Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1　概要

N を 3 以上の自然数とする。$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。$p = (N+2)/(N-2)$ とする。$f \in H^{-1}(\Omega)$ は、$f \geq 0$、$f \not\equiv 0$ をみたすとする。$a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。$\kappa > -\kappa_1$ が存在して、$a \geq \kappa$ となると仮定する。また、$b \geq 0$、$b \not\equiv 0$ と仮定する。$\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\spadesuit$}_\lambda$$

定理 1.1.　$(\spadesuit)_\lambda$ には minimal solution が存在する。

定理 1.2.　$(\spadesuit)_\lambda$ には extremal solution が存在する。とくに、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution が存在する。また、$b > 0$ in Ω ならば、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution に限る。

定理 1.3.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。b は Ω 上のある点 p で最大値 $M_1 = \|b\|_{L^\infty}(\Omega) > 0$ を達成するものと仮定する。$r_0 > 0$ が存在し、$\{|x-p| < 2r_0\} \subset \Omega$、かつ、$\{|x-p| < r_0\}$ 上

$$b(x) = M_1 - M_2|x-p|^q,$$
$$a(x) = m_1 + m_2|x-p|^{q'}$$

であると仮定する。ここで $q, q' > 0$、$M_2 > 0$、$m_1 > \kappa$、$m_2 \neq 0$ は定数である。さらに、以下の (i) – (iv) のいずれかの成立を仮定する。

(i)　$m_1 < 0$、かつ、$N \geq 3$。
(ii)　$m_1 > 0$、かつ、$N = 3, 4, 5$。
(iii)　$m_1 = 0$、かつ、$m_2 < 0$、かつ、$N \geq 3$。
(iv)　$m_1 = 0$、かつ、$m_2 > 0$、かつ、$3 \leq N < 6 + 2q'$。

このとき、$(\spadesuit)_\lambda$ は、minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ をもつ。

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution 以外の解 $\overline{u}_\lambda$ を見出すために、以下の方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta v + av = b\left((v + \underline{u}_\lambda)^p - (\underline{u}_\lambda)^p\right) & \text{in } \Omega, \\ v > 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\heartsuit$}_\lambda$$

1.1　記号

ルベーグ空間を $L^q(\Omega)$ $(1 \leq q \leq \infty)$ と表記する。ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する。トレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H_0^1(\Omega)$ と表記する。ヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N}$、$0 < \alpha < 1)$ と表記する。

コンパクト台を持つ Ω 上の C^∞ 級関数全体を $C_c^\infty(\Omega)$ と表記する。

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する。ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する。$H_0^1(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記する。$f \in H^{-1}$ の $u \in H_0^1(\Omega)$ への作用を $\langle f, u\rangle$ と表記する。$H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|_\kappa$ を、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_\Omega \left(|Dw|^2 + \kappa w^2\right) dx\right)^{1/2}$$

と定める。$\kappa > -\kappa_1$、Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。また、$H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |Dw|^2 dx\right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることがしたがう。

2 minimal solution の存在と性質

本節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1. $\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\spadesuit)_\lambda \text{ の弱解である }\}$$

と定める。

定義 2.2. $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、$\underline{u}_\lambda \le u$ in Ω が成立することをいう。

記号 2.3. $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution を $\underline{u}_\lambda$ と表記する。

2.1 $H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、$\lambda > 0$ が十分小さいときに、$(\spadesuit)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

補題 2.4. 1. $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$(\spadesuit)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

2. さらに、$f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の弱解 u_λ は、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

証明. 1. $\Phi\colon [0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \tag{2.1}$$

とする。Φ の u についてのフレッシェ微分は、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\Phi_u(\lambda, u)\colon w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1}w. \tag{2.2}$$

と書かれる。特に、

$$\Phi_u(0,0)w = -\Delta w + aw.$$

が成立する。$a > -\kappa_1$ により、$\Phi_u(0,0)\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、$\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一つ存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、u_λ は、以下の方程式の弱解である。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$ であり、$a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、$u_\lambda > 0$ in Ω が成立する。よって、u_λ は $(\spadesuit)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき、$\Phi\colon [0,\infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ を、(2.1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \ (\lambda \searrow 0)$ が示される。 ■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 7 で使用する。

2.2　優解との関係

続いて、ある $\lambda = \widehat{\lambda}$ で $(\spadesuit)_\lambda$ が優解をもつときに、$0 < \lambda \leq \widehat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す。

補題 2.5.　$\widehat{\lambda} > 0$ とする。以下をみたす $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u} + a\widehat{u} \geq b\widehat{u}^p + \widehat{\lambda} f & \text{in } \Omega, \\ \widehat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

このとき、$\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ に対し、$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が存在する。また、$\underline{u}_\lambda < \widehat{u}$ in Ω が成立する。

証明.　$H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ を、次の通りに帰納的に定める。$u_0 \equiv 0$ とする。u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(2.5) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、$u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、$u_n^p \subset L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。$b \in L^\infty(\Omega)$、$f \in H^{-1}(\Omega)$ より、$bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。$a > -\kappa_1$ と合わせて、(2.5) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、n についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \text{ in } \Omega. \tag{2.6}$$

$n = 0$ のときは、$\widehat{u} > 0$ in Ω であることから、(2.6) が成立する。$n \in \mathbb{N}$ とする。n における (2.6) の成立を仮定し、$n+1$ における (2.6) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、$u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{u} + a\widehat{u} &> b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、$\widehat{u} > u_{n+1}$ in Ω もしたがう。以上により、(2.6) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について (2.6) の成立が示された。

続いて、$\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す。u_{n+1} は (2.5) の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx = \int_\Omega bu_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx \tag{2.7}$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2)dx = \int_\Omega bu_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_\Omega f u_{n+1} dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \le \int_\Omega b\widehat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f\widehat{u} dx < \infty. \tag{2.8}$$

ここで $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \ge \int_\Omega \left(|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2\right) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{2.9}$$

もわかる。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。したがって、(2.8) および (2.9) より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \ \ \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$
$$u_n \longrightarrow u \ \ \text{in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1),$$
$$u_n \longrightarrow u \ \ \text{a.e. in } \Omega. \tag{2.11}$$

ここで u が $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であることを示す。(2.10) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx.$$

また、$b \in L^\infty(\Omega)$、$\widehat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n\psi| \le b\widehat{u}^p|\psi| \ \ \text{a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(2.11) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって、(2.7) で $n \to \infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx. \tag{2.12}$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解である。

最後に、u は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であることを示す。$\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解とする。このとき、(2.6) と同様の議論により、$\widetilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。$n \to \infty$ として、$\widetilde{u} \ge u$ in Ω となる。よって u は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution である。 ∎

