単体複体のホモロジー群

小林 和真

理学部 数理学科 2 年

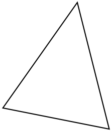
2024 年 4 月 17 日

導入

高校までの幾何学	$\to$	トポロジー
長さ, 角度に注目	$\to$	つながり方に注目

高校までの幾何学 $\rightarrow$ トポロジー

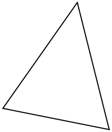
長さ, 角度に注目 $\rightarrow$ つながり方に注目



図形的な概念

高校までの幾何学 $\rightarrow$ トポロジー

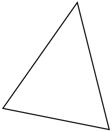
長さ, 角度に注目 $\rightarrow$ つながり方に注目



図形的な概念

$\xrightarrow[\text{代数構造}]{}$ $C_q(K)$ 鎖群

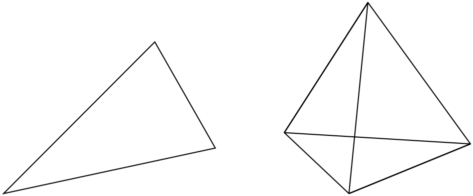
高校までの幾何学 $\rightarrow$ トポロジー
長さ, 角度に注目 $\rightarrow$ つながり方に注目



図形的な概念 $\xrightarrow{\text{代数構造}}$ $C_q(K)$ 鎖群 $\xrightarrow{\text{情報の抽出}}$ $H_q(K)$ ホモロジー群

単体と複体について

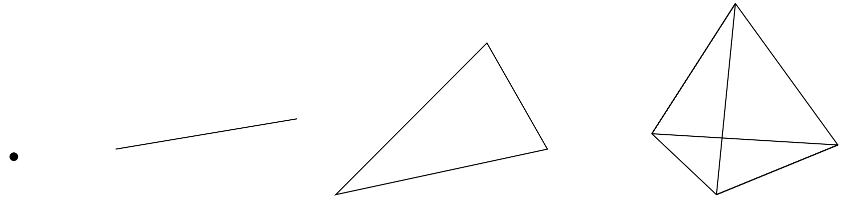
今まで勉強してきた図形の中には三角形, 四面体などの図形があった. このような図形を単体や複体としてユークリッド空間内の点の集まりで定義する.



定義 (単体)

$\mathbb{R}^N$ 上の一般的な位置にある $n+1$ 個の点 $a_0, a_1, \cdots a_n$ に対し n 次元単体 (n 単体) $|a_0 a_1 \cdots a_n|$ を次のように定義する.

$$|a_0 a_1 \cdots a_n| = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

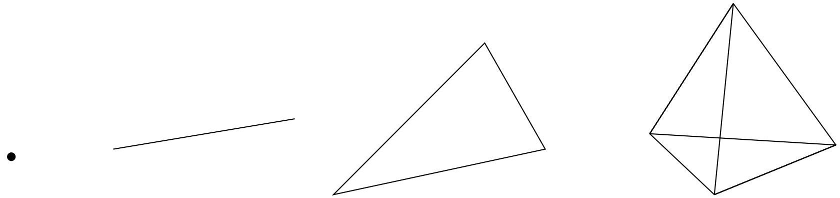


0 次元単体　1 次元単体　2 次元単体　3 次元単体

定義 (単体)

$\mathbb{R}^N$ 上の一般的な位置にある $n+1$ 個の点 $a_0, a_1, \cdots a_n$ に対し n 次元単体 (n 単体) $|a_0 a_1 \cdots a_n|$ を次のように定義する.

$$|a_0 a_1 \cdots a_n| = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

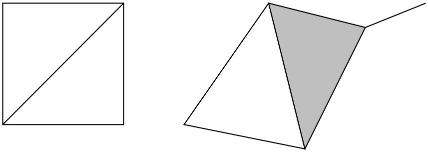


0 次元単体　1 次元単体　2 次元単体　3 次元単体

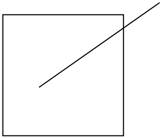
n 次元単体は $n+1$ 個の点を結んで中身を埋めたものになる.

