第6回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020年11月6日

定義 3.2. 可測関数, ボレル関数
可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ から, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{A}_2)$ への写像 $T : \Omega_1 \to \Omega_2$が,

$$T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \qquad (B \in \mathcal{A}_2)$$

を満たすとき, T は $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ 上の**可測な写像**であるという。特に, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ のとき, T を $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ 上の**可測関数**という。また, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ のとき, T を**ボレル関数**という。

定理 3.4. X を $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数とし, 関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

定理 3.5. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における, 確率変数 X に対して,

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \qquad (B \in \mathcal{B})$$
$$(\mathcal{B} : \text{ボレルセット}, B : \text{区間}, P(X^{-1}(B)) : \text{確率})$$

によって, $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上の確率速度 P_Xが定義され, 確率空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ が導かれる.
P_Xが確率空間であることを示す.

Proof. P_Xが確率になることを示す.

i) $0 \leq P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \leq 1$ が成り立つ.

ii) $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$ となり, 成り立つ. $\qquad (P(\Omega) = 1)$

iii) $B_i \in B(i = 1, 2, \dots), B_i \cap B_j = \phi(i \neq j)$

$$P_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)) \quad (\because \text{逆像})$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i)$$

となり, 成り立つ.

$\square$

定義 3.3. 確率分布
定理 3.5 によって定義された $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度 P_X は確率変数 X の**確率分布**と呼ばれる. このとき, X は確率分布 P_X に従うといい, X P_X と記す.

定義 3.4. 分布関数
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における確率変数 X に対して,

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(\{\omega \mid X(\omega) \le x\}) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 F_X を X の**分布関数**とよぶ.

補足

確率	$P(\{\omega \mid X(\omega) \le x\})$ (事象) $(x \in \mathbb{R})$
確率分布	$= P_X((-\infty, x])$ (区間)
分布関数	$= F_X(x)$ (実数)

定理 3.6. 分布関数の性質
確率変数 X の分布関数 F_X は次の性質を満たす.

i) F_X は単調非減少である.すなわち, $x < y \to F_X(x) \le F_Y(y)$ である.

ii) F_X は右連続である.すなわち, $\displaystyle\lim_{y \to x+0} F_X(y) = F_X(x)$ である.

iii) $\displaystyle F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ である. (階段関数も OK)

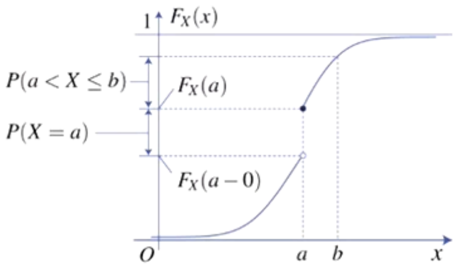

図 1: 分布関数

定義 3.5. 離散型確率変数
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における確率変数 X に対して, 有限または可算無限集合 $E = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ が存在して, $P(X \in E) = 1$ を満たすとき, X を**離散型確率変数**とよぶ.
以下, X が離散型確率変数であるとき, $x_i \in E (i = 1, 2, \ldots)$ に対して,
$p_i = P_X(\{x_i\}) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x_i\})$ と定める. このとき,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \qquad F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

が成り立つ.

補足

$$P_i = P_X(\{x_i\}) \quad (\text{区間 (一点)}) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x_i\}) \quad (\text{事象})$$

定義 3.6. 確率関数
離散型確率変数 X に対して, $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f_X を

$$f_X(x) = \begin{cases} p_i = P(\{x_i\}) & (x = x_i \in E(i = 1, 2, \ldots)) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

で定義する (定義域を $\mathbb{R}$ にするため) とき, f_X を X の**確率関数**とよぶ.

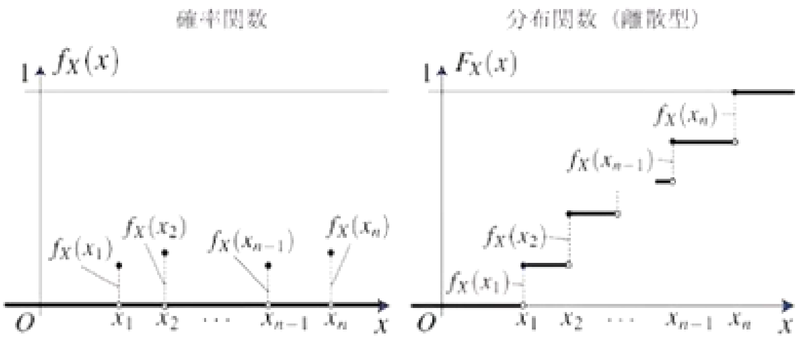

図 2: 確率関数と分布関数 (離散型)

例 (サイコロ)

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (x = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

命題 3.9. 確率関数の性質
離散型確率変数 X に対する確率変数 f_X は次の性質をもつ.

$$f_X(x) > 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) = 1, \qquad F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

命題 3.10. 離散型確率変数 X に対して, 以下が成り立つ.

$$P(X = x_i) = f_X(x_i) \quad (\text{離散型の特徴})$$
$$P(a < x \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} f_X(x) \quad (\text{区間の確率は和で書ける})$$

定義 3.7. 連続型確率変数, 確率密度関数
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ における確率変数 X に対して,$\mathbb{R}$ 上の非負値関数 f_Xが存在し,確率分布 P_Xが,

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)dx \qquad (B \in \mathcal{B})$$

によって表されるとき,f_Xは X の**連続型確率変数**とよばれ,f_Xは X の**確率密度関数**とよばれる.

