# 数理科学広域演習 IV レポート

高橋 和音 *

2016 年 11 月 7 日

**概要**

要約

## 1 はじめに

## 2 定義

**記号 2.1.** $x, y$ を命題とする。

1. 「$x$ の否定」を $\neg x$ と書く。
2. 「$x$ かつ $y$」のことを $x \wedge y$ と書き、「$x$ または $y$」のことを $x \vee y$ と書く。
3. 「$x$ ならば $y$」のことを $x \to y$ と書く。

**記号 2.2.** $I$ を集合とし、$i \in I$ に対し $x_i$ は命題とする。

1. 「任意の $i \in I$ に対し $x_i$ である」のことを
$$\bigwedge_{i \in I} x_i$$
と書く。$I = n \in \mathbb{N}$ が有限集合であるとき、
$$\bigwedge_{i \in I} x_i = x_0 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$$
である。
2. 「$i \in I$ が存在し $x_i$ である」のことを
$$\bigvee_{i \in I} x_i$$
と書く。$I = n \in \mathbb{N}$ が有限集合であるとき、
$$\bigvee_{i \in I} x_i = x_0 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_{n-1}$$

* 東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻 博士後期課程 2 年。Email: `kazune@ms.u-tokyo.ac.jp`

である。

**定義 2.3.** 1. $x$ が真か偽の値を取る変数であるとき、$x$ を単に**変数**と呼ぶ。

2. $x$ を変数とする。このとき、$x$ の**リテラル**とは、$x$、および、$\neg x$ のことである。
3. **節**とは、有限個のリテラル $l_1, \ldots, l_n$ を用いて

$$\bigvee_{i=1}^{n} l_n = l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n$$

と書かれる命題である。この節の長さを $n$ と定義する。

**定義 2.4.** $x_1, \ldots, x_n$ を変数とする。

1. SAT Solver の**入力**は、$x_1, \ldots, x_n$ のリテラルから作られた有限個の節 $C_1, \ldots, C_m$ を用いて

$$X = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$$

と書かれる命題である。

2. SAT Solver の**出力**は、次のいずれかである。
   (a) 偽である。この場合は、$X$ を真にする $(x_1, \ldots, x_n)$ の真偽値の組が存在しないことを表す。
   (b) 真である。この場合は、$X$ を真にする $(x_1, \ldots, x_n)$ の真偽値の組が存在することを表す。この場合、更に追加で、$X$ を真にする $(x_1, \ldots, x_n)$ の真偽値の組も返す。

# 3 行動

ToDo:論理学の用語がほとんどわからないので少し調べる。$R = 14$ とする。二重否定則を採用する。無限は絡まないので選択公理等はどうでもいいはず。

## 3.1 「ならば」の変換

SAT Solver に投げる命題に条件を落とし込むときに、「ならば」で発想すると自然に記述できるように思う。ところが「ならば」は SAT Solver には直接入力はできない。そこで「ならば」の変換に必要な補題を用意する。

**補題 3.1.** $a, b, c$ を真か偽かの変数とする。以下が成立する。

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

**証明.** もっとかっこいい方法があるかもしれないが、私は $(a, b, c)$ の真偽 8 パターンを確かめた。$a$ が真のときと $(a, b, c) =$ (真, 真, 偽) のときは両辺真、残りは偽である。 ■

**系 3.2.**　$a, b, c$ を真か偽かの変数とする。以下が成立する。

$$a \Rightarrow b = (\neg a \vee b).$$

**証明.**　$a \Rightarrow b$ は $\neg a \vee (a \wedge b)$ と同値である。あとは補題 3.1 を用いると、次式がしたがう。

$$\neg a \vee (a \wedge b) = (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee b) = (\neg a \vee b).$$

■

## 3.2　行動した「地点」に関する入力

ここでは、行動開始地点、行動終了地点、塗った地点に関する基本的な条件を落とし込む。実際にフィールドを見てそれらを決定するプロセスは次小節にまわす。

まずは、行動地点に関する変数を導入する。

**記号 3.3.**　$0 \leq i, j \leq R$ とする。$k = 0, 1, 2, 3$ とする。

1. $s_{ij}$ を「$i$ 行 $j$ 列が行動開始地点ならば真、そうでないならば偽」とする。
2. $e_{ij}$ を「$i$ 行 $j$ 列が行動終了地点ならば真、そうでないならば偽」とする。
3. $d_{ijk}$ を「$i$ 行 $j$ 列方角 $k$ で塗ったならば真、そうでないならば偽」とする。