複体とは単体を"きれいに"張り合わせたものである．つまり複体はいくつかの単体の集合で定義される．

複体の例



複体でない例



ホモロジー群

次の鎖群は図形的な概念である複体に代数的な構造を入れた概念である.

定義 (鎖群)

m 次元複体 K と K に含まれる q 単体 σ_i^q $(i = 1, 2, \ldots u)$ に対し形式的和全体の集合

$$C_q(K) = \langle \sigma_1^q \rangle \mathbb{Z} + \langle \sigma_2^q \rangle \mathbb{Z} + \cdots + \langle \sigma_u^q \rangle \mathbb{Z}$$

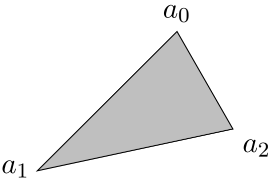
を q 次元鎖群という.
鎖群の元の間には次のような加法が定義できる.

$$c = \sum_{i=1}^{u} \gamma_i \langle \sigma_i^q \rangle,\ c' = \sum_{i=1}^{u} \gamma_i' \langle \sigma_i^q \rangle \quad c + c' := \sum_{i=1}^{u} (\gamma_i + \gamma_i') \langle \sigma_i^q \rangle$$

このように集合に演算が定義されているものを群という.
例えば整数の集合 $\mathbb{Z}$ は加法について群である.

例) 次のような複体 K の鎖群を考える.

$$K = \{|a_0a_1a_2|, |a_0a_1|, |a_1a_2|, |a_2a_0|, |a_0|, |a_1|, |a_2|\}$$



$$C_2(K) = \langle a_0, a_1, a_2\rangle\mathbb{Z}$$
$$C_1(K) = \langle a_0, a_1\rangle\mathbb{Z} + \langle a_1, a_2\rangle\mathbb{Z} + \langle a_2, a_0\rangle\mathbb{Z}$$
$$C_0(K) = \langle a_0\rangle\mathbb{Z} + \langle a_1\rangle\mathbb{Z} + \langle a_2\rangle\mathbb{Z}$$

定義 (境界準同型)

m 次元複体 K と q 単体 $\langle a_0, \cdots, a_q \rangle$ に対し次の写像
$\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ を境界準同型という.

$$\partial_q \langle a_0, \ldots, a_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle a_0, \ldots \hat{a}_i, \ldots, a_q \rangle$$

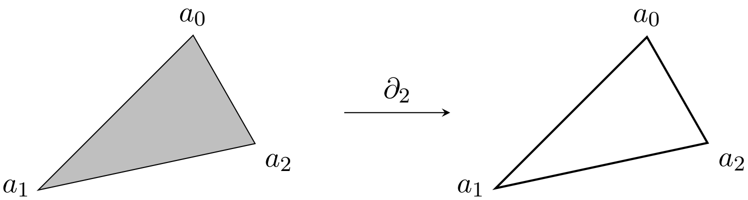
ただし $\langle a_0, \ldots \hat{a}_i, \ldots, a_q \rangle$ は $\langle a_0, \ldots a_i, \ldots, a_q \rangle$ から a_i を取り除いた $q-1$ 単体を表す.

一般の $c = \sum_{i=1}^{u} \gamma_i \langle \sigma_i^q \rangle \in C_q(K)$ に対しては

$$\partial_q(c) = \sum_{i=1}^{u} \gamma_i \partial_q \langle \sigma_i^q \rangle$$

で定める.

例)



$$
\begin{aligned}
\partial_2\langle a_0, a_1, a_2\rangle &= \langle a_1, a_2\rangle - \langle a_0, a_2\rangle + \langle a_0, a_1\rangle \\
&= \langle a_0, a_1\rangle + \langle a_1, a_2\rangle + \langle a_2, a_0\rangle \\
\partial_1\langle a_0, a_1\rangle &= \langle a_1\rangle - \langle a_0\rangle
\end{aligned}
$$

