Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1　概要

N を 3 以上の自然数とする。$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。$p = (N+2)/(N-2)$ とする。$f \in H^{-1}(\Omega)$ は、$f \geq 0$、$f \not\equiv 0$ をみたすとする。$a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。$\kappa > -\kappa_1$ があって、$a \geq \kappa$ となると仮定する。また、$b \geq 0$、$b \not\equiv 0$ と仮定する。$\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\star$}_\lambda$$

定理 1.1. $(\star)_\lambda$ には minimal solution が存在する。

定理 1.2. $(\star)_\lambda$ には extremal solution が存在する。また、$(\star)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution に限る。

1.1　記号

ルベーグ空間を $L^q(\Omega)$ $(1 \leq q \leq \infty)$ と表記する。ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する。トレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H^1_0(\Omega)$ と表記する。ヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N}$、$0 < \alpha < 1)$ と表記する。

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する。ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する。$H^1_0(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記する。$w \in H^1_0(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_\Omega \left(|Dw|^2 + \kappa |w|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

と定める。$\kappa > -\kappa_1$、Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。また、$w \in H^1_0(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |Dw|^2 dx \right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。

2　minimal solution の存在と性質

本節では、$(\star)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1. $\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{ u \in H^1_0(\Omega) \mid u \text{ は } (\star)_\lambda \text{ の弱解である } \}$$

と定める。

定義 2.2. $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、

$$\underline{u}_\lambda \le u \text{ in } \Omega$$

が成立することをいう。

記号 2.3. $(\star)_\lambda$ の minimal solution を $\underline{u}_\lambda$ と表記する。

2.1　$H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、$\lambda > 0$ が十分小さいときに、$(\star)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

補題 2.4. 1. $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$(\star)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \ \ (\lambda \searrow 0).$$

2. さらに、$f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の弱解 u_λ は、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \ \ (\lambda \searrow 0).$$

証明. 1. $\Phi\colon [0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \tag{1}$$

とする。Φ の u についてのフレッシェ微分は、$w \in H_0^1(\Omega)$ とすると、次が成立する。

$$\Phi_u(\lambda, u)\colon w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1}w.$$

特に、次が成立する。

$$\Phi_u(0,0)w = -\Delta w + aw.$$

$a > -\kappa_1$ により、$\Phi_u(0,0)\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、$\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一つ存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、u_λ は、以下の方程式の弱解である。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \qquad\quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \ge 0$ であり、$a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、$u_\lambda > 0$ in Ω が成立する。よって、u_λ は $(\star)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき、$\Phi\colon [0,\infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \ \ (\lambda \searrow 0)$ が示される。 ■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 3 で使用する。

2.2　優解との関係

続いて、ある $\lambda = \widehat{\lambda}$ で $(\star)_\lambda$ が優解をもつときに、$0 < \lambda \le \widehat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す。

補題 2.5. $\widehat{\lambda} > 0$ とする。以下をみたす $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u} + a\widehat{u} \ge b\widehat{u}^p + \widehat{\lambda} f & \text{in } \Omega, \\ \qquad\quad \widehat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

このとき、$\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ に対し、$(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が存在する。また、$\underline{u}_\lambda < \widehat{u}$ in Ω が成立する。

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ を、次の通りに帰納的に定める。$u_0 \equiv 0$ とする。u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} = b u_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(4) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、$u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、$u_n^p \subset L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。$b \in L^\infty(\Omega)$、$f \in H^{-1}(\Omega)$ より、$bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。$a > -\kappa_1$ と合わせて、(4) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、n についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \text{ in } \Omega. \tag{5}$$

$n = 0$ のときは、$\widehat{u} > 0$ in Ω であることから、(5) が成立する。$n \in \mathbb{N}$ とする。n における (5) の成立を仮定し、$n+1$ における (5) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} &= b u_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + a u_n &= b u_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、$u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{u} + a\widehat{u} &> b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} &= b u_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、$\widehat{u} > u_{n+1}$ in Ω もしたがう。以上により、(5) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について (5) の成立が示された。

