代数トポロジーの基礎

最終更新日時：2025 年 8 月 22 日 20:21

和久井道久: 代数トポロジーの基礎 (近代科学社 Digital) を教科書とした自主ゼミの記録をします.

目次

3.1 単体

ここではユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ (N は十分大きい自然数) 上の図形を考える．まず図形の基本単位となる単体を導入する．

● 3.1.1 単体とその辺単体

定義 3.1 (一般の位置)

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^N$ が

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \Longrightarrow \forall i = 0, 1, \ldots, n \quad \lambda_i = 0$$

を満たすとき**一般の位置にある (in general position)** という．

特に 2 つの点が一般の位置にあるとは点が一致しないときのことである．

例. $\mathbb{R}^n$ において n 個の点

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \cdots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

は一般の位置にある．また $\mathbb{R}^2$ 上に異なる 4 点を取ると，それは一般の位置にない点になる．

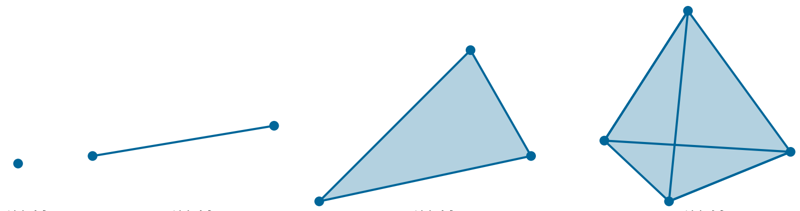
定義 3.2 (単体)

一般の位置にある $(n+1)$ 個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^N$ に対して，

$$|a_0 a_1 \cdots a_n| := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \ \middle|\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i,\ \lambda_i \geq 0 \right\}$$

とおき，これを n-**単体 (simplex)** という．各 a_i を単体の**頂点 (vertex)** といい，n を単体の**次元 (dimension)** という．

例. 以下に 0-単体から 3-単体の図の例を挙げる．いずれも単体は中身の詰まった図形になっている．



直感的にわかるように n-単体とは n 次元の図形を構成する最小の単位となるものである．

命題 3.3

n-単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ について次が成り立つ．

(1) σ は $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を含む $\mathbb{R}^N$ の凸集合の中で最小である．

(2) σ はコンパクト集合である．

証明. まず σ 内の二つの点

$$x_1 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \quad x_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i$$

を考える．任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \sum_{i=0}^{n} (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)a_i$$

であって, $t\lambda_i + (1-t)\mu_i > 0$ であり

$$\sum_{i=0}^{n}(t\lambda_i + (1-t)\mu_i) = t\sum_{i=0}^{n}\lambda_i + (1-t)\sum_{i=0}^{n}\mu_i = 1$$

となるから $tx_1 + (1-t)x_2 \in \sigma$ が分かり σ は凸集合であることが示された．

次に最小性を帰納法で示す．n 個の点 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ を含む任意の凸集合は $\tau = |a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|$ を含むと仮定する．このとき $n+1$ 個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を含む凸集合 A を任意にとる．$\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ の点 x を取ると $\lambda_n \neq 1$ のとき次のようにできる．

$$x = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i = (1-\lambda_n)\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}a_i + \lambda_n a_n$$

このとき

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}a_i \in \tau$$

であり, 帰納法の仮定より $\tau \subset A$ であり, $a_n \in A$ でもあったから A の凸性より $x \in A$, すなわち $\sigma \subset A$ が示された． □

定義 3.4 (辺単体)

n-単体 $\sigma = |a_0 a_1, \ldots, a_n|$ の頂点から $k+1$ 個の頂点 $a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ を選ぶことで新たに k-単体 $\tau = |a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}|$ を作ることができる．これを σ の **k-辺単体**といい, $\tau \prec \sigma$ とかく．

例.

(1) 1-単体 $|a_0 a_1|$ の辺単体は $|a_0|, |a_1|, |a_0 a_1|$ の 3 つである．

(2) 一般に n-単体 $|a_0 a_1 \cdots a_n|$ の辺単体の個数は

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = (1+1)^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$$

である．

● 3.1.2 単体の内部とその境界

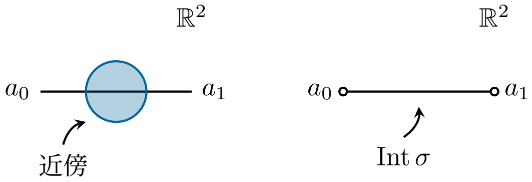
定義 3.5

単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdot a_n|$ に対し, σ の**内部 (interior)**$\operatorname{Int}\sigma$, **境界 (boundary)**$\partial\sigma$ を

$$\operatorname{Int}\sigma := \left\{ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n}\lambda_i = 1,\ \forall i,\ \lambda_i > 0 \right\}$$
$$\partial\sigma := \sigma - \operatorname{Int}\sigma$$

で定義する．

単体の内部とユークリッド空間 (距離空間) としての内部は一般に異なる．次のような $\mathbb{R}^2$ 内の 1-単体 $|a_0 a_1|$ を考える．右の図はユークリッド空間としての内部を考えている．$|a_0 a_1|$ 内の任意の点の近傍を適切に小さくとれば $|a_0 a_1|$ に近傍が全て入ること内点の条件だが, そのような点は存在しないことが分かる．すなわちユークリッド空間としての $|a_0 a_1|$ の内部は空集合である．一方で左の図で示した 1-単体の内部は端点を除いた線分になっているので一致していないことが確認できる．一致するのは $\dim\sigma = N$ のときに限る．



補題 3.6

n-単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ に対し $V(\sigma) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ とする.

(1) $x \in \sigma$ を次のように重心座標を使って表す.

$$x = \sum_{a \in V(\sigma)} \lambda_a a, \quad \left(\sum_{a \in V(\sigma)} \lambda_a, \ \lambda_a \geq 0 \right)$$

このとき $\tau \prec \sigma$ に対して $x \in \tau$ は τ の頂点でない任意の $a \in V(\sigma)$ に対して $\lambda_a = 0$ と同値.

(2) σ の辺単体 τ, τ' が $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$ であるとき $\tau \cap \tau'$ は τ と τ' が共有する頂点を頂点とする単体である.

3.1.3 可接合と一般の位置

定義 3.7 (結)

$a \in \mathbb{R}^N$, 空でない $X \subset \mathbb{R}^N$ に対し a と X の**結 (join)** を

$$a * X := \bigcup_{x \in X} \overline{ax}$$

で定義する. ただし $\overline{ab} := \{(1-t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1\}$ である.

定義 3.8 (可接合)

点 $a \in \mathbb{R}^N$ と $X \subset \mathbb{R}^N$ が**可接合 (joinable)** であるとは, $a \notin X$ であって任意の $x \in X$ に対し $\overline{ax} \cap X = \{x\}$ となるときをいう.

a と X が可接合なら任意の $(a \neq)p \in a * X$ はある $x \in X$ を用いて

$$p = ta + (1-t)x, \quad t \in [0, 1)$$

と一意的に表される.

