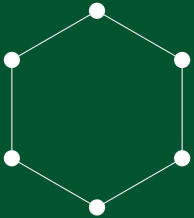
問題: 色塗りの問題

次のような正六角形の各頂点に n 種類の色を使って色塗りをすることを考える．使わない色はあってもよい．このとき色塗りの方法は全部で何通りか．ただし回転させて一致する塗り方は 1 通りと数える．

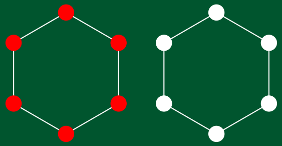


例: $n=2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.

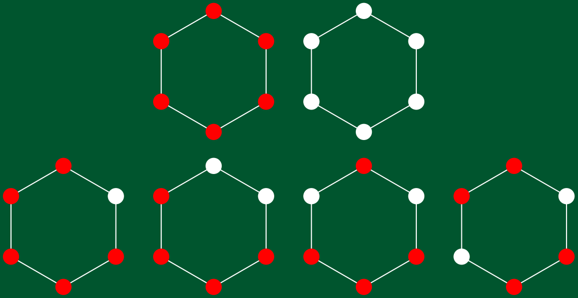
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



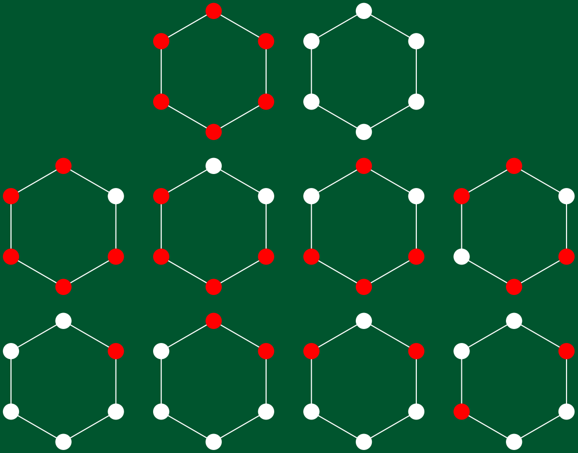
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



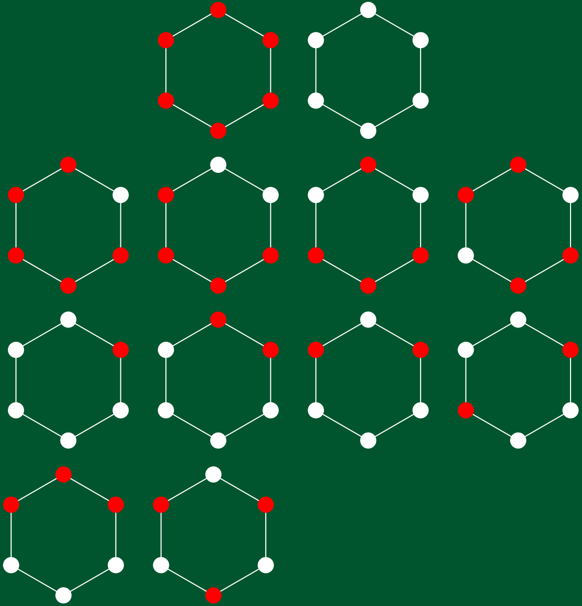
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



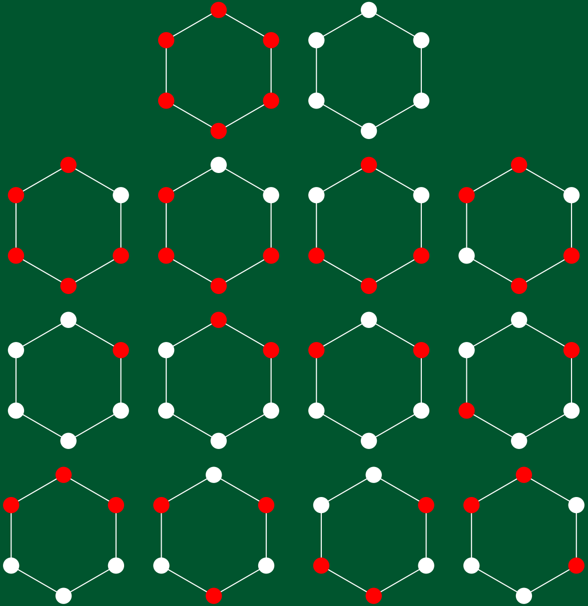
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



Burnside の補題

Burnside の補題:
有限群 G が有限集合 X に作用しているとする．このとき

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

ただし, $|X/G|$ は G 軌道の個数, X^g は固定元全体.