補題 2.5 から、次の事実がしたがう。

補題 2.6. 1. $\lambda_0 > 0$ が存在して、$S_{\lambda_0} \ne \emptyset$ とする。このとき、$0 < \lambda < \lambda_0$ に対し、$S_\lambda \ne \emptyset$ となる。

2. $\lambda > 0$ とする。$S_\lambda \ne \emptyset$ ならば、$(\spadesuit)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が存在する。
3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ とする。$S_{\lambda_1} \ne \emptyset$、$S_{\lambda_2} \ne \emptyset$ ならば、$\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
4. 補題 2.4 における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解を u_λ とする。このとき、$u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である。

証明. 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。$\widehat{u} = u_{\lambda_0}$ とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。

2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする。$\widehat{u} = u_\lambda$ として補題 2.5 を適用すると、$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が得られる。

3.　$\widehat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として、補題 2.5 (2.6) を適用すると、$\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる。

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} &= b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} &= b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_2}) + (\lambda_2 - \lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、$a > -\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω がしたがう。

4.　$u_\lambda \in S_\lambda$ より、$S_\lambda \neq \emptyset$ である。したがって、2. より、$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ をもつ。よって、(2.12) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とおくと、以下が得られる。

$$\int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + a|\underline{u}_\lambda|^2\right) dx = \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^p dx + \lambda \int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx. \tag{2.13}$$

ここで、minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが、$\lambda \searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((2.13) \text{ の左辺}) \geq \int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + \kappa|\underline{u}_\lambda|^2\right) dx \geq C \|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|_\kappa^2$ であり、$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから、$C > 0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、$\underline{u}_\lambda \leq u_\lambda$ in Ω より、次がしたがう。

$$\begin{aligned} ((2.13) \text{ の右辺}) &\leq \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ここで、$C', C'' > 0$ は、$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

補題 2.4 より、$\lambda \searrow 0$ のとき、$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ が成立する。ゆえに、$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。再び補題 2.4 によると、$\lambda > 0$ が十分小さいとき、u_λ は $(\spadesuit)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

2.3　解が存在する λ の有界性

補題 2.4 により、$\lambda > 0$ が存在して、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.6 により、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ が見つかれば、それより小さい λ については、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。そこで、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.7.　$\overline{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ と定める。

ここから先は、$\overline{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、$\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。

記号 2.8.　$g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + ag_0 = f & \text{in } \Omega, \\ g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

の唯一の弱解と定める。

g_0 について、次の補題を示す。

補題 2.9.　固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu b(g_0)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、$\mu_1 > 0$ である。また、μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。

証明.　μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{2.15}$$

と特徴付けられる。また、(2.15) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(2.15) より、以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ が存在する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx = 1, \tag{2.16}$$

$$\int_\Omega \left(|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2\right) dx \searrow \mu_1. \tag{2.17}$$

$a > \kappa$ であるから、(2.17) の左辺は $\|\psi_n\|_\kappa^2$ 以下である。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから、$\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{2.18}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \tag{2.19}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{2.20}$$

(2.18) より、$H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から、次が成立する。

$$\liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

ゆえに、(2.19) と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx. \tag{2.21}$$

また、ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、$H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である。したがって、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である。よって、必要なら部分列をとると、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる。一方 (2.20) から、$\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する。したがって、次が成立する。

$$\psi_n^2 \rightharpoonup \phi_1^2 \quad \text{weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より、$b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である。$\left(L^{N/(N-2)}(\Omega)\right)^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より、次が成立する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx. \tag{2.22}$$

(2.22) の証明は、[Wil96] の Lemma 2.13 によった。(2.21) と (2.22) により、次がしたがう。

$$\mu_1 \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx}. \tag{2.23}$$

(2.15) により、(2.23) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(2.15) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される。よって $\mu_1 > 0$ である。

(2.15) の右辺の形から、ϕ_1 が (2.15) の右辺の下限を達成するならば、$|\phi_1|$ も下限を達成する。すなわち、$\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第 1 固有関数がある。この ϕ_1 について、次が成立する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ゆえに、強最大値原理により、$\phi_1 > 0$ in Ω となる。 ■

g_0 を用いて、次の命題を証明する。

命題 2.10.　$\overline{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。$0 < \overline{\lambda} < \infty$ である。

証明.　補題 2.4 により、$\lambda_0 > 0$ が存在し、$0 < \lambda < \lambda_0$ に対して、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。ゆえに $\overline{\lambda} > 0$ である。そこで、$\overline{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$ は、$S_\lambda \neq \emptyset$ をみたすものとする。$u \in S_\lambda$ とし、$v = u - \lambda g_0$ とする。このとき、次が成立する。

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって、強最大値原理より、$v > 0$ in Ω である。つまり、$u > \lambda g_0$ in Ω がしたがう。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \text{ in } \Omega. \tag{2.24}$$

一方、補題 2.9 により、以下が成立する $\mu_1 > 0$、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$、$\phi_1 > 0$ in Ω が存在する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \text{ in } \Omega. \tag{2.25}$$

そこで、$(2.24) \times \phi_1 - (2.25) \times u$ を Ω 上積分すると、次を得る。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1)\int_\Omega b(g_0)^{p-1}u\phi_1 dx.$$

ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$ である。つまり、$\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$ となる。$\lambda > 0$ は $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから、$\overline{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ がしたがう。 ■

証明 (定理 1.1).　命題 2.10 により、

2.4　minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.26}$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

記号 2.11.　$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (2.26) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく。

補題 2.12.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。このとき、以下が成立する。

1. $\mu_1(\lambda) > 0$ である。また、$\mu_1(\lambda)$ に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものが存在する。
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx \geq \mu_1(\lambda)\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx. \tag{2.27}$$

証明.　1.　補題 2.9 と同様である。

2.　$\mu_1(\lambda)$ のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1(\lambda) = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{2.28}$$

から (2.27) が成立する。 ■

補題 2.12 から即座に、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ ならば $\mu_1(\lambda) > 0$ であることがわかる。次の補題では、方程式 $(\spadesuit)_\lambda$ に着目し、$\mu_1(\lambda)$ についてより多くの情報を引き出す。

補題 2.13. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。このとき、$\mu_1(\lambda) > 1$ である。

証明. $\widehat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \widehat{\lambda} < \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$z = \underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda$ とおく。補題 2.6.3 より、$z > 0$ in Ω である。

$$-\Delta \underline{u}_{\widehat{\lambda}} + a\underline{u}_{\widehat{\lambda}} = b\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p + \widehat{\lambda} f,$$
$$-\Delta \underline{u}_\lambda + a\underline{u}_\lambda = b\underline{u}_\lambda^p + \lambda f$$

の両辺を引いて、次を得る。

$$-\Delta z + az = b(\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p) + (\widehat{\lambda} - \lambda) f.$$