証明. $(a \neq)p \in a * X$ がある $x_1, x_2 \in X$ と $t_1, t_2 \in [0, 1)$ を用いて

$$p = t_1 a + (1-t_1)x_1 = t_2 a + (1-t_2)x_2$$

と 2 通りに表されたとする. このとき $t_1 \neq 1$ であって, $t_2 \geq t_1$ として

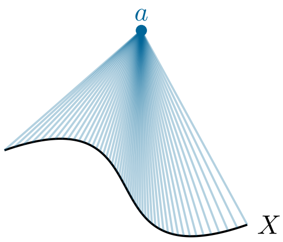
$$x_1 = \frac{t_2 - t_1}{1 - t_1} a + \frac{1 - t_2}{1 - t_1} x_2 \in \overline{ax_2} \cap X = \{x_2\}$$

であるので, まず $x_1 = x_2$ がわかる ($t_2 \leq t_1$ のときも同様). $x_1 = x_2 = x$ とおいてもとに式に代入する.

$$t_1 a + (1-t_1)x = t_2 a + (1-t_1)x$$
$$(t_1 - t_2)a = (t_1 - t_2)x$$

$t_1 \neq t_2$ と仮定すると $a = x \in X$ となるので矛盾. 以上より表示の一意性が示された. □

例. 以下に結, 可接合である場合, 可接合でない場合の例を挙げる.



補題 3.9

$\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ を n-単体とする.

演習問題 3.1

3.2 単体分割とオイラー標数

3.2.1 単体複体とその多面体

定義 3.10 (単体複体)

$\mathbb{R}^N$ 内の有限個の単体の集合 K が**単体複体 (simplicial complex)** とは次の 2 つの条件を満たすことである.

(1) $\sigma \in K$, $\tau \prec \sigma$ ならば $\tau \in K$.

(2) $\sigma, \tau \in K$ かつ $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ならば $\sigma \cap \tau \prec \sigma$ かつ $\sigma \cap \tau \prec \tau$.

また, K の次元 $\dim K$ を K に含まれる単体の次元の中で最大のものとして定める. さらに

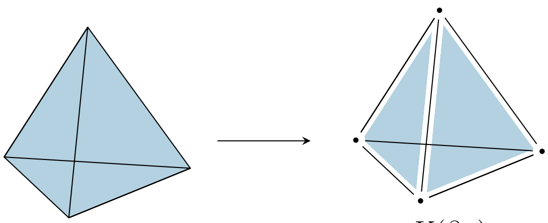
$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

を K の**多面体 (polyhedron)** と呼ぶ.

例. $n \geq 1$ として n-単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ を考える. σ 自体は単体複体ではないが

$$K(\sigma) := \{\tau \mid \tau \prec \sigma\}, \quad K(\partial\sigma) := K(\sigma) - \{\sigma\}$$

はそれぞれ n 次元, $n-1$ 次元の単体複体である. 例えば 3 次元単体 $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$ に対して 2 次元複体 $K(\partial\sigma)$ は次のようになる.



集合で書くと

$$K(\partial\sigma) = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_0 a_1|, \ldots, |a_0 a_1 a_2|, \ldots\}$$

のように単体複体は単体の集合になっていることに注意する. つまり単体複体はもはや $\mathbb{R}^N$ の図形ではなくそれらを単純に組み合わせたものである. 一方で単体複体の多面体は間違いなく $\mathbb{R}^N$ 内の図形である.

補題 3.11

単体複体 K について次が成り立つ.

(1) $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \operatorname{Int} \sigma$.

(2) $\sigma, \tau \in K$ かつ $\sigma \neq \tau$ ならば $\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau = \emptyset$.

証明.

(1) 次の等式を示せばよい.

$$\sigma = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \operatorname{Int} \tau$$

これにより K が単体複体だから $\sigma \in K$ に対し $\tau \prec \sigma$ についても $\tau \in K$ であったことに注意すれば

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma = \bigcup_{\sigma \in K} \left(\bigcup_{\tau \prec \sigma} \operatorname{Int} \tau \right) = \bigcup_{\sigma \in K} \operatorname{Int} \sigma$$

とできるので証明が完了する．$\supset$ は明らかなので $\subset$ を示す．$\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ として $x \in \sigma$ を

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$$

とする．このとき $\lambda_i \neq 0$ となる i を小さい順に $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ とすれば $|a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}| \prec \sigma$ である．さらに $\lambda_i > 0$ の条件から $x \in |a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}|$ も分かる．よって $\subset$ が示された．

(2) 対偶を示す．$x \in \operatorname{Int}\sigma \cap \operatorname{Int}\tau \neq \emptyset$ とすると $x \in \sigma \cap \tau$ である．$x \in \operatorname{Int}\sigma$ であるから点 x は次のように表される．

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \quad \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0 \right)$$

さらに $x \in \sigma \cap \tau$ なので頂点の集合 $V(\sigma \cap \tau) = \{a_{k_0}, a_{k_1}, \ldots, a_{k_l}\}$ として

$$x = \sum_{i=0}^{l} \lambda_{k_i} a_{k_i} \quad \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_{k_i} = 1,\ \lambda_{k_i} \geq 0 \right)$$

となる．重心座標の一意性と $\lambda_i > 0$ より $\{k_0, k_1, \ldots, k_l\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ である．つまり $\sigma \cap \tau = \sigma$．$\tau$ についても同様の議論をすることで $\sigma \cap \tau = \tau$ なので $\sigma = \tau$ が示された．

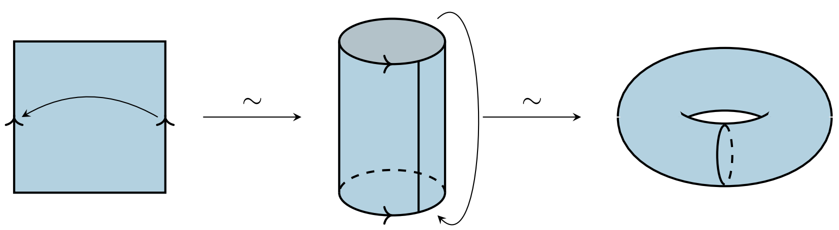
$\square$

3.2.2 単体分割

定義 3.12 (単体分割)

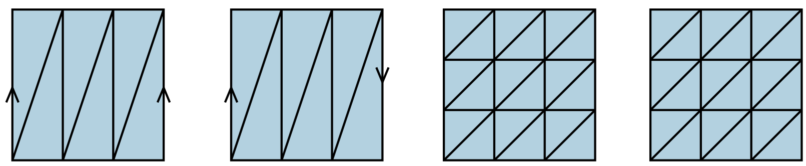
位相空間 X の**単体分割 (simplicial decomposition)**, **三角形分割 (triangulation)** とは, 単体複体 K と同相写像 $h\colon |K| \to X$ の組 (K, h) のことである．

例. トーラス $\mathbb{T}^2$ は次のように $[0,1] \times [0,1]$ の各辺を同一視, つまり貼り合わせることで作ることができた．



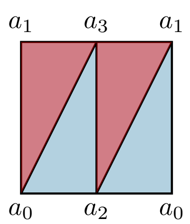
$[0,1] \times [0,1]$　　$\mathbb{S}^1 \times [0,1]$　　$\mathbb{T}^2$

