対称群の表現論（数学演習 IX・X）

最終更新日：2025 年 8 月 30 日

教科書は R. M. Howe, *An invitation to representation theory—polynomial representations of the symmetric group*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2022.

教科書に追加するべき文, 補足は赤字で述べることとする.

目次

1 Introduction to Group Actions and Representations 2
- 1.1 Group Actions and Representations . . . 2
- 1.2 Representations on Function Spaces . . . 2

2 Polynomials and Subrepresentations 4
- 2.1 Polynomials . . . 4
- 2.2 Partitions and More Subrepresentations . . . 4

3 Intertwining Maps, Complete Reducibility 6
- 3.1 Intertwining Maps . . . 6
- 3.2 Complete Reducibility . . . 8
- 3.3 Invariant Inner Products and Another Proof of Complete Reducibility . . . 9
- 3.4 Dual Spaces and Contragredient Representations . . . 10

4 The structure of the symmetric Group 11
- 4.1 Cycles and Cycle Structure . . . 11
- 4.2 Generators and Parity . . . 12
- 4.3 Conjugation and Conjugacy Classes . . . 13

5 S_n-Decomposition of Polynomial Spaces 14
- 5.1 S_2-Decomposition . . . 14
- 5.2 S_3-Decomposition . . . 14
- 5.3 isotypic Subspaces and Multiplicities . . . 16

6 The Group Algebra 17

7 The Irreducible Representations of S_n: Characters 20
- 7.1 Characters and Class Functions . . . 20
- 7.2 Characters of S_3 . . . 20

8 今後の展望 21

1 Introduction to Group Actions and Representations

1.1 Group Actions and Representations

定義 1.1 (群の作用)

G を群, X を集合とするとき, G の X への**群作用 (group action)** とは二項演算 $G \times X \to X; (g, x) \mapsto g.x$ であって次の条件を満たすものである.

(i) $\forall g, h \in G, \forall x \in X, (gh).x = g.(h.x)$

(ii) $\forall x \in X, e.x = x$

またこのとき群 G は X に**作用する**という.

例. G の G 自身への作用を考える. $g, x \in G$ とする. 自然な作用として左乗法作用

$$g.x := gx$$

を考えることができる. この作用とは異なるものとして共役作用

$$g.x := gxg^{-1}$$

を考えることもできる.

例. もう少し非自明な作用を見てみる. $O(2, \mathbb{R})$ を実 2 次元直交群と $\mathbb{R}^2$ のベクトルの積は作用になる.

定義 1.2 (群の表現)

G を群, V をベクトル空間とする. このとき群準同型 $\rho\colon G \to GL(V)$ を G の V 上の**表現 (representation)** という. このような ρ が存在するとき, V を G の表現という. また, V の次元を表現 ρ の次元という.

ρ を G の V 上の表現とするとき, 線形変換 $\rho(g)v \in V$ が計算できるが ρ が群準同型であることから次が成り立つ.

(i) $\forall g, h \in G, \forall v \in V,\ \rho(gh)(v) = \rho(g)(\rho(h)v)$.

(ii) $\forall v \in V,\ \rho(e)v = \mathrm{id_V}(v) = v$

これは $\rho(g)v$ が G の V への線形な作用であることを示している. そこで簡単のために $\rho(g)v$ を $g.v$ と表すこともある.

例. 一番簡単なものは任意の $g \in G$ に対し $\rho(g) = \mathrm{id}$ とする表現で**自明な表現**, **恒等表現**という.

また, $\mathbb{R}$ を加法群として群準同型 $\rho\colon \mathbb{R} \to GL(\mathbb{R}^2)$ を

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定めると $(\rho, \mathbb{R}^2)$ は $\mathbb{R}$ の 2 次元表現である.

1.2 Representations on Function Spaces

S を集合, $\mathbb{F}$ を体とする. このとき S 上のスカラー値関数の集合

$$\mathbb{F}(S) := \{f \mid S \to \mathbb{F}\}$$

を考える. これは次の和とスカラー倍により $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間となる.

$$[f + g](x) := f(x) + g(x), \quad [kf](x) := k[f(x)]$$

ここで群 G が集合 S に作用しているとき G の $\mathbb{F}(S)$ 上の表現を

$$f \in \mathbb{F}(S), g \in G, x \in S\ [g.f](x) := f(g^{-1}.x)$$

特に重要な例として S がベクトル空間 V, G が対称群 S_n のときを考える. V の基底として $\{e_1, e_2, \ldots\}$ をとる. S_n の V への作用として

$$\sigma \in S_n, \sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$$

を考えることができる (この作用は V の元の基底による表示が一意であることから自然に線形に拡張される). このとき V 双対空間 V^* の基底 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ は

$$x_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で与えられるので S_n の V^* 上の表現

$$[\sigma.x_i](e_j) = x_i(\sigma^{-1}.e_j) = x_{\sigma(i)}(e_j)$$

を得る (つまり $\sigma.x_i = x_{\sigma(i)}$).

2 Polynomials and Subrepresentations

2.1 Polynomials

定義 2.1 (多項式)

不定元 (indeterminants)$x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する ($\mathbb{C}$ 上の)n 変数の多項式 p とは形式的な線形和

$$p = \sum C_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

で定義される．ただし $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は非負整数であって係数 (coefficients)$C_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ は $\mathbb{C}$ 上の元とする．簡単のため多重指数記法 $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ を用いて

$$p = \sum C_\alpha x^\alpha$$

とかく．ここで $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$．また $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ と定義する．すなわち単項式 x^α の次数は $|\alpha|$ である．n 変数多項式全体の集合を $\mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, または簡単に $\mathcal{P}$ とかく．

係数としては他にも考えることはできるが簡単のためにここでは複素数上のものを考えることとする．ここで S_n の $\mathcal{P}$ への作用を次で定めることができる．

$$\sigma.x_i = x_{\sigma(i)}$$

この作用は単項式, 多項式にも自然に拡張できて

$$\sigma.x^\alpha = x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} x_{\sigma(2)}^{\alpha_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}, \quad \sigma.p = \sum C_\alpha \sigma.x^\alpha$$

定義 2.2 (斉次多項式)

非負整数 k に対し多項式 p が k 次**斉次多項式 (homogeneous polynomial)** とは

$$\forall t \in \mathbb{C}, p(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を満たすことである．k 次斉次多項式全体を $\mathcal{P}_k$ で表す．

定義からすぐに $\mathcal{P}_k$ は $\mathcal{P}$ の部分空間であることが分かる．

例. $\mathcal{P}_3$ について考える．例えば $x^2y + z^3 \in \mathcal{P}_3$, $xyz \in \mathcal{P}_3$ である．ここで S_3 は $\mathcal{P}(x, y, z)$ に作用するのだった．この作用を $\mathcal{P}_3$ の元に対して計算してみると

$$(1, 2, 3).(x^2y + z^3) = y^2z + x^3 \in \mathcal{P}_3, \quad (1, 2, 3).(xyz) = xyz \in \mathcal{P}_3$$

のように再び $\mathcal{P}_3$ の元になる．すなわち作用によって斉次多項式の次数は変化しない．よって $\mathcal{P}$ の作用は自然に $\mathcal{P}_k$ の作用とみることができる．

定義 2.3 (不変部分空間)

V を群 G の表現とし, W を V の部分空間とする．このとき

$$\forall w \in W, g.w \in W$$

が成り立つとき W を G-不変部分空間 (または単に不変部分空間) という．

先の例で見たことから $\mathcal{P}_k(x_1, \ldots, x_n)$ は S_n-不変部分空間である．

2.2 Partitions and More Subrepresentations

斉次多項式の分類の方法として整数の分割を用いたものがある．そのためにまず分割について定義する．

定義 2.4 (分割)

正の整数 k に対し非負整数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ が $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = k$ を満たすとき λ を k の長さ l の**結合 (composition)**, または順序付き分割という．このことを $\lambda \models k$ とかく．二つの結合が順序を除いて一致しているとき二つの結合は**同値**であるという．さらに $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l$ を満たすとき λ を k の長さ l の**分割 (partition)** といい $\lambda \vdash k$ とかく．

