第5回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020 年 10 月 29 日

定理 3.1. 標本空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ において, 写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が確率変数であるための必要十分条件は , X が,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \omega \mid X(\omega) \leq x \in \mathcal{A} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすことである。

Proof. $(\Rightarrow)$

X が確率変数ならば, 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して,
$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$
なので, $B = (-\infty, x]$ とすれば
$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x]\}$
$= \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

$(\Leftarrow)$

$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \in x\} \in \mathcal{A} \qquad (x \in \mathbb{R})$ とする
ここで, $B = (-\infty, x](x \in \mathbb{R})$ とし,
$\{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ となる集合 B の全体を B_0とする
B_0が完全加法族とすることを示す

i) $\mathbb{R} \in \Omega$とする

$$\begin{aligned}\{\omega \mid X(\omega) \in \Omega\} &= \{\omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \in (\infty, n]\} \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

ii) $B \in B_0$ならば　(定義 2.2 完全加法族 ii より)

$$\{\omega \mid X(\omega) \in B^c\} = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}^c \in \mathcal{A}$$
よって, $B^c \in \mathcal{B}$

iii) $B_i \in B_0(i = 1, 2, \ldots)$　(定義 2.2 完全加法族 iii より)

$$\{\omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \in B_i\} \in \mathcal{A}$$
よって, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in B_0$

以上より, B_0は完全加法族である
さらに, $B_0 = B$ となることを示す

まず, $B \in B_0$とする
$B = (-\infty, x], x \in R$ より $B \in \mathcal{B}$ となり,
$B_0 \subset \mathcal{B}$ となる

次に, $B \in \mathcal{B}$ とする
$B = (-\infty, x], (a, b \in R)$ なので
$$\{\omega \mid X(\omega) \in B\} = \{\omega \mid X(\omega) \in (a, b)\}$$
$$= \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, b]\} \cap \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}^c$$
が成り立つ。また,

$$\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, b]\} \in \mathcal{A}$$
$$\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}^c \in \mathcal{A}$$
なので, $B \in B_0$となる

以上より $B_0 = \mathcal{B}$
よって, 任意の集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$$

よって, X は確率変数である　□

定理 3.2. 標本空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の, 写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ に関する次の 4 つの命題は同値である

i) $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

ii) $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

iii) $\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

iv) $\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$

Proof. $i) \to iv)$

$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$ とする

$\{\omega \mid X(\omega) > x\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}^c$

なので, (完全加法族の) 定義より,

$\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}$

$iii) \to ii)$ も同様に示される

$iv) \to iii)$

$\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$ とする

$$\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} = \lim_{n\to\infty} \{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\}$$

ここで, $iv)$ の仮定より,

$\{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$ なので

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$ が導かれる

$ii) \to i)$

$\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}\,(x \in \mathbb{R})$ とする

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \lim_{n\to\infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\}$$

ここで, $ii)$ の仮定より,

$\{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$ なので

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$ が導かれる

□

例 3.1. X を標本空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とすれば,
$aX + b(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0), X^2, \sqrt{X}(X \geq 0)$ も確率変数となる。

Proof. (1) aX + b

i) $a > 0$ のとき, $\{aX + b \leq x\} = \{X \leq \frac{x-b}{a}\} \in \mathcal{A}$

ii) $a < 0$ のとき, $\{aX + b \leq x\} = \{X \geq \frac{x-b}{a}\} \in \mathcal{A}$

iii) $a = 0$ のとき,

$$\{aX + b \leq x\} = \{aX \leq x - b\} = \begin{cases} \Omega & (x - b \geq 0) \\ \phi & (x - b < 0) \end{cases} \in \mathcal{A} \qquad (※\, aX = 0)$$

(2) X^2

$$\{X^2 < x\} = \begin{cases} \phi & (x \leq 0) \\ \sqrt{x} < X < \sqrt{x} & (x > 0) \end{cases} \in \mathcal{A}\text{であり},$$

$$\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\} = \{X < \sqrt{x}\} \cap \{X > -\sqrt{x}\} \in \mathcal{A}$$

