第4回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020年10月22日

定理 2.12. 事象の独立
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ において, $A, B \in \mathcal{A}$ が,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

を満たすとき, 事象 A と B は **独立** であるといい、$A \perp\!\!\!\perp B$ と記す。
また、一般に $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$ が成りたち、事象 A,B が互いに独立の場合特に、$P(B \mid A) = P(B)$ が成り立つ。

定理 2.20. $A, B \in \mathcal{A}$ について, 以下が成り立つ。

i) $A \perp\!\!\!\perp B, A \perp\!\!\!\perp B^c, A^c \perp\!\!\!\perp B, A^c \perp\!\!\!\perp B^c$は動値の命題である。

Proof.

$$A \perp\!\!\!\perp B => A \perp\!\!\!\perp B^c \text{を示す。}$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c), \qquad (A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \phi$$

$$\begin{aligned} p(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \qquad (\because A \perp\!\!\!\perp B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

$\square$

ii) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, $A \perp\!\!\!\perp \Omega$

Proof.

$$A \subset \Omega,\ P(\Omega) = 1$$
$$A \subset \Omega \text{ より},\ A \cap \Omega = A$$

したがって,

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot P(\Omega) \qquad (\because p(\Omega) = 1)$$

□

iii) $N \in \mathcal{A}$ が $P(N) = 0$ を満たすとき, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, $A \perp\!\!\!\perp N$

Proof.

$$N \in \mathcal{A},\ P(N) = 0$$
$$A \cap N \subset N \text{ より},$$

$$\begin{aligned} P(A \cap N) &\leq P(N) = 0 \\ P(A) \cdot P(N) &= 0 \end{aligned}$$

□

iv) $P(B) > 0$ のとき, $A \perp\!\!\!\perp B$ であるための必要十分条件は, $P(A \mid B) = P(A)$ である。

Proof.

$$P(B) > 0 \text{ のとき}, A \perp\!\!\!\perp B \leftrightarrow p(A \mid B) = P(A)$$

$\rightarrow$ (必要条件)
$A \perp\!\!\!\perp B$ とする

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$\leftarrow$ (十分条件)
$P(A \mid B) = P(A)$ とする

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

□

定理 2.13. 事象族の独立
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における事象列, $\{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ について, 任意の $1 \leq m \leq n, 1 \leq i_1 \leq i_2 < \cdots < i_m \leq n$ に対して,

$$P(\bigcap_{j=1}^{m} A_j) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{ij})$$

が成り立つとき, 事象例 $\{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ は互いに独立であると呼ばれる。
さらに,確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における事象族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in A\}$ について, その任意有限個の要素からなる族が互いに独立のとき, 事象族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in A\}$ は互いに独立であると呼ばれる。

例 $n = 3 \to m = 2, 3$
m = 3

1) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

2) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

3) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$

4) $P(A_3 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1)$

$1 \to 4$ すべて成り立つとき, 事象列 A_1, A_2, A_3 は独立である。

例 2.10. A, B, C が互いに独立ならば, A^c, B^c, C^c も互いに独立となる。すなわち,

Proof. $A^c \perp\!\!\!\perp B^c \perp\!\!\!\perp C^c$ を示す.

$$
\begin{aligned}
P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
&= (P(A) + P(B) - P(A)P(B))P(C) \qquad (\because \text{それぞれの事象は独立}) \\
&= (P(A) + P(B) - P(A \cap B))P(C) \\
&= P(A \cup B) \cdot P(C) \\
&= (A \cup B) \perp\!\!\!\perp C \\
&= (A \cup B) \perp\!\!\!\perp C^c \qquad (\because \text{定理 } 2.20 - 1) \\
&= (A^c \cap B^c) \perp\!\!\!\perp C^c \qquad (\because \text{ドモルガン}) \\
&= A^c \perp\!\!\!\perp B^c \perp\!\!\!\perp C^c
\end{aligned}
$$

□

定理 2.21. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における事象列 $\{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ が互いに独立のとき以下が成り立つ。

$$
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c)
$$

Proof. ($\{A_i\}$ が独立 $\quad \to \{A_i^c\}$ が独立※要証明)

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= 1 - P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c) \\
&= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) \qquad (\because \text{ドモルガン}) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c)
\end{aligned}
$$

□

定義 3.1. 確率変数
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ において, 写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が任意の集合 $B \in \mathcal{B}$ について,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

を満たすならば, X は**確率変数**とよばれる。
$B \in \mathcal{B}$ を区間全体の集合**ボレル集合**とよぶ。
$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ のとき, X による B の逆像と表現する。