トーラスのような曲面の単体分割は $[0,1] \times [0,1]$ の単体分割によって与えることができる．次の図は円柱, メビウスの帯, トーラス, クラインの壺の単体分割を与えている図である．



$\mathbb{S}^1 \times [0,1]$　　Mb　　$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$　　Kb

ここで円柱の単体分割として次のようなものを考えたとする．



実はこれは単体分割にはなっていない．なぜなら二つの単体 $|a_0a_1a_3|$ と $|a_2a_3a_1|$ の共通部分を考えると $|a_1| \cup |a_3|$ となるがこれは単体 $|a_0a_1a_3|$ と $|a_2a_3a_1|$ のどちらの辺単体にもなっていない．よってこの分割では単体複体が作れていないことが分かる．同様の理由でメビウスの帯, トーラスなども考えることができる．

上では $X = [0,1] \times [0,1]$ の単体分割を与え, それによって X を変形した空間 $X/\sim$ の単体分割を与えた例を示した．その操作を正当化するのが次の命題である．

命題 3.13

X を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係, $\pi\colon X \to X/\sim$ を自然な射影とする．$X = |K|$ となる単体複体 K で以下の条件を満たすものを構成できたとすると, 十分大きな N で $\mathbb{R}^N$ 内の点を用いた $X/\sim$ の単体分割を作ることができる．

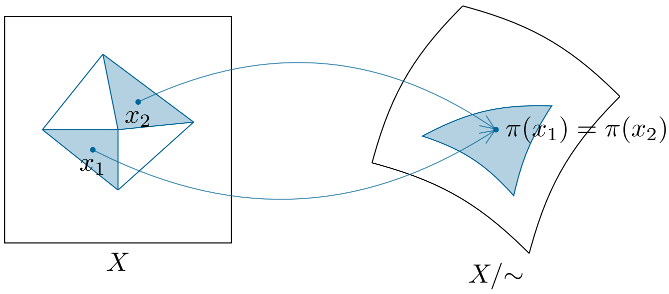
(1) $\sigma \in K$ への制限写像 $\pi|_\sigma$ は同相写像.

(2) $x_1, x_2 \in X$ に対して $x_1 \in \operatorname{Int}\sigma_1$, $x_2 \in \operatorname{Int}\sigma_2$ となる $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ を取ると

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \iff \pi(K(\sigma_1)^{(0)}) = \pi(K(\sigma_2)^{(0)})$$

かつ, 頂点の順序を 1 つ指定したときの重心座標は互いに一致する．

二つ目の条件は図にすると次のようになる．



● 3.2.3 単体複体のオイラー標数

定義 3.14 (オイラー標数)

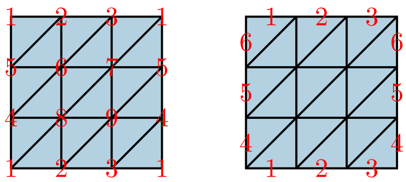
n 次元単体複体 K に対して

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sharp\{\sigma \in K \mid \dim\sigma = k\}$$

を K の**オイラー標数 (Euler characteristic)** という．一般に単体分割 K が与えられた位相空間 X のオイラー標数 $\chi(X)$ は単体分割のオイラー標数 $\chi(K)$ として定義される．

これは後で示すことだが, オイラー標数はホモロジー群のランクを用いて記述することができ, ホモロジー群が位相不変量であることからオイラー標数は位相不変量である．よって位相空間 X のオイラー標数は, 単体分割によらない量である．

例. 上で述べたトーラス $\mathbb{T}^2$ の単体分割をもちいて $\chi(\mathbb{T}^2)$ を求める．頂点と辺の数は次のように数えればよい (辺は一部省略, 面は省略).



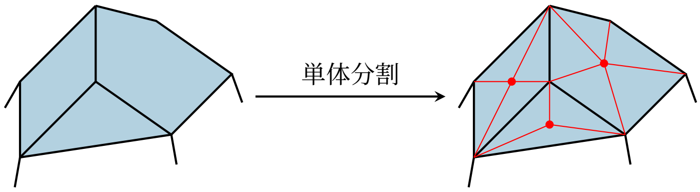
よってトーラスのオイラー標数は次のように計算できる．

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 9 - 27 + 18 = 0$$

例. 2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ のオイラー数は $\mathbb{S}^2$ の単体分割が $K(\partial|a_0a_1a_2a_3|)$ で与えられるので

$$\chi(\mathbb{S}^2) = \chi(K(\partial|a_0a_1a_2a_3|)) = 4 - 6 + 4 = 2$$

一般に 2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ に同相な多面体 (つまり穴が開いていない) について, 各面の中心をそれぞれ一つ選び頂点と結ぶことで単体分割を与えることができる.



多面体の頂点の個数を v, 辺の個数を e, 面の個数を f とし, 各面 $1 \leq i \leq f$ が m_i 角形とするとオイラー標数は次のように計算できる.

$$2 = \chi(\mathbb{S}^2) = (v + f) - (e + \sum_{i=1}^{f} m_i) + \sum_{i=1}^{f} m_i = v - e + f$$

となりよく知られたオイラーの多面体公式が得られる.

上の考察からさらに正多面体について次の定理が得られる.

定理 3.15

正多面体は正 $4, 6, 8, 12, 20$ 面体の 5 種類である.

証明. 正 n 面体の各頂点に l 個の正 m 角形が集まっているとする. このとき正多面体の頂点の数 v, 辺の数 e, 面の数 f について $n = f$ であって次の式が成り立つ.

$$e = \frac{lv}{2} = \frac{mf}{2}$$

これを用いてオイラーの多面体定理の式 $v - e + f = 2$ から e, f を消去することで

$$v - \frac{lv}{2} + \frac{lv}{m} = 2$$
$$(4 - (l-2)(m-2))v = 4m > 0$$

よって $4 > (l-2)(m-2)$ であり, 今 $l, m \geq 3$ なのでこれを満たす組は $(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)$ である. ここから $n = f$ の値を求めれば題意を得る. □

● 3.2.4　部分複体

定義 3.16 (部分複体)

単体複体 K に対し, その部分集合 $L \subset K$ が単体複体であるとき L を K の**部分複体 (subcomplex)** という.

部分複体の条件は単体複体の条件のうち一つ目を確かめれば十分である.

例. 部分複体の簡単な例をいくつか挙げる.

(1) 単体 σ に対して $K(\partial\sigma)$ は $K(\sigma)$ の部分複体である.
(2) 単体複体 K に対し, $K^{(k)} := \{\sigma \in K \mid \dim\sigma \leq k\}$ は K の部分複体である.
(3) 単体複体 K_1, K_2 の共通部分 $K_1 \cap K_2$ は K_1 および K_2 の部分複体である.

演習問題 3.2

問題 3.2.5. $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_{n+1}|$ としたとき, $K(\partial\sigma)$ の各次元の単体の数を考える. $K(\partial\sigma)$ 内の次元 k の単体は $n+2$ 個の点の中から $k+1$ 個の点を選ぶことで作られている. $K(\partial\sigma)$ が n 次元単体複体であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\chi(K(\partial\sigma)) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+2}{k+1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n+2}(-1)^k \binom{n+2}{k} + (-1)^0 \binom{n+2}{0} + (-1)^{n+2} \binom{n+2}{n+2} \\
&= 1 + (-1)^n
\end{aligned}$$

特に $n = 2$ のときはオイラーの多面体定理が得られる. つまり上の結果はオイラーの多面体定理の一般化 (高次元化) を考えているのと同じである.

