第8回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020 年 11 月 19 日

定義 3.9. 期待値

i) 確率変数 X が離散型の場合, X の確率関数 f_X が $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f_X(x_i) < \infty$ $(D = \{x_i | i = 1, 2, \ldots\})$ を満たすとき, X の**期待値 (expected value)** μ を次式で定義する.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_X(x_i)$$

ii) 確率変数 X が連続型の場合, X の確率変数 f_X が $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ を 満たすとき, X の**期待値** μ を次式で定義する.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

確率変数 X の期待値は**平均値 (mean)** と呼ばれることもある.

定理 3.18. X, Y を確率変数とし, $Y = h(X)$ とする.ただし, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能な単調関数とする. このとき, $E(Y) < \infty$ であれば, 以下が成り立つ.

$$E(Y) = E(h(X))$$

命題 3.19. $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をボレル関数とし, $a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする. このとき, $E(\phi(X)) < \infty, E(\psi(X)) < \infty$ であれば, 以下が成り立つ.

$$E(a\phi(X) + b\psi(X)) = aE(\phi(X)) + bE(\psi(X))$$
$$|E(\phi(X)| \leq E(|\phi(X)|)$$

定義 3.10. 分散, 標準偏差

i) 確率変数 X が離散型の場合, X の確率関数 f_X が $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 f_X(x_i) < \infty (D = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots\})$ を満たすとき, X の**分散 (varaiance)** を次式で定義し, σ^2 と記す.

$$\sigma^2 = V(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f_X(x_i)$$

ii) 確率変数 X が連続型の場合, X の確率密度関数 f_X が $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx < \infty$ を満たすとき, X の**分散**を次式で定義し, 同じく σ^2 と記す.

$$\sigma^2 = V(X) = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

iii) 確率変数 X の**標準偏差 (standard deviation)** を次式で定義し, σ と記す.

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

すなわち, 標準偏差は分散の正の平方根である.

例 3.4. 確率変数 X の期待値, 分散について, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &E(aX+b) = aE(X) + b, \qquad V(aX+b) = a^2 V(X) \\ &V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

例 3.5. 確率変数 X の期待値, 分散について, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &E(X-\mu) = 0 \\ &E((X-c)^2) \geq E((X-\mu)^2) = V(X) \qquad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

定義 3.11. 積率
確率変数 X について, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し, $E(X^n) < \infty$ であれば,
$E(X^n)$ を**原点まわりの n 次積率 (nth moment about the origin)**, または, **原点積率 (nth origin moment)** という.
さらに, ある $\mu = E(X)$ が与えられるとき, $E((X-\mu)^n)$ を**平均周りの n 次積率 (nth moment about the mean)**, または, **中心積率 (nth central moment)** という.以下, $\mu_n = E(X^n),\ \mu'_n = E((X-\mu)^n)$ と記す.