Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1　概要

N を 3 以上の自然数とする。$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。$p = (N+2)/(N-2)$ とする。$f \in H^{-1}(\Omega)$ は、$f \geq 0$、$f \not\equiv 0$ をみたすとする。$a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。$\kappa > -\kappa_1$ が存在して、$a \geq \kappa$ となると仮定する。また、$b \geq 0$、$b \not\equiv 0$ と仮定する。$\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\spadesuit$}_\lambda$$

定理 1.1.　$(\spadesuit)_\lambda$ には minimal solution が存在する。

定理 1.2.　$(\spadesuit)_\lambda$ には extremal solution が存在する。とくに、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution が存在する。また、$b > 0$ in Ω ならば、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution に限る。

定理 1.3.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。b は Ω 上のある点 p で最大値 $M_1 = \|b\|_{L^\infty}(\Omega) > 0$ を達成するものと仮定する。$r_0 > 0$ が存在し、$\{|x-p| < 2r_0\} \subset \Omega$、かつ、$\{|x-p| < r_0\}$ 上

$$b(x) = M_1 - M_2|x-p|^q,$$
$$a(x) = m_1 + m_2|x-p|^{q'}$$

であると仮定する。ここで $q, q' > 0$、$M_2 > 0$、$m_1 > \kappa$、$m_2 \neq 0$ は定数である。さらに、以下の (i) – (iv) のいずれかの成立を仮定する。

(i)　$m_1 < 0$、かつ、$N \geq 3$。
(ii)　$m_1 > 0$、かつ、$N = 3, 4, 5$。
(iii)　$m_1 = 0$、かつ、$m_2 < 0$、かつ、$N \geq 3$。
(iv)　$m_1 = 0$、かつ、$m_2 > 0$、かつ、$3 \leq N < 6 + 2q'$。

このとき、$(\spadesuit)_\lambda$ は、minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ をもつ。

1.1　記号

ルベーグ空間を $L^q(\Omega)$ $(1 \leq q \leq \infty)$ と表記する。ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する。トレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H_0^1(\Omega)$ と表記する。ヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N}$、$0 < \alpha < 1)$ と表記する。コンパクト台を持つ Ω 上の C^∞ 級関数全体を $C_c^\infty(\Omega)$ と表記する。

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する。ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する。$H_0^1(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記す

る。$f \in H^{-1}$ の $u \in H_0^1(\Omega)$ への作用を $\langle f, u \rangle$ と表記する。$H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|_\kappa$ を、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_\Omega \left(|Dw|^2 + \kappa w^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

と定める。$\kappa > -\kappa_1$、Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。また、$H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |Dw|^2 dx \right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることがしたがう。

2　minimal solution の存在と性質

本節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1.　$\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\spadesuit)_\lambda \text{ の弱解である } \}$$

と定める。

定義 2.2.　$\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、$\underline{u}_\lambda \le u$ in Ω が成立することをいう。

記号 2.3.　$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution を $\underline{u}_\lambda$ と表記する。

2.1　$H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、$\lambda > 0$ が十分小さいときに、$(\spadesuit)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

補題 2.4.　1.　$\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$(\spadesuit)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

2.　さらに、$f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の弱解 u_λ は、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

証明.　1.　$\Phi\colon [0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \tag{1}$$

とする。Φ の u についてのフレッシェ微分は、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\Phi_u(\lambda, u)\colon w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1} w. \tag{2}$$

と書かれる。特に、

$$\Phi_u(0,0)w = -\Delta w + aw.$$

が成立する。$a > -\kappa_1$ により、$\Phi_u(0,0)\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、$\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一つ存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、u_λ は、以下の方程式の弱解である。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$ であり、$a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、$u_\lambda > 0$ in Ω が成立する。よって、u_λ は $(\spadesuit)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき、$\Phi\colon [0,\infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0$ $(\lambda \searrow 0)$ が示される。 ■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 5 で使用する。

2.2　優解との関係

続いて、ある $\lambda = \widehat{\lambda}$ で $(\spadesuit)_\lambda$ が優解をもつときに、$0 < \lambda \leq \widehat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す。

補題 2.5. $\widehat{\lambda} > 0$ とする。以下をみたす $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u} + a\widehat{u} \geq b\widehat{u}^p + \widehat{\lambda} f & \text{in } \Omega, \\ \widehat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4}$$

