第 9 回 数理統計 レポート

小森 一輝

2020 年 11 月 27 日

定義 4.1. 多次元確率変数
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ において, 写像の組 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$が任意の集合 $\mathbf{B} \in \mathscr{B}^n$に対して,

$$\mathbb{X}^{-1}(\mathscr{B}) = \{\omega \mid \mathbb{X}(\omega) \in \mathbf{B}\} \in \mathscr{A}$$

を満たすならば, $\mathbb{X}$ は n **次元確率変数 (n dimensional random vraiable)** とよばれる.
ここで, $\mathbf{B} = \prod_{i=1}^{n} B_i (= B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n), B_i \in \mathscr{B}(i = 1, 2, \ldots, n)$ である.

定理 4.1. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ において, 写像の組 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ が n 次元確率変数であるための必要十分条件は, $\mathbb{X}$ が,

$$\mathbb{X}^{-1} = \{\omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

を満たすことである. ここで,

$$\{\omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leq x\} = \{\omega \mid X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\}$$

であり,

$$I^n = \prod(-\infty, x_i] = (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$$

である.

定義 4.2. 同時確率分布
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における, n 次元確率変数 $\quad \mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad$ に対して,

$$P_{\mathbb{X}}(\mathbf{B}) = P(\mathbb{X}^{-1}(\mathbf{B})) \qquad (\mathbf{B} \in \mathscr{B}^n)$$

によって定義される $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 上の確率測度 $P_{\mathbb{X}}$ は $\mathbb{X}$ の**同時確率分布 (joint probability distribution)** とよばれる.このとき, $\mathbb{X}$ は $P_{\mathbb{X}}$ に従うといい, $X \sim P_{\mathbb{X}}$ と記す.

定義 4.3. 周辺確率分布
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における, n 次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ に対して, $\mathbb{X}_{(p)} = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ip})(1 \leq p < n; 1 \leq i_1 \leq i_2 < \cdots < i_p \leq n)$ としたとき,

$$P_{\mathbb{X}_{(p)}}(\mathbf{B_{(p)}}) = P\left(\mathbb{X}_{(p)}^{-1}(\mathbf{B}_{(p)})\right) \qquad (\mathbf{B}_{(p)} \in \mathscr{B}^p)$$

によって定義される, $(\mathbb{R}^p, \mathbb{B}^p)$ 上の確率測度 $P_{\mathbb{X}}$ は $\mathbb{X}_{(p)}$ の**周辺確率分布 (marginal probability distribution)** とよばれる.ここで, $\mathbf{B}_{(p)} = \prod_{j=1}^{p} B_{ij}$ である.

定義 4.4. 条件付き確率分布
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における n 次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を, $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_{(p)}, \mathbb{X}_{(q)})$ と 2 つに分ける.ただし,一般性を失うことなく,

$$\mathbb{X}_{(p)} = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ip}),\ \mathbb{X}_{(q)} = (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jq})$$

であり,添え字集合 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p), J = (j_1, j_2, \ldots, j_q)$ に関して,

$$\begin{aligned} I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}, &\qquad I \cap J = \phi \\ 1 \leq p < n, &\qquad q = n - p \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n, &\qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n \end{aligned}$$

が成り立っているとする.このとき,

$$P_{(\mathbb{X}_{(p)}|\mathbb{X}_{(q)})}(\mathbf{B}_{(p)} \mid x_{(q)}) = \begin{cases} \frac{P\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbf{B}_{(p)} \times \{x(q)\}\right)}{p(\mathbb{X}_{(q)}^{-1}(\{x_{(q)}\}))} & \left(p(\mathbb{X}_{(q)}^{-1}(\{x_{(q)}\})) > 0\right) \\ 0 & \left(p(\mathbb{X}_{(q)}^{-1}(\{x_{(q)}\})) = 0\right) \end{cases}$$

によって定義される $(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}^p)$ 上の確率測度 $P_{\mathbb{X}_{(p)}|\mathbb{X}_{(q)}}$ を $\mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)}$ が与えられたときの $\mathbb{X}_{(p)}$ の**条件付き確率分布 (conditional probability distribution)** とよぶ.
ここで $\mathbf{B}_{(p)} = \prod_{k=1}^{p} B_{ik} \in \mathscr{B}^p$ であり, $\{x_q\} = \prod_{k=1}^{q}\{x_{jk}\}$ である.

定義 4.5. 同時確率分布
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における n 次元確率変数 $\mathbb{X}$ に対して,

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P_{\mathbb{X}}\left(\prod_{i-1}^{n}(-\infty, x_i]\right) = P(\mathbb{X} \leq x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義される $\mathbb{R}^n$上の実数関数 $F_{\mathbb{X}}$を $\mathbb{X}$ の**同時分布関数 (joint distribution function)** とよぶ.

定義 4.6. 周辺分布関数
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における n 次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ に対して, n 次元確率変数 $\mathbb{X}_{(p)} = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_p})(1 \leq p < n;\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n)$ としたとき,

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{X}_{(p)}}(x_{(p)} &= F_{\mathbb{X}}(\infty, \ldots, \infty, x_{i_1}, \infty, \ldots, \infty, x_{i_p}, \infty, \ldots, \infty) \\ &= P(X_{i_1} \leq x_{i_1}, X_{i_2} \leq x_{i_2}, \ldots, X_{i_p} \leq x_{i_p}) \\ &= P(X_p \leq x_p) \end{aligned}$$

を $\mathbb{X}_{(p)}$の**周辺分布関数 (marginal distribution function)** とよぶ.