3.3 単体の向きと境界準同型

3.3.1 単体の向き

ここまで単体や単体複体を図形として扱ってきた．ここに代数構造をいれることで代数的な考察ができるようにする．そのためにまずは単体の向きを定義する．

定義 3.17 (単体の向き)

n-単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ とする．順序組の集合を

$$\mathcal{S} := \{(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \mid \{i_0, i_1, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}\}$$

上に同値関係 $\sim$ を次のように定めて商集合 $\mathcal{S}/\sim$ を考える．

$$(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \sim (a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) \iff \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \cdots & i_n \\ j_0 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = 1$$

$S/\sim$ は 2 つの元からなり，この元を σ の**向き (orientation)** という．向き $\mathcal{O} \in \mathcal{S}/\sim$ に対しもう一つの向きを $-\mathcal{O}$ で表す．また，0-単体に対しては一つの向きを持つものとして定める．

単体が与えられただけの段階では向きが $+$ か $-$ かは指定されていない．具体的に $+, -$ を指定したものが次の有向単体である．

定義 3.18 (有向単体)

n-単体 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ の向きが $\mathcal{O} \in \mathcal{S}/\sim$ で指定されたとする．組 $(\sigma, \mathcal{O})$ を**有向 n-単体 (oriented n-simplex)** という．$\mathcal{O} = [a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ とするとき $(\sigma, \mathcal{O}) = \langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \rangle$ や $\langle \sigma \rangle$ で表す．

例． 2-単体 $\sigma = |a_0 a_1 a_2|$ に向き $\mathcal{O} = [a_0, a_1, a_2]$ を指定したときは

$$\begin{aligned} &\langle a_0, a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, a_2, a_0 \rangle = \langle a_2, a_0, a_1 \rangle \\ &= -\langle a_1, a_0, a_2 \rangle = -\langle a_2, a_1, a_0 \rangle = -\langle a_0, a_2, a_1 \rangle \end{aligned}$$

補題 3.19

$\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ を n-単体として τ を a_k 以外を頂点とする $(n-1)$-次元の辺単体とする．このとき σ の向きを $\mathcal{O} = [a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}]$ で指定されたとき τ の向きは

$$\mathcal{O}|_\tau = (-1)^l [a_{i_0}, a_{i_0}, \dots, \hat{a_{i_l}}, \dots, a_{i_n}]$$

で指定される．ただし $a_{i_l} = a_k$ で，$\hat{a_{i_l}}$ は a_{i_l} が取り除かれていることを表す．

3.3.2 鎖群

定義 3.20 (鎖群)

n 次元単体複体 K に属する単体に向きを指定して，有向 k-単体を $\langle \sigma_1^k \rangle, \langle \sigma_2^k \rangle, \dots, \langle \sigma_t^k \rangle$ とする．このとき $k \in \mathbb{Z}$ に対して形式的和全体の集合

$$C_k(K) := \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i \langle \sigma_i^k \rangle \;\middle|\; r_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

を定める．$k < 0, k > n$ のときは $C_k(K) = \{0\}$ とする．

鎖群には次のような和を二項演算として与えて群とみなす．係数は整数なので鎖群はアーベル群である．

$$c = \sum_{i=1}^{t} r_i \langle \sigma_i^k \rangle,\ c' = \sum_{i=1}^{t} r_i' \langle \sigma_i^k \rangle, \quad c + c' := \sum_{i=1}^{t} (r_i + r_i') \langle \sigma_i^k \rangle$$

このとき単位元は

$$0 = \sum_{i=1}^{t} 0\langle \sigma_i^k \rangle$$

であり, 逆元は

$$c = \sum_{i=1}^{t} r_i \langle \sigma_i^k \rangle, \quad -c = \sum_{i=1}^{t} (-r_i) \langle \sigma_i^k \rangle$$

である．ここである有向単体 $\langle \sigma_i^k \rangle$ の逆の向きを持つ有向単体は $(-1)\langle \sigma_i^k \rangle$ と同一視して考える．これを $-\langle \sigma_i^k \rangle$ で表す.

例. 簡単に例を示す．2-単体 $\sigma = |a_0 a_1 a_2|$ として単体複体 $K = K(\sigma)$ を考える．このとき

$$\begin{aligned}
C_0(K) &= \{r_0\langle a_0 \rangle + r_1 \langle a_1 \rangle + r_2 \langle a_2 \rangle \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}\} \\
C_1(K) &= \{r_0\langle a_0 a_1 \rangle + r_1 \langle a_1 a_2 \rangle + r_2 \langle a_2 a_0 \rangle \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}\} \\
C_2(K) &= \{r_0\langle a_0 a_1 a_2 \rangle \mid r_0 \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

● 3.3.3　有向単体の境界

定義 3.21 ((単体の) 境界)

単体複体 K に含まれる有向 k-単体 $\langle \sigma \rangle = \langle a_0 a_1 \cdots a_k \rangle$ に対し

$$\partial_k \langle \sigma \rangle := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \langle a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k \rangle \in C_{k-1}(K)$$

を $\langle \sigma \rangle$ の**境界 (boundary)** という．ただし $\partial_0 \langle a_0 \rangle = 0$ と定める.

例.

境界が well-defined であること, つまり単体に指定した向きの代表元の取り方によらないことを示す.

演習問題 3.3

3.4 ホモロジー群の定義

● 3.4.1 加群と部分加群

自由加群, 有限生成などについてのみ扱う．G をアーベル群 ($\mathbb{Z}$ 加群) とする．このとき $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\} \subset G$ が**一次独立**であるとは $x_i \in \mathbb{Z}$ として次が成り立つことを言う．

$$\sum_{i=1}^{r} x_i e_i = 0 \Longrightarrow x_i = 0$$

また, 次の条件を満たすとき $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ は G を**生成する (generated)** という．

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists x_i \in \mathbb{Z}, x = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i$$

ベクトル空間ではこの二つを満たすものを基底としていつでも取ることができたが加群の場合はそうではない．一次独立で G を生成するような $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\} \subset G$ が存在するとき, G は**階数 r の自由加群**であるといい, $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ を G の**基底**という．また, 単に有限個の元 $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\} \subset G$ が G を生成しているとき, G は**有限生成**であるという．

例. 当然, G が自由加群ならば有限生成でもある．しかし逆は成り立たない．いくつか例を見てみる．

(1) $\mathbb{Z}$ や $m\mathbb{Z}$ $(m \in \mathbb{Z})$ は自由加群で, 基底はそれぞれ $\{1\}$, $\{m\}$ である．

(2) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は有限生成であるが, 自由ではない．実際, 生成元として $1 + 2\mathbb{Z}$ を取ることができるが $2(1 + 2\mathbb{Z}) = 0$ なので一次独立ではない．

(3) $\mathbb{Q}$ は有限生成ではない．よって自由加群でもない．なぜなら任意の 2 つの有理数は一次独立ではなく, 一つの有理数で $\mathbb{Q}$ 全体を生成することはできないからである．