$\mathcal{P}_k$ 上の単項式 $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$ を考えると $\beta \models k$ である．ここで分割による斉次多項式の分類を考える．

定義 2.5

正の整数 k に対する分割を α とする．α と同値な k の結合 β に対する単項式 x^β 全てが張る $\mathcal{P}_k$ の部分空間をタイプ α の部分空間といい $\mathcal{P}_\alpha$ とかく．

例. $\mathcal{P}_{(2,1)}(x, y)$ の基底は x^2y, xy^2 であり, $\mathcal{P}_{(2,1,0)}(x, y, z)$ の基底は $xy^2, x^2y, yz^2, y^2z, zx^2, z^2x$ である．これらの S_2, S_3 による作用を考えるといずれの単項式のタイプも変化しないことが分かる．一般に任意の $\alpha \vdash k$ に対し $\mathcal{P}_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は $\mathcal{P}_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の S_n-不変部分空間である．

定義 2.6 (既約表現)

(0 でない) ベクトル空間 V を群 G の表現とする．V が $\{0\}$ と V 以外の G-不変部分空間を持たないとき W を**既約表現 (irreducible representation)** という．また, 既約表現でないとき W は**可約表現 (reducible representation)** という．

ここで既約表現に関するいくつかの事実を確認しておく．

命題 2.7

V を群 G の表現として $U, W \neq \{0\}$ をその G-不変部分空間で既約表現とする．このとき U, W について $U \cap W = \{0\}$ または $U = W$ が成り立つ．

証明. $U \cap W$ は U, W の部分空間であって, U, W が G-不変なので $U \cap W$ も G-不変である．すると U, W が既約であるから $U \cap W = \{0\}, U$ かつ $U \cap W = \{0\}, W$ が成り立つ．すなわち $U \cap W = \{0\}$ または $U \cap W = U = W$ である． □

次の命題は G-同型で既約性が保存されることを主張するものである．G-同型については次の section を参照．

命題 2.8

W, W' を G-不変部分空間とする．このとき G-同型 $W \cong W'$ であって W が既約表現ならば W' も既約表現.

証明. $W \cong W'$ であるから G-同型 $\phi\colon W \to W'$ が存在する．$U \subset W'$ を G-不変部分空間とする．すると $\phi^{-1}(U) \subset W$ は G-不変部分空間である． よって W の既約性より $\phi^{-1}(U) = \{0\}, W$ となる． ここで ϕ が全単射であるから $U = \phi(\{0\}), \phi(W)$, すなわち $U = \{0\}, \phi(W)$. □

3 Intertwining Maps, Complete Reducibility

3.1 Intertwining Maps

定義 3.1 (絡写像 (Intertwining map))

$(\rho, V), (\pi, W)$ をともに群 G の表現とする．このとき線形写像 $\phi\colon V \to W$ が任意の $g \in G$ に対し

$$\phi \circ \rho(g) = \pi(g) \circ \phi$$

を満たすとき ϕ を**絡写像 (Intertwining map)**(または G-map) という．さらに ϕ が線形同型写像であるとき ϕ を **G-同型写像**, そのような ϕ が存在するとき 2 つの表現は**同型 (isomorphic), 同値 (eqivalent)** という．V から W への G-map 全体を $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ とかく．

言い換えると ϕ が G-map とは任意の $g \in G$ に対して以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\pi(g)"] \\ V \arrow[r, "\phi"'] & W \end{tikzcd}$$

また ϕ の核, 像はそれぞれ

$$\begin{aligned} \ker \phi &:= \{v \in V \mid \phi(v) = 0_W\} \\ \mathrm{Im}\, \phi &:= \{w \in W \mid \exists v \in V, w = \phi(v)\} \end{aligned}$$

と定義される．このとき $\ker \phi, \mathrm{Im}\, \phi$ はそれぞれ V, W の部分空間であったが特に G-不変部分空間となる．

証明. $v \in \ker \phi$ とすると任意の $g \in G$ に対して

$$\phi(\rho(g)v) = \pi(g)(\phi(v)) = \pi(g)(0_W) = 0_W$$

よって $\rho(g)v \in \ker \phi$ のため $\ker \phi$ は G-不変部分空間である．次に $w \in \mathrm{Im}\, \phi$ とすると $v \in V$ が存在して $w = \phi(v)$ とかける．このとき任意の $g \in G$ に対して

$$\pi(g)(w) = \pi(\phi(v)) = \phi(\rho(v)) \in \mathrm{Im}\, \phi$$

よって $\mathrm{Im}\, \phi$ は G-不変部分空間である． □

例. 三変数多項式空間で S_3-map の例を見る．$\mathcal{P}_{(1,0,0)}$ の基底は x, y, z の三つ, $\mathcal{P}_{(2,1,0)}$ の基底は $xy^2, x^2y, yz^2, y^2z, zx^2, z^2x$ の六つである．まず線形写像 $\phi\colon \mathcal{P}_{(1,0,0)} \to \mathcal{P}_{(2,0,0)}$ を

$$x \mapsto x^2, \quad y \mapsto y^2, \quad z \mapsto z^2$$

とする．このとき ϕ は S_3-map となる．このことを確かめるには任意の $\sigma \in S_3$ に対して $\phi \circ \rho(\sigma) = \pi(g) \circ \phi$ を示せばよい．しかし $S_3 = \{(1), (1,2), (1,3), (2,3), (1,3)(1,2), (1,2)(1,3)\}$ と表される (表示の仕方は一意でないことに注意) ので $(1,2), (2,3)$ に対しての成立のみ示せば十分である．実際確かめてみると

$$\begin{aligned} \phi((1,2).x) = \phi(y) = y^2 = (1,2).x^2 = (1,2).\phi(x) \\ \phi((2,3).x) = \phi(x) = x^2 = (2,3).x^2 = (2,3).\phi(x) \end{aligned}$$

y, z に対しての成立は省略する．S_3-map にならない例も見る．$\phi\colon \mathcal{P}_{(1,0,0)} \to \mathcal{P}_{(2,0,0)}$ を

$$x \mapsto x^2 + y^2, \quad y \mapsto y^2 + z^2, \quad z \mapsto z^2 + x^2$$

とすると ϕ は S_3-map ではない．実際

$$\begin{aligned} \phi((1,3).x) &= \phi(z) = z^2 + x^2 \\ (1.3).\phi(x) &= (1,3).(x^2 + y^2) = z^2 + y^2 \end{aligned}$$

となるから $\phi \circ \rho(g) \neq \pi(g) \circ \phi$.

補題 3.2 (Schur の補題)

V, W を G の既約表現とする．$\phi\colon V \to W$ を G-map とすると ϕ は零写像か同型写像である．

証明． まず ϕ の核を考えると $\ker\phi \subset V$ は G-不変部分空間であるから V の既約性より $\ker\phi = \{0\}, V$ に限られる．$\ker\phi = V$ のとき ϕ は零写像である．以降 $\phi \neq 0$ とすると $\ker\phi = \{0\}$ で ϕ は単射．次に ϕ の像を考えると $\mathrm{Im}\,\phi \subset W$ は G-不変部分空間である．W の既約性より $\mathrm{Im}\,\phi = \{0\}, W$ となるが $\phi \neq 0$ なので $\mathrm{Im}\,\phi = W$ すなわち ϕ は全射．以上より ϕ は零写像か同型写像である． □

補題 3.3 (Schur の補題 (Strong ver))

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次ベクトル空間で G の既約表現とする．$\phi\colon V \to V$ を G-map とするとある $c \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\phi = c \cdot \mathrm{id}_V$$

証明． $\mathbb{C}$ は代数閉であり，V を有限次とすると線形写像 ϕ は固有値 $c \in \mathbb{C}$ と 0 でない固有ベクトル v_c をもつ．また，$\phi - c \cdot \mathrm{id}_V$ は G-map となるから Schur の補題より $\phi - c \cdot \mathrm{id}_V$ は零写像か同型写像である．ここで $v_c \in \ker(\phi - c \cdot \mathrm{id}_V)$ なので $\ker(\phi - c \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$．よって $\phi - c \cdot \mathrm{id}_V$ は単射ではないため同型写像になり得ない．よって $\phi - c \cdot \mathrm{id}_V = 0$ すなわち $\phi = c \cdot \mathrm{id}_V$． □

