解析学要論 I　レポート問題

小林和真

2025 年 7 月 25 日

レポート問題: $\alpha, \beta\colon D \to \mathbb{C}$ を正則関数として $D^\times$ 上の常微分方程式

$$u''(z) + \frac{\alpha(z)}{z^n}u'(z) + \frac{\beta(z)}{z^m}u(z) = 0$$

の解が全て確定特異点を持つとする．このとき整数 n, m の満たすべき条件を求めよ．

本レポートでは第 1 節で補題をいくつか証明し, 第 2 節でレポート問題の解答に直結する Fuchs の定理の証明を行う．

1 第一種特異点, 確定特異点およびその性質

定義 1.1 (第一種特異点)

正則とは限らない関数 $a(z), b(z)$ を用いて, 線形作用素 L を次のように定める．

$$L := \frac{d^2}{dz^2} + a(z)\frac{d}{dz} + b(z)$$

このもとで微分方程式 $L(u) = 0$ に対して $za(z), z^2b(z)$ が $z = 0$ で正則であるとき $z = 0$ は $L(u) = 0$ の**第一種特異点**であるという (教科書 [1] では講義と違い, これを確定特異点の定義としているので注意).

講義内で扱った確定特異点の定義も改めて確認しておく．

定義 1.2 (確定特異点)

$z = 0$ が関数 $u(z)$ の**確定特異点**であるとは, ある $N > 0$ が存在して, 任意の $\theta_1 < \theta_2$ に対し

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \theta_1<\arg z<\theta_2}} |z|^N|u(z)| = 0$$

が成り立つことである．

次の節で示す定理 2.1 の証明のためにいくつかの補題を証明しておく．

補題 1.3

$\varphi(z)$ を正則関数として $\varphi(0) \neq 0$ とする．$L(u) = 0$ が $z = 0$ を第一種特異点を持つとする．このとき

$$L_1 := \varphi(z)^{-1}L\varphi(z), \quad L_2 := z^{-\lambda}Lz^\lambda$$

とすれば $L_1(u) = 0, L_2(u) = 0$ も $z = 0$ を第一種特異点を持つ．ただし $\lambda \in \mathbb{C}$.

証明. まず L_1 について $\varphi(0) \neq 0$ であることから φ^{-1}(逆関数ではなく逆数) は $z=0$ で正則である.

$$\begin{aligned}
L_1(u) &= \varphi(z)^{-1}\left(\frac{d^2}{dz^2}+a(z)\frac{d}{dz}+b(z)\right)(\varphi(z)u(z)) \\
&= \varphi(z)^{-1}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}u(z)+2\frac{d\varphi}{dz}\frac{du}{dz}+\varphi\frac{d^2u}{dz^2}+a(z)\frac{d\varphi}{dz}u(z)+a(z)\varphi(z)\frac{du}{dz}+b(z)\varphi(z)u(z)\right) \\
&= \frac{d^2u}{dz^2}+\left(2\varphi(z)^{-1}\frac{d\varphi}{dz}+a(z)\right)\frac{du}{dz}+\varphi^{-1}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}+a(z)\frac{d\varphi}{dz}+b(z)\varphi(z)\right)u(z)
\end{aligned}$$

このとき

$$z\left(2\varphi^{-1}\frac{d\varphi}{dz}+a(z)\right), \quad z^2\varphi^{-1}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}+a(z)\frac{d\varphi}{dz}+b(z)\varphi(z)\right)$$

は $\frac{d\varphi}{dz}$, $za(z)$, $z^2b(z)$ が $z=0$ で正則であることからそれぞれ $z=0$ で正則であることが分かる. 同様にして L_2 は

$$L_2(u) = \frac{d^2u}{dz^2}+(2\lambda z^{-1}+a(z))\frac{du}{dz}+\left(\lambda(\lambda-1)z^{-2}+a(z)\lambda z^{-1}+b(z)\right)$$

となるので

$$\begin{gathered}
z(2\lambda z^{-1}+a(z)) = 2\lambda+za(z) \\
z^2\left(\lambda(\lambda-1)z^{-2}+a(z)\lambda z^{-1}+b(z)\right) = \lambda(\lambda-1)+a(z)\lambda z+b(z)z^2
\end{gathered}$$

はともに $z=0$ で正則であることが分かる. 以上より $L_1(u)=0, L_2(u)=0$ は $z=0$ を第一種特異点を持つ. □

補題 1.4

関数 $u(z)$ が $z=0$ を確定特異点にもつとき $u'(z)$ も $z=0$ を確定特異点にもつ.