(4) n 次元単体複体 K に対する鎖群 $C_k(K)$ $(0 \leq k \leq n)$ は K に含まれる有向 k-単体全体を基底に持つ自由加群である．

階数 r の自由加群 G は r 個の直和

$$G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdot \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^r$$

と同一視できる．有限生成加群はアーベル群の基本定理と同様に構造がよくわかっている．

定理 3.22 (有限生成加群の基本定理)

G を有限生成加群としたときある $n \in \mathbb{N}$, e_i $(1 \leq i \leq r)$ で $e_i \mid e_{i+1}$ となるものが存在して

$$G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_r\mathbb{Z}$$

の形で表される．さらにこの表示は一意である．

この定理の証明は省略する．

● 3.4.3 単体複体の境界準同型

定義 3.23 (境界準同型)

K を n 次元単体, $k \in \mathbb{Z}$ とする．このとき**境界準同型 (boundary homomorphism)**, $\partial_k \colon C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ を

$$\partial_k \left(\sum_{i=1}^{t} r_i \langle \sigma_i^k \rangle \right) = \sum_{i=1}^{t} r_i \partial_k \langle \sigma_i^k \rangle$$

で定める．ここで右辺の $\partial_k \langle \sigma_i^k \rangle$ は単体の境界である．

例. 計算は有向単体に対して行ったものとほぼ同じである．単体複体 $K = K(|a_0a_1a_2|)$ の鎖群 $C_1(K)$ の元に対して次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\partial_1(r_0\langle a_1, a_2\rangle + r_1\langle a_0, a_2\rangle + r_2\langle a_0, a_1\rangle) &= r_0\partial_1\langle a_1, a_2\rangle + r_1\partial_1\langle a_0, a_2\rangle + r_2\partial_1\langle a_0, a_1\rangle \\ &= r_0(\langle a_2\rangle - \langle a_1\rangle) + r_1(\langle a_2\rangle - \langle a_0\rangle) + r_2(\langle a_1\rangle - \langle a_0\rangle) \\ &= -(r_1 + r_2)\langle a_0\rangle + (r_2 - r_0)\langle a_1\rangle + (r_0 + r_1)\langle a_2\rangle\end{aligned}$$

境界準同型の非常に重要な性質が次の性質である．

補題 3.24

任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ が成り立つ．

証明. $2 \leq k \leq n$ のときを示す．有向 k-単体を $\langle\sigma\rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle$ とおき $(\partial_{k-1} \circ \partial_k)\langle\sigma\rangle$ を計算する．

$$(\partial_{k-1} \circ \partial_k)\langle\sigma\rangle = \partial_{k-1}\langle a_1, \ldots, a_k\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\partial_{k-1}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k\rangle + (-1)^k\partial_{k-1}\langle a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\rangle$$

続いてそれぞれを計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\partial_{k-1}\langle a_1, \ldots, a_k\rangle &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\langle a_1, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_k\rangle \\ (-1)^k\partial_{k-1}\langle a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\rangle &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k+j}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_{k-1}\rangle\end{aligned}$$

さらに真ん中の項は i 番目より前を取り除くか，後ろを取り除くかで分けて計算すれば次のようになる．特に次の式の二項目では a_i が既に除かれているため，取り除く a_j は前から $j-1$ 番目になっていることに注意する．

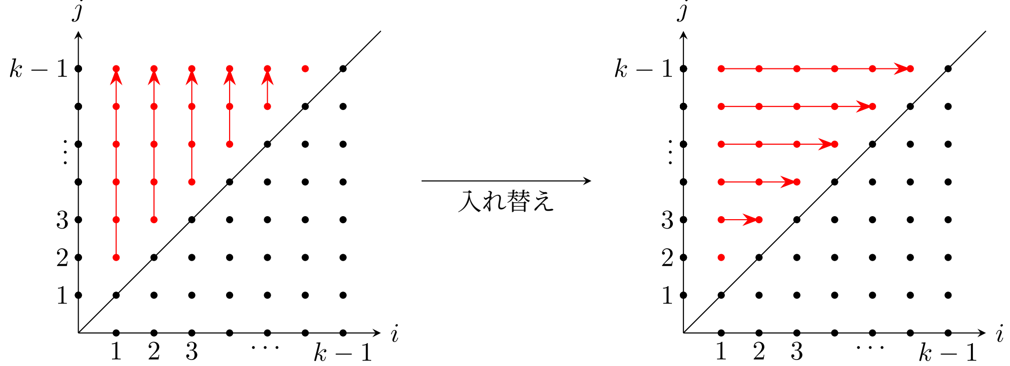
$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\partial_{k-1}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}(-1)^{i+j-1}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_k\rangle\end{aligned}$$

二項目の和の順番を入れ替える．すると j が 2 から $k-1$ になり i が 1 から $j-1$ までになる．

$$= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k\rangle + \sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j-1}\langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_k\rangle$$

二つの和のうち一項目の $i = 1$ かつ $j = 0$ のときと $j = 0$ のとき，二項目の $j = k$ のときを除いてすべて消えるので

$$\begin{aligned}&= -\langle a_2, a_3, \ldots, a_k\rangle + \sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{k+i-1}\langle a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^k\langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{k-1}\rangle \\ &= -\partial_{k-1}\langle a_1, \ldots, a_k\rangle - (-1)^k\partial_{k-1}\langle a_0, \ldots, a_{k-1}\rangle\end{aligned}$$



以上より任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ が成り立つ． □

● 3.4.5　単体複体のホモロジー群

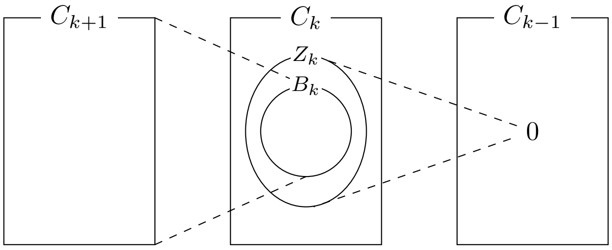
定義 3.25

単体複体 K に対して $k \in \mathbb{Z}$ として $C_k(K)$ の部分加群

$$Z_k(K) := \ker \partial_k, \quad B_k(K) := \operatorname{Im} \partial_{k+1}$$

をそれぞれ k 次元**輪体群 (cycle group)**, **境界輪体群 (boundary cycle group)** という．また, $Z_k(K), B_k(K)$ の元をそれぞれ k 次元**輪体 (cycle)**, **境界輪体 (boundary cycle)** という．

前節で示した補題: $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ より $B_k(K)$ は $Z_k(K)$ の部分加群であることがわかる．



このことから次のようにホモロジー群が定義される．

定義 3.26 (ホモロジー群)

単体複体 K と各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, k 次元輪体群, 境界輪体群をそれぞれ $Z_k(K), B_k(K)$ としたとき

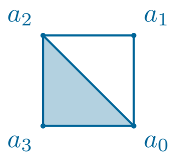
$$H_k(K) := Z_k(K)/B_k(K)$$

を K の k 次元**ホモロジー群**という．$H_k(K)$ の元を代表元 $z \in Z_k(K)$ を用いて $[z]_K$ や $[z]$ で表す．

ホモロジー群が何をあらわしているかを直感的に理解しておく．まず $Z_k(K)$ とはいくつかの k-単体がなす閉じた輪である．ホモロジー群はそのうち $B_k(K)$ の元になっているもの, すなわちある $(k+1)$-単体たちの境界になっているもの, いいかえると中身が詰まっているものは 0 と思うということである．

例. K を n 次元単体複体とする．このとき K のホモロジー群について

(1) $H_n(K) \cong Z_n(K)$.
(2) $0 \leq k \leq n$ でない $k \in \mathbb{Z}$ に対し $H_k(K) = 0$.