系 3.4

V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で G の表現とする．このとき

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1 \iff V \text{ は既約表現}$$

右から左は Schur の補題によりすぐ分かるが左から右については仮定を加える必要がある．G が有限群の場合は後の Maschke の定理から示すことができ，G がアーベル群の場合も別の方法で示される．

$(\Longrightarrow)$ の場合の証明を G が有限群の場合とアーベル群の場合それぞれで示す．

証明． (G が有限群) Maschke の定理より U, W を G-不変部分空間として $V = U \oplus W$ とできる．ここで V から U への射影 $P_U\colon V \to U$ を考え，それを V に埋め込む写像 ι との合成写像 $\phi := \iota \circ P_U\colon V \to V$ を考える．このとき ϕ は G-map である．任意の $v = u + w$ に対し，U, W が G-不変部分空間であることから $\rho(g)u \in U, \rho(g)w \in W$ となるので

$$(\phi \circ \rho(g))(v) = \phi(\rho(u) + \rho(w)) = \rho(u) = \rho(\phi(v))$$

である．よって仮定よりある $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して $\phi = c \cdot \mathrm{id}_V$ とかける．このとき

$$\phi(v) = u, \quad \phi(v) = cv = cu + cw$$

となるが $c \neq 0$ であることから $w = 0$ でないといけない．よって $W = \{0\}$ かつ，$V = U$ つまり V は既約． □

証明． (G がアーベル群) 任意の $g, h \in G$ に対し

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g)$$

なので任意の $g \in G$ で $\rho(g)$ は G-map．仮定より $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$ であってその基底として id_V が取れるため，ある $c \in \mathbb{C}$ で $\rho(g) = c \cdot \mathrm{id}_V$ とかける．このとき $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{Hom}_G(V, V)$ が成り立つ．これは $\phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ に対し

$$(\phi \circ \rho(g))(v) = \phi(cv) = c\phi(v) = (\rho(g) \circ \phi)(v)$$

となることから従う．以上より $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = \dim \mathrm{Hom}(V, V) = (\dim V)^2 = 1$ なので $\dim V = 1$．一次元表現はすべて既約であることから V は既約． □

そして一般には非可換無限群の表現に対しては成り立たない．つまり $\dim \mathrm{Hom}_G(V,V)=1$ であるが可約な表現 V が存在する．$GL(2,\mathbb{C})$ の部分群 G を

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ b \in \mathbb{C} \right\}$$

と定めて, 次の G の $\mathbb{C}^2$ 上の表現を考える．

$$\rho\colon G \to GL(\mathbb{C}^2) \quad A \mapsto (v \mapsto Av)$$

この表現について $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})=1$ であるが可約表現である．実際, 任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ に対し φ の行列表示を求める．

$$\varphi := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \quad \forall a \neq 0, b \in \mathbb{C},\ \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi$$

を満たすような x,y,z,w の条件は簡単な計算により $x=w$, すなわちある $c\in\mathbb{C}$ で $\varphi = c\cdot \mathrm{id}_V$ となることである．よって $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})=1$ である．一方, $\mathbb{C}^2$ の G-不変部分空間として

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \{0\}, \mathbb{C}^2$$

をとることができるので既約ではない．

3.2 Complete Reducibility

定義 3.5 (補空間)

V を G の表現とし, U を V の G-不変部分空間とする． このとき V における U の**補空間 (complementary subspace)** とは V の G-不変部分空間であって $V=U\oplus W$ となるものである．

定義 3.6 (完全可約)

G の表現 V が**完全可約 (Complete Reducible)** とは V の既約な G-不変部分空間 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ を用いて

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

と表せることである．

定理 3.7 (Maschke の定理)

V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で有限群 G の表現とする．また, U を V の G-不変部分空間とする．このとき V の補空間 W が存在して $V=U\oplus W$ となる．

証明.

□

例. G が無限群のときは必ずしも Maschke の定理は成り立たない．加法群 $(\mathbb{R},+)$ の表現を

$$\rho\colon \mathbb{R} \to GL(2,\mathbb{R}); \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与える．このとき不変部分空間として $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ がとれる．しかし $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$ となる不変部分空間 W があるとすると $\dim W = 1$ なので W の基底 $w(\neq 0)$ が取れるが $w=(w_1,w_2)$ とすると任意の $t\in\mathbb{R}$ に対してある $k\in\mathbb{R}$ が存在して

$$\rho(t)w = \begin{pmatrix} w_1 + tw_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kw_1 \\ kw_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．このような w_1, w_2 の条件は $w_2 = 0$ であるがこれは $W=U$ であることを表すがこれは直和でかけていることに矛盾する．

また Maschke の定理から次のことも分かる．$\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V が G の表現であるとき, 表現の行列表示を考えるとき, ある V の基底が存在して行列表示をブロック対角行列として書くことができる．以下に簡単な例を挙げる．

例. S_3 の表現 $\mathcal{P}_{(1,0,0)}(x,y,z)$ の基底として $x+y+z, x-y, x-z$ をとる．このとき $(1,2) \in S_3$ の行列表示は

$$(1,2).(x+y+z) = x+y+z, \quad (1,2).(x-y) = -(x-y), \quad (1,2).(x-z) = y-z = -(x-y)+(x-z)$$

であることから

$$(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

でありブロック対角行列にできることが分かる．このブロック対角行列は直和分解 $\mathcal{P}_{(1,0,0)} = \mathcal{I}_3 \oplus \mathcal{W}_3$ に対応している (後述).

3.3 Invariant Inner Products and Another Proof of Complete Reducibility

定義 3.8

V を内積空間で G の表現とする．このとき内積について

$$\forall v, w \in V,\ \forall g \in G,\ \langle g.v, g.w \rangle = \langle v, w \rangle$$

を満たすときこの内積を **G-不変内積 (G-invariant inner product)** であるという．

V を G の表現とし G-不変な内積が入っているとする．W を V の部分空間とするとき W の直交補空間 (orthogonal complement) とは

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid \forall w \in W,\ \langle v, w \rangle = 0\}$$

であった．W を G-不変部分空間とするとき $W^{\perp}$ も G-不変部分空間となる．実際, 任意の $v \in W^{\perp}$ と $g \in G$ に対し $g.v \in W^{\perp}$ は次のように示される．任意の $w \in W$ に対し

$$\langle g.v, w \rangle = \langle g^{-1}.(g.v), g^{-1}.w \rangle = \langle v, g^{-1}.w \rangle$$

W は G-不変部分空間であるから $g^{-1}.w \in W$ である．また, $v \in W^{\perp}$ なので任意の W の元との内積は 0．よって $\langle g.v, w \rangle = 0$ となる．さらに直交補空間に関して次のことが成り立つ．

命題 3.9

V を有限次ベクトル空間とし G-不変内積が入った内積空間とする．W を V の G-不変部分空間とするとき

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

証明. まず $V = W + W^{\perp}$ を示す．V が有限次なので W は有限個の正規直交基底をとれるのでそれを $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ とする．このとき $v \in V$ に対し

$$w := \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i, \quad w' := v - w$$

とおくと $w \in W$ かつ $w' \in W^{\perp}$ である．$w \in W$ は明らかで, w' については内積の双線形性より

$$\begin{aligned} \langle w', w_j \rangle &= \langle w', v \rangle - \langle w, w_j \rangle \\ &= \langle w', v \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle \langle w_i, w_j \rangle \\ &= \langle v, w_j \rangle - \langle v, w_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

とできるから w' は任意の W の元と直交する．よって $w' \in W^{\perp}$ であって $v = w + w'$ と書くことができたので $V = W + W^{\perp}$ が示された．次に $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ を示す．$v \in W \cap W^{\perp}$ とすると $v \in W^{\perp}$ なので $v \in W$ と直交する．すなわち $\langle v, v \rangle = 0$ が成り立つから内積の定義より $v = 0$ が従う． □

この事実から簡単に Maschke の定理を示すことができる．有限次ベクトル空間 V が内積空間のとき常に内積が G-不変とは限らないが, 有限群の場合は具体的に G-不変内積を構成できて

$$\langle v, w \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle g.v, g.w \rangle$$

は G-不変内積となる．なぜなら任意の $g \in G$ に対し

$$\langle g.v, g.w \rangle_G = \sum_{h \in G} \langle (hg).v, (hg).w \rangle = \sum_{g' \in G} \langle g'.v, g'.w \rangle = \langle v, w \rangle_G$$

となるからこの内積は G-不変である．よって G が有限群なら内積空間 V に G-不変内積を入れることができて G-不変部分空間 W に対する補空間 $W^{\perp}$ を考えることができる．命題 3.9 より

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

とできるため Maschke の定理 (定理 3.7) が示された.