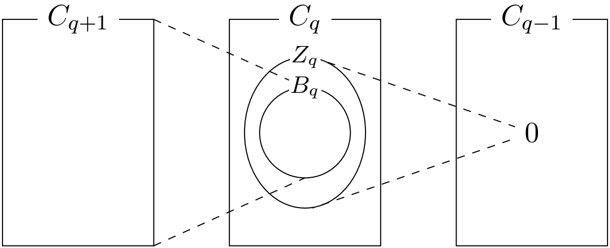
$$
\begin{aligned}
(\partial_1 \circ \partial_2)\langle a_0, a_1, a_2\rangle &= \partial_1(\langle a_1, a_2\rangle + \langle a_2, a_0\rangle + \langle a_0, a_1\rangle) \\
&= \partial_1\langle a_1, a_2\rangle + \partial_1\langle a_2, a_0\rangle + \partial_1\langle a_0, a_1\rangle \\
&= \langle a_2\rangle - \langle a_1\rangle + \langle a_0\rangle - \langle a_2\rangle + \langle a_1\rangle - \langle a_0\rangle = 0
\end{aligned}
$$

上で定義した境界準同型は q 次元から $q-1$ 次元の鎖群へのものである.
これによって次のような鎖群と準同型の列を考えることができる.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots$$

上で定義した境界準同型は q 次元から $q-1$ 次元の鎖群へのものである.
これによって次のような鎖群と準同型の列を考えることができる.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots$$



一般に $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ が成り立つ.
B_q は $C_{q+1}(K)$ の元に ∂_{q+1} を作用させたもの全体の集合.
Z_q は ∂_q を作用させると 0 になるもの全体の集合.

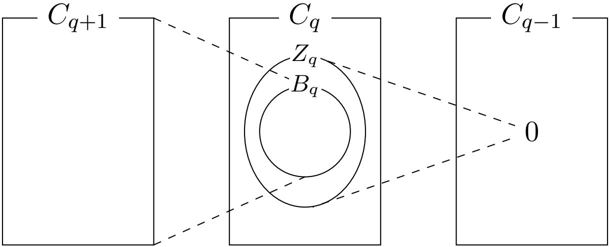
定義 (ホモロジー群)

$$H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$$

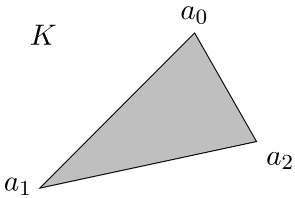
を K の q 次元ホモロジー群という.

Z_q/B_q は剰余群といい Z_q の元のうち B_q の元を 0 と同一視する群である.

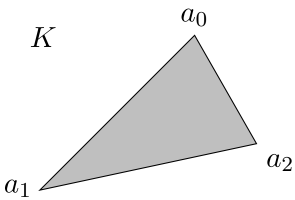
$Z_q(K)$ を q 次元輪体群 (Zyklus: サイクル)
$B_q(K)$ を q 次元境界輪体群という.(Begrenzung: 境界)



例として次の複体のホモロジー群を計算してみる.



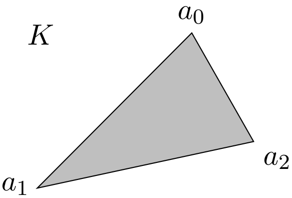
例として次の複体のホモロジー群を計算してみる.



それぞれの次元の鎖群は

$$C_2(K) = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle \mathbb{Z}$$
$$C_1(K) = \langle a_0, a_1 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_1, a_2 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_2, a_0 \rangle \mathbb{Z}$$
$$C_0(K) = \langle a_0 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_1 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_2 \rangle \mathbb{Z}$$

例として次の複体のホモロジー群を計算してみる.



それぞれの次元の鎖群は

$$
\begin{aligned}
C_2(K) &= \langle a_0, a_1, a_2 \rangle \mathbb{Z} \\
C_1(K) &= \langle a_0, a_1 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_1, a_2 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_2, a_0 \rangle \mathbb{Z} \\
C_0(K) &= \langle a_0 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_1 \rangle \mathbb{Z} + \langle a_2 \rangle \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

これらの鎖群の間に定まる境界準同型から次の系列が得られる.

$$
\cdots 0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \cdots
$$

$$\cdots 0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \cdots$$

$Z_0(K) = C_0(K) \quad$ (∂_0 を作用させるとすべて 0 になる.)
$B_2(K) = 0 \quad$ (0 に ∂_3 を作用させると 0 になる.)