$x \geq 0$ に対し、$x \mapsto x^p$ は下に凸であるから、次がしたがう。

$$\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p > p\underline{u}_\lambda^{p-1}(\underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda) = p\underline{u}_\lambda^{p-1} z.$$

$(\widehat{\lambda} - \lambda) f \geq 0$ と合わせて、次を得る。

$$-\Delta z + az > bp\underline{u}_\lambda^{p-1} z \quad \text{in } \Omega. \tag{2.29}$$

$\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ とする。補題 2.12 より、$\phi_1 > 0$ in Ω があって、

$$-\Delta \phi_1 + a\phi_1 = \mu p b \underline{u}_\lambda^{p-1} \phi_1 \quad \text{in } \Omega \tag{2.30}$$

(2.29) $\times \phi_1 -$ (2.30) $\times z$ を Ω 上積分すると、

$$0 > (1 - \mu_1) p \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1} \phi_1 z dx$$

となる。ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$\underline{u}_\lambda, z, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$1 - \mu_1 < 0$ である。つまり $\mu_1 > 1$ である。 ■

3 extremal solution の存在と一意性

本節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution について考察する。$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ を考察する。

定義 3.1. $\overline{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解を $(\spadesuit)_\lambda$ の **extremal solution** という。

3.1 extremal solution の存在

本小節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在することを示す。このために、まず以下の集合を考察する。

$$K = \{\underline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}. \tag{3.1}$$

補題 3.2. (3.1) の K は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。

証明. $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を記号 2.8 のものとする。$v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0$ と定める。すると、次が成立する。

$$-\Delta v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0 \quad \text{in } \Omega.$$

ゆえに、$\psi \in H_0^1(\Omega)$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (Dv_\lambda \cdot D\psi + av_\lambda \psi) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p \psi dx.$$

$\psi = v_\lambda$ とおくと、次を得る。

$$\int_\Omega \left(|Dv_\lambda|^2 + a|v_\lambda|^2\right) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx. \tag{3.2}$$

ここで、次の事実を示す。任意の $\epsilon > 0$ に対し、$C > 0$ が存在し、任意の $s, t \geq 0$ に対し、次式が成立する。

$$(t+s)^p \leq (1+\epsilon)(t+s)^{p-1}t + Cs^p. \tag{3.3}$$

まず、$(t+s)^{p-1}s$ にヤングの不等式を用いる。$q, r > 1$ は、$q^{-1} + r^{-1} = 1$ をみたすものとする。任意の $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ に対し、$\widetilde{C} > 0$ が存在し、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \leq \widetilde{\epsilon}\left((t+s)^{p-1}\right)^q + \widetilde{C}s^r.$$

ここで $q = p/(p-1)$ とおくと、$r = p$ である。ゆえに、以下が成立する。

$$\begin{aligned}(t+s)^{p-1}s &\leq \widetilde{\epsilon}(t+s)^p + \widetilde{C}s^p \\ &= \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}t + \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}s + \widetilde{C}s^p, \\ (t+s)^{p-1}s &\leq \frac{\widetilde{\epsilon}}{1-\widetilde{\epsilon}}(t+s)^{p-1}t + \frac{\widetilde{C}}{1-\widetilde{\epsilon}}s^p.\end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\epsilon = \widetilde{\epsilon}/(1-\widetilde{\epsilon})$ となる $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ は存在する。この $\widetilde{\epsilon}$ に対し、$C = \widetilde{C}/(1-\widetilde{\epsilon})$ とすると、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \leq \epsilon(t+s)^{p-1}t + Cs^p.$$

$(t+s)^p = (t+s)^{p-1}s + (t+s)^{p-1}t$ より、(3.3) が得られる。以上の (3.3) の証明は [NS07] の Lemma 4.1 によった。

(3.2) の左辺を I とおく。(3.3) より、次式が成立する。

$$\int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx \leq (1+\epsilon)\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1} v_\lambda^2 dx + C\lambda^p \int_\Omega b g_0^p v_\lambda dx. \tag{3.4}$$

ここで、補題 2.12.2、補題 2.13 から、次式を得る。

$$I \leq \mu_1 p \int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\underline{v}_\lambda^2 dx > p\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\underline{v}_\lambda^2 dx.$$

すなわち、次を得る。

$$\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} v_\lambda^2 dx < \frac{I}{p} \tag{3.5}$$

また、$g_0, v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$、及び、ヘルダーの不等式、ソボレフの不等式から、次式を得る。

$$\int_\Omega b g_0^p v_\lambda dx \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|g_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}^p \|v_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C\|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C'\|v_\lambda\|_\kappa. \tag{3.6}$$

ここで $C, C' > 0$ は λ によらない。

(3.2)、(3.5)、(3.6) から、次式がしたがう。

$$I \leq \frac{1+\epsilon}{p} I + \overline{\lambda}^p C\|v_\lambda\|_\kappa.$$

$\epsilon > 0$ を $(1+\epsilon)/p < 1$ となるよう小さくとれば、$I \leq C\|v_\lambda\|_\kappa$ となる。ここで $I \geq \|v_\lambda\|_\kappa^2$、$v_\lambda \not\equiv 0$ であるから、$\|v_\lambda\|_\kappa \leq C$ である。$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は同値であるから、$\{v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。v_λ の定め方から $\underline{u}_\lambda = v_\lambda + \lambda g_0$ であるため、次の式が成立する。

$$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} + \overline{\lambda}\|g_0\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

右辺は λ によらない定数で抑えられる。従って、(3.1) の K は、$H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。 ■

$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のときの $\underline{u}_\lambda$ の極限をとることで、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution を構成する。

命題 3.3.
1. $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する。とくに、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する。
2. $\lambda > 0$ とする。$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。

証明.　1.　正の数の列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ は、$\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$u_n = \underline{u}_{\lambda_n}$ とかく。u_n は $\lambda = \lambda_n$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_n \cdot D\psi + au_n\psi)dx = \int_\Omega bu_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx. \tag{3.7}$$

補題 3.2 より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$
$$u_n \longrightarrow u \ \text{ in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1),$$
$$u_n \longrightarrow u \ \text{ a.e. in } \Omega. \tag{3.9}$$

u が $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution であることを示す。(3.8) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_n \cdot D\psi + au_n\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx.$$

補題 2.6.3 と (3.9) により、$u_n \le u$ in Ω となる。とくに、$u > 0$ in Ω である。また、$b \in L^\infty(\Omega)$、$u, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n^p\psi| \le b\widehat{u}^p|\psi| \ \ \text{a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(3.9) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって、(3.7) で $n \to \infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \overline{\lambda}\int_\Omega f\psi dx.$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution である。すなわち、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する。補題 2.5.2 より、特に $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する。

