論文の内容の要旨

論文題目：Hénon type elliptic equations with critical Sobolev growth (臨界 Sobolev 指数を持つ Hénon 型楕円型方程式)

氏名：高橋 和音 (Kazune Takahashi)

1 主定理

本論文では，2 種類の臨界 Sobolev 指数を持つ Hénon 型方程式を考察する．$N \geq 3$ を自然数とし，$2^* = 2N/(N-2)$ を臨界 Sobolev 指数とする．$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を区分的 C^1 級有界領域とし，$\Omega \subset B(0,1)$ を充たすものとする．ここで，$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y-x| < r\}$ である．$x_0 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^N$ とする．$x_0 \in \partial\Omega$ 及び Ω が x_0 で内部球条件を充たすことを仮定する．関数 $\Psi \in L^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ について，以下の 2 つの条件を導入する．

(T0) $\Psi \geq \kappa_0$ in ω を充たす開集合 $\omega \subset \Omega$ と定数 $\kappa_0 > 0$ が存在する．

(T1) $m > 0, \beta \geq 0$ 及び開球 $B \subset \Omega$ が存在し，$x_0 \in \partial\Omega$ 及び $\Psi \geq \Psi_0$ in Ω が成立する．ここで，Ψ_0 は以下で定める．

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} m\,|x-x_0|^\beta & x \in B, \\ 0 & x \notin B. \end{cases} \tag{1}$$

本論文の Chapter 3 では以下の方程式について考察する．

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \Psi u + |x|^\alpha u^{2^*-1} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

定数 λ は $\lambda < \lambda_1$ を充たすものとする．ここで λ_1 は，次の Dirichlet 固有値問題の第 1 固有値とする：$-\Delta\phi = \lambda\Psi\phi$ in Ω. また，$\alpha > 0$ とする．

定理 1 (Theorem 1.1.1)**.** $N \geq 4, 0 < \lambda < \lambda_1$ とする．$\Psi \in L^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ は $0 \leq \Psi \leq 1$ in Ω を充たすものとする．(T1) を仮定する．このとき，十分小さな $\alpha > 0$ に対し，方程式 (2) は解 $u \in H_0^1(\Omega)$ を持つ．

本論文の Chapter 4 では以下の Kirchhoff 型方程式について考察する．

$$\begin{cases} -\left(a + b\left(\int_\Omega |Du|^2 dx\right)^{(p-2)/2}\right)\Delta u = \Psi u^{q-1} + |x|^\alpha u^{2^*-1} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

ここで $\alpha \geq 0, p > 2, q \geq 2, a \geq 0, b \geq 0$ は $a + b > 0$ を充たす定数である．

定理 2 (Theorem 1.1.2)**.** $2 < p < q < 2^*$ とする．$\Psi \in L^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ は，ある定数 $\kappa > 0$ が存在し $0 \leq \Psi \leq \kappa$ in Ω を充たすものとする．以下の条件 (a), (b) のいずれかの成立を仮定する．

(a) $N = 3$ and $4 < q < 2^* = 6$,

(b) $N \geq 4$.

(i) $\alpha = 0$ とする．(T0) を仮定する．このとき，方程式 (3) は解 $u \in H_0^1(\Omega)$ を持つ．

(ii) $\alpha > 0$ とする．(T1) を仮定する．このとき，十分小さな $\alpha > 0$ に対し，方程式 (3) は解 $u \in H_0^1(\Omega)$ を持つ．

(T1) の条件を充たす例として，以下の系がある．この例では，Ψ は $\partial\Omega$ で消えている．

系 3 (Corollary 1.1.3)**.** $\Omega = B(0,1), \beta_0 > 0$ とする．$\Psi(x) = (1 - |x|)^{\beta_0}$ と定める．

(i) $N \geq 4, 0 < \lambda < \lambda_1$ とする．このとき，小さな $\alpha > 0$ に対し，(2) は解を持つ．

(ii) $2 < p < q < 2^*$ とする．定理 2 の (a), (b) のいずれかの成立を仮定する．このとき，小さな $\alpha > 0$ に対し，(3) は解を持つ．

2 先行研究

Hénon 型方程式は [3] において研究が始まった．[8] を始め，数多くの研究がなされている．また，$\alpha = 0$, $\Psi \equiv 1$ in Ω のとき，(2) は Brézis–Nirenberg 方程式 [1] となる．Brézis–Nirenberg 型方程式は 30 年以上研究されている．(2) は Hénon 型方程式と Brézis–Nirenberg 型方程式を併せたものと捉えられる．[5] と [9] において，(2) と直接関係する以下の方程式が考察されている．

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |x|^\alpha |u|^{2^*-2} u & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

$\alpha > 0, \lambda > \lambda_1'$ は定数である．ここで λ_1' は，次の Dirichlet 固有値問題の第 1 固有値とする：$-\Delta\phi = \lambda\phi$ in Ω. [5] 及び [9] では，それぞれ，$N \geq 7$ かつ $\partial\Omega$ が滑らかなとき，及び，$N \geq 5$ かつ $\Omega = B(0,1)$ のとき，(4) が符号変化解を小さな $\alpha > 0$ に対して持つことが示されている．本論文の Chapter 3 では $0 < \lambda < \lambda_1$ のときの正値解について，$N \geq 4$ かつ Ω がより一般的であり，Ψ が定数とは限らない場合を考察する．