証明. 仮定より, ある $N>0$ が存在して, 任意の $\theta_1 < \theta_2$ に対し

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ \theta_1<\arg z<\theta_2}} |z|^N|u(z)| = 0$$

が成り立つ. まず三角不等式を用いて次のように評価できる.

$$\begin{aligned}
\left|z^{N+1}\frac{du}{dz}\right| &= \left|\frac{d}{dz}(t^{N+1}u(z))-(N+1)z^Nu(z)\right| \\
&\leq \left|\frac{d}{dz}(t^{N+1}u(z))\right|+\left|(N+1)z^Nu(z)\right|
\end{aligned}$$

第二項は $u(z)$ が $z=0$ を確定特異点にもつ仮定より $z\to 0, \theta_1<\arg z<\theta_2$ で 0 に収束する. 第一項は Cauchy の積分公式を用いると

$$\left|\frac{d}{dz}(t^{N+1}u(z))\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{\zeta^{N+1}u(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\frac{|\zeta|^{N+1}|u(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}\,|d\zeta|$$

である. ただし積分路は $z\in\mathbb{C}$ に対して $|z|/2<r$ となるように $r>0$ を定めて, $C_r=\{\zeta\in\mathbb{C} \mid |\zeta-z|=r\}$ とした. さらに右辺の非積分関数を次のように上から評価することができる.

$$|\zeta| = |\zeta-z+z| \leq |\zeta-z|+|z| < r+2r = 3r$$

また, $u(z)$ は $z=0$ を確定特異点に持つ. C_r 上で $\arg\zeta$ は最大値と最小値を持つため, その中のセクター領域上の $z\to 0$ の極限を考えれば $|u|^N|u(\zeta)|<\varepsilon$ となる. よって

$$\left|\frac{d}{dz}(t^{N+1}u(z))\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\frac{|\zeta|^{N+1}|u(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}\,|d\zeta| < \frac{1}{2\pi}\frac{3r}{r^2}\varepsilon\int_{C_r}|d\zeta| = 3\varepsilon$$

以上より

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ \theta_1<\arg z<\theta_2}} |z|^{N+1}|u'(z)| = 0$$

であることが示されたので $u'(z)$ は $z=0$ を確定特異点に持つことが示される. □

補題 1.5

$L(u)=0$ の解のうち, $z=0$ で正則で, $\varphi(0)\neq 0$ を満たす $\varphi(z)$ を用いて

$$z^\lambda \varphi(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

と表せるものがとれる.

証明. 今, 微分方程式は $z=0$ で正則とは限らないが $z=0$ が孤立特異点なので $z=0$ の近傍で微分方程式が正則になるような点がとれる．その点での微分方程式の解空間は 2 次元であってその基底として正則関数 $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ をとる．ここで $z=0$ の周りを一周する閉曲線に沿った解析接続を考え, それを $\tilde{\varphi}_1(z),\tilde{\varphi}_2(z)$ とする．これらは再び $L(u)=0$ の局所解になっているので解空間の基底の線形結合でそれぞれ表される．つまり

$$(\tilde{\varphi}_1(z),\tilde{\varphi}_2(z))=(\varphi_1(z),\varphi_2(z))M$$

となる行列 M をとることができる．すると M の固有値を μ, それに対応する固有ベクトルを $\psi(z)$ とする．$\psi(z)$ は $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ の線形結合で表され, $\psi(z)$ の解析接続は $\tilde{\psi}(z)=\mu\psi(z)$ とかける．適切な $\lambda\in\mathbb{C}$ を定めることで $\mu=e^{2\pi i\lambda}$ と表すことができる．関数 $z^{-\lambda}\psi(z)$ に関して $z=0$ の周りを一周する閉曲線に沿って解析接続したものを考えると

$$(ze^{2\pi i})^{-\lambda}\psi(ze^{2\pi i})=z^{-\lambda}e^{-2\pi i\lambda}e^{2\pi i\lambda}\psi(z)=z^{-\lambda}\psi(z)$$

となる．つまり $z^{-\lambda}\psi(z)$ は一価の関数である．また, $z^{-\lambda}\psi(z)$ が $z=0$ を真性特異点を持つと仮定すると $z^{-\lambda}\psi(z)$ が $z=0$ を不確定特異点に持つことになり, L の解が全て $z=0$ を確定特異点にもつことに矛盾する． よって $\varphi(z)=z^{-\lambda}\psi(z)$ は $z=0$ を高々極にもつ．よって $\psi(z)=z^\lambda\varphi(z)$ を $L(u)=0$ の解として取ることができる．特に $\varphi(z)$ が $z=0$ を極に持つとき, Laurent 展開の負冪の部分を z^λ に押し付けることで補題の仮定: $\varphi(z)$ が正則で $\varphi(0)\neq 0$ を満たすように取り直すことができる. □

2 確定特異点 $\Longleftrightarrow$ 第一種特異点の証明

以上の準備の下で次の定理を示す.