$K =$ 

上のような単体複体

$$K = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_0a_1|, |a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_0|, |a_0a_2|, |a_0a_2a_3|\}$$

に対してホモロジー群を考えてみる．$Z_1(K)$ の元は例えば $\langle a_3a_0\rangle + \langle a_0a_2\rangle + \langle a_2a_3\rangle$ や $\langle a_0a_2\rangle + \langle a_2a_1\rangle + \langle a_1a_0\rangle$ などがある．これらのうち前者は $B_1(K)$ の元にもなっている．実際,

$$\partial_2\langle a_3a_0a_2\rangle = \langle a_3a_0\rangle + \langle a_0a_2\rangle + \langle a_2a_3\rangle$$

である．よって $H_1(K)$ の中では $\langle a_3a_0\rangle + \langle a_0a_2\rangle + \langle a_2a_3\rangle$ は 0 とみなされる．一方で後者は $H_1(K)$ の中で 0 ではない．このようにホモロジー群は k 次元の"輪"をとらえるものであると考えられる．

　では 0 次ホモロジー群は何を表しているのか?$\langle a_1\rangle - \langle a_0\rangle \in Z_k(K)$ が $B_k(K)$ の元になっているときは中身が埋まっている, つまり 2 つの頂点をつなぐ有向 1-単体 $\langle a_0a_1\rangle$ が存在するときである．逆に $H_0(K)$ において 0 とみなされないのは 2 頂点をつなぐ有向 1-単体が存在しないときである．これは 0 次ホモロジー群が単体複体の連結性を示すものであるということである．実際の計算例は次の節で見る．

演習問題 3.4

問題 3.4.7.

(1) ホモロジー群の定義より

$$b_k(K) := \operatorname{rank} H_k(K) = \operatorname{rank} Z_k(K) - \operatorname{rank} B_k(K)$$

が成り立つ．さらに境界準同型 $\partial_k \colon C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ に対して準同型定理より加群の同型

$$C_k(K)/Z_k(K) \cong B_{k-1}(K)$$

を得る．このランクを考えれば

$$\operatorname{rank} C_k(K) - \operatorname{rank} Z_k(K) = \operatorname{rank} B_{k-1}(K)$$

となる．よってオイラー数は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}
\chi(K) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{rank} C_k(K) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\operatorname{rank} Z_k(K) + \operatorname{rank} B_{k-1}(K)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\operatorname{rank} Z_k(K) - \operatorname{rank} B_k(K)) + \operatorname{rank} B_{-1}(K) - \operatorname{rank} B_n(K) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(K)
\end{aligned}$$

ただし $\operatorname{rank} B_{-1}(K) = \operatorname{rank} B_n(K) = 0$ を用いた．

(2) $C_k(K)$ の基底をそれぞれ次のように定める．

$$\begin{aligned}
&C_2(K) \colon \{\langle 012 \rangle, \langle 023 \rangle, \langle 031 \rangle, \langle 213 \rangle\} \\
&C_1(K) \colon \{\langle 01 \rangle, \langle 02 \rangle, \langle 03 \rangle, \langle 12 \rangle, \langle 23 \rangle, \langle 31 \rangle, \langle 04 \rangle, \langle 14 \rangle, \langle 24 \rangle, \langle 34 \rangle\} \\
&C_0(K) \colon \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle\}
\end{aligned}$$

このとき選んだ基底に対する境界準同型の表現行列はそれぞれ次のようになる．

$$\partial_1 = \begin{pmatrix}
1 & & -1 & \\
-1 & 1 & & \\
 & -1 & 1 & \\
1 & & & -1 \\
 & 1 & & -1 \\
 & & 1 & -1 \\
 & & & \\
 & & O & \\
 & & &
\end{pmatrix}, \quad
\partial_0 = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & & & & -1 & & & \\
1 & & & -1 & & 1 & & -1 & & \\
 & 1 & & 1 & -1 & & & & -1 & \\
 & & 1 & & 1 & -1 & & & & -1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

これらの行列のランクを計算することで $\operatorname{rank} B_k(K)$ が分かる．単体の数から $C_k(K)$ も分かるのでそれらをまとめると

$$\operatorname{rank} B_k(K) = \begin{cases} 4 & (k=0) \\ 3 & (k=1) \\ 0 & (k=2) \end{cases}, \quad \operatorname{rank} C_k(K) = \begin{cases} 5 & (k=0) \\ 10 & (k=1) \\ 4 & (k=2) \end{cases}$$

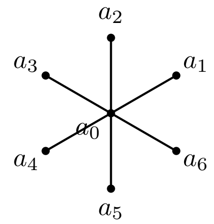
が分かる．よってホモロジー群のランクは

$$\operatorname{rank} H_k(K) = \operatorname{rank} C_k(K) - \operatorname{rank} B_{k-1}(K) - \operatorname{rank} B_k(K) = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 3 & (k=1) \\ 1 & (k=2) \end{cases}$$

3.5 ホモロジー群の計算 (1): グラフのホモロジー

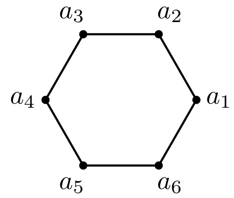
3.5.1 計算例

次の図で表される単体複体 K のホモロジー群を計算する．



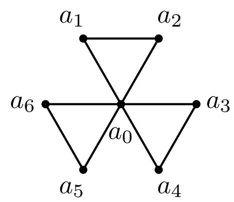
まず $\dim K = 1$ より $k \neq 0, 1$ に対して $C_k(K) = 0$ だから $H_k(K) = 0$ である．次に $k = 0$ のときを考える．

3.5.2 木のホモロジー群



3.5.3 単純閉道のブーケのホモロジー群

次の図で表される単体複体 K のホモロジー群を計算する．



まず K は連結なので $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である．次に $H_1(K)$ を考える．まず $C_1(K)$ の基底を次のように定める．

$$\langle a_0, a_i \rangle, \langle a_i, a_{i+1} \rangle, \langle a_{i+1}, a_0 \rangle \quad (i = 1, 3, 5)$$

この基底に関する ∂_1 の表現行列は

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．すると $Z_1(K)$ は一次独立な 3 つのサイクル

$$\begin{aligned} z_1 &:= \langle a_0, a_1 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle + \langle a_2, a_0 \rangle \\ z_2 &:= \langle a_0, a_3 \rangle + \langle a_3, a_4 \rangle + \langle a_4, a_0 \rangle \\ z_3 &:= \langle a_0, a_5 \rangle + \langle a_5, a_6 \rangle + \langle a_6, a_0 \rangle \end{aligned}$$

を用いて $Z_1(K) = \{r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3 \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}\}$ とできることが分かる．$B_1(K) = 0$ であるから一次ホモロジー群は

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

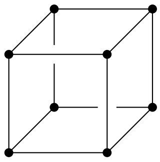
とわかる．以上をまとめると

$$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (k=1) \\ 0 & (k \neq 0,1) \end{cases}$$

演習問題 3.5

問題 3.5.1.

