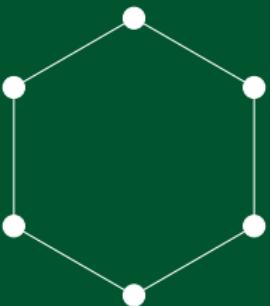


問題: 色塗りの問題

次のような正六角形の各頂点に n 種類の色を使って色塗りをすることを考える。使わない色はあってもよい。このとき色塗りの方法は全部で何通りか。ただし回転させて一致する塗り方は 1 通りと数える。

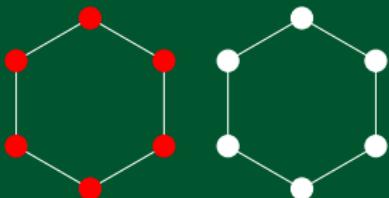


例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.

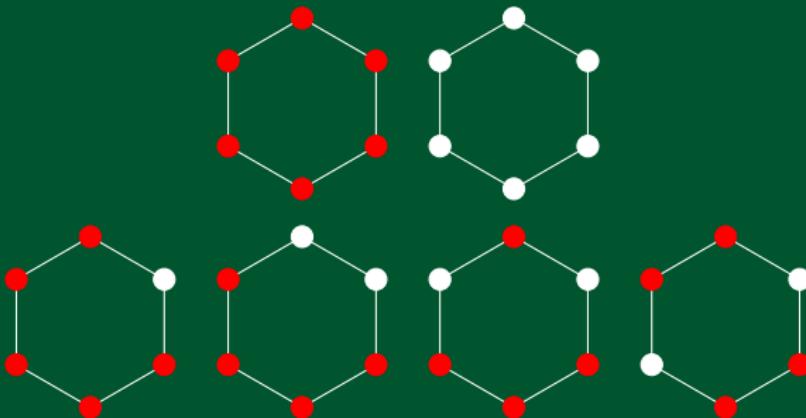
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



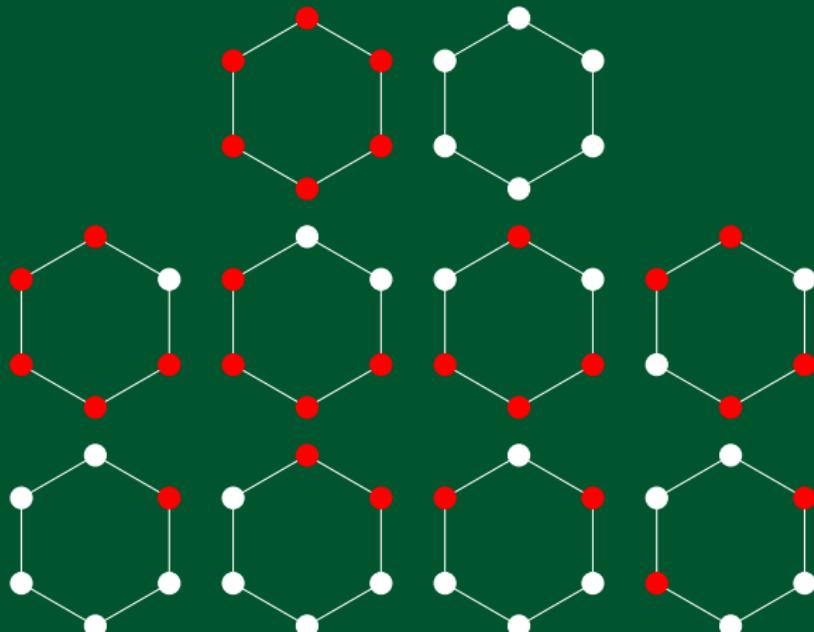
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