3.4 Dual Spaces and Contragredient Representations

ベクトル空間 V の双対空間 V^* とは

$$V^* = \{ f \colon V \to \mathbb{C} \mid f \text{ は線形写像} \}$$

であった．ここでは G の表現 (ρ, V) が与えられたときの V^* の表現を与えることを考える．

定義 3.10 (反傾表現, 双対表現)

(ρ, V) を表現とする．このとき表現 (ρ^*, V^*) を次のように定義する．$f \in V^*$ に対して

$$\rho^*(g)(f) := f \circ \rho(g^{-1})$$

言い換えると $\rho^*(g)$ は $\rho(g^{-1})$ の転置である．これを**反傾表現 (contragredient representation)** または**双対表現 (dual representation)** という．

実際に (ρ^*, V^*) が G の表現であることを確かめる．$g, h \in G$ に対して

$$\rho^*(gh)(f) = f \circ \rho((gh)^{-1}) = f \circ \rho(h^{-1}) \circ \rho(g^{-1}) = \rho^*(h)(f) \circ \rho(g^{-1}) = (\rho^*(g) \circ \rho^*(h))(f)$$

なので G の表現であることが分かる．既約表現 (ρ, V) の双対表現 (ρ^*, V^*) は既約表現になる．

4 The structure of the symmetric Group

4.1 Cycles and Cycle Structure

ここでは改めて対称群の構造について見ていく．

定義 4.1 (対称群)

集合 $I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ として I_n から I_n への全単射全体のなす集合は写像の合成により群をなす．これを n 次の**対称群 (symmetric group)** と呼び S_n とかく．S_n の元は**置換 (permutation)** と呼ぶ．

対称群の元の表し方の一つとして $\sigma \in S_4$ で $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 3$ であるものを

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と表す方法がある．さらにいくつかの特別な置換には名前がついている．$\sigma \in S_n$ で相異なる $i, j \in I_n$ に対し $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ であって i, j 以外は変化させないものを i と j の**互換 (transposition)** といい (i, j) で表す．また相異なる $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq n$ に対し

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m) := \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{m-1} & i_m \\ i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_m & i_1 \end{pmatrix}$$

を**巡回置換 (cyclic permutation)** と呼ぶ．すなわち互換とは長さ 2 の巡回置換である．

命題 4.2

$k \in I_n$ と $\sigma \in S_n$ に対し $\sigma^{m+1}.k = k$ かつ $\{k, \sigma.k, \sigma^2.k, \ldots, \sigma^m.k\}$ が全て異なるような整数 $m \geq 0$ が存在する．

証明. $\sigma = \mathrm{id}$ のときは明らかに成り立つため以下 $\sigma \neq \mathrm{id}$ とする．このとき集合 $\{k, \sigma.k, \sigma^2.k, \ldots\}$ を考えるとこの集合は I_n が n 元集合であることから高々 n からなる集合である．よってある $r > t > 0$ で $\sigma^r.k = \sigma^t.k$ となるものが取れる．今 σ は全単射なので σ^{-1} を用いて

$$\begin{aligned} \sigma^{-t}.\sigma^r.k &= k \\ \sigma^{r-t}.k &= k \end{aligned}$$

となる．よって $m = r - t - 1$ ととれば $\sigma^{m+1}.k = k$ が成り立つ (今 $\sigma \neq \mathrm{id}$ としていたので $r - t \geq 1$ であるから $m \geq 0$ となる)．また, $\sigma^{m+1}.k = k$ を満たす m のうち最小のものを取ることができる．その上で集合 $\{k, \sigma.k, \sigma^2.k, \ldots, \sigma^m.k\}$ のなかで $\sigma^i.k = \sigma^j.k$ となる $0 \leq i < j \leq m$ が取れたとする．このとき $\sigma^{(j-i-1)+1}.k = k$ が成り立つが $j - i - 1 \leq m - 1 < m$ となり m の最小性に反する． □

命題 4.3

任意の $\sigma \in S_n$ は共通の文字を含まない巡回置換の積で表すことができる．

例. 具体的に $\sigma = (1, 2, 3, 4)(1, 5, 3) \in S_5$ で与えられたとする．このとき 1 について

$$1 \overset{\sigma}{\mapsto} 5 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \overset{\sigma}{\mapsto} 1$$

である．また上のサイクルで出てきていない 2 に対しても同様にして

$$2 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \overset{\sigma}{\mapsto} 2$$

となるから σ は互いに交わらない巡回置換の積として

$$\sigma = (1, 5, 4)(2, 3)$$

とできることが分かった．このアイデアを一般の S_n に対して適用することで命題 4.3 の証明を行う．

証明. $k \in I_n$ を一つとる．命題 4.2 よりある正の整数 m が存在して長さ $m+1$ の巡回置換 $(k, \sigma.k, \sigma^2.k, \ldots, \sigma^m.k)$ が得られる．ここで $m+1 = n$ であれば $\sigma = (k, \sigma.k, \sigma^2.k, \ldots, \sigma^m.k)$ であるから $m+1 < n$ のときを考える．このとき $I_n \setminus \{k, \sigma.k, \ldots, \sigma^m.k\} \neq \emptyset$ であるから $k' \in I_n \setminus \{k, \sigma.k, \ldots, \sigma^m.k\}$ をとると同様にして巡回置換 $(k', \sigma.k', \sigma^2.k', \ldots, \sigma^{m'}.k')$ が得られる．すると 2 つの巡回置換は共通の文字を含まない巡回置換である．もし $r > t$ で $\sigma^r.k = \sigma^t.k'$ となるものが取れたとすると $\sigma^{r-t}.k = k'$ となるがこれは $k' \notin \{k, \sigma.k, \sigma^2.k, \ldots, \sigma^m.k\}$ に矛盾する．この操作を繰り返すことで共通の文字を含まない巡回置換が得られるがこの操作は I_n が有限であることから有限回で終わる．よって得られたいくつかの巡回置換の積で σ を表すことができた． □

また互いに交わらない巡回置換は可換であることも簡単に示すことができる．以上の考察から S_n の元の分類を考えることができる．命題 4.3 により任意の $\sigma \in S_n$ は互いに交わらない巡回置換の積で表すことができるので $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot \cdots \cdot c_r$ とする ($c_1 c_2 \cdots c_r$ は巡回置換)．このとき巡回置換 c_i の長さを $|c_i|$ で表すことにすると巡回置換を適切に並び替えることで $|c_1| \geq |c_2| \geq \cdots \geq |c_r|$ とできる．すると n の分割 $(|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_r|) \vdash n$ が得られる．このことから置換に対しても分割によるタイプの分類を考えることができる．上の $\sigma \in S_n$ に対し $(c_1, c_2, \ldots, c_r)$ を σ の **cycle structure** という．

4.2 Generators and Parity

命題 4.4

任意の $\sigma \in S_n$ は有限個の互換の積で表すことができる．

定義 4.5

$\sigma \in S_n$ が偶数個の置換の積として表されるとき σ を**偶置換**といい, 奇数個の置換の積として表されるとき奇置換という．また, 置換の**符号 (sign)** を

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases}$$

で定める．

上で定めた写像 sgn は well-defined で群準同型である．つまり σ の互換の積での表し方によらない．また, σ が偶置換かつ奇置換になることはない．

証明. まず差積 Δ_n を

$$\Delta_n := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \in \mathcal{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

