第3回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020 年 11 月 8 日

定理 2.8. 完全劣加法性
$A_i \in \mathcal{A}\,(i = 1, 2, \ldots)$ ならば, 以下が成り立つ。

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

この性質を **完全劣加法性** という。

系 2.9. 有限劣加法性
$A_i \in \mathcal{A}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば, 以下が成り立つ。

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

この不等式は **ブールの不等式** とよばれ、この性質を **有限劣加法性** という。

補足

$B_1 = A_1$
$B_2 = A_2 \cap {A_1}^c$
$A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$
$B_i \subset A_i$

Proof. A_i を互いに排反な事象 B_i で表す。

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_i = A_i \cap (\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)^c \qquad (i \geqq 2) \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cdots ※ \\ B_1 \subset A_i (i = 1, 2, \ldots) \end{cases} \quad \text{が成り立つ。}$$

※より、

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \qquad (\because B_i \text{ が互いに排反}) \end{aligned}$$

したがって、$B_i \in A_i$であるから,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

□

定理 2.10. ボンフェローニの不等式
$A_i \in \mathcal{A}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば, 以下が成り立つ。

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} P({A_i}^c)$$

この不等式を **ボンフェローニの不等式** という。

Proof.

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P((\bigcup_{i=1}^{n} {A_i}^c)^c) \\ &= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} {A_i}^c) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (\because \text{ブールの不等式}) \end{aligned}$$

□

定理 2.11. 条件付き確率
確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ において，事象 $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ (ただし, $P(B) > 0$) が与えられているとき，以下で定義される実数関数 $P(\cdot \mid B)$ は確率測度となる。

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (A \in \mathcal{A})$$

このとき $P(A \mid B)$ を事象 B が起こったという条件のもとでの事象 A の条件付き確率とよぶ。

1. $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$
2. $P(\Omega \mid B) = 1$
3. $A_i (i = 1, 2, \dots) \in \mathcal{A}$ を互いに排反とすると、
   $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \mid B\right)$

注

$P(\cdot \mid B)$ と P(・) の 2 つは異なる関数

定理 2.15. A, B $\in \mathcal{A}, P(A), P(B) > 0$ について，以下が成り立つ。

i) $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$ 　　(乗法定理)

Proof.

$$P(A)P(B \mid A) = P(A)\frac{P(A)}{P(B \cap A)} = P(A \cap B)$$
$$P(B)P(A \mid B) = P(B)\frac{P(B)}{P(A \cap B)} = P(A \cap B)$$

□

ii) $P(A \mid B) = P(A)$ ならば, $P(B \mid A) = P(B)$

Proof.

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A \mid B)} = P(B)$$

□

iii) $P(A \cap B) \leq P(B \mid A), P(B \cap A) \leq P(A \mid B)$

Proof.

$$\begin{aligned}
&P(B \mid A) - P(A \mid B) \\
&= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} - P(A \cap B) \\
&= (A \cap B)(\frac{1}{P(A)} - 1) \\
&= (A \cap B)(\frac{1 - P(A)}{P(A)}) \geq 0 \qquad (\because P(A) \leq 1)
\end{aligned}$$

□

定理 2.16. $A, A_i \in \mathcal{A}\,(i=1,2,\ldots,n), P(A)>0$ について, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_i \cap A_j = \phi\,(i \neq j)$ ならば, 以下が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid A) = 1$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\sum P(A_i \mid A) &= \sum \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{1}{P(A)} \sum P(A_i \cap A)
\end{aligned}$$

ここで、$A_i \cap A = B_i$とする。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{P(A)} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \\
&= \frac{1}{P(A)} P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A)) \\
&= \frac{1}{P(A)} P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i) \cap A) \\
&= \frac{1}{P(A)} P(\Omega \cap A) \\
&= \frac{P(A)}{P(A)} = 1
\end{aligned}$$

□

補足

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega,\; A_i \cap A_j = \phi \qquad (i \neq j)$$ のとき, A_iはΩを分割したものである。

また、$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A$ は以下のように変形できる。

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A = \Omega \cap A = A$$

例 2.7. $A, B, C \in \mathcal{A}$ について, 以下が成り立つ。

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$

Proof.

$$\begin{aligned} P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B) &= P(A)\frac{P(A)}{P(A \cap B)}\frac{P(C \cap B \cap A)}{P(A \cap B)} \\ &= P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

□

注

積集合は条件付き確率の積であって、確率の積ではない。

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B \mid A) \\ &\neq P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

