

数理科学広域演習 IV レポート

高橋 和音 *

2017 年 1 月 4 日

概要

要約

1 はじめに

2 準備

二重否定則を採用する。無限は絡まないので選択公理等はどうでもいいはず。

2.1 「ならば」の変換

SAT Solver に投げる命題に条件を落とし込とむきに、「ならば」で発想すると自然に記述できるように思う。ところが「ならば」は SAT Solver には直接入力できない。そこで「ならば」の変換に必要な補題を用意する。

補題 2.1. a, b, c を真か偽かの変数とする。以下が成立する。

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

* 東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻 博士後期課程 2 年。Email: kazune@ms.u-tokyo.ac.jp

証明. もっとかつこいい方法があるかもしれないが、私は (a, b, c) の真偽 8 パターンを確かめた。 a が真のときと $(a, b, c) = (\text{真}, \text{真}, \text{偽})$ のときは両辺真、残りは偽である。 ■

系 2.2. a, b を真か偽かの変数とする。以下が成立する。

$$a \Rightarrow b = (\neg a \vee b).$$

証明. $a \Rightarrow b$ は $\neg a \vee (a \wedge b)$ と同値である。あとは補題 2.1 を用いると、次式がしたがう。

$$\neg a \vee (a \wedge b) = (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee b) = (\neg a \vee b). \quad \blacksquare$$

3 定義

記号 3.1. x, y を命題とする.

1. 「 x の否定」を $\neg x$ と書く.
2. 「 x かつ y 」のことを $x \wedge y$ と書き, 「 x または y 」のことを $x \vee y$ と書く.
3. 「 x ならば y 」のことを $x \rightarrow y$ と書く.

記号 3.2. I を集合とし, $i \in I$ に対し x_i は命題とする.

1. 「任意の $i \in I$ に対し x_i である」のことを

$$\bigwedge_{i \in I} x_i$$

と書く. $I = n \in \mathbb{N}$ が有限集合であるとき,

$$\bigwedge_{i \in I} x_i = x_0 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$$

である.

2. 「 $i \in I$ が存在し x_i である」のことを

$$\bigvee_{i \in I} x_i$$

と書く． $I = n \in \mathbb{N}$ が有限集合であるとき，

$$\bigvee_{i \in I} x_i = x_0 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_{n-1}$$

である．

- 定義 3.3.** 1. x が真か偽の値を取る変数であるとき， x を単に**変数**という．
 2. x を変数とする．このとき， x の**リテラル**とは，命題 x ，および，命題 $\neg x$ のことである．
 3. **節**とは，有限個のリテラル l_1, \dots, l_n を用いて

$$\bigvee_{i=1}^n l_i = l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n$$

と表される命題である．この節の長さを n と定義する．

- 定義 3.4.** x_1, \dots, x_n を変数とする．

1. SAT Solver の**入力**は， x_1, \dots, x_n のリテラルから作られた有限個の節 C_1, \dots, C_m を用いて

$$X = \bigwedge_{i=1}^m C_i = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$$

と表される命題である． C_1, \dots, C_m の長さがすべて k であるとき， X を **k -SAT 問題**という．

2. X を入力した際の SAT Solver の**出力**は，次の (a), (b) のいずれかである．
 (a) 偽である．この場合は， X を真にする (x_1, \dots, x_n) の真偽値の組が存在しないことを表す．
 (b) 真である．この場合は， X を真にする (x_1, \dots, x_n) の真偽値の組が存在することを表す．この場合，更に追加で， X を真にする (x_1, \dots, x_n) の真偽値の組を 1 つ返す．