最初に、当然だが、どこかの地点で行動開始、どこかの地点で塗り、どこかの地点で行動終了していないといけない。これらの条件はそれぞれ

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Allow})_s &= \bigvee_{i=0}^{R} \bigvee_{j=0}^{R} s_{ij}, \\
(\mathrm{Allow})_e &= \bigvee_{i=0}^{R} \bigvee_{j=0}^{R} e_{ij}, \\
(\mathrm{Allow})_d &= \bigvee_{i=0}^{R} \bigvee_{j=0}^{R} \bigvee_{j=0}^{3} d_{ijk}
\end{aligned}$$

と表せる。

次に、これも当然なことだが、2 つ以上のマスが行動開始地点であってはならない。このことは SAT Solver に明示的に入力される必要がある。つまり、全ての $(i, j) \neq (k, l)$ に対し、$\neg(s_{ij} \wedge s_{kl})$ である。すなわち、

$$(\mathrm{Forbid})_s = \bigwedge_{(i,j)\neq(k,l)} \neg(s_{ij} \wedge s_{kl})$$

である。これを SAT の入力に合うように変形すると、

$$(\mathrm{Forbid})_s = \bigwedge_{(i,j)\neq(k,l)} (\neg s_{ij} \vee \neg s_{kl})$$

である。これは $e, d$ も同様である。すなわち、

$$(\mathrm{Forbid})_e = \bigwedge_{(i,j)\neq(k,l)} (\neg e_{ij} \vee \neg e_{kl}),$$
$$(\mathrm{Forbid})_d = \bigwedge_{(i,j,k)\neq(l,m,n)} (\neg e_{ijk} \vee \neg e_{lmn})$$

である。

次に、移動はせいぜい 1 マスしかできないことを条件に加える。$k, l$ はそれぞれ 0 以上 $R$ 以下とする。しばらく、点 $(k, l)$ から 0 または 1 しか離れていないマス $(i, j)$ について $\bigvee$ をとったものを $\bigvee_{i,j}$ と表記することにする。素朴には

$$\bigvee_{i,j} = \bigvee_{i=k-1}^{k+1} \bigvee_{i=l-1}^{l+1}$$

のことだが、$(k, l)$ が端のマスだったら $(i, j)$ はフィールドの外かもしれない。その部分は実装の際に適宜外すことにする。

さて、行動開始地点が点 $(k, l)$ のとき、行動終了地点がせいぜい 1 マスしか離れていないことは、任意の $(k, l)$ に対して

$$s_{kl} \Rightarrow \left( \bigvee_{i,j} e_{ij} \right)$$

であると書ける。補題 3.2 より、これは

$$\neg s_{kl} \vee \left( \bigvee_{i,j} e_{ij} \right)$$

と同値である。$(k, l)$ について $\bigwedge$ をとって、

$$(\text{start-end}) = \bigwedge_{k=0}^{R} \bigwedge_{l=0}^{R} \left( \neg s_{kl} \vee \left( \bigvee_{i,j} e_{ij} \right) \right)$$

が求める条件である。

次に塗った位置と方角についての条件を書く。つまり「塗った位置は、開始地点か終了地点である」ということである。すなわち、任意の $(i, j, k)$ に対し、

$$d_{ijk} \Longrightarrow s_{ij} \vee e_{ij}$$

である。補題 3.2 より、これは

$$\neg d_{ijk} \vee (s_{ij} \vee e_{ij})$$

と同値である。すなわち、条件は

$$(\text{drawpoint}) = \bigwedge_{i=0}^{R} \bigwedge_{j=0}^{R} \bigwedge_{k=0}^{3} (\neg d_{ijk} \vee s_{ij} \vee e_{ij})$$

である。

**注意 3.4.**　ここまでの制約をまとめると、以下の通りである。

- 行動開始地点と行動終了地点がただ 1 つ存在する。
- 行動開始地点と行動終了地点はせいぜい 1 マスしか離れていない。
- 塗った地点と塗った方向がただ 1 つ存在する。
- 塗った地点は、行動開始地点または行動終了地点である。

### 3.3　塗った地点の制約

## 参考文献

[日本 07]　日本数学会（編）. 岩波数学辞典. 岩波書店, 第 4 版, 3 2007.

ときどき [日本 07] を参照する。