定理 2.17. 一般乗法定理
$A_i \in \mathcal{A} (i = 1, 2, \ldots, n) mP \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ ならば, 以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &\times \cdots \times P(A_i \mid \bigcap_{i=1}^{l-1} A_i) \times \cdots \times P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \end{aligned}$$

この性質は**一般乗法定理**とよばれる。(帰納法で証明可能)

例 2.8. ポリアの壺
1 つの壺に白玉 w 個, 黒玉 b 個入っている。この壺から無作為に 1 個の玉を取り出す。この玉を元の壺に返し, その際に, 取り出された多摩と同じ色の玉を $c(> 0)$ 個壺に入れる。このような試行を n 回行う。i 番目に取り出された玉の色が白あるいは黒である事象をそれぞれ $W_i, B_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ と記す。このとき,

$$P(W_i) = \frac{w}{w+b}, \qquad P(B_i) = \frac{b}{w+b} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ。この例を **ポリアの壺**とよばれる。

Proof. i = 1 のとき, 以下のように表される。

$$P(W_1) = \frac{w}{w+b}, \qquad P(B_1) = \frac{b}{w+b}$$

i = 2 のときを考える。

$$\begin{aligned} P(W_2 \mid W_1) = \frac{w+c}{w+b+c} \neq P(W_2) \qquad P(W_2 \mid B_1) = \frac{w}{w+b+c} \\ P(B_2 \mid B_1) = \frac{b+c}{w+b+c} \qquad P(B_2 \mid B_1) = \frac{b}{w+b+c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(W_1 \cap W_2) = P(W_1)P(W_2 \mid W_1) = \frac{w}{w+b} \cdot \frac{w+c}{w+b+c} \\ P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) = \frac{b}{w+b} \cdot \frac{b+c}{w+b+c} \\ P(W_1 \cap B_2) = P(W_1)P(B_2 \mid W_1) = \frac{w}{w+b} \cdot \frac{b}{w+b+c} \\ P(B_1 \cap W_2) = P(B_1)P(W_2 \mid B_1) = \frac{b}{w+b} \cdot \frac{w}{w+b+c} \end{aligned}$$

$W_2 = W_2 \cap (W_1 \cup B_1) = (W_2 \cap W_1) \cap (W_2 \cup B_1)$ より、

$$\begin{aligned} P(W_2) &= P(W_1 \cap W_2) + P(W_1 \cap W_2) \\ &= \frac{w}{w+b} \cdot \frac{w+c}{w+b+c} + \frac{b}{w+b} \cdot \frac{b}{w+b+c} \\ &= \frac{w(w+c+b)}{(w+b)(w+b+c)} = \frac{w}{w+b} \end{aligned}$$

□

定理 2.18. 全確率の定理
$A_i, B \in \mathcal{A} (i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_i \cap A_j \ (i \neq j)$ が成り立ち, $P(A_i) > 0$ ならば, 以下が成り立つ。

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

この性質は, **全確率の定理**とよばれる。

Proof.

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap \Omega) \\
&= P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \\
&= P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)
\end{aligned}$$

□

定理 2.19. ベイズの定理
$A_i, B \in \mathcal{A}(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_i \cap A_j \ (i \neq j)$ が成り立ち, $P(A_i), P(B) > 0$ ならば, 以下が成り立つ。

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

この性質は, **ベイズの定理**とよばれる。

補足

事前確率：$P(A_i) \cdots$ 事象 B が起きる前
事後確率：$P(A_i \mid B) \cdots$ 事象 B が起きた後

例 2.9. モンティホール問題
存在する 3 つのドアの名前をを A, B, C, ドアが当たりである確率を P(X), P(Y) をホストが開けるドアの確率とおく。
ここで, プレイヤーがドア A を常に最初に選択するという仮定のもと, プレイヤーが当たりのドアを開ける条件付き確率を考える。
プレイヤーが最初の選択を変えないとき ($P(Y = A \mid X = B) = \frac{1}{2}$), 以下のようになる。

$$P(X = B \mid Y = A) = \frac{P(Y = A \mid X = B)}{P(Y = A)} P(X = B) = \frac{1}{3}$$

プレイヤーが最初の選択を変えるとき ($P(Y = A \mid X = C) = 1$), 以下のようになる。

$$P(X = C \mid Y = A) = \frac{P(Y = A \mid X = C)}{P(Y = A)} P(X = C) = \frac{2}{3}$$

したがって、プレイヤーは最初の選択を変えたときのほうが当たりやすいと言える。