4 行動

$R = 14$ とする。

4.1 行動した「地点」に関する入力

ここでは、行動開始地点、行動終了地点、塗った地点に関する基本的な条件を落とし込む。実際にフィールドを見てそれらを決定するプロセスは次小節にまわす。

まずは、行動地点に関する変数を導入する。

記号 4.1. $0 \leq i, j \leq R$ とする。 $k = 0, 1, 2, 3$ とする。

1. s_{ij} を「 i 行 j 列が行動開始地点ならば真、そうでないならば偽」とする。
2. e_{ij} を「 i 行 j 列が行動終了地点ならば真、そうでないならば偽」とする。
3. d_{ijk} を「 i 行 j 列方角 k で塗ったならば真、そうでないならば偽」とする。

注意 4.2. 1 ターン内にできる敵の行動は、顕現・隠伏の違いを除けば真である s_{ij} 、 e_{ijk} 、 d_{ijk} の組み合わせに対応する。

最初に、当然だが、どこかの地点で行動開始、どこかの地点で塗り、どこかの地点で行動終了していないといけない。これらの条件はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 (\text{Allow})_s &= \bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R s_{ij}, \\
 (\text{Allow})_e &= \bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R e_{ij}, \\
 (\text{Allow})_d &= \bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R \bigvee_{k=0}^3 d_{ijk}
 \end{aligned}$$

と表せる。

4.1 行動した「地点」に関する入力

次に、これも当然なことだが、2つ以上のマスが行動開始地点であってはならない。このことは SAT Solver に明示的に入力される必要がある。つまり、全ての $(i, j) \neq (k, l)$ に対し、 $\neg(s_{ij} \wedge s_{kl})$ である。すなわち、

$$(\text{Forbid})_s = \bigwedge_{(i,j) \neq (k,l)} \neg(s_{ij} \wedge s_{kl})$$

である。これを SAT の入力に合うように変形すると、

$$(\text{Forbid})_s = \bigwedge_{(i,j) \neq (k,l)} (\neg s_{ij} \vee \neg s_{kl})$$

である。これは e, d も同様である。すなわち、

$$\begin{aligned} (\text{Forbid})_e &= \bigwedge_{(i,j) \neq (k,l)} (\neg e_{ij} \vee \neg e_{kl}), \\ (\text{Forbid})_d &= \bigwedge_{(i,j,k) \neq (l,m,n)} (\neg e_{ijk} \vee \neg e_{lmn}) \end{aligned}$$

である。

次に、移動はせいぜい 1 マスしかできないことを条件に加える。 k, l はそれぞれ 0 以上 R 以下とする。しばらく、点 (k, l) から 0 または 1 しか離れていないマス (i, j) について \bigvee をとったものを $\bigvee_{i,j}$ と表記することにする。素朴には

$$\bigvee_{i,j} = \bigvee_{i=k-1}^{k+1} \bigvee_{j=l-1}^{l+1}$$

のことだが、 (k, l) が端のマスだったら (i, j) はフィールドの外かもしれない。その部分は実装の際に適宜外すことにする。

さて、行動開始地点が点 (k, l) のとき、行動終了地点がせいぜい 1 マスしか離れていないことは、任意の (k, l) に対して

$$s_{kl} \Rightarrow \left(\bigvee_{i,j} e_{ij} \right)$$

4.1 行動した「地点」に関する入力

であるを書ける。補題 2.2 より、これは

$$\neg s_{kl} \vee \left(\bigvee_{i,j} e_{ij} \right)$$

と同値である。 (k, l) について \wedge をとって、

$$(\text{start-end}) = \bigwedge_{k=0}^R \bigwedge_{l=0}^R \left(\neg s_{kl} \vee \left(\bigvee_{i,j} e_{ij} \right) \right)$$

が求める条件である。

次に塗った位置と方角についての条件を書く。つまり「塗った位置は、開始地点か終了地点である」ということである。すなわち、任意の (i, j, k) に対し、

$$d_{ijk} \implies s_{ij} \vee e_{ij}$$

である。補題 2.2 より、これは

$$\neg d_{ijk} \vee (s_{ij} \vee e_{ij})$$

と同値である。すなわち、条件は

$$(\text{drawpoint}) = \bigwedge_{i=0}^R \bigwedge_{j=0}^R \bigwedge_{k=0}^3 (\neg d_{ijk} \vee s_{ij} \vee e_{ij})$$