このとき、$\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ に対し、$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が存在する。また、$\underline{u}_\lambda < \widehat{u}$ in Ω が成立する。

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ を、次の通りに帰納的に定める。$u_0 \equiv 0$ とする。u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(5) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、$u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、$u_n^p \subset L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。$b \in L^\infty(\Omega)$、$f \in H^{-1}(\Omega)$ より、$bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。$a > -\kappa_1$ と合わせて、(5) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、n についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \text{ in } \Omega. \tag{6}$$

$n = 0$ のときは、$\widehat{u} > 0$ in Ω であることから、(6) が成立する。$n \in \mathbb{N}$ とする。n における (6) の成立を仮定し、$n+1$ における (6) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、$u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{u} + a\widehat{u} &> b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、$\widehat{u} > u_{n+1}$ in Ω もしたがう。以上により、(6) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について (6) の成立が示された。

続いて、$\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す。u_{n+1} は (5) の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx = \int_\Omega bu_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx \tag{7}$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2)dx = \int_\Omega bu_n^p u_{n+1}dx + \lambda \int_\Omega fu_{n+1}dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \le \int_\Omega b\widehat{u}^{p+1}dx + \lambda \int_\Omega f\widehat{u}dx < \infty. \tag{8}$$

ここで $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \ge \int_\Omega \left(|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2\right) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{9}$$

もわかる。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。したがって、(8) および (9) より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \ \ \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{10}$$
$$u_n \longrightarrow u \ \ \text{in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1),$$
$$u_n \longrightarrow u \ \ \text{a.e. in } \Omega. \tag{11}$$

ここで u が $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であることを示す。(10) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx.$$

また、$b \in L^\infty(\Omega)$、$\widehat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n\psi| \le b\widehat{u}^p|\psi| \ \ \text{a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(11) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって、(7) で $n \to \infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx. \tag{12}$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解である。

最後に、u は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であることを示す。$\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解とする。このとき、(6) と同様の議論により、$\widetilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。$n \to \infty$ として、$\widetilde{u} \ge u$ in Ω となる。よって u は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution である。 ■

補題 2.5 から、次の事実がしたがう。

補題 2.6. 1. $\lambda_0 > 0$ が存在して、$S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ とする。このとき、$0 < \lambda < \lambda_0$ に対し、$S_\lambda \neq \emptyset$ となる。

2. $\lambda > 0$ とする。$S_\lambda \neq \emptyset$ ならば、$(\spadesuit)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が存在する。
3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ とする。$S_{\lambda_1} \neq \emptyset$、$S_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば、$\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
4. 補題 2.4 における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解を u_λ とする。このとき、$u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である。

証明. 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。$\widehat{u} = u_{\lambda_0}$ とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。

2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする。$\widehat{u} = u_\lambda$ として補題 2.5 を適用すると、$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が得られる。
3. $\widehat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として、補題 2.5 (6) を適用すると、$\underline{u}_{\lambda_1} \le \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる。

$$-\Delta\underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} = b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f,$$
$$-\Delta\underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} = b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2}-\underline{u}_{\lambda_1})+a(\underline{u}_{\lambda_2}-\underline{u}_{\lambda_1})=b(\underline{u}^p_{\lambda_2}-\underline{u}_{\lambda_2})+(\lambda_2-\lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、$a>-\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、$\underline{u}_{\lambda_1}<\underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω がしたがう。

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より、$S_\lambda \neq \emptyset$ である。したがって、2. より、$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ をもつ。よって、(12) で $u=\psi=\underline{u}_\lambda$ とおくと、以下が得られる。

$$\int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2+a|\underline{u}_\lambda|^2\right)dx=\int_\Omega b\underline{u}^p_\lambda dx+\lambda\int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx. \tag{13}$$