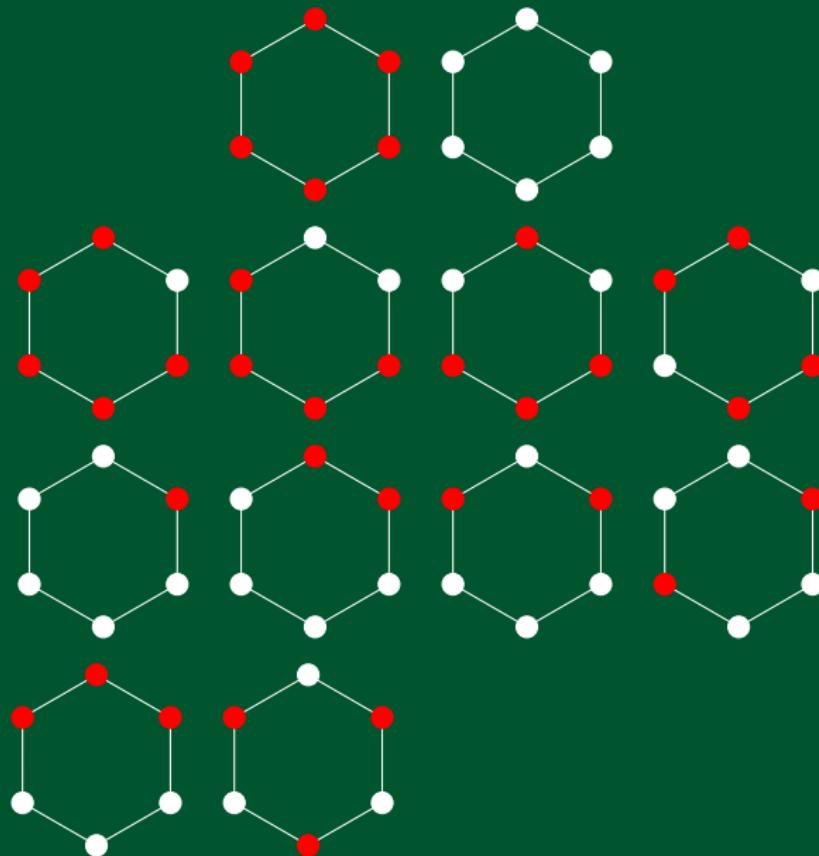
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



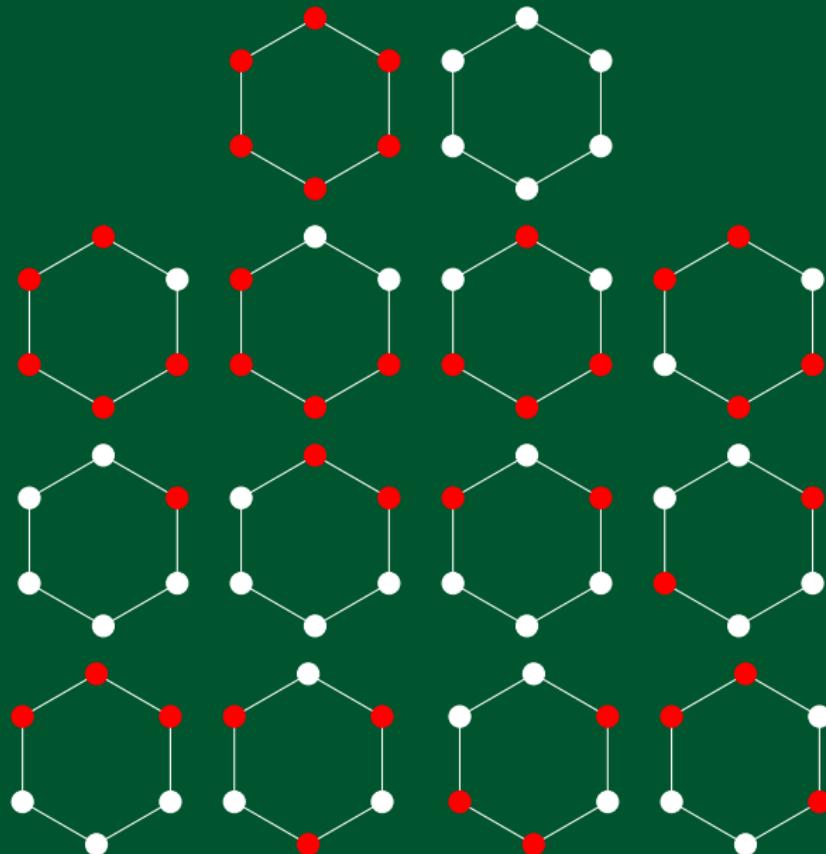
例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



例: $n = 2$ のとき

紅白の 2 色で塗る場合を全て書いてみると次のようになる.



Burnside の補題

Burnside の補題:

有限群 G が有限集合 X に作用しているとする. このとき

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

ただし, $|X/G|$ は G 軌道の個数, X^g は固定元全体.

Burnside の補題

Burnside の補題:

有限群 G が有限集合 X に作用しているとする. このとき

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

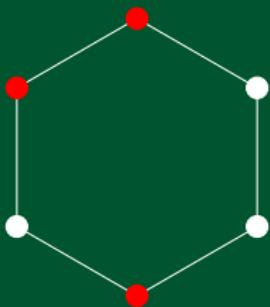
ただし, $|X/G|$ は G 軌道の個数, X^g は固定元全体.