定義 4.7. 条件付き分布関数
確率空間 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ における n 次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を定義 4.4 と 同時 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_{(p)}, \mathbb{X}_{(q)})$ と 2 つに分ける.このとき,

$$F_{\mathbb{X}_{(p)}|\mathbb{X}_{(q)}} = \begin{cases} \frac{P(\mathbb{X}_{(p)}) \leq x_{(p)}, \mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)}}{P(\mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)})} & \left(P\left(\mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)}\right) > 0\right) \\ 0 & \left(P\left(\mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)}\right) = 0\right) \end{cases}$$

を $\mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)}$を与えられたときの $\mathbb{X}_{(p)}$の**条件付き分布関数 (conditional distribution function)** とよぶ.

定義 4.8. n 次元離散型確率変数
n 次元確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ に対して, ある集合

$$E = \{x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}) \mid k = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$$

が存在し, $P(\mathbb{X} \in E) = 1$ を満たすとき, $\mathbb{X}$ を **n 次元離散型確率変数 (n dimensional discrete random vraiable)** とよぶ.

$\mathbb{X}$ が n 次元離散型確率変数のとき, $x_k \in E(k = 1, 2, \ldots)$ に対して, $p_k = P_{\mathbb{X}}(\{x_k\})$ とすれば,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \qquad F_{\mathbb{X}}(x) = \sum_{x_i \leq x} p_k$$

が成り立つ.

定義 4.9. 同時確率関数
n 次元離散型確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ に対して,$\mathbb{R}^n$上の実数値関数

$$f_{\mathbb{X}}(x) = \begin{cases} p_k = P(\mathbb{X} = x_i) & (x = x_i \in E(k = 1, 2, \ldots)) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

を $\mathbb{X}$ の**同時確率関数 (joint probability function)** とよぶ.ここで,$E = \{x_k = \{x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}\} \mid k = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}^n$である.

定義 4.10. 周辺確率関数
n 次元離散型確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を定義 4.4 と同時に $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_{(p)}, \mathbb{X}_{(q)})$ と 2 つに分ける.このとき,

$$f_{\mathbb{X}_{(p)}}(x_{(p)}) = \sum_{j1=1}^{\infty} \sum_{j2=1}^{\infty} \cdots \sum_{jq=1}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x) = P\left(\mathbb{X}_{(p)} = x_{(p)}\right)$$

を $\mathbb{X}_{(p)}$の**周辺確率関数 (marginal probability function)** とよぶ.

定義 4.11. 条件付き確率関数
n 次元離散型確率変数 $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を定義 4.4 と同様に $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_{(p)}, \mathbb{X}_{(q)})$ と 2 つに分ける.このとき,

$$f_{\mathbb{X}_{(p)}|\mathbb{X}_{(q)}} = \begin{cases} \frac{f_{\mathbb{X}}(x)}{f_{\mathbb{X}_{(q)}}(x_{(q)})} = \frac{P(\mathbb{X}=x)}{P\left(\mathbb{X}_{(q)}=x_{(q)}\right)} & \left(f_{\mathbb{X}_{(q)}(x_{(q)}>0)}\right) \\ 0 & \left(f_{\mathbb{X}_{(q)}(x_{(q)}=0)}\right) \end{cases}$$

を $\mathbb{X}_{(q)} = x_{(q)}$が与えられたときの $\mathbb{X}_{(p)}$の**条件付確率関数 (conditional probability function)** とよぶ.

例 4.4. 2 次元離散型確率変数 (X, Y) の同時確率関数 $f_{X,Y}$, 周辺確率関数 f_X, f_Y, 条件付き確率関数 $f_{X|Y}$は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= P(X = x_i, Y = y_i) \\ f_X(x) = P(X = x_i), \qquad f_Y(y) &= P(Y = y_i) \\ f_{X|Y}(x \mid y) &= \frac{P(X = x_i, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} \end{aligned}$$

例 4.5. 2 次元離散型確率変数 (X, Y) に対して, 標本空間Ωを

$$\Omega = \{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, n; j = i, 2, \ldots m\} \subset \mathbb{R}^2$$

とし, 同時確率関数を,

$$f_{X,Y}(i, j) = p_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; j = i, 2, \ldots m)$$

とおく. このとき, 周辺確率関数は,

$$f_X(i) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = p_{i\cdot} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad f_Y(j) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} = p_{\cdot j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

で表せられ, 条件付き確率関数は,

$$f_{X|Y}(i \mid j) = \frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad f_{Y|X}(j \mid i) = \frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}}(j = 1, 2, \ldots, m)$$

で表される. また,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} P_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}} = 1$$

が成り立つ.

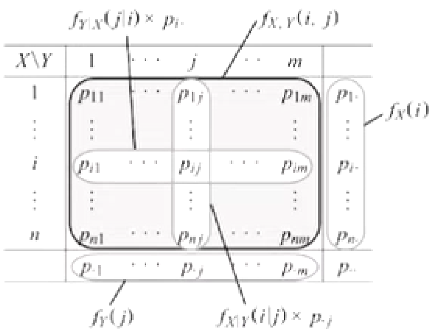

図 1: 2 次元離散型確率変数の分布