$C_2(K)$ の元に ∂_2 を作用させるとどうなるかを考える.
$c = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle \gamma \in C_2(K)$ ($\gamma \in \mathbb{Z}$) とすると

$$\partial_2(\langle a_0, a_1, a_2 \rangle \gamma) = (\langle a_0, a_1 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle + \langle a_2, a_0 \rangle)\gamma$$

よって $B_1(K) = (\langle a_0, a_1 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle + \langle a_2, a_0 \rangle)\mathbb{Z}$
また $Z_2(K)$ は ∂_2 を作用させると 0 になるものの全体なので $Z_2(K) = 0$.

$$\cdots 0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \cdots$$

$Z_1(K)$ について，$c = \langle a_0, a_1 \rangle \gamma_0 + \langle a_1, a_2 \rangle \gamma_1 + \langle a_2, a_0 \rangle \gamma_2 \in C_1(K)$ として $\partial_1(c)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\partial_1(c) &= \partial_1(\langle a_0, a_1 \rangle \gamma_0) + \partial_1(\langle a_1, a_2 \rangle \gamma_1) + \partial_1(\langle a_2, a_0 \rangle \gamma_2) \\
&= (\langle a_1 \rangle - \langle a_0 \rangle)\gamma_0 + (\langle a_2 \rangle - \langle a_1 \rangle)\gamma_1 + (\langle a_0 \rangle - \langle a_2 \rangle)\gamma_2 \\
&= \langle a_0 \rangle(\gamma_2 - \gamma_0) + \langle a_1 \rangle(\gamma_0 - \gamma_1) + \langle a_2 \rangle(\gamma_1 - \gamma_2)
\end{aligned}$$

$\partial_1(c) = 0$ となるとき $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$ となるので

$$Z_1(K) = (\langle a_0, a_1 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle + \langle a_2, a_0 \rangle)\mathbb{Z}$$

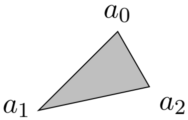
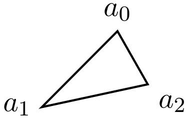
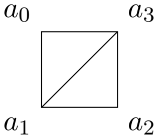
また上の式は $(\langle a_0 \rangle - \langle a_2 \rangle)(\gamma_1 - \gamma_2) + (\langle a_1 \rangle - \langle a_2 \rangle)(\gamma_2 - \gamma_0)$ とできるので

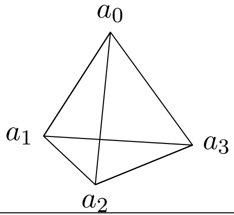
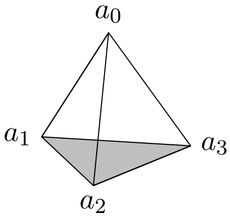
$$B_0(K) = (\langle a_0 \rangle - \langle a_2 \rangle)\mathbb{Z} + (\langle a_1 \rangle - \langle a_2 \rangle)\mathbb{Z}$$

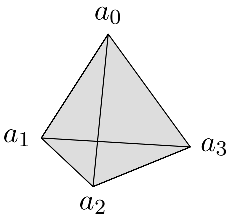
同様に計算することで次の結果を得る.

$$
\begin{aligned}
Z_2(K) &= 0 \\
B_2(K) &= 0 \\
Z_1(K) &= (\langle a_0, a_1\rangle + \langle a_1, a_2\rangle + \langle a_2, a_0\rangle)\mathbb{Z} \\
B_1(K) &= (\langle a_0, a_1\rangle + \langle a_1, a_2\rangle + \langle a_2, a_0\rangle)\mathbb{Z} \\
Z_0(K) &= \langle a_0\rangle\mathbb{Z} + \langle a_1\rangle\mathbb{Z} + \langle a_2\rangle\mathbb{Z} \\
B_0(K) &= (\langle a_0\rangle - \langle a_2\rangle)\mathbb{Z} + (\langle a_1\rangle - \langle a_2\rangle)\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

ホモロジー群は次のようになる.