$p = 4, \alpha = 0, \Psi \equiv \lambda$ が定数のとき，(3) は標準的な，臨界 Sobolev 指数を持つ Kirchhoff 型の楕円型方程式となる．[7] においては，$N = 3, 4 < q < 6$ のとき，全ての $\lambda > 0$ に対し解が存在することが示されている．また，[2] 及び [7] においては，$N = 3, 2 < q \leq 4$ のとき，ある $\lambda^* \geq 0$ が存在し，全ての $\lambda > \lambda^*$ に対し解が存在することがそれぞれ異なる汎関数の切り捨て手法により示されている．これらの研究に触発され，臨界 Sobolev 指数を持つ Kirchhoff 型の楕円型方程式は近年活発に研究がなされている．$N = 4$ での研究結果としては [6] が挙げられる．また，非局在項の拡張もなされている．特に [10] では，定理 2 (i) が $a > 0$ の場合に示されている．(3) は臨界 Sobolev 指数を持つ Kirchhoff 型方程式と Hénon 型方程式を併せたものと捉えられる．本論文の Chapter 4 で (3) を考察するが，この章の目的の 1 つは，Chapter 2 で得られる結果を [7] の議論に応用し，非局在項をより一般化した状態で結果を得ることである．

3 手法

本論文で用いられる手法は，峠の定理と Talenti 関数である．Hénon 型方程式の係数である $|x|^\alpha$ は Ω 上で最大値を取らない．そこで以下の関数を導入し，Chapter 2 で積分の評価を議論する．

$$u_{\epsilon,l}(x) = \frac{\xi_l(x)}{\left(\epsilon + |x - x_l|^2\right)^{(N-2)/2}}.$$

ここで，$\epsilon > 0$, $x_l = (1-l, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$ であり，$\xi_l \in C_c^\infty(\Omega)$ は $B(x_l, l)$ を台とするカットオフ関数である．$l = l(\epsilon)$ は，$l \to 0$ ($\epsilon \to 0$) を充たす ϵ の関数とみなす．定理 1，2 を示すために，次の 2 種類の関数を導入する：$l(\epsilon) = \epsilon^\gamma$ $(0 < \gamma < 1/2)$, $l(\epsilon) = |\log \epsilon|^{-k}$ $(k > 0)$. 前者は既に [5] と [9] で，固定された γ について考察されているが，本論文では Ψ は $\partial\Omega$ で消える可能性がある関数であるため，γ と k をうまく選ぶ必要がある．

(3) の考察をする際に，汎関数 $I\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ を導入し，峠の定理を適用する．また I の $(\mathrm{PS})_c$ 条件が達成される $c > 0$ の上界を考察する．(3) を考察する上で困難な点は，p, N が $p = 4, N = 3$ とは限らないことである．[7] においては，$p = 4$, $2^* = 6$ であるため，2 次方程式を直接解くことにより c の上界が得られ，2 次不等式を直接解くことで，I の峠の高さを評価している．一方，本論文では，以下の明示的には解けない方程式を考察することになる．

$$\left(a + b\eta^{(p-2)/2}\right)\eta - \left(\frac{\eta}{S}\right)^{2^*/2} = 0.$$

この唯一の正値解を η_0 とおき，η_0 を用いて c の上界の記述を試み，I の峠の高さを評価する．このような議論は [10] で既に導入されている．しかし本論文では，Lions の第 2 集散コンパクト性補題 [4] を含む [7] の議論の直接の拡張に成功したので，$a = 0, b > 0$ の場合をも結果に含む．またこの議論は Hénon 型の係数とも相性が良い．

系 3 は定理 1, 2 の帰結であるが，(1) で定義される Ψ_0 の存在を，2 次元平面への射影を用いて，初等幾何で示す．

参考文献

[1] Haïm Brézis and Louis Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477. MR 709644 (84h:35059)

[2] Giovany M. Figueiredo, *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), no. 2, 706–713. MR 3018020

[3] Michel Hénon, *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems*, Astronomy and astrophysics **24** (1973), 229.

[4] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 1, 145–201. MR 834360

[5] Wei Long and Jianfu Yang, *Existence for critical Hénon-type equations*, Differential Integral Equations **25** (2012), no. 5-6, 567–578. MR 2951742

[6] Daisuke Naimen, *The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four*, J. Differential Equations **257** (2014), no. 4, 1168–1193. MR 3210026

[7] ———, *Positive solutions of Kirchhoff type elliptic equations involving a critical Sobolev exponent*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **21** (2014), no. 6, 885–914. MR 3278854

[8] Wei Ming Ni, *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), no. 6, 801–807. MR 674869

[9] Simone Secchi, *The Brezis-Nirenberg problem for the Hénon equation: ground state solutions*, Adv. Nonlinear Stud. **12** (2012), no. 2, 383–394. MR 2951722

[10] Lan Zeng and Chun Lei Tang, *Existence of a positive ground state solution for a Kirchhoff type problem involving a critical exponent*, Ann. Polon. Math. **117** (2016), no. 2, 163–180. MR 3539075