2.　補題 2.5.3 より、$u_n = \underline{u}_{\lambda_n} < \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω である。$n \to \infty$ とすると、$u \le \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω を得る。$u \in S_{\overline{\lambda}}$ であり、$\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ は $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であるから、$u = \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ である。したがって、$n \to \infty$ のとき、$\underline{u}_{\lambda_n} \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。$\{\lambda_n\}$ の任意性により、$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。 ■

3.2　extremal solution の一意性

前小節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution の存在を示した。本小節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が $b > 0$ in Ω のときは唯一つに限ることを示す。

鍵となるのは、(2.26) の第 1 固有値 $\mu_1(\lambda)$ である。補題 2.13 では、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において $\mu_1(\lambda) > 1$ となることを示した。$b > 0$ in Ω $\lambda = \overline{\lambda}$ において、この不等式が成立しなくなることを示す。

補題 3.4.　λ_1, λ_2 は、

補題 3.5.　1.　$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\overline{\lambda})$ である。

2.　$b > 0$ in Ω ならば、$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ である。

証明.　1.　$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ を、$\mu_1(\overline{\lambda})$ に付随する $\phi_1 > 0$ in Ω をみたす固有関数とする。正の実数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ を λ_n を、$\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする。単調収束定理より、次式が成立する。

$$\int_\Omega bp(\underline{u}_{\lambda_n})^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \ \ (n \to \infty).$$

$\{\lambda_n\}$ の任意性より、次式が成立する。

$$\int_\Omega bp(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \quad (\lambda \nearrow \overline{\lambda}). \tag{3.10}$$

$\epsilon > 0$ とする。(3.10) より、$\delta > 0$ が存在し、$0 < \overline{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば、

$$0 < \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx} - \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega bp(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi_1^2 dx} < \epsilon \tag{3.11}$$

が成立する。ここで、$\widetilde{\mu}(\lambda)$ を

$$\widetilde{\mu}(\lambda) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx}$$

と定めると、(3.11) は $0 < \widetilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) < \epsilon$ と書き直される。(2.28) より、$\mu_1(\lambda) \le \widetilde{\mu}(\lambda)$ である。補題 3.4 より $\mu_1(\overline{\lambda}) \le \mu_1(\lambda)$ である。したがって、$0 < \overline{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば、$0 \le \mu_1(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) \le \widetilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) < \epsilon$ となる。以上より、$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\overline{\lambda})$ である。

2. 補題 2.13 および 1. より、$\mu_1(\overline{\lambda}) \ge 1$ である。$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ を背理法を用いて示す。

$\mu_1(\overline{\lambda}) > 1$ であると仮定する。$\Phi\colon [0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を (2.1) の通りに定める。(2.2) より、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})w = -\Delta w + aw - bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}w. \tag{3.12}$$

となる。

ここで、$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})$ が可逆であることを示す。$f \in H^{-1}(\Omega)$ とする。 ■

命題 3.6. $b > 0$ in Ω と仮定する。$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ に限る。

証明 (定理 1.2). 命題 3.3.1 と命題 3.6 からしたがう。 ■

4 second solution の存在 1 — 命題 4.4 の証明

4.1 second solution を求めるための方針

本節と次節で、定理 1.3 を証明する。本節と次節を通し、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ を考察するために、以下の記号をおく。

記号 4.1. 1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ を定義域とする実数値関数 g, G を以下の通りに定める。

$$g(t,s,x) = b(x)\left((t_+ + s)^p - s^p\right) - at_+, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} G(t,s,x) &= \int_0^{t_+} g(t,s,x)dt \\ &= b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t_+ + s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t_+\right) - \frac{1}{2}a(x)t_+^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$g(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $g(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する。$G(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $G(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する。

2. $I_\lambda\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ を以下の通りに定める。

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 dx - \int_\Omega G(v, \underline{u}_\lambda)dx. \tag{4.3}$$

I_λ のフレッシェ微分を I'_λ と表記する。

$(\heartsuit)_\lambda$ の考察を始める前に、$(\spadesuit)_\lambda$ と $(\heartsuit)_\lambda$ の関係、および、$(\heartsuit)_\lambda$ と I_λ の関係を明らかにする。

補題 4.2. 1. 以下の (1), (2) は同値である。

(1) $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

(2) $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

2. $v \in H_0^1(\Omega)$ は (4.3) で定まる I_λ の臨界点であると仮定する。このとき、v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である。

ここで次の記号を置く。

記号 4.3. $V \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする。

$$S = \inf_{u \in H_0^1(V), u \not\equiv 0} \frac{\|Du\|_{L^2(V)}^2}{\|u\|_{L^{p+1}(V)}^2} \tag{4.4}$$

と定める。

S は V には依存しないことが知られている。例えば [田中 08] の定理@@@@@@を参照されたい。

次の 2 つの命題を証明することにより、定理 1.3 を証明する。

命題 4.4. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。$v \geq 0$ in Ω、$v_0 \not\equiv 0$、かつ、

$$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_0) < \frac{1}{NM_1^{(N-2)/2}} S^{N/2} \tag{4.5}$$

をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在することを仮定する。このとき、$(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

命題 4.5. 定理 1.3 の仮定のもとで、$v_0 \geq 0$ in Ω、$v_0 \not\equiv 0$、および、(4.5) をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

命題 4.4 の証明は本節、命題 4.5 の証明は次節でおこなう。

4.2　命題 4.4 の証明

本小節では、命題 4.4 の証明をおこなう。

まずは、以降の議論で使用する積分の極限について議論する。

記号 4.6. 関数 H, h, H', h', G', g' を以下の通りに定める。

$$\begin{aligned}
H(t,s,x) &= G(t,s,x) - \frac{1}{p+1} b(x) t_+^{p+1}, \\
h(t,s,x) &= g(t,s,x) - b(x) t_+^p, \\
H'(t,s,x) &= H(t,s,x) + \frac{1}{2} a(x) t_+^2, \\
h'(t,s,x) &= h(t,s,x) + a(x) t_+ . G'(t,s,x) \qquad &= G(t,s,x) + \frac{1}{2} a(x) t_+^2, \\
g'(t,s,x) &= g(t,s,x) + a(x) t_+ .
\end{aligned}$$

$H(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $H(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する。$h(v, \underline{u}_\lambda)$、$H'(v, \underline{u}_\lambda)$、$h'(v, \underline{u}_\lambda)$、$G'(v, \underline{u}_\lambda)$、$g'(v, \underline{u}_\lambda)$ も全て同様である。

補題 4.7. $v \in H_0^1(\Omega)$ とし、$\{v_k\}_{k=0}^\infty$ を $H_0^1(\Omega)$ の有界列とする。$k \to \infty$ のとき、$v_k \to v\ ae\ tin\Omega$ と仮定する。このとき、$k \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\int_\Omega H(v_k, \underline{u}_\lambda) dx \longrightarrow \int_\Omega H(v, \underline{u}_\lambda) dx, \tag{4.6}$$

$$\int_\Omega h(v_k, \underline{u}_\lambda) v_k dx \longrightarrow \int_\Omega h(v, \underline{u}_\lambda) v_k dx. \tag{4.7}$$