複体 K	ホモロジー群	
	次元 q	$H_q(K)$
	0	$\mathbb{Z}$
	1	0
	2	0
	0	$\mathbb{Z}$
	1	$\mathbb{Z}$
	2	0
	0	$\mathbb{Z}$
	1	$\mathbb{Z}^2$
	2	0

<table>
<tr><th rowspan="2">複体 K</th><th colspan="2">ホモロジー群</th></tr>
<tr><th>次元 q</th><th>$H_q(K)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>0</td><td>$\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\mathbb{Z}^3$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>0</td><td>$\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\mathbb{Z}^2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

複体 K	ホモロジー群	
	次元 q	$H_q(K)$
	0	$\mathbb{Z}$
	1	0
	2	$\mathbb{Z}$
	3	0

(各面は埋まっていて, 中身は空洞)

q 次元ホモロジー群の図形的な意味とは...

$\longrightarrow$ q 次元単体に囲まれた穴の数を反映している.

ホモロジー群の定義を思い出すと

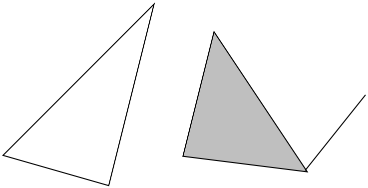
$$H_q(K) = \underbrace{Z_q(K)/B_q(K)}_{q\text{ 次元の輪のうち中が埋まっていないもの}}$$

q 次元ホモロジー群の図形的な意味とは...

$\longrightarrow$ q 次元単体に囲まれた穴の数を反映している.

0 次元ホモロジー群については

$\longrightarrow$ 連結成分の個数を反映している.



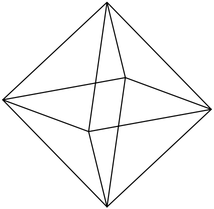
$$H_0 \cong \mathbb{Z}^2$$

ホモロジー群は代数的な計算で議論することができる.

$$\Big\downarrow$$

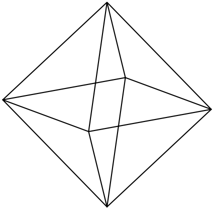
複雑な図形も直感に頼らず代数的な道具を用いてその構造を議論することができる!

ホモロジー群を用いてオイラーの多面体定理を説明することができる.



多面体

ホモロジー群を用いてオイラーの多面体定理を説明することができる.



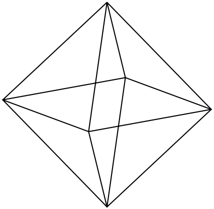
多面体

位相不変量であるオイラー数 χ は次のように計算される.

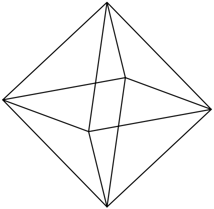
定理

n 次元の複体 K に対し K に属する q 単体の数を α_q とするとき

$$\chi = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim H_q(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \alpha_q$$

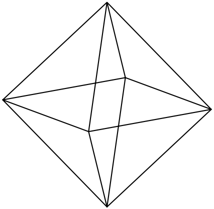


多面体の頂点, 辺, 面の数をそれぞれ $v,\ e,\ f$ とする.



多面体の頂点, 辺, 面の数をそれぞれ $v,\ e,\ f$ とする.
ホモロジー群を利用するとオイラー数は

$$\begin{aligned}\chi &= \dim H_0 - \dim H_1 + \dim H_2 \\ &= 1 - 0 + 1 = 2\end{aligned}$$



多面体の頂点, 辺, 面の数をそれぞれ $v,\ e,\ f$ とする.
ホモロジー群を利用するとオイラー数は

$$
\begin{aligned}
\chi &= \dim H_0 - \dim H_1 + \dim H_2 \\
&= 1 - 0 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

上の定理より単体の個数からも計算することができて

$$\chi = v - e + f$$

$\rightarrow$ よって $v - e + f = 2$ が成り立つ.