ここで、minimal solution の $H^1_0(\Omega)$ ノルムが、$\lambda\searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((13)\text{ の左辺})\geq\int_\Omega\left(|D\underline{u}_\lambda|^2+\kappa|\underline{u}_\lambda|^2\right)dx\geq C\left\|\underline{u}_\lambda\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|^2_\kappa$ であり、$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ と同値であるから、$C>0$ は $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、$\underline{u}_\lambda\leq u_\lambda$ in Ω より、次がしたがう。

$$\begin{aligned}((13)\text{ の右辺})&\leq\int_\Omega b\underline{u}^{p+1}_\lambda dx+\lambda\int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx\\&\leq\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|u_\lambda\right\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}+\lambda\left\|f\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\left\|u_\lambda\right\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq C'\left\|u_\lambda\right\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}+C''\left\|u_\lambda\right\|_{H^1_0(\Omega)}\end{aligned}$$

ここで、$C',C''>0$ は、$\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C\left\|u\right\|_{H^1_0(\Omega)}\leq C'\left\|u_\lambda\right\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}+C''\left\|u_\lambda\right\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

補題 2.4 より、$\lambda\searrow 0$ のとき、$\|u_\lambda\|_{H^1_0(\Omega)}\searrow 0$ が成立する。ゆえに、$\|\underline{u}_\lambda\|_{H^1_0(\Omega)}\searrow 0$ となる。再び補題 2.4 によると、$\lambda>0$ が十分小さいとき、u_λ は $(\spadesuit)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda=\underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

2.3　解が存在する λ の有界性

補題 2.4 により、$\lambda>0$ が存在して、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.6 により、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ が見つかれば、それより小さい λ については、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。そこで、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.7.　$\overline{\lambda}=\sup\{\lambda\geq 0\mid S_\lambda\neq\emptyset\}$ と定める。

ここから先は、$\overline{\lambda}<\infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、$\lambda>0$ によらない $H^1_0(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。

記号 2.8.　$g_0\in H^1_0(\Omega)$ を

$$\begin{cases}-\Delta g_0+ag_0=f & \text{in }\Omega,\\ \qquad\quad g_0=0 & \text{on }\partial\Omega\end{cases} \tag{14}$$

の唯一の弱解と定める。

g_0 について、次の補題を示す。

補題 2.9.　固有値問題

$$-\Delta\phi+a\phi=\mu b(g_0)^{p-1}\phi\text{ in }\Omega,\quad \phi\in H^1_0(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、$\mu_1>0$ である。また、μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1>0$ in Ω をみたすものがある。

証明.　μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{15}$$

と特徴付けられる。また、(15) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(15) より、以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ が存在する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx = 1, \tag{16}$$

$$\int_\Omega \left(|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2\right) dx \searrow \mu_1. \tag{17}$$

$a > \kappa$ であるから、(17) の左辺は $\|\psi_n\|_\kappa^2$ 以下である。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから、$\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{18}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \tag{19}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{20}$$

(18) より、$H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から、次が成立する。

$$\liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

ゆえに、(19) と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx. \tag{21}$$

また、ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、$H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である。したがって、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である。よって、必要なら部分列をとると、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる。一方 (20) から、$\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する。したがって、次が成立する。

$$\psi_n^2 \rightharpoonup \phi_1^2 \quad \text{weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より、$b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である。$\left(L^{N/(N-2)}(\Omega)\right)^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より、次が成立する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx. \tag{22}$$

(22) の証明は、[Wil96] の Lemma 2.13 によった。(21) と (22) により、次がしたがう。

$$\mu_1 \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx}. \tag{23}$$

(15) により、(23) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(15) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される。よって $\mu_1 > 0$ である。

(15) の右辺の形から、ϕ_1 が (15) の右辺の下限を達成するならば、$|\phi_1|$ も下限を達成する。すなわち、$\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第 1 固有関数がある。この ϕ_1 について、次が成立する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ゆえに、強最大値原理により、$\phi_1 > 0$ in Ω となる。　■

g_0 を用いて、次の命題を証明する。

命題 2.10.　$\overline{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。$0 < \overline{\lambda} < \infty$ である。

証明.　補題 2.4 により、$\lambda_0 > 0$ が存在し、$0 < \lambda < \lambda_0$ に対して、$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。ゆえに $\overline{\lambda} > 0$ である。そこで、$\overline{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$ は、$S_\lambda \neq \emptyset$ をみたすものとする。$u \in S_\lambda$ とし、$v = u - \lambda g_0$ とする。このとき、次が成立する。

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって、強最大値原理より、$v > 0$ in Ω である。つまり、$u > \lambda g_0$ in Ω がしたがう。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \text{ in } \Omega. \tag{24}$$