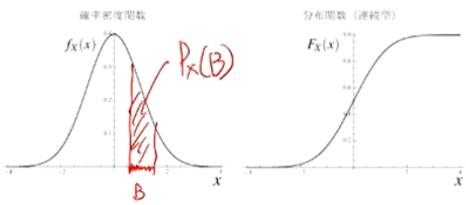

図 3: 確率関数と分布関数 (連続型)

命題 3.11. 確率密度関数の性質
連続型確率変数 X に対する確率密度関数 f_Xは次の性質を持つ.

$$f_X(x) > 0 \quad (x \in \mathcal{R}), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$$

命題 3.12. 連続型確率変数 X について以下が成り立つ.

$$P(X = x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{R})$$
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt$$

命題 3.13. 確率変数の関数の分布関数
確率変数 X のボレル関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ による変数変換 $Y = h(X)$ の分布関数 F_Yは次式で与えられる.

$$F_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x_i \in h^{-1}((-\infty, y])} f_X(x_i) & (X \text{ が離散型}) \\ \int_{h^{-1}((-\infty, y])} f_X(x)dx & (X \text{ が連続型}) \end{cases}$$

命題 3.14. 確率変数の関数の確率密度関数
連続型確率変数 X のボレル関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ による変数変換 $Y = h(X)$ の分布関数 F_Yは $\mathbb{R}$ において微分可能であり,かつ,その導関数 dF_Y/f_yが $\mathbb{R}$ において積分可能であれば,確率変数 Y の確率密

度関数は

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) \mid_{y=y} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

で与えられる.

定理 3.15. 連続型確率変数 X が確率密度関数 f_Xをもつとする.このとき,以下が成り立つ

i) 関数 $y = h(x)$ が区間 (a, b) で微分可能であり,かつ,単調増加または単調減少であるとする. このとき,確率変数 $Y = h(X)$ の確率密度関数は,以下で与えられる.

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \mid \frac{d}{dy}h^{-1}(y) \mid \quad (\alpha < y < \beta)$$

ただし, $\alpha = min(h(a), h(b))$, $\beta = max(h(a), h(b))$ である.

ii) 関数 $y = h(x)$ を区分的に連続な確率変数 $h_i(x)$ で $y = h_i(x)$ $(x \in I_i)$ と分割する. ただし, $I_i = (a_i, a_{i+1}]$ であり, $I_i \cap I_j = \phi(i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = (a, b)$ とする. h_iを区間 I_iで微分可能であり,かつ,単調減少であるとし,区間 I_iでの h_iの逆関数を h_i^{-1}で表す. このとき, $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} h_i(I_i)$ を満たす y に対して,確率変数 $Y = h(X)$ の確率密度関数は,以下で与えられる.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_X(h_i^{-1}(y)) \mid \frac{d}{dy}h_i^{-1}(y) \mid$$

例 3.2. X を連続型確率変数とする.X の変数変換 $Y = aX + b(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ 確率密度関数 f_Yは X の確率密度関数 f_Xを用いて,以下のように表される.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\mid a \mid} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

例 3.3. X を連続型確率変数とする.X の変数変換 $Y_1 = e^X, Y_2 = logX, Y_3 = |X|, Y_4 = X^2$の確率密度関数 $f_{Y_1}, f_{Y_2}, f_{Y_3}, f_{Y_4}$ は X の確率密度関数 f_Xを用いて,以下のように表される.

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{y} f_X(logy) \qquad (y > 0)$$
$$f_{Y_2}(y) = e^y f_X(e^y)$$
$$f_{Y_3}(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & (y \geq 0) \\ 0 \quad (y < 0) \end{cases}$$
$$f_{Y_4}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) & (y \geq 0) \\ 0 \quad (y < 0) \end{cases}$$

(1) $y = e^x$

$$x = h^{-1}(y) = logy \quad (y > 0)$$
$$\frac{d}{dy} h^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

(2) $y \cdot logX \quad x = h^{-1}(y) = e^y, \quad \frac{d}{dy} h^{-1}(y) = e^y$

(3) $y = |x| \quad I_1 = (-\infty, 0], I_2 = (0, \infty]$
h, y, I_1で単調減少, I_2で単調増加
$y \geq 0$ のとき,

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} -y & (x \in I_1) \\ y & (x \in I_2) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dy} h^{-1}(y) = \begin{cases} -1 & (x \in I_1) \\ 1 & (x \in I_2) \end{cases}$$

$$f_Y(y) + f_X(-y) = \begin{cases} f_X(y) & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$