定理 2.1 (Fuchs)

線形微分方程式 $L(u)=0$ に対して $z=0$ が第一種特異点であることと, $L(u)=0$ の解が全て $z=0$ を確定特異点に持つことは同値である.

証明. まず $z=0$ が $L(u)=0$ の第一種特異点であるとする．このとき正則関数 $\alpha(z),\beta(z)$ を用いて

$$a(z)=\frac{\alpha(z)}{z}, \quad b(z)=\frac{\beta(z)}{z^2}$$

とすることができる．この場合, 具体的に $z=0$ を確定特異点をもつ解の Frobenius の方法を用いた構成を講義で見たので省略する.

逆に $L(u)=0$ の解が全て $z=0$ を確定特異点に持つとする．補題 1.5 より $L(u)=0$ の解で $z^\lambda\varphi(z)$ となるものが取れる．このとき $u(z)=z^\lambda\varphi(z)v(z)$ とすると与えられた微分方程式 $L(u)=0$ は次のように書き換えられる (補題 1.3 の計算を利用する).

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(2\lambda z^{-1}+2\varphi^{-1}\frac{d\varphi}{dz}+a(z)\right)\frac{dv}{dz}=0$$

これにより $L(u)=0$ は $\frac{dv}{dz}$ に関する一階の微分方程式に書き換えられた．$v(z)=z^{-\lambda}\varphi(z)^{-1}u(z)$ は $z=0$ を確定特異点に持つ．それは次のように確認できる.

さらに補題 1.4 より $w(z):=\frac{dv}{dz}$ は $z=0$ で確定特異点をもつことも分かる．簡単のため $\frac{dv}{dz}$ の係数を $c(z)$ と置いて一階微分方程式

$$\frac{dw}{dz}+c(z)w(z)=0$$

を考える．補題 1.5 と同じ手法で考える．この一階微分方程式の局所解の解空間を考え，その基底 ψ をとる (解空間は一次元のため)．ψ の $z=0$ の周りを一周する解析接続は $\psi(z)$ の複素数倍なのでそれを $e^{2\pi i\lambda}\psi(z)$ とすれば $z^{-\lambda}\psi(z)$ は一価で高々極を持つ．よって λ を適切にとることで一階微分方程式の解で $\psi(z)=z^{\lambda}\varphi(z)=z^{\lambda}(\varphi_0+\varphi_1 z+\cdots)$ をとることができる $(\varphi_0\neq 0)$．このとき

$$zc(z)=-\frac{z}{z^{\lambda}\varphi(z)}\frac{d(z^{\lambda}\varphi(z))}{dz}=-\frac{z^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda+k)\varphi_k z^k}{z^{\lambda}\varphi(z)}=-\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda+k)\varphi_k z^k}{\varphi(z)}$$

となり，$\varphi(0)\neq 0$ だから $zc(z)$ は $z=0$ で正則であることが分かる．よって補題 1.3 よりもとの微分方程式 $L(u)=0$ も $z=0$ を第一種特異点に持つ． □

3 レポート問題の解答

定理 2.1 からレポート問題の解答，n,m の満たすべき条件は

$$z\frac{\alpha(z)}{z^n},\quad z^2\frac{\beta(z)}{z^m}$$

が正則になることが必要十分条件である．$\alpha(0)=0$ のとき，$\alpha(z)$ は D 上正則なので，ある $i=1,2,\ldots$ で $\alpha_i\neq 0$ となるものが存在して

$$\alpha(z)=\alpha_i z^i+\cdots$$

と冪級数展開できる．このときは

$$\frac{\alpha(z)}{z^n}=\frac{\alpha_i+\cdots}{z^{m-i}}$$

として m を新しく取り直すことを考えれば $\alpha(0)\neq 0$ の場合のみ考えれば十分である．$\beta(z)$ も D 上正則なので同様に $\beta(0)\neq 0$ としてよい．このもとで n,m の条件を考えると，$n=0$ かつ $m=0$ のときは特異点にならないので解は確定特異点を持たないことに注意すれば求める条件は $(n,m)=(1,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)$ であることが条件と分かる．

参考文献

[1] 竹井義次, 数理科学のための常微分方程式と複素積分 (2024)

[2] 坂井秀隆, 常微分方程式 (2015)