問題 3.5.2. 次の単体複体 K のホモロジー群を求める．



K

3.6 連結性とホモロジー

3.6.1 連結性と 0 次元ホモロジー群

定理 3.27

単体複体 K が連結ならば $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である．

証明． 準同型 $\varepsilon\colon C_0(K) \to \mathbb{Z}$ を係数の和

$$\varepsilon\left(\sum_{a\in K^{(0)}} r_a\langle a\rangle\right) = \sum_{a\in K^{(0)}} r_a$$

を考える．これは全射になる．このとき準同型定理を ε に対して適用する．

$$\ker\varepsilon = B_0(K)$$

を示す．まず全ての 1-単体 $\sigma = |a_i a_j|$ に対して $\varepsilon(\partial_1\langle a_i, a_j\rangle) = \varepsilon(\langle a_j\rangle - \langle a_i\rangle) = 0$ である．よって $\varepsilon(B_0(K))$ なので $\ker\varepsilon \supset B_0(K)$ である．逆に

$$\varepsilon\left(\sum_{a\in K^{(0)}} r_a\langle a\rangle\right) = \sum_{a\in K^{(0)}} r_a = 0$$

と仮定する．このとき $a_0 \in K^{(0)}$ を一つ固定して

$$\sum_{a\in K^{(0)}} r_a\langle a\rangle = \sum_{a\in K^{(0)}\setminus\{a_0\}} r_a(\langle a\rangle - \langle a_0\rangle)$$

とかける．ここで K は連結なので，任意の $a \in K^{(0)}$ に対して $|a_0a_1|, |a_1a_2|, \ldots, |a_{t-1}a|$ となる 1-単体の列を取ることができる．この列を用いて $c := \langle a_0a_1\rangle + \langle a_1a_2\rangle + \cdots + \langle a_{t-1}a\rangle$ と定めると

$$\partial_1\left(\sum_{a\in K^{(0)}\setminus\{a\}} r_a c\right) = \sum_{a\in K^{(0)}\setminus\{a_0\}} r_a(\langle a\rangle - \langle a_0\rangle)$$

とできる．すなわち $\ker\varepsilon \subset B_0(K)$ である．以上より準同型定理を用いれば ε から誘導される同型写像 $\varepsilon^*\colon H_0(K) \to \mathbb{Z}$ を得るので，$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ が示された． □

3.6.2 錐複体とそのホモロジー群

補題 3.28

K を単体複体として $|K|$ と $a \in \mathbb{R}^N$ と可接合であるとする．このとき以下が成り立つ．

(1) $a * K := \{a * \sigma \mid \sigma \in K\} \cup K \cup \{|a|\}$ は単体複体．

(2) $a * K$ の有向 k-単体 $\langle\sigma\rangle = \langle a_0, \ldots, a_k\rangle$ に対して，有向 $(k+1)$-単体を

$$a * \langle\sigma\rangle := \begin{cases} \langle a, a_0, \ldots, a_k\rangle & (|a| \not\prec \sigma \in K) \\ 0 & (|a| \prec \sigma) \end{cases}$$

と定義する．このとき次が成り立つ．

$$\partial_{k+1}(a * c) = c - a * \partial_k(c)$$

証明． (1) まず $a, |K|$ が可接合であるので任意の $x \in \sigma \subset |K|$ に対して

$$\overline{ax} \cap \sigma = \overline{ax} \cap |K| \cap \sigma = \{x\} \cap \sigma = \{x\}$$

なので a と σ も可接合．よって $a*\sigma$ は $k+1$ 単体である．単体複体の 1 つ目の条件は成立する．2 つ目の条件について主なもののみ考える．$\sigma_1 \in K, \sigma_2 = a*\tau\,(\tau \in K)$ のとき $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ であって

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \bigcup_{x\in\tau} \overline{ax} = \bigcup_{x\in\tau} \sigma_1 \cap \overline{ax}$$

ここで $\sigma_1 \subset |K|$ より $\sigma_1 \cap \overline{ax} = \sigma_1 \cap \overline{ax} \cap |K| = \sigma_1 \cap \{x\}$ であるから

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \tau$$

である．このとき $\sigma_1 \cap \tau \prec \sigma_1, a*\tau$．次に $\sigma_1 = a*\tau_1, \sigma_2 = a*\tau_2$ とすると $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ であって

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \left(\bigcup_{x\in\tau_1} \overline{ax}\right) \cap \left(\bigcup_{y\in\tau_2} \overline{ay}\right) = \bigcup_{x\in\tau_1, y\in\tau_2} (\overline{ax} \cap \overline{ay}) = \bigcup_{x\in\tau_1\cap\tau_2} \overline{ax} = a*(\tau_1 \cap \tau_2)$$

となり, $a*(\tau_1\cap\tau_2) \prec a*\tau_1, a*\tau_2$ である．
(2) $\dim K = n$ とする．$k > n, k < 0$ のときは常に $c = 0$ なので両辺は 0 となり成立．$0 \leq k \leq n$ のとき, 以下の式を示せば十分である．

$$\partial_{k+1}(a*\langle\sigma\rangle) = \langle\sigma\rangle - a*\partial_k\langle\sigma\rangle$$

(i) $|a| \prec \sigma$ つまり $\exists i,\, a_i = a$ のとき
$a*\langle\sigma\rangle = 0$ より $\partial_{k+1}(a*\langle\sigma\rangle) = 0$ である．一方右辺は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma\rangle - a*\partial_k\langle\sigma\rangle \\
&= \langle\sigma\rangle - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j a*\langle a_0,\ldots,\hat{a_j},\ldots,a_k\rangle \\
&= \langle\sigma\rangle - (-1)^i\langle a_i, a_0,\ldots,\hat{a_i},\ldots,a_k\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) $|a| \not\prec \sigma$ つまり $\forall i,\, a_i \neq a$ のとき

$$\begin{aligned}
\langle\sigma\rangle - a*\partial_k\langle\sigma\rangle &= \langle\sigma\rangle - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\langle a, a_0,\ldots,\hat{a_j},\ldots,a_k\rangle \\
&= \partial_{k+1}\langle a, a_0,\ldots,a_k\rangle = \partial_{k+1}(a*\langle\sigma\rangle)
\end{aligned}$$

以上よりいずれの場合も成り立つことが示され, これを線形に拡張すれば題意を得る．

□

命題 3.29

K を単体複体として $|K|$ と $a \in \mathbb{R}^N$ と可接合であるとする．このとき

$$H_k(a*K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k\neq 0) \end{cases}$$

証明. $a*K$ が連結であることから $H_0(a*K) \cong \mathbb{Z}$ である．$k \geq 1$ のとき任意の $c \in Z_k(a*K)$ に対し $\partial_k(k) = 0$ であって

$$\partial_{k+1}(a*c) = c - a*\partial_k(c) = c$$

なので $c \in B_k(K)$ となる．すなわち $H_k(a*K) = Z_k(a*K)/B_k(a*K) = 0$. □

定理 3.30

σ を n-単体とする．このとき

(1) $n \geq 0$ に対し $H_k(K(\sigma)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$

(2) $n \geq 1$ に対し

(i) $n \neq 1$ のとき, $H_k(K(\sigma)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0, n-1) \\ 0 & (k \neq 0, n-1) \end{cases}$

(ii) $n = 1$ のとき, $H_k(K(\sigma)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$

証明.

