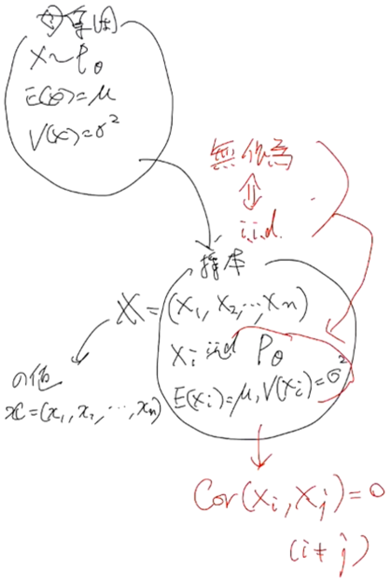
母集団は, 特定の性質をもった (確率変数 X の) 確率分布 P_θ によって特徴づけられていることを仮定する. このとき, その分布のことを **母集団分布** (population distribution) とよび, 確率変数のことを **母集団確率変数** (population random variable) とよぶ. 母集団分布が **母数 (パラメータ)** θ をもつことを仮定する. すべての母数 θ の集合を Θ で表し, **母数空間** (parameter space) とよぶ. このとき, 確率分布 P_θ は母数空間 Θ 上で定義されているということもある. このとき, 母集団は分布族 $\mathscr{P} = P_\theta \mid \theta \in \Theta$ に属するという. 特に, P_θ の平均 $E(X)$ のことを **母平均** (population mean) とよび, μ と記す. 分散 $V(X)$ のことを **母分散** (population variance) とよび, σ^2 と記す.

複数の母数を含む母集団分布を考える場合, 母数の一部に興味があり, 他の母数に興味がない場合がある. この場合の未知であるが興味のない母数のことを **攪乱母数** あるいは **局外母数** (nuisance parameter) という.

定義6.2 標本抽出, 標本, 標本値, 標本の大きさ, 標本空間 母集団から要素を取り出すことを **標本抽出** (sampling) とよび, 取り出される要素のことを **標本** (sample) とよぶ. このとき, 標本に対して注目している値を標本とよぶこともある. 簡単のため, ある分布族 $\mathscr{P}$ に属する母集団からの標本のことを $\mathscr{P}$ に属する確率分布 P_θ からの標本ということもある.

このとき, 取り出した要素を元に戻す抽出を **復元抽出** (sampling with replacement) とよび, 元に戻さない抽出のことを **非復元抽出** (sampling without replacement) とよぶ.

標本の要素 $X_i (i = 1, 2, \ldots)$ は母集団確率分布に従う確率変数であり, 標本は $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ で表される. 標本 $\mathbf{X}$ の実現値を **標本値** (sample value) または **観測値** (observation value) とよび, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ で表す. 取り出される要素の個数は **標本の大きさ** (sample size) とよばれる. 標本の値域は **標本空間** (sample space) となり, 大きさ n の標本の標本空間は $\mathscr{X}^n$ で表される. このとき, x は $\mathscr{X}^n$ のある点となる.



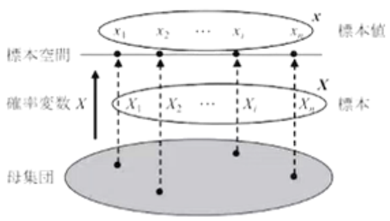


図 1: 標本抽出

定義 6.3 無作為標本 確率変数 $X_1, X_2, \dots X_n$ が互いに独立で同一の母集団分布 P_θ に従うとき, $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$ はこの母集団からの **大きさ n の無作為標本** (random sample of size n) であるという.

定理6.1 無作為標本の性質

$F_X(x;\theta)$ を母集団確率変数 X の母数 θ をもつ分布関数とすると, 無作為標本 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$ の同時確率分布 $F_{\mathbb{X}}(x;\theta)$ は,

$$F_{\mathbb{X}}(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x;\theta)$$

標本 $\mathbb{X}$ の同時分布関数が$X_1, X_2, \dots, X_n$ の分布関数の積となる.

を満たす. また,確率変数 X が確率変数 (または, 確率密度関数) $f_X(x;\theta)$ を持つ場合は, 標本 $\mathbb{X}$ の同時確率関数 (または, 同時確率密度関数) $f_{\mathbb{X}}(x;\theta)$ は,

$$f_{\mathbb{X}}(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x;\theta)$$

標本 $\mathbb{X}$ の同時確率(密度)関数が$X_1, X_2, \dots, X_n$ の確率(密度)関数の積となる.

を満たす. ここで, $x = (x_1, x_2, \dots x_n), x \in \mathscr{X}^n$ である.

6.1.2 統計量とその性質

定義6.4 統計量, 標本分布 標本 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$ の可測関数 $T_n(X_1, X_2, \dots X_n)$ を **統計量** (static) という. 統計量の分布を **標本分布** (sampling distribution) という.

統計量は確率変数の可測関数であり, それ自身も確率変数となる. 統計量は標本のみに依存し, 母数には依存しないが, 標本分布は母数に依存する.

例:

$$\left\{ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (\overline{X}\text{~}n)\ s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad (\frac{nS^2}{\sigma^2}\text{~}\chi^2) \right.$$