Burnside の補題

Burnside の補題:
有限群 G が有限集合 X に作用しているとする．このとき

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X^g|$$

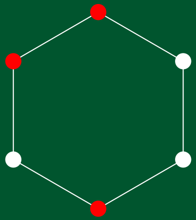
ただし, $|X/G|$ は G 軌道の個数, X^g は固定元全体.

<u>これを用いて最初の問題が解決できる!</u>

今, G と X は次のような設定である.

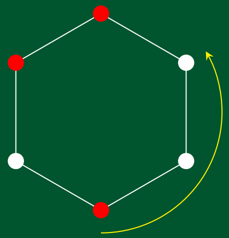
今, G と X は次のような設定である.

色付けされた頂点の集合が集合 X



今, G と X は次のような設定である.

回転させるという操作が G の元



問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

問題の解答

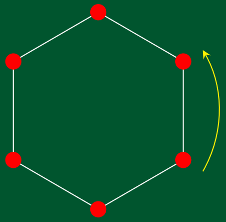
G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

0 度回転 (回転しない)
どの塗り方でも変化しないので全ての色の塗り方 n^6 通りある.

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

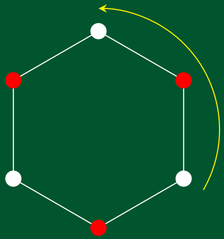
60 度回転
どの頂点から見ても隣が同じ色である塗り方, つまり全ての頂点が同じ色の塗り方なので, 塗り方は n 通りある.



問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

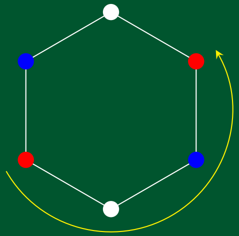
120 度回転
どの頂点から見ても 2 つ隣が同じ色である塗り方, つまり交互に色が塗られている塗り方なので, 塗り方は n^2 通りある.



問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

180 度回転
どの頂点から見ても 3 つ隣が同じ色である塗り方で, 塗り方は n^3 通りある.



問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

240, 300 度回転はそれぞれ 120 度, 60 度回転をするのと同じである.

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

0°

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \underset{\substack{\uparrow \\ 0^\circ}}{n^6} + \underset{\substack{\uparrow \\ 60^\circ}}{n} + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \underset{\substack{\uparrow \\ 0^\circ}}{n^6} + \underset{\substack{\uparrow \\ 60^\circ}}{n} + \underset{\substack{\uparrow \\ 120^\circ}}{n^2} + n^3 + n^2 + n$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \underset{\substack{\uparrow \\ 0^\circ}}{n^6} + \underset{\substack{\uparrow \\ 60^\circ}}{n} + \underset{\substack{\uparrow \\ 120^\circ}}{n^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ 180^\circ}}{n^3} + n^2 + n$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \underset{\underset{0^\circ}{\uparrow}}{n^6} + \underset{\underset{60^\circ}{\uparrow}}{n} + \underset{\underset{120^\circ}{\uparrow}}{n^2} + \underset{\underset{180^\circ}{\uparrow}}{n^3} + \underset{\underset{240^\circ}{\uparrow}}{n^2} + n$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \underset{0^\circ}{n^6} + \underset{60^\circ}{n} + \underset{120^\circ}{n^2} + \underset{180^\circ}{n^3} + \underset{240^\circ}{n^2} + \underset{300^\circ}{n}$$

問題の解答

以上より求める場合の数は

問題の解答

以上より求める場合の数は

$$\frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n)\ (\text{通り})$$

問題の解答

以上より求める場合の数は

$$\underline{\frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n)\ (\text{通り})}$$

実際, $n = 2$ のときは

$$\frac{1}{6}(2^6 + 2^3 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2) = 14$$

となり最初の例の 14 通りと一致している.