で定める (教科書の定め方では $\sigma.\Delta_n$ は作用として定義しているわけではないことに注意する)．このとき多項式への作用として $\sigma.\Delta_n = \pm\Delta_n$ となることがすくにわかる．このとき

$$\operatorname{sgn} \sigma = \frac{\sigma.\Delta_n}{\Delta_n} (= \pm 1)$$

を示す．そのためにまず $\sigma \mapsto \sigma.\Delta_n / \Delta_n$ が群準同型になっていることを確認する．任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対し

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{(\sigma\tau)(j)} - x_{(\sigma\tau)(i)}}{x_j - x_i} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{(\sigma\tau)(j)} - x_{(\sigma\tau)(i)}}{x_{\tau(j)} - x_{\tau(i)}} \frac{x_{\tau(j)} - x_{\tau(i)}}{x_j - x_i} \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau \end{aligned}$$

σ が互換のときは $\operatorname{sgn} \sigma = -1$ となることがすぐにわかるので sgn が準同型であることから $\operatorname{sgn} \sigma$ は σ を互換の積で表したときの互換の数を n として $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^n$ となる． □

4.3 Conjugation and Conjugacy Classes

定義 4.6 (共役)

群 G に対し $h \in G$ をとる．写像

$$\phi_h\colon G \to G; \quad g \mapsto hgh^{-1}$$

を h による**共役**という．さらに g, g' に対しある $h \in G$ が取れて $g' = \phi_h(g)$ とできるとき g は g' に共役であるという．

この共役は全単射であることをはじめに確かめていた．ここでは対称群における共役の性質には次のものがある．

命題 4.7

n 次対称群 S_n で $\sigma, \tau \in S_n$ が共役であることと σ, τ が同じ cycle structure を持つことは同値である．

ここで次の補題を示しておく．

補題 4.8

巡回置換 $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in S_n$ としたとき任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma.t_1, \sigma.t_2, \dots, \sigma.t_k)$$

が成り立つ．

証明． (補題の証明) $I_k := \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ とする．また簡単のため示すべき式の右辺の巡回置換を μ とする．

(i) $\sigma^{-1}(i) \in I_k$ のとき．ある $t_j \in I_k$ で $i = \sigma(t_j)$ と表される．すると

$$\begin{aligned}(\sigma\tau\sigma^{-1})(i) &= (\sigma\tau)(t_j) = \sigma(t_{j+1}) \\ \mu(i) &= \mu(\sigma(t_j)) = \sigma(t_{j+1})\end{aligned}$$

となり成り立つ ($j = k$ のときは $j + 1 = 1$ としておけばよい).

(ii) $\sigma^{-1}(i) \notin I_k$ のとき．$\mu(i) = i$ であって

$$\sigma\tau(\sigma^{-1}(i)) = (\sigma\sigma^{-1})(i) = i$$

となり成り立つ． □

証明． (命題の証明) まず σ, τ が共役であると仮定する．すると $\pi \in S_n$ が存在して $\pi\sigma\pi^{-1} = \tau$ とかける．$\sigma = c_1c_2\cdots c_r$ と互いに交わらない巡回置換の積で書けたとする．このとき補題をもちいれば各 $i = 1, 2, \dots, r$ に対し $\pi c_i \pi^{-1}$ は c_i と同じ長さの巡回置換である．さらに $\pi c_i \pi^{-1}$ と $\pi c_j \pi^{-1}$ が交わるとすると c_i, c_j が交わらないことに矛盾する．これらから $\tau = (\pi c_1 \pi^{-1})(\pi c_2 \pi^{-1}) \cdots (\pi c_r \pi^{-1})$ となり σ と同じ cycle structure を持つことが分かる．

次に σ, τ が同じ cycle structure を持つと仮定する．互いに交わらない巡回置換の積として

$$\begin{aligned}\sigma &= c_1c_2\cdots c_r \\ \tau &= c'_1c'_2\cdots c'_r\end{aligned}$$

とできる．ただし各 i に対し c_i と c'_i の長さは同じである．この巡回置換での表示には 1 から n が一度ずつもれなく現れているので $\pi \in S_n$ を次のように定めることができる．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \sigma = & (c_{11}, & c_{12}, & \dots)(& c_{21}, & c_{22} & \dots) & \cdots & (& c_{r1}, & c_{r2}, & \dots) \\ & \downarrow{\scriptstyle\pi} & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & \downarrow{\scriptstyle\pi} & \\ \tau = & (c'_{11}, & c'_{12}, & \dots)(& c'_{21}, & c'_{22}, & \dots) & \cdots & (& c'_{r1}, & c'_{r2}, & \dots) \end{array}$$

この $\pi \in S_n$ をを用いると補題より $\sigma = \pi\tau\pi^{-1}$ となることが分かり, σ と τ は共役． □

5 S_n-Decomposition of Polynomial Spaces

一般に S_n は n 変数 k 次斉次多項式全体 $\mathcal{P}_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に作用するのだった．また，k の分割 α に対し $\mathcal{P}_\alpha$ は $\mathcal{P}_k$ の S_n-不変部分空間である．このことから次の直和分解

$$\mathcal{P}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\alpha \vdash k} \mathcal{P}_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

が成り立つ．ここからは $n = 2, 3$ の場合の $\mathcal{P}_k$ の既約分解を見ていく．

5.1 S_2-Decomposition

まず一番簡単な場合として $\mathcal{P}_1$ について考察する．$\mathcal{P}_1$ には自明な表現 $\mathcal{I}_2 := \langle x + y \rangle$ が存在する．$\mathcal{I}_2$ の直交補空間を調べれば次の既約分解が得られる．

命題 5.1

S_2 の表現である $\mathcal{P}_1$ についてその部分空間を

$$\mathcal{I}_2 := \langle x + y \rangle, \quad \mathcal{A}_2 = \langle x - y \rangle$$

とすると $\mathcal{P}_1 = \mathcal{I}_2 \oplus \mathcal{A}_2$ であって $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{A}_2$ は共に既約表現

$\mathcal{I}_2$, $\mathcal{A}_2$ は共に一次元表現であるから既約表現になっていることがすぐにわかる．より一般に次の記号を定める．

定義 5.2

一般に $\mathcal{P}_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ の部分空間で

$$\mathcal{I}_n := \{v \in \mathcal{P}_\alpha \mid \forall \sigma \in S_n,\ \sigma.v = v\}, \quad \mathcal{A}_n := \{v \in \mathcal{P}_\alpha \mid \forall \sigma \in S_n,\ \sigma.v = (\operatorname{sgn} \sigma) v\}$$

とする．$\mathcal{I}_n$ を自明な表現, $\mathcal{A}_n$ を**交代表現 (alternating representation)** という．

さらにここでは $\mathcal{P}_1$ の既約分解は $\mathcal{P}_1 = \mathcal{I}_2 \oplus \mathcal{A}_2$ に限られる．

5.2 S_3-Decomposition

$\mathcal{P}_1$ については S_2 のときと同様に自明な表現 $\mathcal{I}_3 := \langle x + y + z \rangle$ が存在する．$\mathcal{I}_3$ の直交補空間を $\mathcal{W}_3$ として次の既約分解が成立する．

命題 5.3

S_3 の表現である $\mathcal{P}_1$ についてその部分空間を

$$\mathcal{I}_3 := \langle x + y + z \rangle, \quad \mathcal{W}_3 := \{rx + sy + tz \mid r, s, t \in \mathbb{C},\ r + s + t = 0\}$$

とすると $\mathcal{P}_1 = \mathcal{I}_3 \oplus \mathcal{W}_3$ であって $\mathcal{I}_3$, $\mathcal{W}_3$ は共に既約表現