一方、補題 2.9 により、以下が成立する $\mu_1 > 0$、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$、$\phi_1 > 0$ in Ω が存在する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \text{ in } \Omega. \tag{25}$$

そこで、$(24) \times \phi_1 - (25) \times u$ を Ω 上積分すると、次を得る。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1)\int_\Omega b(g_0)^{p-1}u\phi_1 dx.$$

ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$ である。つまり、$\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$ となる。$\lambda > 0$ は $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから、$\overline{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ がしたがう。 ■

証明 (定理 1.1).　命題 2.10 により、

2.4　minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{26}$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

記号 2.11.　$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (26) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく。

補題 2.12.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。このとき、以下が成立する。

1. $\mu_1(\lambda) > 0$ である。また、$\mu_1(\lambda)$ に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものが存在する。
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx \geq \mu_1(\lambda)\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx. \tag{27}$$

証明.　1.　補題 2.9 と同様である。

2.　$\mu_1(\lambda)$ のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1(\lambda) = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{28}$$

から (27) が成立する。 ■

補題 2.12 から即座に、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ ならば $\mu_1(\lambda) > 0$ であることがわかる。次の補題では、方程式 $(\spadesuit)_\lambda$ に着目し、$\mu_1(\lambda)$ についてより多くの情報を引き出す。

補題 2.13.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。このとき、$\mu_1(\lambda) > 1$ である。

証明.　$\widehat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \widehat{\lambda} < \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$z = \underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda$ とおく。補題 2.6.3 より、$z > 0$ in Ω である。

$$-\Delta \underline{u}_{\widehat{\lambda}} + a\underline{u}_{\widehat{\lambda}} = b\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p + \widehat{\lambda} f,$$
$$-\Delta \underline{u}_\lambda + a\underline{u}_\lambda = b\underline{u}_\lambda^p + \lambda f$$

の両辺を引いて、次を得る。

$$-\Delta z + az = b(\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p) + (\widehat{\lambda} - \lambda) f.$$

$x \geq 0$ に対し、$x \mapsto x^p$ は下に凸であるから、次がしたがう。

$$\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p > p\underline{u}_\lambda^{p-1}(\underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda) = p\underline{u}_\lambda^{p-1} z.$$

$(\widehat{\lambda} - \lambda) f \geq 0$ と合わせて、次を得る。

$$-\Delta z + az > bp\underline{u}_\lambda^{p-1} z \quad \text{in } \Omega. \tag{29}$$

$\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ とする。補題 2.12 より、$\phi_1 > 0$ in Ω があって、

$$-\Delta \phi_1 + a\phi_1 = \mu p b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_1 \quad \text{in } \Omega \tag{30}$$

(29) $\times \phi_1 -$ (30) $\times z$ を Ω 上積分すると、

$$0 > (1 - \mu_1) p \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_1 z dx$$

となる。ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$\underline{u}_\lambda, z, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$1 - \mu_1 < 0$ である。つまり $\mu_1 > 1$ である。 ■

2.5　extremal solution の存在

以下では、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ を考察する。

定義 2.14.　$\overline{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解を $(\spadesuit)_\lambda$ の **extremal solution** という。

本小節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在することを示す。このために、まず以下の集合を考察する。

$$K = \{\underline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}. \tag{31}$$

補題 2.15.　(31) の K は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。

証明.　$g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を記号 2.8 のものとする。$v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0$ と定める。すると、次が成立する。

$$-\Delta v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0 \quad \text{in } \Omega.$$

ゆえに、$\psi \in H_0^1(\Omega)$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (Dv_\lambda \cdot D\psi + av_\lambda \psi) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p \psi dx.$$

$\psi = v_\lambda$ とおくと、次を得る。

$$\int_\Omega \left(|Dv_\lambda|^2 + a|v_\lambda|^2\right) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx. \tag{32}$$

ここで、次の事実を示す。任意の $\epsilon > 0$ に対し、$C > 0$ が存在し、任意の $s, t \geq 0$ に対し、次式が成立する。

$$(t+s)^p \leq (1+\epsilon)(t+s)^{p-1} t + Cs^p. \tag{33}$$

まず、$(t+s)^{p-1}s$ にヤングの不等式を用いる。$q, r > 1$ は、$q^{-1} + r^{-1} = 1$ をみたすものとする。任意の $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ に対し、$\widetilde{C} > 0$ が存在し、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \leq \widetilde{\epsilon}\left((t+s)^{p-1}\right)^q + \widetilde{C}s^r.$$