参考文献: 田村一郎. トポロジー. 岩波全書, (1972)

補足

計算例の $H_0(K)$ の計算について

$$Z_0(K) = \langle a_0\rangle\mathbb{Z} + \langle a_1\rangle\mathbb{Z} + \langle a_2\rangle\mathbb{Z}$$
$$B_0(K) = (\langle a_0\rangle - \langle a_2\rangle)\mathbb{Z} + (\langle a_1\rangle - \langle a_2\rangle)\mathbb{Z}$$

であったが $Z_0(K)$ の元は $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$\begin{aligned}
&\langle a_0\rangle\gamma_0 + \langle a_1\rangle\gamma_1 + \langle a_2\rangle\gamma_2 \\
&= \underbrace{(\langle a_0\rangle - \langle a_2\rangle)\gamma_0 + (\langle a_1\rangle - \langle a_2\rangle)\gamma_1}_{\in B_q(K)} + \langle a_2\rangle(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)
\end{aligned}$$

とできるので $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}$

一般的な位置について

定義

点 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^N$ が一般的な位置にあるとは $\lambda_i \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0 \Longrightarrow {}^{\forall} i,\ \lambda_i = 0$$

n 次元単体は一般的な位置にある $n+1$ 個の点で定義される.

単体複体の (ちゃんとした) 定義

定義 (単体複体)

単体の集合 $K = \{\sigma_i \mid \sigma_i : \text{単体} \in \mathbb{R}^N,\ i = 0, 1, \cdots, r\}$ が単体複体とは次を満たすことである.

(i) ${}^\forall \sigma \in K,\ {}^\forall \tau \prec \sigma,\ \tau \in K$

(ii) ${}^\forall \sigma,\ \sigma' \in K,\ \sigma \cap \sigma' \neq \varnothing \Longrightarrow \sigma \cap \sigma' \prec \sigma$ かつ $\sigma \cap \sigma' \prec \sigma'$

一つ目は単体の辺単体が含まれていること,
二つ目は 2 つの単体の共通部分が複体に含まれていることを要求している.

単体の向きについては次のように置換の符号を用いて定義される.

定義 (向き付き単体)

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を頂点に持つ n 単体の集合 $\mathcal{S}$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める. $\sigma_1 = |a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}|, \sigma_2 = |a_{j_0} a_{j_1} \cdots a_{j_n}| \in \mathcal{S}$ とする

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ i_0 & i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ j_0 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

このとき $\mathcal{S}/\sim$ は二つの同値類をつくり, σ の属する同値類を σ の向きといい $\langle \sigma \rangle$ とかく.

これによって任意の n 単体を二つの向きに分類することができる.

定理

上の鎖群の系列において次の式が成り立つ.

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$$

証明

$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ について $(\partial_{q-1}\partial_q)\langle \sigma_i^q \rangle = 0$ を示せば十分である.
$\langle \sigma_i^q \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_q \rangle$ とすると $q = 1$ のときは明らかに成り立つ. $q \geq 2$ とする.

$$\begin{aligned}
&(\partial_{q-1} \circ \partial_q)\langle \sigma_i^q \rangle \\
&= \partial_{q-1} \left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots a_q \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q \rangle \right) + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i \left(\sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{j-1} \langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_q \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \langle a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q \rangle + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{i+j-1} \langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_q \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \langle a_0, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_q \rangle - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \langle a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_q \rangle = 0
\end{aligned}$$

また, 境界準同型は well-defined である. つまり同符号の単体に対して境界準同型を作用させると同じ向き付き単体の和が得られる.

オイラー数について

定理

n 次元複体 K において K に属する q 単体の数を α_q とするとき

$$\chi = \sum_{q=0}^{n}(-1)^n \dim H_q(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \alpha_q$$

証明

$\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ に対し準同型定理より

$$C_q(K)/Z_q(K) \cong B_{q-1}(K)$$
$$C_q(K) \cong Z_q(K) \oplus B_{q-1}(K)$$

ホモロジー群の定義から

$$H_q(K) \cong Z_q(K)/B_q(K)$$

これらから

$$
\begin{aligned}
\dim C_q &= \dim Z_q + \dim B_{q-1} \\
\dim H_q &= \dim Z_q - \dim B_q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H_q &= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q (\dim Z_q - \dim B_q) \\
&= \dim Z_0 + (-1)^n \dim B_n + \sum_{q=1}^{n} (-1)^q (\dim Z_q + \dim B_{q-1}) \\
&= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim C_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q
\end{aligned}
$$