これを用いて最初の問題が解決できる!

今, G と X は次のような設定である.

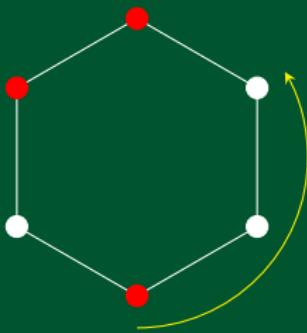
今, G と X は次のような設定である.

色付けされた頂点の集合が集合 X



今, G と X は次のような設定である.

回転させるという操作が G の元



問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

0 度回転 (回転しない)

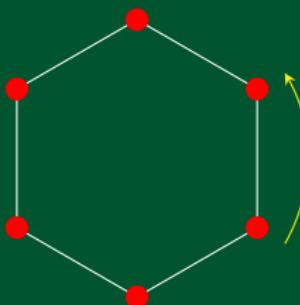
どの塗り方でも変化しないので全ての色の塗り方 n^6 通りある.

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

60 度回転

どの頂点から見ても隣が同じ色である塗り方, つまり全ての頂点が同じ色の塗り方なので, 塗り方は n 通りある.

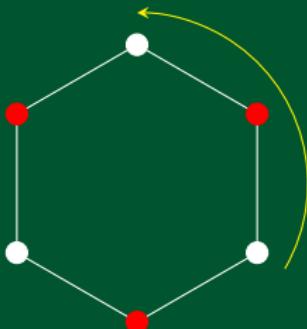


問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

120 度回転

どの頂点から見ても 2 つ隣が同じ色である塗り方, つまり交互に色が塗られている塗り方なので, 塗り方は n^2 通りある.

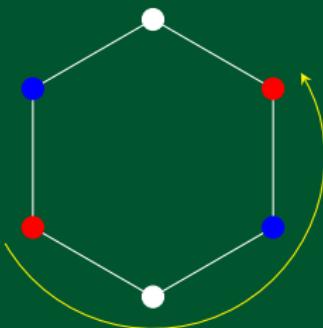


問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

180 度回転

どの頂点から見ても 3 つ隣が同じ色である塗り方で, 塗り方は n^3 通りある.



問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

240, 300 度回転はそれぞれ 120 度, 60 度回転をするのと同じである.

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$


0°

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

\uparrow \uparrow
 0° 60°

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

The expression $n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$ is shown above. Three vertical arrows point downwards from the terms n^6 , n , and n^2 to the labels 0° , 60° , and 120° respectively, indicating that these terms correspond to the identity, 60° rotation, and 120° rotation respectively. The other terms n^3 and n do not have arrows pointing to them from below.

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

The equation $\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$ is displayed. Below the equation, four yellow arrows point upwards from the terms n^6 , n , n^2 , and n^3 to the labels 0° , 60° , 120° , and 180° respectively. The term n^2 appears twice in the equation, but only one arrow points to it from the label n^2 .

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

The diagram shows five yellow arrows pointing from the terms in the equation to the rotation angles below. The first arrow points from n^6 to 0° . The second arrow points from n to 60° . The third arrow points from n^2 to 120° . The fourth arrow points from n^3 to 180° . The fifth arrow points from n^2 to 240° .

$$0^\circ \quad 60^\circ \quad 120^\circ \quad 180^\circ \quad 240^\circ$$

問題の解答

G の元である各回転に対して $|X^g|$, つまり回転で変化しない色の塗り方を考える.

以上をまとめると固定元の和は

$$\sum_{g \in G} |X^g| = n^6 + n + n^2 + n^3 + n^2 + n$$

The diagram shows six yellow arrows pointing upwards from the terms in the equation to the corresponding rotation angles below. The first term n^6 has an arrow pointing to 0° . The second term n has an arrow pointing to 60° . The third term n^2 has an arrow pointing to 120° . The fourth term n^3 has an arrow pointing to 180° . The fifth term n^2 has an arrow pointing to 240° . The sixth term n has an arrow pointing to 300° .

$$0^\circ \quad 60^\circ \quad 120^\circ \quad 180^\circ \quad 240^\circ \quad 300^\circ$$

問題の解答

以上より求める場合の数は

問題の解答

以上より求める場合の数は

$$\frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n) \text{ (通り)}$$

問題の解答

以上より求める場合の数は

$$\frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n) \text{ (通り)}$$

実際, $n = 2$ のときは

$$\frac{1}{6}(2^6 + 2^3 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2) = 14$$

となり最初の例の 14 通りと一致している.