である。

注意 4.3. ここまでの制約をまとめると、以下の通りである。

- 行動開始地点と行動終了地点がただ 1 つ存在する。
- 行動開始地点と行動終了地点はせいぜい 1 マスしか離れていない。
- 塗った地点と塗った方向がただ 1 つ存在する。
- 塗った地点は、行動開始地点または行動終了地点である。

4.2 塗った地点の制約

ここから先は、各ターン毎のフィールドの状況を鑑みて、 d_{ijk} に制限を加える。この小節では、 $0 \leq i, j \leq R$ 、および、 $k = 0, 1, 2, 3$ は固定する。

以下では、次の前提を置く。

- SAT Solver を使って敵の位置を特定するのは、直前のターンのフィールドの状況と現在のフィールドの状況を見比べた際に、ある地点の色が敵軍の武将の色に変化したことを確認したとき、および、そのときのみとする。
- 変化後の色を持った武将を、以下では単に**敵**と呼ぶ。

この前提をもとに、フィールドの状況を SAT Solver に入力する変数を用意する。

記号 4.4 (塗りのためのフィールドからの制約変数). $0 \leq l, m \leq R$ とする。

1. α_{lm} を「点 (l, m) が知覚されており、かつ、現在敵の色で塗られているなら真、そうでないなら偽」とする。より具体的に言うと、以下のいずれかの場合は真である。
 - 点 (l, m) が敵の色で塗られていると知覚されている場合。
 また、以下のいずれかの場合は偽である。
 - 点 (l, m) が味方軍の色、あるいは、敵以外の敵軍の色で塗られていると知覚されている場合。
 - 点 (l, m) が誰にも塗られていないと知覚されている場合。
 - 点 (l, m) がそもそも知覚されていない場合。
2. β_{lm} を「点 (l, m) が知覚されており、かつ、現在敵の色で塗られていないなら真、そうでないなら偽」とする。より具体的に言うと、以下のいずれかの場合は真である。
 - 点 (l, m) が味方軍の色、あるいは、敵以外の敵軍の色で塗られている

と知覚されている場合。

- 点 (l, m) が誰にも塗られていないと知覚されている場合。

また、以下のいずれかの場合は偽である。

- 点 (l, m) が敵の色で塗られていると知覚されている場合。
- 点 (l, m) がそもそも知覚されていない場合。

3. γ_{lm} を「点 (l, m) を敵が直前に塗ったことが確実ならば真、そうでないならば偽」とする。つまり、現在敵の色で塗られているものの敵の行動の直前は敵の色で塗られていない場合に真とし、それ以外は偽とする。
4. δ_{lm} を「点 (l, m) を敵が直前に塗らなかったことが確実ならば真、そうでないならば偽」とする。つまり、現在敵の色以外で塗られており、敵の行動の直前も同じ色で塗られていた場合は真とし、それ以外は偽とする。

注意 4.5. 記号 4.4 の α_{lm} 、 β_{lm} 、 γ_{lm} 、 δ_{lm} は全て SAT Solver に真か偽かを入力するものとする。例えば、 α_{lm} が真である場合には 1 つのリテラルからなる節 α_{lm} を、偽である場合には 1 つのリテラルからなる節 $\neg\alpha_{lm}$ を入力する。

さて、塗ったときの敵の地点と方向は d_{ijk} で表現されているが、この情報を塗ったマスの情報に予めおきかえておくことが以下では必要になる。つまり、以下で定義する変数 g_{lm} を媒介して、 d_{ijk} ではなく g_{lm} で制約を記述する。

- 記号 4.6 (塗った地点の情報を媒介する変数).**
1. 敵が (i, j) の地点で方角 k に塗ったときに塗られる地点の集合を D_{ijk} とする。
 2. $0 \leq l, m \leq R$ とする。 g_{lm} を「点 (l, m) が敵が直前の行動で塗った地点ならば真、そうでないならば偽」とする。