(1) $n = 0$ のとき $K(\sigma)$ は一点からなるので明らかに成立. $n \geq 1$ のとき $K(\sigma) = K(|a_0 a_1 \cdots a_n|) = a_0 * K(|a_1 \cdots a_n|)$ であるから補題より成立することが分かる.

(2) (i) まず $K(\sigma)$ と $K(\partial\sigma)$ を比較すれば

$$\begin{aligned} Z_k(K(\partial\sigma)) &= Z_k(K(\sigma)) \quad (0 \leq k \leq n-1) \\ B_k(K(\partial\sigma)) &= B_k(K(\sigma)) \quad (0 \leq k \leq n-2) \end{aligned}$$

が分かる．よって $0 \leq k \leq n-2$ に対しては $H_k(K(\partial\sigma)) = H_k(K(\sigma))$. 次に $k = n-1$ に対して $K(\partial\sigma)$ は $n-1$ 次元の単体複体なので $H_{n-1}(K(\partial\sigma)) \cong Z_{n-1}(K(\partial\sigma))$ である．$z \in Z_{n-1}(K(\partial\sigma))$ を

$$z = \sum_{i=0}^{n} r_i \langle a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n \rangle$$

とする．まず r_i の必要条件を考える．上の式で境界を取ると

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} z =& \sum_{i=0}^{n} r_i \partial_{n-1} \langle a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n \rangle \\ =& r_0 \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \langle a_1, \ldots, \hat{a_j}, \ldots, a_n \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} r_i (-1)^j \langle a_0, \ldots, \hat{a_j}, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} r_i (-1)^{j-1} \langle a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, \hat{a_j}, \ldots, a_n \rangle \\ &+ r_n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \langle a_0, \ldots, \hat{a_j}, \ldots, a_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

となる．これらの項の中で σ の頂点から隣り合う番号のものを取り除いたもののみを取り出すと次のようになる．$\sigma_{i,j}$ で $\langle \sigma \rangle$ から i, j を取り除いたものを表すことにする．

$$\begin{aligned} & r_0 \sigma_{0,1} + \sum_{i=1}^{n-1} r_i (-1)^{i-1} \sigma_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} r_i (-1)^i \sigma_{i,i+1} + r_n (-1)^{n-1} \sigma_{n,n-1} \\ =& \sum_{i=0}^{n-1} (r_i + r_{i+1}) (-1)^i \sigma_{i,i+1} \end{aligned}$$

一次独立性より $\partial_{n-1} z = 0$ となる必要条件は $r_i + r_{i+1} = 0$ となること, すなわち $r \in \mathbb{Z}$ として

$$z = r \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n \rangle = r \partial_n \sigma$$

となることであるが, 実際 $\partial_{n-1}z = r(\partial_{n-1}\partial_n)z = 0$ となる. 以上より上の z を用いて

$$H_{n-1}(K(\partial\sigma)) \cong Z_{n-1}(K(\partial\sigma)) = \{rz \mid r \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

が示された.

(ii) この場合は 2 点からなる単体複体を考えることになるので明らか. $\square$

3.7 ホモロジー群の計算 (2): 曲面のホモロジー

3.7.1 単体複体のカラップシングとホモロジー群

定義 3.31 (初等カラップス)

K を単体複体とする．σ を n-単体, τ を σ の $(n-1)$ 次元辺単体としてそれぞれ次の条件を満たすものとする．

(1) σ を辺単体としてもつ単体は K 内に σ 以外に存在しない．

(2) τ を辺単体としてもつ単体は K 内に σ, τ 以外に存在しない．

このとき $L := K - \{\sigma, \tau\}$ は K の部分複体となる．K から L を作る操作を σ の辺単体 τ に沿った**初等カラップス (elementary collapse)** という．

この操作によってホモロジー群を変化させることなく, より簡単な単体複体に変化させることができる．

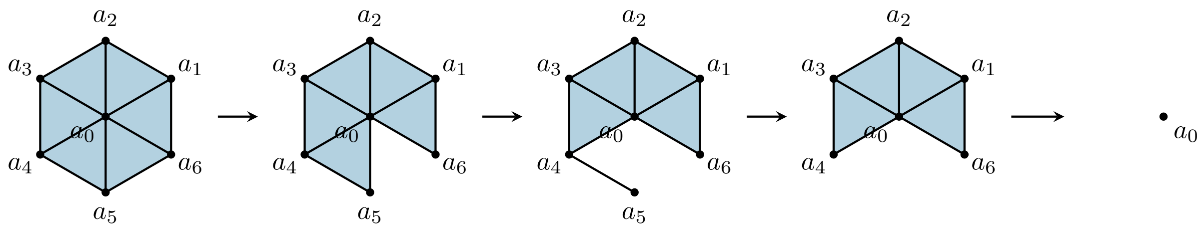
定理 3.32

単体複体 K の初等カラップスによって作られる単体複体 L のホモロジー群について

$$H_k(K) \cong H_k(L)$$

すなわち任意の次元で初等カラップスによってホモロジー群は不変である．

例.



3.7.2 2 次元単体複体の 2 次元ホモロジー群の計算

3.7.3 2 次元単体複体の 1 次元ホモロジー群の計算

定理 3.33

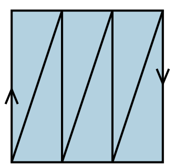
K を 2 次元単体複体とする．ある K 内の 1-単体 τ を辺単体にもつ 2-単体がちょうど 2 つ σ_1, σ_2 が存在するとする．K の部分複体として $L := K - \{\sigma_1, \sigma_2, \tau\}$, L の部分複体として $L' := K(\partial\sigma_1) \cup K(\partial\sigma_2) - \{\tau\}$ をとる．このもとで同型

$$H_1(K) \cong H_1(L)/[Z_1(L')]_L$$

が成り立つ．ここで射影 $\pi\colon Z_1(L) \to H_1(L)$ に対して $[Z_1(L')]_L := \pi(Z_1(L'))$ とした．

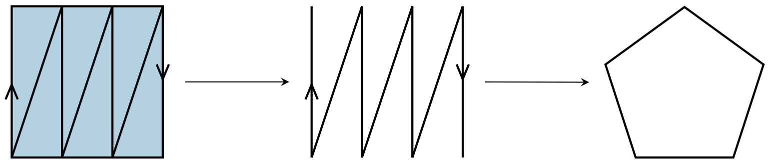
演習問題 3.7

問題 3.7.1. 次の図で表されるようなメビウスの帯の単体分割 K を考える．



Mb

この単体複体は初等カラップシングが可能である．



よってホモロジー群は

$$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases}$$