また、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\int_\Omega g(v_k, \underline{u}_\lambda) \psi dx \longrightarrow \int_\Omega g(v, \underline{u}_\lambda) \psi dx \tag{4.8}$$

が成立する。

証明.　まず、(4.6) を証明する。$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列で、v に Ω 上ほとんどいたるところ収束するから、必要ならば部分列をとることにより、$k \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$v_k \rightharpoonup v \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{4.9}$$
$$v_k \longrightarrow v \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \tag{4.10}$$
$$v_k \longrightarrow v \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{4.11}$$

(4.10) より、

$$\int_\Omega \frac{1}{2} a v_k^2 dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{2} a v^2 dx$$

がわかるので、(4.6) を示すためには、

$$\int_\Omega H'(v_k, \underline{u}_\lambda) dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega H'(v, \underline{u}_\lambda) dx \tag{4.12}$$

を示せば十分である。以下 (4.12) を示す。$t, s \geq 0$ のとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} H'(t,s,x) &= b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) \\ &\leq b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) \\ &\leq b(x)\int_0^t \left((\tau+s)^p - \tau^p\right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで、$x \geq 0$ に対し、$x \mapsto x^p$ は下に凸であるから、$(\tau+s)^p - \tau^p \leq p(\tau+s)^{p-1}s$ である。さらに、

$$(\tau+s)^{p-1} \leq (2\max\{\tau, s\})^{p-1} = 2^{p-1}\max\{\tau^{p-1} + s^{p-1}\} \leq C(\tau^{p-1} + s^{p-1}) \tag{4.14}$$

であるから、次が得られる。

$$H'(t,s,x) \leq Cb\int_0^t (\tau^{p-1} + s^{p-1}) s d\tau \leq Cb(t^{p-1}s + s^{p-1}t). \tag{4.15}$$

(4.15) の証明は、[NS07] の Lemma C.4 を参考にした。さらにヤングの不等式を適用すると、任意の $\epsilon > 0$ に対し、$C > 0$ が存在し、$s, t \geq 0$ に対し、$H'(t,s,x) \leq b(\epsilon t^{p+1} + Cs^{p+1})$ が成立する。ゆえに、次式が得られる。

$$|H'(v_k, \underline{u}_\lambda) - H'(v, \underline{u}_\lambda)| \leq b\left(\epsilon(v_\epsilon)_+^{p+1} + \epsilon v_+^{p+1} + C\underline{u}_\lambda^{p+1}\right). \tag{4.16}$$

そこで、

$$W_{\epsilon,k} = \left(|H'(v_k, \underline{u}_\lambda) - H'(v, \underline{u}_\lambda)| - \epsilon b(v_k)_+^{p+1}\right)_+ \tag{4.17}$$

とおくと、$k \to \infty$ のとき、$W_{\epsilon,k} \to 0$ a.e. in Ω である。また、(4.16) より、$|W_{\epsilon,k}| \leq b\left(\epsilon v_+^{p+1} + C\underline{u}_\lambda^{p+1}\right)$ であり、この右辺は可積分である。したがって、優収束定理により、

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega W_{\epsilon,k}(x) dx = 0$$

である。さて、$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列であった。$H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ のソボレフ不等式も考慮すると、

$$\int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx \leq C$$

をみたす k によらない $C > 0$ が存在する。(4.17) より、

$$\int_\Omega |H(v_k, \underline{u}_\lambda) - H(v, \underline{u}_\lambda)|\, dx \leq \int_\Omega W_{\epsilon,k}(x) dx + \epsilon \int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx$$

であるから、$k \to \infty$ の上極限をとると、次式が得られる。

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |H(v_k, \underline{u}_\lambda) - H(v, \underline{u}_\lambda)|\, dx \le C\epsilon$$

$C > 0$ は k, ϵ によらず、$\epsilon > 0$ は任意であるから、このことは

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |H(v_k, \underline{u}_\lambda) - H(v, \underline{u}_\lambda)|\, dx = 0$$

と同値である。ゆえに (4.6) が成立する。以上の証明は、直接は [NS12] の Lemma 3.1 を参考にしているが、 [BL83] のアイデアを参考にした。

(4.7) も (4.6) と同様に証明される。(4.7) を示すためには、やはり

$$\int_\Omega h'(v_k, \underline{u}_\lambda) v_k dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega h'(v, \underline{u}_\lambda) v dx$$

を示せば十分である。$t, s \ge 0$ に対し、

$$h(t, s, x)t \le Cb(x)(t^p s + s^p t)$$

がしたがうため、(4.7) と同様に (4.6) も得られる。

最後に (4.8) を証明する。(4.9) より、

$$\int_\Omega a v_k \psi dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega a v \psi dx$$

であるから、(4.8) を示すためには、

$$\int_\Omega g'(v_k, \underline{u}_\lambda) \psi dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega g'(v, \underline{u}_\lambda) \psi dx$$

を示せば十分である。(4.13)、(4.14) と同様にすれば、$s, t, r \ge 0$ に対し、次式がしたがう。

$$g'(t, s, x)r = b(x)\left((t+s)^p - s^p\right) r \le Cb(x)\left(t^p r + s^p r\right).$$

ヤングの不等式を 2 回使用すると、$\epsilon > 0$ に対し、$C, C' > 0$ が存在し、$s, t, r \ge 0$ に対し、

$$t^p r + s^p r \le \epsilon t^{p+1} + C r^{p+1} + s^p r \le \epsilon t^{p+1} + C'(r^{p+1} + s^{p+1})$$

が成立する。ゆえに、g' は

$$g'(t, s, x)r \le b\left(\epsilon t^{p+1} + C(r^{p+1} + s^{p+1})\right)$$

と評価される。したがって、次式が成立する。

$$|g'(v_k, \underline{u}_\lambda)\psi - g'(v, \underline{u}_\lambda)\psi| \le b\left(\epsilon (v_\epsilon)_+^{p+1} + \epsilon v_+^{p+1} + C(\underline{u}_\lambda^{p+1} + |\psi|^{p+1})\right).$$

そこで、$\widetilde{W}_{\epsilon,k}$ を

$$\widetilde{W}_{\epsilon,k} = \left(|g'(v_k, \underline{u}_\lambda)\psi - g'(v, \underline{u}_\lambda)\psi| - \epsilon b(v_k)_+^{p+1}\right)_+$$

と定める。以降は、(4.6) の証明と同様に、(4.8) が示される。 ■

命題 4.4 を証明には、(PS) 条件を課さない峠の定理 [AR73] を使用する。その後、I_λ の $(\mathrm{PS})_c$ 条件が必要となる。I_λ の $(\mathrm{PS})_c$ 条件を調べる準備として、I_λ についてのパレ・スメイル列が $H_0^1(\Omega)$ の有界列であることを証明する。

補題 4.8. $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ は、I_λ についてのパレ・スメイル列であるとする。すなわち、

証明.

