第11回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020年12月10日

命題 4.11. 共分散の性質

共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ について，以下が成り立つ．

i) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$

ii) $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$，$\mathrm{Cov}(Y, Y) = V(Y)$

iii) $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

iv) $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$

Proof. iv) の証明
任意の確率変数 X, Y に対して, 確率変数 Z, W を次の式で求める.

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}, \quad W = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E(Z) = E(W) = 0 \\ V(Z) = V(W) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(ZW) &= E(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}) \\ &= \frac{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \leq E(Z^2)E(W^2) = 1 \qquad (\because \text{標準化とヘルダーの不等式}) \\ & Cov(X,Y) \leq \sqrt{V(X)V(Y)} \\ & (Cov(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y) \end{aligned}$$

□

ヘルダーの不等式

$$(E(ZW))^2 \leq E(Z^2)E(W^2)$$
$E(Z) = E(W) = 0$ のとき,
$$Cov(Z,W) \leq V(Z)V(W)$$

命題 4.12. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ および $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ に対して,

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j) \tag{4.60}$$

が成り立つ.

補足

確率変数の和の共分散は, 確率変数の共分散の和になる.

定義 4.17. 相関係数

確率変数 X, Y の分散 $V(X)$, $V(Y)$ が存在するとき，以下で定義される $\rho(X, Y)$ を**相関係数** (correlation coefficient) とよぶ.

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \tag{4.61}$$

定理 4.13. 相関係数の性質

相関係数 $\rho(X, Y)$ について，以下が成り立つ.

i) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

ii) $\rho(X, Y) = \pm 1$ となるための必要十分条件は $a \neq 0$ なる a, b が存在して，$P(Y = aX + b) = 1$ が成り立つことである.

iii) X, Y が独立であるとき，$\rho(X, Y) = 0$ が成り立つ．逆は一般には成り立たない (確率変数の独立に関しては 4.4 節参照).

$i)$

$(Cov(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y)$ より導かれる.

補足

確率変数の

独立 $\neq$ 無相関　　独立には確率が必要.

4.4 確率変数の独立とその条件

定義 4.22. 確率変数の独立

確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が,

$$P(X_1 \in B_1,\ X_2 \in B_2, \ldots,\ X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

$$(B_i \in \mathscr{B}\ (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)) \tag{4.72}$$

を満たすとき, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立 (independent) であるという.

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であるとき, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\ (1 \leq p \leq n)$ を満たす任意の $i_1, i_2, \ldots, i_p$ について,

$$P(X_{i_1} \in B_{i_1},\ X_{i_2} \in B_{i_2}, \ldots,\ X_{i_p} \in B_{i_p}) = \prod_{j=1}^{p} P(X_{i_j} \in B_{i_j})$$

$$\left(B_{i_j} \in \mathscr{B}\ (j = 1,\ 2, \ldots,\ p)\right) \tag{4.73}$$

が成り立つことを注意しておく.

補足

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2)$$

X_1, X_2, X_3が独立 $\rightarrow$ X_1, X_2は独立 X_1, X_3は独立 X_2, X_3は独立

定理 4.18. h_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ を $\mathbb{R}$ 上の可測関数とする．このとき，確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であれば，$h_1(X_1), h_2(X_2), \ldots, h_n(X_n)$ も独立である．

補足

$$\begin{cases} X \text{ と } Y \text{ が独立} \\ aX+b \text{ と } cX+d \text{ も独立} \\ X^2 \text{と } Y^2 \text{も独立} \end{cases}$$

定理 4.19. 確率変数の独立（分布関数）

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は，

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{4.74}$$

が成り立つことである．ここで，$F_{\boldsymbol{X}}$ は $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時分布関数であり，F_{X_i} は X_i の分布関数である．

定理 4.20. 確率変数の独立（確率関数・確率密度関数）

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は，

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n) \tag{4.75}$$

が成り立つことである．ここで，X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ が離散型の場合，$f_{\boldsymbol{X}}$ は $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時確率関数であり，f_{X_i} は X_i の確率関数である．また，X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ が連続型の場合，$f_{\boldsymbol{X}}$ は $\boldsymbol{X}$ の同時確率密度関数であり，f_{X_i} は X_i の確率密度関数である．

母集団 X F_X $E(X) = \mu$ $V(X) = \sigma^2$

独立同一の分布（iid）に従う．

$X_1, X_2, \cdots, X_n - F_X$

標本分布 $f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

命題 4.21. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であれば，

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) \tag{4.76}$$

が成り立つ．

定理 4.22. 確率変数の独立（積率母関数）

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ の積率母関数 $m_{\boldsymbol{X}}$ と各確率変数の積率母関数 m_{X_i} について，以下が成り立つことである．

$$m_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t_i) \quad \left(\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)' \in \mathbb{R}^n\right) \tag{4.77}$$

定義 4.24. 独立同一分布

確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ が独立であり，かつ，同一の確率分布をもつとき，すなわち，任意の $i, j \in \mathbb{N}$ に対して，

$$F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x) = F(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.80}$$

が成り立つとき，$X_1, X_2, \ldots$ は**独立に同一分布に従う** (independent and identically distributed) といい，$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} F \ (i = 1, 2, \ldots)$ と記す．

※無作為標本と iid は必要十分条件

定理 4.25. 畳み込み

X, Y を独立な離散型または連続型の確率変数とする．それぞれの周辺確率関数または周辺確率密度関数を f_X, f_Y で表す．このとき，確率変数 X, Y の和 $Z = X + Y$ の確率関数または確率密度関数 f_Z は，

$$f_Z(z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) f_Y(z - x_i) & (X, Y \text{ が離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx & (X, Y \text{ が連続型}) \end{cases} \tag{4.81}$$

