

# 第5回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020 年 11 月 11 日

**定理 3.1.** 標本空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  において, 写像  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が確率変数であるための必要十分条件は,  $X$  が,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たすことである。

*Proof.* ( $\Rightarrow$ )

$X$  が確率変数ならば, 任意の  $B \in \mathcal{B}$  に対して,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

なので,  $B = (-\infty, x]$  とすれば

$$\begin{aligned} X^{-1}((-\infty, x]) &= \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x]\} \\ &= \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ )

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$

ここで,  $B = (-\infty, x] (x \in \mathbb{R})$  とし,

$\{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$  となる集合  $B$  の全体を  $B_0$  とする

$B_0$  が完全加法族とすることを示す

i)  $\mathbb{R} \in \Omega$  とする

$$\begin{aligned} \{\omega \mid X(\omega) \in \Omega\} &= \{\omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, n]\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

ii)  $B \in B_0$ ならば (定義 2.2 完全加法族 ii より)

$$\{\omega \mid X(\omega) \in B^c\} = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}^c \in \mathcal{A}$$

よって,  $B^c \in B$

iii)  $B_i \in B_0 (i = 1, 2, \dots)$  (定義 2.2 完全加法族 iii より)

$$\{\omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \in B_i\} \in \mathcal{A}$$

よって,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in B_0$

以上より,  $B_0$ は完全加法族である  
さらに,  $B_0 = B$  となることを示す

まず,  $B \in B_0$ とする

$B = (-\infty, x], x \in R$  より  $B \in B$  となり,  
 $B_0 \subset B$  となる

次に,  $B \in B$  とする

$B = (-\infty, x], (a, b \in R)$  なので

$$\begin{aligned} \{\omega \mid X(\omega) \in B\} &= \{\omega \mid X(\omega) \in (a, b)\} \\ &= \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, b]\} \cap \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}^c \end{aligned}$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned} \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, b]\} &\in \mathcal{A} \\ \{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}^c &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

なので,  $B \in B_0$ となる

以上より  $B_0 = B$

よって, 任意の集合  $B \in B$  に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

よって,  $X$  は確率変数である

□

**定理 3.2.** 標本空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上の, 写像  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  に関する次の 4 つの命題は同値である

i)  $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R})$

ii)  $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R})$

iii)  $\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R})$

iv)  $\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R})$

*Proof.* i)  $\rightarrow$  iv)

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$

$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}^c$$

なので, (完全加法族の) 定義より,

$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}$$

iii)  $\rightarrow$  ii) も同様に示される

iv)  $\rightarrow$  iii)

$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$

$$\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\}$$

ここで, iv) の仮定より,

$$\{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ なので}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) > x - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ が導かれる}$$

ii)  $\rightarrow$  i)

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{A} (x \in \mathbb{R}) \text{ とする}$$

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\}$$

ここで, ii) の仮定より,

$$\{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ なので}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A} \text{ が導かれる}$$

□

**例 3.1.**  $X$  を標本空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上の確率変数とすれば,  
 $aX + b (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0), X^2, \sqrt{X} (X \geq 0)$  も確率変数となる。

*Proof.* (1)  $aX + b$

$$\text{i) } a > 0 \text{ のとき, } \{aX + b \leq x\} = \{X \leq \frac{x-b}{a}\} \in \mathcal{A}$$

$$\text{ii) } a < 0 \text{ のとき, } \{aX + b \leq x\} = \{X \geq \frac{x-b}{a}\} \in \mathcal{A}$$

iii)  $a = 0$  のとき,

$$\{aX + b \leq x\} = \{aX \leq x - b\} = \begin{cases} \Omega & (x - b \geq 0) \\ \phi & (x - b < 0) \end{cases} \in \mathcal{A} \quad (\ast aX = 0)$$

(2)  $X^2$

$$\{X^2 < x\} = \begin{cases} \phi & (x \leq 0) \\ \sqrt{x} < X < \sqrt{x} & (x > 0) \end{cases} \in \mathcal{A} \text{ であり,}$$

$$\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\} = \{X < \sqrt{x}\} \cap \{X > -\sqrt{x}\} \in \mathcal{A}$$