補題 4.8 を用いて、I_λ の $(\mathrm{PS})_c$ 条件を調べる。

補題 4.9. $0 < c < S^{N/2}/NM_1^{(N-2)/2}$ とする。このとき、I_λ は $(\mathrm{PS})_c$ 条件をみたす。すなわち、次の条件 (i), (ii) をみたす $H_0^1(\Omega))$ の点列 $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ は、収束する部分列をもつ。

(i) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} I_\lambda(v_k) = c$、

(ii) $I'_\lambda(v_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ in $H^{-1}(\Omega)$。

証明.

続いて、(PS) 条件を課さない峠の定理の仮定がみたされていることを確認する。

補題 4.10.

命題 4.4 を証明する最後の準備として、次の補題を証明する。

補題 4.11.

証明.

(PS) 条件を課さない峠の定理を用いて、命題 4.4 を証明する。

証明 (命題 4.4).

5 second solution の存在 2 — 命題 4.5 の証明

本節では、命題 4.5 を証明する。本節を通し、定理 1.3 の仮定をおく。必要ならば Ω を平行移動することにより、$p=0$ としてよい。以降 $p=0$ とする。

5.1 タレンティー関数の考察

本小節では、命題 4.5 の証明の鍵となるタレンティー関数を考察する。命題 4.5 の v_0 は、タレンティー関数を加工することにより得られる。そこで本小節では、次小節で必要となる具体的計算を実行する。

まずは、タレンティー関数を定義する。

定義 5.1. **タレンティー関数** $U\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N-2)/2}}$$

と定める。

U について、以下の事実が知られている。

補題 5.2 ([Tal76]). タレンティー関数 U について、次式が成立する。

$$S = \frac{\|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}}. \tag{5.1}$$

すなわち、(4.4) の右辺の下限は、$V=\mathbb{R}^N$ のとき、U により達成される。

記号 5.3. Ω 上の cut off function η を、$\eta \in C_c^\infty(\Omega)$、$0\le\eta\le 1$ in Ω、$\{|x|\le r_0\}$ 上 $\eta\equiv 1$、$\{|x|\ge 2r_0\}$ 上 $\eta\equiv 0$ となるものとする。$\epsilon>0$ とする。Ω 上の関数 u_ϵ, v_ϵ を、

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}, \tag{5.2}$$

$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \tag{5.3}$$

と定める。

さて、[BN83] の p. 444 より、次式が成立する。

$$\|Du_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\, \epsilon^{-(N-2)/2} + O(1). \tag{5.4}$$

次に、$\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$ を考察する。

$$\int_\Omega bu_\epsilon^{p+1}dx = \int_\Omega \frac{b(x)\eta(x)^{p+1}}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx = O(1) + \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{b(x)}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx.$$

最左辺の積分を I とおく。ここで q と N の大小により場合分けをする。

$q<N$ のとき：変数変換により、

$$I = \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{M_1 - M_2|x|^q}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx = \frac{M_1}{\epsilon^{N/2}} \int_{\{|x|<r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx - \frac{M_2}{\epsilon^{(N-q)/2}} \int_{\{|x|<r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^q}{(1+|x|^2)^N}dx$$

である。第 1 項の積分を $I_1(\epsilon)$、第 2 項の積分を $I_2(\epsilon)$ とおく。$\epsilon \searrow 0$ のとき、$I_1(\epsilon) \to \|U\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}$ である。$q<N$ であるから、$I_2(\epsilon)$ は有限の値に収束する。

$$\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = \frac{M_1^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)/2}} I_1(\epsilon)^{1/(p+1)} - \frac{M_2^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)(N-q)/2N}} I_2(\epsilon)^{1/(p+1)} + O(1)$$

であるから、(5.4) および (5.1) より、

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{\|Du_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}} = \frac{\|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{M_1^{2/(p+1)}\,\|U\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}} = \frac{S}{M_1^{2/(p+1)}} \tag{5.5}$$

と計算される。すなわち、次式がしたがう。

$$\|v_\epsilon\|^2 = \|Dv_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{S}{M^{2/(p+1)}} + O(\epsilon^{(N-2)/2}). \tag{5.6}$$

$q=N$ のとき：極座標変換をすると、次式が得られる。

$$\int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx = \mathrm{vol}(S^{N-1}) \int_0^{r_0} \frac{r^N}{(\epsilon+r^2)^N} r^{N-1}dr = O(|\log\epsilon|).$$

ここで $\mathrm{vol}(S^{N-1})$ は半径 1 の $(N-1)$ 次元球面の体積である。ゆえに、(5.5)、(5.6) が同様にしたがう。

$q>N$ のとき：

$$\int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx < \int_{\{|x|<r_0\}} |x|^{q-2N}dx < \infty$$

であるから、最右辺は $O(1)$ である。ゆえに、やはり (5.5)、(5.6) がしたがう。いずれの場合でも、

$$\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = O(\epsilon^{-(N-2)/2}) \tag{5.7}$$

である。

次に、

$$\int_\Omega au_\epsilon^2dx = O(1) + \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{m_1 + m_2|x|^{q'}}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}dx$$

を考察する。I_1, I_2 を

$$I_1 = \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}dx,$$

$$I_2 = \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^{q'}}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}dx$$

とおく。[BN83] の p. 444 より、次式が成立する。

$$I_1 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-4)/2}) & (n \geq 5), \\ O(|\log \epsilon|) & (n = 4), \\ O(1) & (n = 3). \end{cases}$$

I_2 を、N と $q' + 4$ の大小で場合分けして計算する。

<u>$N > q' + 4$ のとき</u>：変数変換により、

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon^{(N-q'-4)/2}} \int_{\{|x|<r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^{q'}}{(1+|x|^2)^{N-2}} dx$$

である。右辺の積分を $I(\epsilon)$ とおく。$N > q'+4$ であるから、$\epsilon \searrow 0$ のとき、$I(\epsilon)$ は収束する。よって、$I_1 = O(\epsilon^{-(N-q'-4)/2})$ である。

<u>$N = q' + 4$ のとき</u>：極座標変換により、

$$I_2 = \mathrm{vol}(S^{N-1}) \int_0^{r_0} \frac{|x|^{N-4}}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} r^{N-1} dr = O(|\log \epsilon|)$$