ここで $q = p/(p-1)$ とおくと、$r = p$ である。ゆえに、以下が成立する。

$$\begin{aligned}(t+s)^{p-1}s &\le \widetilde{\epsilon}(t+s)^p + \widetilde{C}s^p \\ &= \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}t + \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}s + \widetilde{C}s^p, \\ (t+s)^{p-1}s &\le \frac{\widetilde{\epsilon}}{1-\widetilde{\epsilon}}(t+s)^{p-1}t + \frac{\widetilde{C}}{1-\widetilde{\epsilon}}s^p.\end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\epsilon = \widetilde{\epsilon}/(1-\widetilde{\epsilon})$ となる $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ は存在する。この $\widetilde{\epsilon}$ に対し、$C = \widetilde{C}/(1-\widetilde{\epsilon})$ とすると、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \le \epsilon(t+s)^{p-1}t + Cs^p.$$

$(t+s)^p = (t+s)^{p-1}s + (t+s)^{p-1}t$ より、(33) が得られる。以上の (33) の証明は [NS07] の Lemma 4.1 によった。

(32) の左辺を I とおく。(33) より、次式が成立する。

$$\int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx \le (1+\epsilon)\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1} v_\lambda^2 dx + C\lambda^p \int_\Omega b g_0^p v_\lambda dx. \tag{34}$$

ここで、補題 2.12.2、補題 2.13 から、次式を得る。

$$I \le \mu_1 p \int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\underline{v}_\lambda^2 dx > p\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\underline{v}_\lambda^2 dx.$$

すなわち、次を得る。

$$\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} v_\lambda^2 dx < \frac{I}{p} \tag{35}$$

また、$g_0, v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$、及び、ヘルダーの不等式、ソボレフの不等式から、次式を得る。

$$\int_\Omega b g_0^p v_\lambda dx \le \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|g_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}^p \|v_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le C\|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le C'\|v_\lambda\|_\kappa. \tag{36}$$

ここで $C, C' > 0$ は λ によらない。

(32)、(35)、(36) から、次式がしたがう。

$$I \le \frac{1+\epsilon}{p} I + \overline{\lambda}^p C\|v_\lambda\|_\kappa.$$

$\epsilon > 0$ を $(1+\epsilon)/p < 1$ となるよう小さくとれば、$I \le C\|v_\lambda\|_\kappa$ となる。ここで $I \ge \|v_\lambda\|_\kappa^2$、$v_\lambda \not\equiv 0$ であるから、$\|v_\lambda\|_\kappa \le C$ である。$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は同値であるから、$\{v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。v_λ の定め方から $\underline{u}_\lambda = v_\lambda + \lambda g_0$ であるため、次の式が成立する。

$$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} + \overline{\lambda}\|g_0\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

右辺は λ によらない定数で抑えられる。従って、(31) の K は、$H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。 ■

$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のときの $\underline{u}_\lambda$ の極限をとることで、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution を構成する。

命題 2.16. 1. $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する。とくに、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する。

2. $\lambda > 0$ とする。$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。

証明. 1. 正の数の列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ は、$\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$u_n = \underline{u}_{\lambda_n}$ とかく。u_n は $\lambda = \lambda_n$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_n \cdot D\psi + au_n\psi)dx = \int_\Omega b u_n^p \psi dx + \lambda\int_\Omega f\psi dx. \tag{37}$$

補題 2.15 より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{38}$$
$$u_n \longrightarrow u \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$
$$u_n \longrightarrow u \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{39}$$

u が $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution であることを示す。(38) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_n \cdot D\psi + au_n\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx.$$

補題 2.6.3 と (39) により、$u_n \leq u$ in Ω となる。とくに、$u > 0$ in Ω である。また、$b \in L^\infty(\Omega)$、$u, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n^p\psi| \leq b\widehat{u}^p|\psi| \quad \text{a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(39) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって、(37) で $n \to \infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \overline{\lambda}\int_\Omega f\psi dx.$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution である。すなわち、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する。補題 2.5.2 より、特に $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する。