続いて、$\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す。u_{n+1} は (4) の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + a u_{n+1}\psi) dx = \int_\Omega b u_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx \tag{6}$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2) dx = \int_\Omega b u_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_\Omega f u_{n+1} dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \leq \int_\Omega b\widehat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f\widehat{u} dx < \infty. \tag{7}$$

ここで $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \geq \int_\Omega \left(|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2\right) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{8}$$

もわかる。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。したがって、(7) および (8) より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{9}$$

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1),$$

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ a.e. in } \Omega. \tag{10}$$

ここで u が $(\star)_\lambda$ の弱解であることを示す。(9) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1}\cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du\cdot D\psi + au\psi)dx.$$

また、$b \in L^\infty(\Omega)$ $\widehat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n\psi| \le b\widehat{u}^p|\psi| \quad \mathrm{a.e.\ in}\ \Omega$$

の右辺は可積分である。(10) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって、(6) で $n\to\infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du\cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \lambda\int_\Omega f\psi dx. \tag{11}$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\star)_\lambda$ の弱解である。

最後に、u は $(\star)_\lambda$ の minimal solution であることを示す。$\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\star)_\lambda$ の弱解とする。このとき、(5) と同様の議論により、$\widetilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。$n\to\infty$ として、$\widetilde{u} \ge u$ in Ω となる。よって u は $(\star)_\lambda$ の minimal solution である。 ■

補題 2.5 から、次の事実がしたがう。

補題 2.6. 1. $\lambda_0 > 0$ が存在して、$S_{\lambda_0} \ne \emptyset$ とする。このとき、$0<\lambda<\lambda_0$ に対し、$S_\lambda \ne \emptyset$ となる。
2. $\lambda > 0$ とする。$S_\lambda \ne \emptyset$ ならば、$(\star)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が存在する。
3. $0<\lambda_1<\lambda_2$ とする。$S_{\lambda_1} \ne \emptyset$、$S_{\lambda_2} \ne \emptyset$ ならば、$\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
4. 補題 2.4 における $(\star)_\lambda$ の弱解を u_λ とする。このとき、$u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である。

証明. 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。$\widehat{u} = u_{\lambda_0}$ とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。

2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする。$\widehat{u} = u_\lambda$ として補題 2.5 を適用すると、$(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が得られる。

3. $\widehat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として、補題 2.5 (5) を適用すると、$\underline{u}_{\lambda_1} \le \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる。

$$-\Delta\underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} = b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f,$$
$$-\Delta\underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} = b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_2}) + (\lambda_2 - \lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、$a > -\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω がしたがう。

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より、$S_\lambda \ne \emptyset$ である。したがって、2. より、$(\star)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ をもつ。よって、(38) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とおくと、以下が得られる。

$$\int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + a|\underline{u}_\lambda|^2\right)dx = \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^p dx + \lambda\int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx. \tag{12}$$

ここで、minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが、$\lambda \searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((12)\text{ の左辺}) \ge \int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + \kappa|\underline{u}_\lambda|^2\right)dx \ge C\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|_\kappa^2$ であり、$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから、$C>0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、$\underline{u}_\lambda \le u_\lambda$ in Ω より、次がしたがう。

$$\begin{aligned}((12)\text{ の右辺}) &\le \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx\\ &\le \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C'\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C''\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

ここで、$C', C'' > 0$ は、$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C'\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C''\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

補題 2.4 より、$\lambda \searrow 0$ のとき、$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ が成立する。ゆえに、$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。再び補題 2.4 によると、$\lambda > 0$ が十分小さいとき、u_λ は $(\star)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

2.3 解が存在する λ の有界性

補題 2.4 により、$\lambda > 0$ が存在して、$(\star)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.6 により、$(\star)_\lambda$ の解が存在する λ が見つかれば、それより小さい λ については、$(\star)_\lambda$ の解が存在する。そこで、$(\star)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.7. $\overline{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ と定める。

ここから先は、$\overline{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、$\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。

記号 2.8. $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

の唯一の弱解と定める。

g_0 について、次の補題を示す。

補題 2.9. 固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu b(g_0)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、$\mu_1 > 0$ である。また、μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。