で与えられる．これを f_X と f_Y の**畳み込み** (convolution) といい，$f_Z = f_X * f_Y$ と記す．

補足

$$f_Z(Z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i, Z - x_i) = \sum f_X(x_i) f_Y(z - x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x_i, Z - x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_i) f_Y(z - x_i) \end{cases}$$

定理 4.26. 独立な連続型確率変数の積と商の分布

X, Y を独立な連続型の確率変数とする．それぞれの周辺確率密度関数を f_X, f_Y で表す．このとき，確率変数 X, Y の積 $Z_1 = XY$ の確率密度関数 f_{Z_1} および商 $Z_2 = X/Y$ の確率密度関数 f_{Z_2} はそれぞれ以下で与えられる．

$$f_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{z_1}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{z_1}{y}\right) f_Y(y) \frac{1}{|y|} dy \tag{4.82}$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{x}{z_2}\right) \frac{|x|}{z_2^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_2 y) f_Y(y) |y| dy \tag{4.83}$$

定理

確率変数 X_iが独立のとき,

$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$の積率母関数 $m_Z(t)$ は以下で与えられえる.

$m_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$

和の積率母関数は,積率母関数の積

Proof.

$$
\begin{aligned}
m_Z(t) &= E(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} E(X^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)
\end{aligned}
$$

□

4.5 条件付き期待値

定義 4.26. 条件付き期待値

条件付き確率分布 $P_{X|Y}$ による X の期待値を $Y=y$ を与えられたときの X の**条件付き期待値** (conditional expectation) とよび，$E(X|Y=y)$ と記す．すなわち，

$$
E(X|Y=y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_{X|Y}(x_i|y) & (X,\ Y \text{ が離散型}) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx & (X,\ Y \text{ が連続型}) \end{cases} \tag{4.87}
$$

となる．以下，簡単のため $E(X|Y=y)$ を $E(X|Y)$ と記す．

定義 4.27: X, Y を確率変数とし，ボレル関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ による X の変換 $h(X)$ の期待値が存在することを仮定する．このとき，$Y=y$ を与えられたときの $h(X)$ の条件付き期待値 $E(h(X)|Y)$ は，

$$
E(h(X)|Y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) f_{X|Y}(x_i|y) & (X,\ Y \text{ が離散型}) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{X|Y}(x|y)dx & (X,\ Y \text{ が連続型}) \end{cases} \tag{4.88}
$$

で与えられる．

命題 4.28. 条件付き期待値の性質

i) $E(1|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot f_{X|Y} dx = 1$

確率変数 X, Y, Z, $a, b \in \mathbb{R}$, ボレル関数 h に対して, 以下が成り立つ.

i) $E(1|Y) = 1$

ii) $E(aX + bY|Z) = aE(X|Z) + bE(Y|Z)$

iii) $E(E(X|Y)) = E(X)$

iv) $E(h(Y)X|Y) = h(y)E(X|Y)$

v) $E(E(h(X)|Y)) = E(h(X))$

ii) $E(aX + bY|Z)$

$$
\begin{aligned}
E(aX + bY|Z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x, y|z)dxdy \\
&= a\int\int xf_{X,Y|Z}(x, y|z)dxdy + b\int\int yf_{X,Y|Z}(x, y|z)dxdy \\
&= a\int x\int f_{X,Y|Z}(x, y|z)dxdy + b\int y\int f_{X,Y|Z}(x, y|z)dxdy \\
&= a\int xf_{X|Z}(x|z)dxdy + b\int yf_{Y|Z}(y|z)dy \\
&= aE(X|Z) + bE(Y|Z)
\end{aligned}
$$

iii) $E(E(X|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
E(E(X|Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y)f_Y(y)dy \\
&= \int(\int xf_{X|Y}(x|y)dx)f_Y(y)dy \\
&= \int\int xf_Y(y)f_{X|Y}(x|y)dxdy \\
&= \int\int xf_X(x, y(x|y)dxdy = \int x(\int f_X(x, y)dy)dx \\
&= \int xf(x)dx = E(X)
\end{aligned}
$$

iv) $E(h(Y)X|Y)$

$$
\begin{aligned}
E(h(Y)X|Y) &= h(y)\int xf_{X|Y}(x|y)dx \\
&= h(y)E(X|Y)
\end{aligned}
$$

v) iii) と同様

定義 4.29. 条件付き分散

定義4.27において，$h(X)=(X-E(X|Y))^2$としたものを**条件付き分散**(conditional variance) とよび，$V(X|Y)$と記す．すなわち，

$$V(X|Y)=E\left((X-E(X|Y=y))^2|Y\right) \tag{4.90}$$

となる．

命題 4.29. 条件付き分散の性質

確率変数X, Yに対して，以下が成り立つ．

$$V(X)=V(E(X|Y))+E(V(X|Y)) \tag{4.91}$$

Proof.

$$V(X|Y)=E(X^2|Y)-(E(X|Y))^2$$

$$\begin{aligned} V(X|Y) &= E((X-E(X|Y))^2) \\ &= E(X^2-2XE(X|Y)+(E(X|Y))^2) \\ &= E(X^2|Y)-2(E(X|Y))^2+(E(X|Y))^2 \\ &= E(X^2|Y)-(E(X|Y))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(E(X|Y)) &= E((E(X|Y))^2-(E(E(X|Y))^2)) \\ &= E_Y((E(X|Y))^2)-(E(X))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(V(X|Y)) &= E_Y(E((X^2|Y)-E(X|Y))^2) \\ &= E(X^2)-E((E(X|Y))^2) \end{aligned}$$

よって,$V(E(X|Y)+E(V(X|Y)))=E(X^2)-(E(X))^2=V(X)$

□

補足

$V(X|Y)=E(X^2|Y)-(E(X|Y))^2$