(3)  $\sqrt{X}$

$$\{\sqrt{X} < x\} = \begin{cases} \phi & (x \leq 0) \\ \{X \leq x^2\} & (x > 0) \end{cases} \in \mathcal{A}$$

□

**命題 3.3.**  $X, Y$  を確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上の確率変数とすれば,  
 $X + Y, XY, X/Y (Y \neq 0), \max(X, Y), \min(X, Y)$  も確率変数となる。

*Proof.* i)  $X + Y$  が確率変数であることを示す

すべての有理数  $r_n (n = 1, 2, \dots)$  に対して,

集合  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\}$  ( $z \in \mathbb{R}$ ) とおく

$\{X < r_n\} \in \mathcal{A}, \{Y < z - r_n\} \in \mathcal{A}$  なので,

$\{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\} \in \mathcal{A}$  となり,

$A \in \mathcal{A}$

一方, 集合  $B = \{X + Y < z\}$  とおく

任意の  $\omega \in A$  に対して, 有理数  $r_n$  が存在して

$X(\omega) < r_n, Y(\omega) < z - r_n$  が成り立つ

したがって,  $X(\omega) + Y(\omega) < z$  となり,

$\omega \in B$  より,  $A \subset B$

逆に任意の  $\omega \in B$  に対して  $X(\omega) + Y(\omega) < z$

となるから,  $X(\omega) < z - Y(\omega)$

ここで有理数の稠密性 (切っても隣の有理数は常に存在する) より,

ある  $n$  が存在して,

$X(\omega) < r_n, Y(\omega) < z - r_n$

が成り立つ

よって,  $\omega \in \{X < r_n\} \cap \{Y < z - r_n\}$

が成り立つ

よって,  $\omega \in A$  となり,  $B \subset A$

以上より,  $A = B$  となり

$A \in \mathcal{A}$  であるから,  $B \in \mathcal{A}$

ii)  $XY$  が確率変数であることを示す

$$\begin{aligned}
& aX + b \in \mathcal{A} \text{ より, } a = -1, b = 0 \text{ とする} \\
& -X \in \mathcal{A} \text{ よって } i) \text{ より,} \\
& X + (-Y) = X - Y \in \mathcal{A} \\
& X^2 \in \mathcal{A} \text{ なので, } (X + Y)^2 \in \mathcal{A}, (X - Y)^2 \in \mathcal{A} \\
& \text{よって,} \\
& XY = \frac{1}{4} \{(X + Y)^2 - (X - Y)^2\} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

iii)  $X/Y$  が確率変数であることを示す ( $Y \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
& \{Y > 0\} \cup \{Y < 0\} = \Omega \\
& \{X/Y < x\} = \{X/Y < x\} \cap \Omega \\
& = \{\{Y > 0\} \cap \{X/Y < x\}\} \cup \{\{Y < 0\} \cap \{X/Y < x\}\} \\
& = \{\{Y > 0\} \cap \{X - xY < 0\}\} \cup \{\{Y < 0\} \cap \{X - xY < 0\}\} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

iv)  $\max\{X, Y\}$  が確率変数であることを示す

$$\begin{aligned}
& \max\{X, Y\} = Z, I = (a, b], (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \\
& \{Z \in I\} = \{a < \max\{X, Y\} \leq b\} \\
& = \{\{a < X \leq b\} \cap \{Y \leq b\}\} \cup \{\{a < Y \leq b\} \cap \{X \leq b\}\} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

v)  $\min\{X, Y\}$  が確率変数であることを示す

$$\begin{aligned}
& \min\{X, Y\} = Z, I = (a, b], (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \\
& \{Z \in I\} = \{a < \min\{X, Y\} \leq b\} \\
& = \{\{a < X \leq b\} \cap \{a \leq Y\}\} \cup \{\{a < Y \leq b\} \cap \{b \leq X\}\} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

□