(3) $\sqrt{X}$

$$\{\sqrt{X} < x\} = \begin{cases} \phi & (x \leq 0) \\ \{X \leq x^2\} & (x > 0) \end{cases} \in \mathcal{A}$$

□

命題 3.3. X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とすれば,
$X+Y, XY, X/Y (Y \neq 0), max(X,Y), min(X,Y)$ も確率変数となる。

Proof. i) $X+Y$ が確率変数であることを示す

すべての有理数 $r_n (n = 1, 2, \dots)$ に対して,

集合 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\}\} \qquad (z \in \mathbb{R})$ とおく

$\{X < r_n\} \in \mathcal{A}, \{Y < z - r_n\} \in \mathcal{A}$ なので,

$\{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\} \in \mathcal{A}$ となり,

$A \in \mathcal{A}$

一方, 集合 $B = \{X + Y < z\}$ とおく

任意の $\omega \in A$ に対して, 有理数 r_n が存在して

$X(\omega) < r_n, Y(\omega) < z - r_n$ が成り立つ

したがって, $X(\omega) + Y(\omega) < z$ となり,

$\omega \in B$ より, $A \subset B$

逆に任意の $\omega \in B$ に対して $X(\omega) + Y(\omega) < z$

となるから, $X(\omega) < z - Y(\omega)$

ここで有理数の稠密性 (切っても隣の有理数は常に存在する) より,

ある n が存在して,

$X(\omega) < r_n, Y(\omega) < z - r_n$

が成り立つ

よって, $\omega \in \{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\}$

が成り立つ

よって, $\omega \in A$ となり, $B \subset A$

以上より, $A = B$ となり

$A \in \mathcal{A}$ であるから, $B \in \mathcal{A}$

ii) XY が確率変数であることを示す

$$
\begin{aligned}
&aX+b\in\mathcal{A}\text{ より}, a=-1, b=0\text{ とする}\\
&-X\in\mathcal{A}\text{ よって } i)\text{ より},\\
&X+(-Y)=X-Y\in\mathcal{A}\\
&X^2\in\mathcal{A}\text{ なので}, (X+Y)^2\in\mathcal{A}, (X-Y)^2\in\mathcal{A}\\
&\text{よって},\\
&XY=\frac{1}{4}\{(X+Y)^2-(X-Y)^2\}\in\mathcal{A}
\end{aligned}
$$

iii) X/Y が確率変数であることを示す　　$(Y\neq 0)$

$$
\begin{aligned}
&\{Y>0\}\cup\{Y<0\}=\Omega\\
&\{X/Y<x\}=\{X/Y<x\}\cap\Omega\\
&=\{\{Y>0\}\cap\{X/Y<x\}\}\cup\{\{Y<0\}\cap\{X/Y<x\}\}\\
&=\{\{Y>0\}\cap\{X-xY<0\}\}\cup\{\{Y<0\}\cap\{X-xY<0\}\}\in\mathcal{A}
\end{aligned}
$$

iv) $max\{X,Y\}$ が確率変数であることを示す

$$
\begin{aligned}
&max\{X,Y\}=Z,\ I=(a,b],\ (a,b\in\mathbb{R}, a<b)\\
&\{Z\in I\}=\{a<max\{X,Y\}\leq b\}\\
&=\{\{a<X\leq b\}\cap\{Y\leq b\}\}\cup\{\{a<Y\leq b\}\cap\{X\leq b\}\}\in\mathcal{A}
\end{aligned}
$$

v) $min\{X,Y\}$ が確率変数であることを示す

$$
\begin{aligned}
&min\{X,Y\}=Z,\ I=(a,b],\ (a,b\in\mathbb{R}, a<b)\\
&\{Z\in I\}=\{a<min\{X,Y\}\leq b\}\\
&=\{\{a<X\leq b\}\cap\{a\leq Y\}\}\cup\{\{a<Y\leq b\}\cap\{b\leq X\}\}\in\mathcal{A}
\end{aligned}
$$

$\square$