と計算される。

<u>$N < q' + 4$ のとき</u>：

$$I_2 < \int_{\{|x|<r_0\}} |x|^{q'-2(N-2)} dx < \infty$$

であるから、$I_2 = O(1)$ である。

よって、$\epsilon \searrow 0$ のときの I_2 の挙動は次の通りにまとめられる。

$$I_2 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-q'-4)/2}) & (N > q'+4), \\ O(|\log \epsilon|) & (N = q'+4), \\ O(1) & (N < q'+4). \end{cases}$$

以上の結果と、(5.7) より、以下が成立する。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a v_\epsilon^2 dx = O(1) + m_1 I_1' + m_2 I_2', \\ \qquad I_1' = \begin{cases} O(\epsilon) & (N \geq 5), \\ O(\epsilon|\log \epsilon|) & (N = 4), \\ O(\epsilon^{1/2}) & (N = 3), \end{cases} \\ \qquad I_2' = \begin{cases} O(\epsilon^{1+q'/2}) & (N > q'+4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2}|\log \epsilon|) & (N = q'+4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2}) & (N < q'+4). \end{cases} \end{cases} \tag{5.8}$$

5.2　命題 4.5 の証明

本小節では、補題を積み重ね、命題 4.5 に証明を与える。

補題 5.4.　$\tau_\epsilon = \|v_\epsilon\|^{2/(p-1)}$ とする。このとき、次式が成立する。

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{N M_1^{(N-2)/2}} S^{N/2}. \tag{5.9}$$

証明.　(5.3) より、

$$\int_\Omega b v_\epsilon^{p+1} dx = 1$$

であるから、$t \geq 0$ に対し、次式が得られる。

$$I_\lambda(t v_\epsilon) = \frac{1}{2} t^2 \|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1} t^{p+1} - \int_\Omega H(t v_\epsilon, \underline{u}_\lambda) dx.$$

したがって、次式が成立する。

$$I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{N}\left(\|v_\epsilon\|^2\right)^{N/2} - \int_\Omega H(\tau_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx.$$

(5.6) より、以下がしたがう。

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\tau_\epsilon = \frac{S^{1/(p-1)}}{M_1^{2/(p+1)(p-1)}},$$
$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{N}\left(\|v_\epsilon\|^2\right)^{N/2} = \frac{1}{NM_1^{(N-2)/2}}S^{N/2}.$$

$\epsilon\searrow 0$ のとき、$\tau_\epsilon v_\epsilon \to 0$ a. e. in Ω である。ゆえに、補題 4.7 より、次式が成立する。

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\Omega H(\tau_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx = 0.$$

以上より、(5.9) を得る。 ■

補題 5.5.　$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon)$ を達成する $t>0$ が存在する。

証明.　補題 4.11 より、$t\to\infty$ のとき、$I_\lambda(tv_\epsilon)\to -\infty$ となる。したがって、ある $K>0$ が存在し、$K<t$ においては、$I_\lambda(tv_\epsilon)<0$ となる。また、$I_\lambda(0)=0$ である。ゆえに、$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon) = \sup_{t\in[0,K]} I_\lambda(tv_\epsilon)$ となる。$I_\lambda(tv_\epsilon)$ は t についての連続関数であるから、$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon)$ を達成する $t>0$ が存在する。 ■

記号 5.6.　補題 5.5 の t を t_ϵ とかく。$t_\epsilon>0$ であり、次式が成立する。

$$I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) = \sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon). \tag{5.10}$$

補題 5.7.　$\epsilon_0>0$ と $C>0$ が存在し、$0<\epsilon<\epsilon_0$ に対し、

$$\int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx \geq C\epsilon^{(N-2)/4} \tag{5.11}$$

が成立する。

証明.　まず、次式を背理法を用いて証明する。

$$\liminf_{\epsilon\searrow 0} t_\epsilon > 0. \tag{5.12}$$

(5.12) を否定し、$\liminf_{\epsilon\searrow 0} t_\epsilon = 0$ であることを仮定する。$s,t\geq 0$ に対し、$G(s,t)\geq 0$ である。そこで、

$$I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{2}t_\epsilon^2\|v_\epsilon\|^2 - \int_\Omega G(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx \leq \frac{1}{2}t_\epsilon^2\|v_\epsilon\|^2 \tag{5.13}$$

において、$\epsilon\searrow 0$ における下極限をとると、

$$\liminf_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \leq 0 \tag{5.14}$$

がしたがう。一方で、(5.10) より $I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon)\geq I(\tau_\epsilon v_\epsilon)$ であるから、補題 5.4 より、

$$\liminf_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \geq \lim_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{NM_1^{(N-2)/2}}S^{N/2} > 0. \tag{5.15}$$

(5.14) と (5.15) は同時に成立しない。よって、背理法により、(5.12) がしたがう。

さて、(5.12) と (5.7) より、$\epsilon_0>0$、$C>0$ が存在し、$0<\epsilon<\epsilon_0$ のとき、$|x|<r_0$ に対し、

$$t_\epsilon v_\epsilon(x) = t_\epsilon\frac{\eta(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \geq \frac{C\epsilon^{(N-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}} \tag{5.16}$$

が成立する。必要ならば $\epsilon_0>0$ を小さくとりなおし、$\sqrt{\epsilon_0}<r_0$ が成立するとして良い。すると、$|x|<\sqrt{\epsilon}$ に対し、

$$t_\epsilon v_\epsilon(x) \geq C_0\epsilon^{-(N-2)/2} \tag{5.17}$$

となる。$C_0 > 0$ は ϵ によらない。この C_0 について、

$$t_0 = C_0 \epsilon_0^{-(N-2)/2} \tag{5.18}$$

と定める。$\underline{u}_\lambda > 0$ in Ω であるから、$\{|x| \leq \sqrt{\epsilon_0}\}$ における $\underline{u}_\lambda$ の最小値より小さい正の数 s_0 が存在する。すなわち、$|x| < \sqrt{\epsilon_0}$ に対し、

$$\underline{u}_\lambda(x) > s_0 \tag{5.19}$$

となる。

ここで、$x \in \Omega$、$t \geq t_0$、$s \geq s_0$ に対し、

$$H'(t, s, x) \geq Cb(x)t^p \tag{5.20}$$

を成り立たせる t, s, x によらない定数 $C > 0$ が存在することを示す。$s, t \geq 0$ に対し、

$$H'(t, s, x) = b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right)$$

である。そこで s についての偏導関数は、

$$H'_s(t, s, x) = b(x)\left((t+s)^p - s^p - ps^{p-1}t\right)$$

である。右辺はテイラーの定理より、$0 < \theta < 1$ を用いて $p(p-1)(s+\theta t)^{p-2}t^2/2$ と表される。これは非負であるから、$H'_s(t, s, x) \geq 0$ である。すなわち、H' は s についての増加関数である。したがって、$s \geq s_0$、$t \geq 0$ に対し、

$$H'(t, s, x) \geq H'(t, s_0, x) \tag{5.21}$$

である。また、$s \geq 0$、$t \geq 0$ に対し、

$$H'(t, s, x) \geq H'(t, 0, x) = 0 \tag{5.22}$$

もわかる。ここでテイラーの定理より、

$$\frac{1}{p+1}(t+s_0)^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1} = (t+\theta s_0)^p s_0$$