証明. $\mathcal{W}_3$ が既約表現であることを示す．$\mathcal{W}_3$ の次元は 2 であるから $\{0\}$ でも $\mathcal{W}_3$ にも一致しない S_3-不変部分空間の次元は存在するとすれば 1 である．よってそれを W' とすればある 0 でない $w = ax + by + cz \in \mathcal{W}_3$ によって $W' = \langle w \rangle$ となる．W' は S_3-不変部分空間であるから $(1, 2) \in S_3$ に対し

$$(1, 2).w = ay + bx + cz = k(ax + by + cz)$$

となる $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する．z の係数を比較することで $c = 0$ または $k = 1$ となるが $c = 0$ のときは $(2, 3)$ を考えれば $b = 0$ がわかり, $\mathcal{W}$ の部分空間であるから $a = 0$ これは $W' \neq \{0\}$ に矛盾．よって $c \neq 0$ かつ $k = 1$ のときを考えればよい．このとき $a = b$ である．$(2, 3) \in S_3$ に対して同様にして

$$(2, 3).w = ax + az + cy = k'(ax + ay + cz)$$

となる $k' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する．x の係数を比較すれば $a = 0$ または $k' = 1$ となるが $a = 0$ のときは $c = 0$ となり矛盾．$k' = 1$ かつ $a \neq 0$ の場合も $a = c$ となるがこのような $a, c \neq 0$ はとれないので $\mathcal{W}$ は既約である． □

次に $\mathcal{P}_2$ について考える．まず直和分解 $\mathcal{P}_{(2,0,0)} \oplus \mathcal{P}_{(1,1,0)}$ が成り立つ．$\mathcal{P}_{(2,0,0)} = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$ については $\mathcal{P}_{(1,0,0)}$ と同様に分解することができて $\mathcal{P}_{(2,0,0)} \cong \mathcal{I}_3 \oplus \mathcal{W}_3$ が成り立つ．実際,

$$x \mapsto x^2, \quad y \mapsto y^2, \quad z \mapsto z^2$$

は $\mathcal{P}_{(1,0,0)}$ から $\mathcal{P}_{(2,0,0)}$ への全単射な S_3-map になっている．また, $\mathcal{P}_{(1,1,0)}$ も同様にして $\mathcal{P}_1$ から $\mathcal{P}_{(1,1,0)}$ への全単射な S_3-map

$$x \mapsto yz, \quad y \mapsto zx, \quad z \mapsto xy$$

が存在するから $\mathcal{P}_2$ の既約分解

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{(2,0,0)} \oplus \mathcal{P}_{(1,1,0)} \cong \mathcal{I}_3^{\oplus 2} \oplus \mathcal{W}_3^{\oplus 2}$$

を得る．ただしベクトル空間 V と $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$V^{\oplus k} := \underbrace{U \oplus U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ 個}}$$

とする．一般に表現 V が部分表現 U, W(ただし U は W に含まれる全ての既約表現と同型ではない) として

$$V \cong U^{\oplus k} \oplus W$$

と分解されたとき k を U における V の**重複度 (multiplicities)** とよぶ．次は $\mathcal{P}_3$ について考える．

命題 5.4

S_3 の表現 $\mathcal{P}_3$ について $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_{(3,0,0)} \oplus \mathcal{P}_{(2,1,0)} \oplus \mathcal{P}_{(1,1,1)}$ であって, 特に

$$\mathcal{P}_{(2,1,0)} \cong \mathcal{I}_3 \oplus \mathcal{W}_3^{\oplus 2} \oplus \mathcal{A}_3$$

である．このことから既約分解 $\mathcal{P}_3 \cong \mathcal{I}_3^{\oplus 3} \oplus \mathcal{W}_3^{\oplus 3} \oplus \mathcal{A}_3$ を得る．

証明. まず $\mathcal{P}_{(2,1,0)}$ は自明な一次元部分表現 $\mathcal{I}_3$ をもつ．これは一次元なので既約表現である．$\phi_1, \phi_2 \colon \mathcal{P}_{(1,0,0)} \to \mathcal{P}_{(2,1,0)}$ を次のように定めるといずれも S_3-map であることが確認できる．

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= xy^2 + xz^2, \quad \phi_1(y) = yz^2 + yx^2, \quad \phi_1(z) = zx^2 + zy^2 \\ \phi_2(x) &= x^2y + x^2z, \quad \phi_2(y) = y^2z + y^2x, \quad \phi_2(z) = z^2x + z^2y \end{aligned}$$

このとき ϕ_1, ϕ_2 は単射であるから $\mathcal{W}_3 \cong \phi_1(\mathcal{W}_3)$, $\mathcal{W}_3 \cong \phi_2(\mathcal{W}_3)$ であって, $\phi_1(\mathcal{W}_3), \phi_2(\mathcal{W}_3)$ はそれぞれ 2 次元の既約表現である．この二つの部分表現に対し $\phi_1(\mathcal{W}_3) \cap \phi_2(\mathcal{W}_3) = \{0\}$ が成り立つ．実際 $\phi_1(a_1x + b_1y + c_1z) \in \phi_1(\mathcal{W}_3)$, $\phi_2(a_2x + b_2y + c_2z) \in \phi_2(\mathcal{W}_3)$ として

$$\phi_1(a_1x + b_1y + c_1z) = \phi_2(a_2x + b_2y + c_2z)$$

と仮定して計算すると

$$a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$$

がわかる．$\mathcal{P}(2,1,0)$ は 6 次元なので残り一つ一次元の既約表現が存在する．それは

$$\mathcal{A}_3 = \{v \in \mathcal{P}_{(2,1,0)} \mid \forall \sigma \in S_3,\ \sigma.v = (\operatorname{sgn}\sigma)v\}$$

である．これが一次元表現であることを確かめる．$v \in \mathcal{P}_{(2,1,0)}$ と $\sigma, \tau \in S_3$ に対して $\sigma.v = (\operatorname{sgn}\sigma)v$ かつ $\tau.v = (\operatorname{sgn}\sigma)v$ なら

$$(\sigma\tau).v = \sigma.(\tau.v) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)v = (\operatorname{sgn}(\sigma\tau))v$$

なので S_3 の生成元に対してのみの成立で十分である．$v = c_1x^2y + c_2xy^2 + c_3y^2z + c_4yz^2 + c_5z^2x + c_6zx^2$ として $(1,2).v = -v, (1,2,3).v = v$ を考えれば

$$c_1 = -c_2 = c_3 = -c_4 = c_5 = -c_6$$

となる．よって $\mathcal{A}_3$ は一次元表現で

$$\mathcal{A}_3 = \langle x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 \rangle$$

とわかる．ここまでで得られた 4 つの既約表現 $\mathcal{I}_3, \phi_1(\mathcal{W}_3), \phi_2(\mathcal{W}_3), \mathcal{A}_3$ は互いに異なっていることはすぐに確認できるため共通部分は $\{0\}$ である．以上より既約表現

$$\mathcal{P}_{(2,1,0)} \cong \mathcal{I}_3 \oplus \mathcal{W}_3^{\oplus 2} \oplus \mathcal{A}_3$$

が得られる． □

以上の S_3 の分解の考察では既約表現が一意であることは議論していないことに注意する．つまり同じ $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ でも別の既約分解の形が得られる可能性もある．

5.3 isotypic Subspaces and Multiplicities

定義 5.5 (isotypic component)

V を G の表現で既約分解が与えられているものとする．また W を G の既約表現とする．このとき V の W-isotypic component とは V の既約分解に現れる W と同型な既約部分表現全ての直和である．

命題 5.6

V, U, W を G の表現とする．このとき

$$\mathrm{Hom}_G(V, U \oplus W) = \mathrm{Hom}_G(V, U) \oplus \mathrm{Hom}_G(V, W)$$

が成り立つ．

証明. まず直和になることを示す．暗に $U \cap W = \{0\}$ の仮定が課されていることに注意する．$\phi \in \mathrm{Hom}_G(V,U) \cap \mathrm{Hom}_G(V,W)$ をとる．このとき任意の $v \in V$ に対し $\phi(v) \in U \cap W$ なので $\phi(v) = 0$ となる．つまり $\mathrm{Hom}_G(V,U) \cap \mathrm{Hom}_G(V,W) = \{0\}$ がわかる．次に等式

$$\mathrm{Hom}_G(V, U \oplus W) = \mathrm{Hom}_G(V, U) \oplus \mathrm{Hom}_G(V, W)$$

を示す．まず $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, U \oplus W)$ をとる．このとき任意の $v \in V$ に対し $\phi(v) = u + v$ と一意に表せるので射影との合成を考えることで $\phi(v) = (P_U \circ \phi)(v) + (P_W \circ \phi)(v)$ とかける．$P_U \circ \phi \in \mathrm{Hom}_G(V,U)$, $P_W \circ \phi \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$ のため $\mathrm{Hom}_G(V, U \oplus W) \subset \mathrm{Hom}_G(V,U) \oplus \mathrm{Hom}_G(V,W)$ である．逆も簡単に確認できる． □

6 The Group Algebra

定義 6.1 ((体上の) 多元環)

A を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．さらに A 上の積 $A \times A \to A$ が定まっていて次の (i) から (iii) を満たすとき A を体 $\mathbb{K}$ 上の**代数**, **多元環 (algebra)** という: 任意の $x, y, z \in A$, $k \in \mathbb{K}$ に対し

(i) $(x + y)z = xz + yz$.

