２０２１年度春学期金曜４限　線形代数【担当者：貴田研司】第４週（５／７）資料教材

【ガウス・ジョルダンの消去法（教科書 pp.35-p37)】

n 次行列の逆行列の計算方法を紹介する．

[ガウス・ジョルダンの消去法]

n 次行列 A に対して

$$\begin{pmatrix} A & | & E \end{pmatrix} \text{ 行基本変形 } \begin{pmatrix} E & | & X \end{pmatrix}$$

とすることが出来たならば，$X = A^{-1}$ である．■

（参考）

$n = 2$ の場合が，第 2 週で紹介したものである．

＜掃き出し法（2 次行列の場合）＞

2 次行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 行基本変形 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x & y \\ 0 & 1 & | & z & w \end{pmatrix}$$

とすることを，掃き出し法を行うという．

このとき，$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ である．■

[行基本変形の表記法]

第２週で紹介した行基本変形の表記方法について述べる．行（row）について，第 k 行を R_k という記号で表わす．

（ア） 1 つの行を定数倍 $(\neq 0)$ する．

例　第 2 行を 5 倍する．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \\ x & y \end{pmatrix} R_2 \times 5 \longrightarrow R_2 \begin{pmatrix} a & b \\ 5r & 5s \\ x & y \end{pmatrix}$$

（イ）ある一つの行を何倍かを，他の行に加える．例　第 1 行の４倍を，第 3 行に加える．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \\ x & y \end{pmatrix} R_1 \times 4 + R_3 \longrightarrow R_3 \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \\ x + 4a & y + 4b \end{pmatrix}$$

＊第 1 行は変更しないことに注意して欲しい．変更されるのは第 3 行のみである．

（ウ）２つの行の並んでいる順番を入れ替える．

例　第１行と第３行を入れ替える．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \\ x & y \end{pmatrix} R_1 \longleftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \\ a & b \end{pmatrix}$$

■

例題 4.2.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ の逆行列を，ガウス・ジョルダンの消去法を用いて求めよ．

（解答）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \times (-2) + R_2 \longrightarrow R_2 \\ R_1 \times 2 + R_3 \longrightarrow R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \times \tfrac{1}{3} \longrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \times 1 + R_1 \longrightarrow R_1 \\ R_2 \times (-1) + R_3 \longrightarrow R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \times 3 \longrightarrow R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + R_1 \longrightarrow R_1 \\ R_3 \times \frac{4}{3} + R_2 \longrightarrow R_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

なので，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 4 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$．■

以上