をみたす $0 < \theta < 1$ が存在する。ゆえに $t \geq t_0$ に対し、以下がしたがう。

$$\begin{aligned}
H'(t, s_0, x) &\geq b(x)\left((t+\theta s_0)^p s_0 - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right) \\
&\geq b(x)\left(t^p s_0 - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right) \\
&= t^p b(x)\left(s_0 - \frac{1}{p+1}\frac{1}{t^p} - s^p\frac{1}{t^{p-1}}\right) \\
&\geq t^p b(x)\left(s_0 - \frac{1}{p+1}\frac{1}{t_0^p} - s^p\frac{1}{t_0^{p-1}}\right).
\end{aligned}$$

ここで最右辺の括弧の中が正となるよう、必要ならば $\epsilon_0 > 0$ を小さくとりなおす。s_0 と C_0 は ϵ_0 によっているが、$|x| < \sqrt{\epsilon_0}$ に対して (5.17) および (5.19) を成り立たせるために s_0 と C_0 は変更する必要がないことに注意されたい。(5.18) により、最右辺の括弧の中が正となるよう、t_0 を大きくすることができる。以上により、$t \geq t_0$ に対し、

$$H'(t, s_0, x) \geq Cb(x)t^p \tag{5.23}$$

が成立する。(5.21) と (5.23) より、$t \geq t_0$、$s \geq s_0$ に対し、(5.20) がしたがう。

(5.22)、(5.20)、(5.16) を順に使うと、$0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対し、以下が成立する。

$$\begin{aligned}\int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx &\geq \int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx \\ &\geq C\int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} b(x)(t_\epsilon v_\epsilon)^p dx \\ &\geq C\int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} (M_1 + M_2(\sqrt{\epsilon})^q)\left(\frac{\epsilon^{(N-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\right)^p dx \\ &\geq C\int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} \left(\frac{\epsilon^{(N-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\right)^p dx \\ &= C\epsilon^{(N-2)/4}\int_{\{|y|\leq 1\}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N+2)/2}}dx \\ &\geq C\epsilon^{(N-2)/4}.\end{aligned}$$

$C > 0$ は ϵ によらない。所望の (5.11) が得られた。 ■

証明 (命題 4.5).　(5.10) より、以下が成立する。

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon) &= I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \\ &= \frac{1}{2}t_\epsilon^2 \|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t_\epsilon^p - \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx + \int_\Omega av_\epsilon^2 dx \\ &\leq \sup_{t>0}\left(\frac{1}{2}t^2\|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) - \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx + \int_\Omega av_\epsilon^2 dx \\ &= \frac{1}{N}\left(\|v_\epsilon\|^2\right)^{N/2} - \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx + \int_\Omega av_\epsilon^2 dx.\end{aligned}$$

ここで、最後の変形では、$t > 0$ の関数

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}t^2\|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t^{p+1}$$

が、$t = \|v_\epsilon\|^{2/(p-1)}$ において最大値をとることに注意した。(5.6)、(5.8)、補題 5.4、補題 5.7 により、$\epsilon_0 > 0$、$C, C' > 0$ が存在し、$0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対し、

$$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon) \leq \frac{1}{NM_1^{(N-2)/2}}S^{N/2} + \left(C\epsilon^{(N-2)/2} - C'\epsilon^{(N-2)/4} + m_1 I_1' + m_2 I_2'\right) \tag{5.24}$$

が成立する。ここで I_1'、I_2' は、(5.8) のものである。以下の条件を考える。

$$\text{(5.24) の右辺の括弧の中が負となる } \epsilon > 0 \text{ が存在する。} \tag{5.25}$$

(5.25) が成立するならば、その ϵ を用いて $v_0 = v_\epsilon$ とすると、$v_0 \geq 0$ in Ω、$v_0 \not\equiv 0$、および (4.5) が成立する。以下、m_1, m_2 の正負で場合分けして検証する。すべての $N \geq 3$、$q' > 0$ に対し、$\epsilon \searrow 0$ のとき $I_1' \gg I_2'$ であることに注意されたい。

(i)　$\underline{m_1 < 0 \text{ のとき}}$：$\epsilon \searrow 0$ のとき $\epsilon^{(N-2)/2} \ll \epsilon^{(N-2)/4}$ であるから、すべての $N \geq 3$ について、(5.25) はみたされる。

(ii)　$\underline{m_1 > 0 \text{ のとき}}$：$\epsilon \searrow 0$ のとき $I_1' \ll \epsilon^{(N-2)/4}$ となれば、(5.25) はみたされる。(5.8) より、$N = 3, 4, 5$ であれば (5.25) はみたされる。

(iii)　$\underline{m_1 = 0\text{、}m_2 < 0 \text{ のとき}}$：(i) と同様に、すべての $N \geq 3$ について、(5.25) はみたされる。

(iv)　$\underline{m_1 = 0\text{、}m_2 > 0 \text{ のとき}}$：$\epsilon \searrow 0$ のとき $I_2' \ll \epsilon^{(N-2)/4}$ となれば、(5.25) はみたされる。(5.8) より、$N \leq q' + 4$ のときは、この式は成立している。$N > q' + 4$ のとき、この式が成立する条件は、

$$1 + \frac{q'}{2} > \frac{N-2}{4}$$

である。これを変形して、$N < 2q' + 6$ を得る。以上により、$3 \leq N < 2q' + 6$ のとき、(5.25) はみたされる。 ■

証明 (定理 1.3).　命題 4.4 と命題 4.5 より成立する。 ■

6 $N \geq 6$

7 $N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献

[AR73] Antonio Ambrosetti and Paul H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, Vol. 14, pp. 349–381, 1973.

[BL83] Haïm Brézis and Elliott Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 88, No. 3, pp. 486–490, 1983.

[BN83] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 36, No. 4, pp. 437–477, 1983.

[NS07] Yūki Naito and Tokushi Sato. Positive solutions for semilinear elliptic equations with singular forcing terms. *J. Differential Equations*, Vol. 235, No. 2, pp. 439–483, 2007.

[NS12] Yūki Naito and Tokushi Sato. Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 191, No. 1, pp. 25–51, 2012.

[Tal76] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 110, pp. 353–372, 1976.

[Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[田中 08] 田中和永. 変分問題入門 — 非線形楕円型方程式とハミルトン系. 岩波書店, 2008.