注意 4.7. ここでは敵は固定されているので、 D_{ijk} は (i, j, k) の組により一意に定まる。

注意 4.8. g_{lm} は、どの d_{ijk} が成立するかで真か偽かが決まるのであり、フィールドの情報とは関係がないことに注意されたい。 g_{lm} とフィールドの情報 β_{lm} 、 γ_{lm} 、 δ_{lm} との整合性の条件式を以下で与える。これにより、 g を媒介として

フィールドの情報から d に制約を与えることができる。

さてまず、 d_{ijk} の情報を g_{lm} の情報に置き換える条件式を書く。これは記号 4.6 より、

$$d_{ijk} \Rightarrow \left(\bigwedge_{(l,m) \in D_{ijk}} g_{lm} \right) \wedge \left(\bigwedge_{(l,m) \notin D_{ijk}} \neg g_{lm} \right)$$

である。系 2.2 より、

$$\neg d_{ijk} \vee \left(\left(\bigwedge_{(l,m) \in D_{ijk}} g_{lm} \right) \wedge \left(\bigwedge_{(l,m) \notin D_{ijk}} \neg g_{lm} \right) \right)$$

と同値である。補題 2.1 及び (i, j, k) が固定されていたことを考慮すると、求める条件は

$$(\text{param-trans}) = \bigwedge_{i,j,k} \left(\left(\bigwedge_{(l,m) \in D_{ijk}} (\neg d_{ijk} \vee g_{lm}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{(l,m) \notin D_{ijk}} (\neg d_{ijk} \vee \neg g_{lm}) \right) \right) \quad (4.1)$$

である。

次に、 β_{ij} 、 γ_{ij} 、 δ_{ij} と g_{ij} の関係式を導く。次の関係がある。

1. 敵が直前に塗り替えたことが確実な点は、敵が塗った点である。
2. 敵が塗った点は、敵の色でぬられた点、または、知覚できていない点である。
3. 敵が直前に塗り替えなかったことが確実な点は、敵が塗った点ではない。

言うまでもなくこれらは、任意の l, m に対して以下が成立することを意味している。

1. $\gamma_{lm} \Rightarrow g_{lm}$ 。
2. $g_{lm} \Rightarrow \neg \beta_{lm}$ 。
3. $\delta_{lm} \Rightarrow \neg g_{lm}$ 。

補題 2.1、系 2.2 より、以下が得られる。

$$\begin{aligned}
 (\text{field})_\gamma &= \bigwedge_{l=0}^R \bigwedge_{m=0}^R (\neg \gamma_{lm} \vee g_{ij}), \\
 (\text{field})_\beta &= \bigwedge_{l=0}^R \bigwedge_{m=0}^R (\neg g_{lm} \vee \neg \beta_{ij}), \\
 (\text{field})_\delta &= \bigwedge_{l=0}^R \bigwedge_{m=0}^R (\neg \delta_{lm} \vee \neg g_{ij}).
 \end{aligned}$$

4.3 隠遁・顕現の条件

定義 4.9. $\{s_{ij}\}_{ij}$ 、 $\{e_{ij}\}_{ij}$ 、 $\{d_{ijk}\}_{ijk}$ は、前節までの条件をみたすものとする。

1. 真である s_{ij} 、 e_{ij} 、 d_{ijk} の組み合わせを**行動**と呼ぶ。特にどの元が真であるのかを問題としない場合は (s, e, d) とも記す。
2. ある行動が**行動可能**であるとは、その行動が 1 ターンのコスト内で行動可能であることをいう。

注意 4.2 でも指摘した通り、 (s, e, d) の組み合わせは、ルール上の意味での「敵の 1 ターンの行動」に対応する。前小節までで、隠遁と顕現の条件以外の制約を考慮に入れた。本小節では、隠遁と顕現の条件からありえない組み合わせを排除し、その行動が行動可能であることを保証する。