証明. μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{14}$$

と特徴付けられる。また、(14) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(14) より、以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ が存在する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx = 1, \tag{15}$$

$$\int_\Omega \left(|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2\right) dx \searrow \mu_1. \tag{16}$$

$a > \kappa$ であるから、(16) の左辺は $\|\psi_n\|_\kappa^2$ 以下である。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから、$\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{17}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \tag{18}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{19}$$

(17) より、$H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から、次が成立する。

$$\liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}\,.$$

ゆえに、(18) と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx. \tag{20}$$

また、ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、$H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である。したがって、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である。よって、必要なら部分列をとると、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる。一方 (19) から、$\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する。したがって、次が成立する。

$$\psi_n^2 \rightharpoonup \phi_1^2 \ \text{ weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より、$b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である。$\left(L^{N/(N-2)}(\Omega)\right)^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より、次が成立する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx. \tag{21}$$

(21) の証明は、[Wil96] の Lemma 2.13 によった。(20) と (21) により、次がしたがう。

$$\mu_1 \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx}. \tag{22}$$

(14) により、(22) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(14) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される。よって $\mu_1 > 0$ である。

(14) の右辺の形から、ϕ_1 が (14) の右辺の下限を達成するならば、$|\phi_1|$ も下限を達成する。すなわち、$\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第 1 固有関数がある。この ϕ_1 について、次が成立する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ゆえに、強最大値原理により、$\phi_1 > 0$ in Ω となる。 ■

g_0 を用いて、次の命題を証明する。

命題 2.10. $\overline{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。$0 < \overline{\lambda} < \infty$ である。

証明. 補題 2.4 により、$\lambda_0 > 0$ が存在し、$0 < \lambda < \lambda_0$ に対して、$(\star)_\lambda$ の解が存在する。ゆえに $\overline{\lambda} > 0$ である。そこで、$\overline{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$ は、$S_\lambda \neq \emptyset$ をみたすものとする。$u \in S_\lambda$ とし、$v = u - \lambda g_0$ とする。このとき、次が成立する。

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって、強最大値原理より、$v > 0$ in Ω である。つまり、$u > \lambda g_0$ in Ω がしたがう。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \text{ in } \Omega. \tag{23}$$

一方、補題 2.9 により、以下が成立する $\mu_1 > 0$、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$、$\phi_1 > 0$ in Ω が存在する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \text{ in } \Omega. \tag{24}$$

そこで、$(23) \times \phi_1 - (24) \times u$ を Ω 上積分すると、次を得る。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1)\int_\Omega b(g_0)^{p-1}u\phi_1 dx.$$

ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$ である。つまり、$\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$ となる。$\lambda > 0$ は $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから、$\overline{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ がしたがう。 ■

証明 (定理 1.1). 命題 2.10 により、

2.4　minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\star)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{25}$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

補題 2.11. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。$(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (25) の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、以下が成立する。

1. $\mu_1 > 0$ である。また、μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx \geq \mu_1 \int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx. \tag{26}$$

証明. 1. 補題 2.9 と同様である。
2. μ_1 のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx}$$

から (26) が成立する。 ■

記号 2.12. $(\star)_\lambda$ の minimal solution に関する線形化固有値問題 (25) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく。

補題 2.13. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。このとき、$\mu_1(\lambda) > 1$ である。

証明. $\widehat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \widehat{\lambda} < \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$z = \underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda$ とおく。補題 2.6.3 より、$z > 0$ in Ω である。

$$-\Delta\underline{u}_{\widehat{\lambda}} + a\underline{u}_{\widehat{\lambda}} = b\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p + \widehat{\lambda}f,$$
$$-\Delta\underline{u}_\lambda + a\underline{u}_\lambda = b\underline{u}_\lambda^p + \lambda f$$

の両辺を引いて、次を得る。

$$-\Delta z + az = b(\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p) + (\widehat{\lambda} - \lambda)f.$$

$x \geq 0$ に対し、$x \mapsto x^p$ は下に凸であるから、次がしたがう。

$$\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p > p\underline{u}_\lambda^{p-1}(\underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda) = p\underline{u}_\lambda^{p-1}z.$$