(ii) $x(y + z) = xy + xz$.

(iii) $(kx)y = k(xy) = x(ky)$.

さらに条件

(iv) 任意の $x, y, z \in A$ に対し $(xy)z = x(yz)$.

(v) ある $e \in A$ が存在して任意の $x \in V$ に対し $ex = xe = x$.

を考える．(iv) を満たす多元環を結合多元環, 結合代数 (associative algebra), (v) を満たす多元環を単位的多元環 (unital algebra) と呼ぶ.

多元環の定義に結合法則を含める場合もあるため注意する．以降特に明記しない限り多元環は結合的かつ単位的とする．ここでは確認しないが多元環は名前の通り上で述べた加法と乗法に関して環をなす．多元環 A における乗法について $0 \in A$ ベクトル空間の加法単位元とすると任意の $x \in A$ に対し次が成り立つ.

$$x0 = 0x = 0$$

これは $y \in A$ として $0x = (y - y)x = y + (-y)x = yx - yx = 0$ からわかる.

例. 多元環の簡単な例を見る．体 $\mathbb{K}$ に対する $\mathrm{Mat}(\mathbb{K}, n)$ は行列の積で多元環になる．多項式空間 $\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n)$ は通常の多項式の積で多元環になる.

定義 6.2

G を有限群とする．このとき $\mathbb{C}$ 係数の形式的な和

$$\sum_{g \in G} c_g g \quad (c_g \in \mathbb{C})$$

を考える．この和は G が有限群なので有限の和である．これは各 c_g を写像 $G \to \mathbb{C}$ の値と考えればよい．この形式的和の全体を $\mathbb{C}[G]$ で表す．ここに和とスカラー倍をそれぞれ

$$\left(\sum_{g \in G} c_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} c'_g g\right) = \sum_{g \in G} (c_g + c'_g) g, \quad c\left(\sum_{g \in G} c_g g\right) = \sum_{g \in G} (c c_g) g$$

で定めると $\mathbb{C}[G]$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる．さらに $\mathbb{C}[G]$ 上に積を次のように定める.

$$\left(\sum_{g \in G} c_g g\right)\left(\sum_{g \in G} c'_g g\right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (c_g c'_h) gh = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} c_h c'_{h^{-1}g}\right) g$$

で定めると $\mathbb{C}[G]$ は $\mathbb{C}$ 上の多元環をなす．この $\mathbb{C}[G]$ を ($\mathbb{C}$ 係数の)G 上の**群多元環 (group algebra)** または**群環 (group ring)** と呼ぶ.

上の定義では簡単のため G は有限群としたが実際は有限群でなくても定義できる．具体的には形式的和の係数を有限個の $g \in G$ を除いて 0 とすればよい．群環における乗法では和の記号が二つ出てきているが外側の和は形式的和である一方で内側の和は $\mathbb{C}$ 上の和であることにも注意する．教科書では明確に定義を書いていないので読むときは注意．ここでは形式的和と畳み込みによる定義を採用したが G の元を基底として基底の行先を双線形写像として定めても同値な定義になる.

証明. 群環が多元環の定義を満たしていることを確認する．まず分配法則について

$$\begin{aligned}(x+y)z &= \left(\sum_{g\in G}(x_g+y_g)g\right)\left(\sum_{g\in G}z_g g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G}(x_h+y_h)z_{h^{-1}g}\right)g \\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G}x_h z_{h^{-1}g} + \sum_{h\in G}y_h z_{h^{-1}g}\right)g \quad (\text{体における分配法則を用いた}) \\ &= xz+yz \quad (\mathbb{C}[G]\ \text{における和の定義})\end{aligned}$$

より $(x+y)z = xz+yz$ が成り立つ．$x(y+z) = xy+xz$ については同様のため省略する．

次に結合法則 $(xy)z = x(yz)$ について

$$(xy)z = \sum_{g\in G}\left[\sum_{l\in G}\left(\sum_{h\in G}x_h y_{h^{-1}l}\right)z_{l^{-1}g}\right]$$

であって，

$$\begin{aligned}x(yz) &= \sum_{g\in G}\left[\sum_{h\in G}x_h\left(\sum_{l\in G}y_l z_{l^{-1}h^{-1}g}\right)\right] \quad (\text{和の順番を入れ替える}) \\ &= \sum_{g\in G}\left[\sum_{l\in G}\left(\sum_{h\in G}x_h y_l z_{l^{-1}h^{-1}g}\right)\right] \quad (l' = hl\ \text{として}) \\ &= \sum_{g\in G}\left[\sum_{l'\in G}\left(\sum_{h\in G}x_h y_{h^{-1}l'} z_{l'^{-1}g}\right)\right]\end{aligned}$$

なので $(xy)z = x(yz)$ が成り立つ．最後に $e\in\mathbb{C}[G]$ を次で定める．

$$e := \sum_{g\in G}\delta_e(g)g, \quad \delta_e(g) = \begin{cases}1 & (g=e)\\ 0 & (g\neq e)\end{cases}$$

このとき e は $\mathbb{C}[G]$ における乗法単位元である．実際，

$$ex = \left(\sum_{g\in G}\delta_e(g)g\right)\left(\sum_{g\in G}x_g g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G}\delta_e(h)x_{h^{-1}g}\right)g = \sum_{g\in G}x_g g = x$$

のように確かめることができる． □

例. 群環における演算の例を見てみる．$\mathbb{C}[S_3]$ において $(1)+3(1,2,3), (1,2)-(1,3)\in\mathbb{C}[S_3]$ であって

$$\begin{aligned}[(1)+3(1,2,3)]\,[(1,2)-(1,3)] &= (1)(1,2)-(1)(1,3)+3(1,2,3)(1,2)-3(1,2,3)(1,3) \\ &= (1,2)-(1,3)+3(1,3)-(2,3) \\ &= (1,2)+2(1,3)-(2,3)\end{aligned}$$

$\mathbb{C}[G]$ はベクトル空間としてみることで G の表現と考えることができる．それが右正則表現および左正則表現である．

定義 6.3 (右正則表現, 左正則表現)

G を群, $\mathbb{C}[G]$ を G 上の群環とする． $\sigma\in G$ に対して線形写像 $L(\sigma)\colon \mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ を対応させる写像を $v = r_1g_1+r_2g_2+\cdots+r_ng_n$ として次で定める．

$$L(\sigma)v = r_1(\sigma g_1)+r_2(\sigma g_2)+\cdots+r_n(\sigma g_n)$$

この L を**左正則表現 (left regular representation)** という．同様にして**右正則表現 (right regular representation)**$R\colon \mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ を

$$R(\sigma)v = r_1(g_1\sigma^{-1})+r_2(g_2\sigma^{-1})+\cdots+r_n(g_n\sigma^{-1})$$

で定める．

L, R が表現であることは容易に確認できるので省略する.

代数 A, B に対して $\phi\colon A \to B$ が線形かつ環準同型であるとき ϕ を**代数準同型 (algebra homomorphism)** であるという. 今まで扱ってきたような G の表現 (ρ, V) があるとき, これを拡張して多元環 $\mathbb{C}[G]$ の表現 (ρ', V) を作ることができる. $a = \sum_{g \in G} r_g g \in \mathbb{C}[G]$ と $v \in V$ に対し

$$\rho'(a)(v) = \sum_{g \in G} r_g \rho(g) v$$

はとすれば $\rho'\colon V \to V$ は代数準同型になる. このように $\rho\colon \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ が代数準同型であるとき $(\rho, \mathbb{C}[G])$ を代数 A の表現という.