まずは、SAT-Solver に入力する変数を用意する。

記号 4.10. π_0 を、敵の開始地点が判明していないならば真、そうでないならば偽とする。

注意 4.11. ゲーム中は、自分のターン毎に敵の位置が判明しているか否かが与えられる。現在の敵の位置、すなわち、直前の敵の行動の行動終了地点が判明している場合は、そもそも SAT-Solver を発動する必要はない。直前の敵の行動の行動開始地点が判明している場合は、顕現動作を省略できるので、SAT-Solver には 1 つのリテラルからなる節 $\neg \pi_0$ を入力する。また、直前の敵の行動の行動

開始地点を (i, j) とするとき、1 つのリテラルからなる節 s_{ij} を入力する。直前の敵の行動の行動開始地点が判明していない場合は、SAT-Solver には 1 つのリテラルからなる節 π_0 を入力する。

記号 4.12 (隠伏・顕現のためのフィールドからの制約変数). $0 \leq l, m \leq R$ とする。

1. κ_{lm} を「点 (l, m) が知覚されており、かつ、現在敵軍の色で塗られているなら真、そうでないなら偽」とする。より具体的に言うと、以下のいずれかの場合は真である。
 - 点 (l, m) が敵軍の色で塗られていると知覚されている場合。
 - また、以下のいずれかの場合は偽である。
 - 点 (l, m) が味方軍の色で塗られていると知覚されている場合。
 - 点 (l, m) が誰にも塗られていないと知覚されている場合。
 - 点 (l, m) がそもそも知覚されていない場合。
2. κ'_{lm} を 1 ターン前の κ_{lm} とする。最初のターンでは全て偽とする。
3. λ_{lm} を「点 (l, m) が知覚されており、かつ、現在敵軍の色で塗られていないなら真、そうでないなら偽」とする。より具体的に言うと、以下のいずれかの場合は真である。
 - 点 (l, m) が味方軍の色で塗られていると知覚されている場合。
 - 点 (l, m) が誰にも塗られていないと知覚されている場合。
 - また、以下のいずれかの場合は偽である。
 - 点 (l, m) が敵軍の色で塗られていると知覚されている場合。
 - 点 (l, m) がそもそも知覚されていない場合。
4. λ'_{lm} を 1 ターン前の λ_{lm} とする。最初のターンでは全て偽とする。

記号 4.12 で導入した変数についても、注意 4.5 に準ずる。

ここまでの情報から、敵の行動開始地点に制約がかかる。つまり、敵の行動開始地点が不明であるのに、知覚できていて敵軍の色で塗られていない箇所が敵の行動開始地点であることはない。すなわち、任意の (i, j) に対し、以下が成

立する。

$$\pi_0 \wedge \lambda'_{ij} \Rightarrow \neg s_{ij}.$$

系 2.2 を用いると、これは以下と同値である。

$$\neg \pi_0 \vee \neg \lambda'_{ij} \vee \neg s_{ij}.$$

よって、以下が成立する。

$$(\text{start-hidden}) = \bigwedge_{i=0}^R \bigwedge_{j=0}^R (\neg \pi_0 \vee \neg \lambda'_{ij} \vee \neg s_{ij}).$$

同様に、行動終了地点についても、以下が成立する。

$$(\text{goal-hidden}) = \bigwedge_{i=0}^R \bigwedge_{j=0}^R (\neg \lambda_{ij} \vee \neg g_{ij}).$$

隠遁と顕現の条件からありえない組み合わせを排除するために、以下の変数を用意する。

- 記号 4.13.**
1. r_0 を、開始地点で隠伏状態であるならば真、そうでないならば偽とする。
 2. r_1 を、終了地点で隠伏状態であるならば真、そうでないならば偽とする。
 3. r_2 を、開始地点と終了地点が異なっているならば真、そうでないならば偽とする。