$(\widehat{\lambda} - \lambda)f \geq 0$ と合わせて、次を得る。

$$-\Delta z + az > bp\underline{u}_\lambda^{p-1}z \quad \text{in } \Omega. \tag{27}$$

$\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ とする。補題 2.11 より、$\phi_1 > 0$ in Ω があって、

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu pb\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_1 \quad \text{in } \Omega \tag{28}$$

$(27) \times \phi_1 - (28) \times z$ を Ω 上積分すると、

$$0 > (1 - \mu_1)p \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_1 z dx$$

となる。ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$\underline{u}_\lambda, z, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$1 - \mu_1 < 0$ である。つまり $\mu_1 > 1$ である。 ■

2.5 extremal solution の存在

以下では、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ を考察する。

定義 2.14. $\overline{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の弱解を $(\star)_\lambda$ の **extremal solution** という。

本小節では、$(\star)_\lambda$ の extremal solution が存在することを示す。このために、まず以下の集合を考察する。

$$K = \{\underline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}. \tag{29}$$

補題 2.15. (29) の K は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。

証明. $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を記号 2.8 のものとする。$v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0$ と定める。すると、次が成立する。

$$-\Delta v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0 \quad \text{in } \Omega.$$

ゆえに、$\psi \in H_0^1(\Omega)$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (Dv_\lambda \cdot D\psi + a v_\lambda \psi) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p \psi dx.$$

$\psi = v_\lambda$ とおくと、次を得る。

$$\int_\Omega \left(|Dv_\lambda|^2 + a|v_\lambda|^2\right) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx. \tag{30}$$

ここで、次の事実を示す。任意の $\epsilon > 0$ に対し、$C > 0$ が存在し、任意の $s, t \geq 0$ に対し、次式が成立する。

$$(t+s)^p \leq (1+\epsilon)(t+s)^{p-1} t + C s^p. \tag{31}$$

まず、$(t+s)^{p-1}s$ にヤングの不等式を用いる。$q, r > 1$ は、$q^{-1} + r^{-1} = 1$ をみたすものとする。任意の $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ に対し、$\widetilde{C} > 0$ が存在し、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \leq \widetilde{\epsilon}\left((t+s)^{p-1}\right)^q + \widetilde{C} s^r.$$

ここで $q = p/(p-1)$ とおくと、$r = p$ である。ゆえに、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
(t+s)^{p-1}s &\leq \widetilde{\epsilon}(t+s)^p + \widetilde{C}s^p \\
&= \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}t + \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}s + \widetilde{C}s^p, \\
(t+s)^{p-1}s &\leq \frac{\widetilde{\epsilon}}{1-\widetilde{\epsilon}}(t+s)^{p-1}t + \frac{\widetilde{C}}{1-\widetilde{\epsilon}}s^p.
\end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\epsilon = \widetilde{\epsilon}/(1-\widetilde{\epsilon})$ となる $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ は存在する。この $\widetilde{\epsilon}$ に対し、$C = \widetilde{C}/(1-\widetilde{\epsilon})$ とすると、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \leq \epsilon(t+s)^{p-1}t + Cs^p.$$

$(t+s)^p = (t+s)^{p-1}s + (t+s)^{p-1}t$ より、(31) が得られる。以上の (31) の証明は [NS07] の Lemma 4.1 によった。

(30) の左辺を I とおく。(31) より、次式が成立する。

$$\int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx \leq (1+\epsilon)\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1} v_\lambda^2 dx + C\lambda^p \int_\Omega b g_0^p v_\lambda dx. \tag{32}$$

ここで、補題 2.11.2、補題 2.13 から、次式を得る。

$$I \leq \mu_1 p \int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\underline{v}_\lambda^2 dx > p\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\underline{v}_\lambda^2 dx.$$

すなわち、次を得る。

$$\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} v_\lambda^2 dx < \frac{I}{p} \tag{33}$$

また、$g_0, v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$、及び、ヘルダーの不等式、ソボレフの不等式から、次式を得る。

$$\int_\Omega b g_0^p v_\lambda dx \le \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|g_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}^p \|v_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le C \|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le C' \|v_\lambda\|_\kappa . \tag{34}$$