定義 6.4 (加群)

多元環 A がベクトル空間 V に作用しているとき V は **A-加群 (A-module)** という. 特に作用が左 (右) 作用であるとき V は左 (右)A-加群 (left(right)A-module) であるという. さらに V が左 A 加群かつ右 B 加群であって, 結合律

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \forall v \in V,\ (a.v).b = a.(v.b)$$

が成り立つとき, V を A-B-両側加群 (A-B-bimodule) であるという.

例. $\mathbb{C}[G]$ は上で確認した右正則表現と左正則表現によって $\mathbb{C}[G]$-両側加群である.

例. 多項式空間 $\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n)$ を考える. 初めに考えていた多項式の S_n による作用から誘導される多元環としての表現を $a = \sum r_\sigma \sigma \in \mathbb{C}[S_n]$, $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$a.p = \sum_{\sigma \in S_n} r_\sigma \sigma.p$$

で定めることができる.

定義 6.5 ((群環の) 中心)

G 上の群環 $\mathbb{C}[G]$ の部分多元環

$$Z\mathbb{C}[G] := \{a \in \mathbb{C}[G] \mid \forall b \in \mathbb{C}[G],\ ab = ba\}$$

を群環 $\mathbb{C}[G]$ の**中心 (center)** という.

定義 6.6 (class function)

G 上の群環 $\mathbb{C}[G]$ の部分多元環

$$\mathbb{C}_{class}[G] := \{a \in \mathbb{C}[G] \mid \forall g, h \in G,\ a(hgh^{-1}) = a(g)\}$$

の元を**類関数 (class functions)** と呼ぶ.

$a \in \mathbb{C}_{class}[G]$ とすると任意の $g, h \in G$ に対し

$$a(gh) = a(h(gh)h^{-1}) = a(hg)$$

が成り立つ.

命題 6.7

G を有限群とし, その上の群環 $\mathbb{C}[G]$ を考える. このとき $Z\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}_{class}[G]$ が成り立つ.

7 The Irreducible Representations of S_n: Characters

7.1 Characters and Class Functions

まずトレースについての復習を行う．次の定義はベクトル空間の基底の取り方に依存する定め方であることに注意する．

定義 7.1 (トレース)

V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．このとき線形写像 $f\colon V \to V$ のトレース $\mathrm{tr}(f)$ を f の (ある基底に関する) 表現行列の対角成分の和として定める．

このトレースの定義は well-defined である．つまり V の基底の取り方によらない．これは基底の変換行列によって f の表現行列は相似であることとそれによってトレースが不変であることから従う．トレースは次の性質を満たすのだった．

$$\mathrm{tr}(f+g) = \mathrm{tr}(f) + \mathrm{tr}(g)$$
$$\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf)$$

また, 表現行列によらないということから $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V において f は固有値を持つのでそれらの固有値の和 (重根も考慮して) として $\mathrm{tr}(f)$ を定めることができる．

定義 7.2 (指標 (character))

(ρ, V) を群 G の有限次元表現とする．V の**指標 (character)**$\chi_V\colon G \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_V(g) := \mathrm{tr}(\rho(g))$$

で定める．特に既約表現の指標は既約指標と呼ばれる．

以下に指標の重要な性質を述べる．

命題 7.3

V が G の表現であって

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

であるとき, $\chi_V = \chi_{V_1} + \chi_{V_2} + \cdots + \chi_{V_k}$ が成り立つ．さらに $g, h \in G$ に対して

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$$

が成り立つ．

これらの性質はトレースの性質からただちに従う．さらに次の性質は指標が表現を特徴づける不変量になっていることを示すものである．

命題 7.4

G の表現 (ρ, V), (π, W) が同型であることと $\chi_V = \chi_W$ であることは同値である．

証明. V, W が同型な表現とすると G-同型写像 $\phi\colon V \to W$ が存在して $\phi \circ \rho(g) = \pi(g) \circ \phi$ が成り立つ．すると

$$\chi_W(g) = \mathrm{tr}(\pi(g)) = \mathrm{tr}(\phi \circ \rho(g) \circ \phi^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = \chi_V(g)$$

が示される． □

7.2 Characters of S_3

このセクションでは次に示す S_3 の指標表を構成する．

cycle structure	(1,1,1)	(2,1)	(3)
$\mathcal{I}$	1	1	1
$\mathcal{A}$	1	-1	1
$\mathcal{W}$	2	0	-1

多項式空間の基底から表現行列を考えることで S_3 の指標を計算することができる．多項式空間 $\mathcal{P}_1(x,y,z) \cong \mathcal{I} \oplus \mathcal{W}$ で考える．まず自明な表現について考える．自明な表現の基底は $\mathcal{I} \cong \langle x+y+z \rangle$ の表現行列は $x+y+z$ を変えないということから表現行列は 1×1 の単位行列．よって $\chi_{\mathcal{I}} = 1$.

次に $\mathcal{W}$ の指標を求めるために $\mathcal{P}_1(x,y,z)$ の指標を考える．$\mathcal{P}_1(x,y,z)$ の基底は x,y,z であり, それぞれの表現行列は

$$\rho((1)) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho((1,2)) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho((1,2,3)) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なので指標を計算すると次のようになる．$\mathcal{W}$ の指標は指標の性質 $\chi_{\mathcal{P}_1} = \chi_{\mathcal{I}} + \chi_{\mathcal{W}}$ を用いた.

cycle structure	(1,1,1)	(2,1)	(3)
$\mathcal{P}_1$	3	1	0
$\mathcal{I}$	1	1	1
$\mathcal{W}$	2	0	-1

$\mathcal{A}$ の指標を求める．そのために $\mathcal{P}_{(2,1,0)}(x,y,z)$ で考える．この空間において $\mathcal{A}$ は一次元である．その基底を p とする．p は S_3 の元に対し

$$\rho((1))p = p, \quad \rho((1,2))p = -p, \quad \rho((1,2,3))p = p$$

となることから表現行列は順に $1, -1, 1$ のみを成分にもつ 1×1 行列なので指標は順に $1, -1, 1$ となることが分かった．ここではまだ示さないが S_3 の既約表現は上に挙げた $\mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathcal{W}$ のみであって, それぞれの指標は一次独立であることが知られている．この事実を用いると他の表現空間の既約分解も具体的に与えることができる.

例. $\mathcal{P}_{(3,1,0)}$ の既約分解を考える．$\mathcal{P}_{(3,1,0)} \cong a\mathcal{I} \oplus b\mathcal{A} \oplus c\mathcal{W}$ とおく．まず $\mathcal{P}_{(3,1,0)}$ の指標を考える．基底のうち置換による作用によって不変なものの数を考えればよい．$\mathcal{P}_{(3,1,0)}$ の次元は 6 であるから

$$\chi_{\mathcal{P}_{(3,1,0)}}((1)) = 6, \quad \chi_{\mathcal{P}_{(3,1,0)}}((1,2)) = 0, \quad \chi_{\mathcal{P}_{(3,1,0)}}((1,2,3)) = 0$$

となる．このことと $\chi_{\mathcal{P}_{(3,1,0)}} = a\chi_{\mathcal{I}} + \chi_{b\mathcal{A}} + \chi_{c\mathcal{W}}$ を用いると

$$\begin{cases} 6 = a + b + c \\ 0 = a - b \\ 0 = a + b - c \end{cases}$$

となるのでこれを解けば $a = 1, b = 1, c = 2$ が分かり既約分解

$$\mathcal{P}_{(3,1,0)} \cong \mathcal{I} \oplus 2\mathcal{W} \oplus \mathcal{A} \cong \mathcal{P}_{(2,1,0)}$$

が得られる.

8　今後の展望

S_3 既約表現は上で挙げた 3 つであることは既知として考えたが, 内積や直交性を考慮することで既約表現が全部でいくつあるかが分かったりする．また既約表現は Young 図形との対応を考えることができ, それによって Young 図形から既約表現の次元, 構造を考察することもできる.