命題 4.14. ある行動が行動可能であるための条件は、以下の節が真であることである。

$$\neg r_0 \vee \neg r_1 \vee \neg r_2. \quad (4.2)$$

証明. ある行動がコスト 7 以内である条件を書き下せばよい。今回の SAT-Solver を発動させる前提条件として、敵の行動の前後で土地の所有に変化があることが前提条件になっている。そこで、「領有」の動作が少なくとも 1 回は行われている。領有は 4 コストであるから、ちょうど 1 回行われている。

したがって、残りの3コストで、「移動」「隠伏と顕現の切り替え」がどれだけできるかに考察が帰着される。隠伏に顕現状態でできないことは存在しないので、以下を仮定して良い。

- 顕現の動作が行われるならば、行動開始時点で行っていると仮定して良い。
- 隠伏の動作が行われるならば、行動終了時点で行っていると仮定して良い。

つまり隠伏と顕現の切り替えは、最大でも2回しか行われずとしてよい。また、行動は2コストかかるため、最大でも1回しか行われず。隠伏と顕現の切り替えは1コストである。したがって、3コストでできないことは、「隠伏と顕現の切り替えを2回やり、かつ、移動を1回した場合」に限られる。最初の顕現動作があったことは r_0 、移動動作があったことは r_2 、最後の顕現動作があったことは r_1 でわかる。(4.2) が行動可能の条件である。 ■

注意 4.15. 実際には、(4.2)ではなく、以下の節を入力する。

$$(\text{movable}) = \neg r_0 \vee \neg r_1 \vee \neg r_2 \vee \neg \pi_0. \quad (4.3)$$

以下の点に注意されたい。

1. 記号 4.13 で定められた r_0, r_1, r_2 それぞれ、真とも偽とも言えない場合は、SAT-Solver 上はその変数は偽として取り扱い、(4.3) を真にする。この場合、命題 4.14 を考慮するに十分な条件がないので、本小節の内容は敵の位置を絞り込む手がかりにはならない。だから、 r_0, r_1, r_2 それぞれ、「偽であるための条件」を考察する必要はない。
2. 以下では、直前の敵の行動の行動開始地点・行動終了地点が判明しないものと仮定する。つまり、SAT-Solver は発動され、 π_0 は真と仮定する。このとき、(4.3) は (4.2) と同値である。以下では、(4.2) を考察する。

記号 4.13.1. の条件を述べる。行動開始地点を (i, j) と仮定する。 r_0 は真であるといえる条件は、 κ'_{ij} が真である場合であり、またその場合に限る。詳しく言

うと以下のとおりである。 π_0 が真であるから敵の行動開始地点は認識できていない。その状態で、敵は行動開始地点では隠伏状態であるといえるのは、 (i, j) が敵の色と認識できている場合である。以上を踏まえて、条件は任意の (i, j) に対し、

$$s_{ij} \wedge \kappa'_{ij} \Rightarrow r_0$$

である。系 2.2 より、以下を SAT-Solver に入力する。

$$(\text{Force})_{r_0} = \bigwedge_{i=0}^R \bigwedge_{j=0}^R (\neg s_{ij} \vee \neg \kappa'_{ij} \vee r_0).$$

同様に、 r_1 については以下のとおりである。

$$(\text{Force})_{r_1} = \bigwedge_{i=0}^R \bigwedge_{j=0}^R (\neg g_{ij} \vee \neg \kappa_{ij} \vee r_0).$$

記号 4.13.3. の条件は厄介である。着想自体は単純である。行動開始地点と行動終了地点が一致しているとは、ある (i, j) について s_{ij} かつ e_{ij} が成立することである。したがって、記号 4.13.3. の条件は、

$$\neg \left(\bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R (s_{ij} \wedge e_{ij}) \right) \Rightarrow r_2$$

である。系 2.2 より、これは

$$\left(\bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R (s_{ij} \wedge e_{ij}) \right) \vee r_2$$

