レポート例

岡部 格明

2020 年 10 月 1 日

命題 0.1. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{p\times(p-q)}$, $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ は正則行列，$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ とする．
このとき，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^\top = I \tag{1}$$

が成り立つ．

Proof. $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ の列空間への射影行列は

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}])^{-1}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top &= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top \\
&= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top \\
&= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B})^{-1} \end{bmatrix}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})^{-1}, & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^\top \\ \boldsymbol{B}^\top \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^\top
\end{aligned}$$

となる．
　一方で，$\boldsymbol{A}$ の列空間への射影 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}$ を考えると，

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top$$

であり，$\boldsymbol{A}$ の列空間と直交する空間への射影を $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}^\perp$ とすると

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}^\perp = I$$

が成り立つ．いま $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ より，$\boldsymbol{B}$ の列空間と $\boldsymbol{A}$ の列空間が直交することから，

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{B}} = I$$

が成り立つ．
　よって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^\top = I$ が成り立つ．

□