ここで $C, C' > 0$ は λ によらない。

(30)、(33)、(34) から、次式がしたがう。

$$I \le \frac{1+\epsilon}{p} I + \overline{\lambda}^p C \|v_\lambda\|_\kappa .$$

$\epsilon > 0$ を $(1+\epsilon)/p < 1$ となるよう小さくとれば、$I \le C\|v_\lambda\|_\kappa$ となる。ここで $I \ge \|v_\lambda\|_\kappa^2$、$v_\lambda \not\equiv 0$ であるから、$\|v_\lambda\|_\kappa \le C$ である。$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は同値であるから、$\{v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。v_λ の定め方から $\underline{u}_\lambda = v_\lambda + \lambda g_0$ であるため、次の式が成立する。

$$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} + \overline{\lambda} \|g_0\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

右辺は λ によらない定数で抑えられる。従って、(29) の K は、$H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。 ■

$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のときの $\underline{u}_\lambda$ の極限をとることで、$(\star)_\lambda$ の extremal solution を構成する。

命題 2.16. 1. $(\star)_\lambda$ の extremal solution が存在する。とくに、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する。
2. $\lambda > 0$ とする。$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_[\overline{\lambda}$ a. e. in Ω となる。

証明. 1. 正の数の列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ は、$\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$u_n = \underline{u}_{\lambda_n}$ とかく。u_n は $\lambda = \lambda_n$ における $(\star)_\lambda$ の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_n \cdot D\psi + a u_n \psi) dx = \int_\Omega b u_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f \psi dx. \tag{35}$$

補題 2.15 より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{36}$$
$$u_n \longrightarrow u \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$
$$u_n \longrightarrow u \quad \text{a. e. in } \Omega. \tag{37}$$

u が $(\star)_\lambda$ の extremal solution であることを示す。(36) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_n \cdot D\psi + a u_n \psi) dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du \cdot D\psi + a u \psi) dx.$$

補題 2.6.3 と (37) により、$u_n \le u$ in Ω となる。とくに、$u > 0$ in Ω である。また、$b \in L^\infty(\Omega)$ $u, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|b u_n^p \psi| \le b \widehat{u}^p |\psi| \quad \text{a. e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(37) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega b u_n^p \psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b u^p \psi dx.$$

したがって、(6) で $n \to \infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + a u \psi) dx = \int_\Omega b u^p \psi dx + \overline{\lambda} \int_\Omega f \psi dx. \tag{38}$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\star)_\lambda$ の extremal solution である。すなわち、$(\star)_\lambda$ の extremal solution が存在する。補題 2.5.2 より、特に $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する。

2. 補題 2.5.3 より、$u_n = \underline{u}_{\lambda_n} < \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω である。$n \to \infty$ とすると、$u \le \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω を得る。$u \in S_{\overline{\lambda}}$ であり、$\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ は $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution であるから、$u = \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ である。したがって、$n \to \infty$ のとき、$\underline{u}_{\lambda_n} \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a. e. in Ω となる。$\{\lambda_n\}$ の任意性により、$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a. e. in Ω となる。 ■

2.6　extremal solution の一意性

前小節では、$(\star)_\lambda$ の extremal solution の存在を示した。本小節では、$(\star)_\lambda$ の extremal solution が唯一つに限ることを示す。鍵となるのは、(25) の第 1 固有値 $\mu_1(\lambda)$ である。補題 2.13 では、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において $\mu_1(\lambda) > 1$ となることを示した。$\lambda = \overline{\lambda}$ において、この不等式が成立しなくなることを示す。

命題 2.17. $(\star)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u_{\overline{\lambda}}}$ に限る。

証明 (定理 1.2). 命題 2.16.1 と命題 2.17 からしたがう。 ■

3　$N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献

[NS07] Yūki Naito and Tokushi Sato. Positive solutions for semilinear elliptic equations with singular forcing terms. *J. Differential Equations*, Vol. 235, No. 2, pp. 439–483, 2007.

[Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.