である。

$$P_{r_2} = \bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R (s_{ij} \wedge e_{ij}) \quad (4.4)$$

とおく。 P_{r_2} を SAT-Solver の入力に直接直すと、以下のとおりである。

$$P_{r_2} = \bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \left(\bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R \sigma_{ij} \right). \quad (4.5)$$

ここで、

$$\Sigma = \{\sigma: \{0, \dots, R\}^2 \rightarrow \{s_{ij}, e_{ij}\}_{ij} \mid \sigma_{ij} \text{ は } s_{ij} \text{ または } e_{ij}.\}.$$

さて、(4.5)において、右辺は 2^{R^2} 個の節からなっている。 $R = 14$ であるから、これを制限時間内に入力することは不可能である。

ところが、今回の場合、 $\{s_{ij}\}$ と $\{e_{ij}\}$ には制約がある。

- $\{s_{ij}\}$ は、あるただ 1 つの (i, j) のみ真であり、他は偽である。
- $\{e_{ij}\}$ も同様である。

これらは、 $(\text{Allow})_s$ かつ $(\text{Forbid})_s$ かつ $(\text{Allow})_e$ かつ $(\text{Forbid})_e$ として、SAT-Solver に 4.1 小節で入力済みである。

補題 4.16. $(\text{Allow})_s$ かつ $(\text{Forbid})_s$ かつ $(\text{Allow})_e$ かつ $(\text{Forbid})_e$ の仮定のもとで、 P_{r_2} は以下の P'_{r_2} と同値である。

$$P'_{r_2} = \bigwedge_{\sigma \in \Sigma'} \left(\bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R \sigma_{ij} \right). \quad (4.6)$$

ここで、

$$\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{ある } (i', j') \text{ について } \sigma_{i'j'} = e_{i'j'}.\}$$

それ以外の (i, j) について $\sigma_{ij} = s_{ij}$ 。

証明. $\Sigma' \subset \Sigma$ より、 $P_{r_2} \Rightarrow P'_{r_2}$ である。 $P'_{r_2} \Rightarrow P_{r_2}$ を示すために、 $\neg P_{r_2} \Rightarrow \neg P'_{r_2}$ を示す。

$(\text{Allow})_s$ かつ $(\text{Forbid})_s$ かつ $(\text{Allow})_e$ かつ $(\text{Forbid})_e$ より、ある $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ が存在し、以下が成立する。

$$s_{ij} = \begin{cases} \text{真} & (i, j) = (i_1, j_1), \\ \text{偽} & (i, j) \neq (i_1, j_1), \end{cases}$$

$$e_{ij} = \begin{cases} \text{真} & (i, j) = (i_2, j_2), \\ \text{偽} & (i, j) \neq (i_2, j_2). \end{cases}$$

(4.4) にもどれば、 P_{r_2} が偽であることは $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ であることと同値である。

$\sigma \in \Sigma$ を

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} e_{ij} & (i, j) = (i_1, j_1), \\ s_{ij} & (i, j) \neq (i_1, j_1) \end{cases}$$

と定める。すると、 $\sigma \in \Sigma'$ である。このとき、

$$\bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R \sigma_{ij}$$

は偽である。よって P'_{r_2} は偽である。 $\neg P_{r_2} \Rightarrow \neg P'_{r_2}$ が示された。 ■

(4.6) の右辺の節の個数は R^2 であるから、 P_{r_2} の代わりに P'_{r_2} を採用すれば十分である。すなわち、簡約化ができたことになる。結局、入力すべき条件は、以下のとおりである。

$$(\text{Force})_{r_2} = \bigwedge_{\sigma \in \Sigma'} \left(\left(\bigvee_{i=0}^R \bigvee_{j=0}^R \sigma_{ij} \right) \vee r_2 \right).$$

参考文献

[日本 07] 日本数学会（編）．岩波数学辞典．岩波書店，第 4 版，3 2007.

ときどき [日本 07] を参照する。