2. 補題 2.5.3 より、$u_n = \underline{u}_{\lambda_n} < \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω である。$n \to \infty$ とすると、$u \leq \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω を得る。$u \in S_{\overline{\lambda}}$ であり、$\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ は $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であるから、$u = \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ である。したがって、$n \to \infty$ のとき、$\underline{u}_{\lambda_n} \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。$\{\lambda_n\}$ の任意性により、$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。 ■

2.6 extremal solution の一意性

前小節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution の存在を示した。本小節では、$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が $b > 0$ in Ω のときは唯一つに限ることを示す。

鍵となるのは、(26) の第 1 固有値 $\mu_1(\lambda)$ である。補題 2.13 では、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において $\mu_1(\lambda) > 1$ となることを示した。$b > 0$ in Ω $\lambda = \overline{\lambda}$ において、この不等式が成立しなくなることを示す。

補題 2.17. λ_1, λ_2 は、

補題 2.18. 1. $\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\overline{\lambda})$ である。

2. $b > 0$ in Ω ならば、$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ である。

証明. 1. $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ を、$\mu_1(\overline{\lambda})$ に付随する $\phi_1 > 0$ in Ω をみたす固有関数とする。正の実数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ を λ_n を、$\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする。単調収束定理より、次式が成立する。

$$\int_\Omega bp(\underline{u}_{\lambda_n})^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \quad (n \to \infty).$$

$\{\lambda_n\}$ の任意性より、次式が成立する。

$$\int_\Omega bp(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \quad (\lambda \nearrow \overline{\lambda}). \tag{40}$$

$\epsilon > 0$ とする。(40) より、$\delta > 0$ が存在し、$0 < \overline{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば、

$$0 < \frac{\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx} - \frac{\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\int_\Omega bp(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi_1^2 dx} < \epsilon \tag{41}$$

が成立する。ここで、$\widetilde{\mu}(\lambda)$ を

$$\widetilde{\mu}(\lambda) = \frac{\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx}$$

と定めると、(41) は $0 < \widetilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) < \epsilon$ と書き直される。(28) より、$\mu_1(\lambda) \leq \widetilde{\mu}(\lambda)$ である。補題 2.17 より $\mu_1(\overline{\lambda}) \leq \mu_1(\lambda)$ である。したがって、$0 < \overline{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば、$0 \leq \mu_1(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) \leq \widetilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) < \epsilon$ となる。以上より、$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき、$\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\overline{\lambda})$ である。

2. 補題 2.13 および 1. より、$\mu_1(\overline{\lambda}) \geq 1$ である。$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ を背理法を用いて示す。
$\mu_1(\overline{\lambda}) > 1$ であると仮定する。$\Phi\colon [0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を (1) の通りに定める。(2) より、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})w = -\Delta w + aw - bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}w. \tag{42}$$

となる。

ここで、$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})$ が可逆であることを示す。$f \in H^{-1}(\Omega)$ とする。 ■

命題 2.19. $b > 0$ in Ω と仮定する。$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ に限る。

証明 (定理 1.2). 命題 2.16.1 と命題 2.19 からしたがう。 ■

3 second solution の存在 1 — 命題 3.4 の証明

本節と次節で、定理 1.3 を証明する。本節と次節を通し、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution 以外の解 $\overline{u}_\lambda$ を見出すために、以下の方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta v + av = b\left((v + \underline{u}_\lambda)^p - (\underline{u}_\lambda)^p\right) & \text{in } \Omega, \\ v > 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\heartsuit$}_\lambda$$

方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ を考察するために、以下の記号をおく。

記号 3.1. 1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ を定義域とする実数値関数 g, G を以下の通りに定める。

$$g(t,s,x) = b(x)\left((t_+ + s)^p - s^p\right) at_+, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} G(t,s,x) &= \int_0^{t_+} g(t,s,x)dt \\ &= b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t_+ + s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t_+\right) - \frac{1}{2}a(x)t_+^2. \end{aligned} \tag{44}$$

$g(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $g(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する。$G(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $G(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する。

2. $I_\lambda\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ を以下の通りに定める。

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 dx - \int_\Omega G(v, \underline{u}_\lambda)dx. \tag{45}$$

$(\heartsuit)_\lambda$ の考察を始める前に、$(\spadesuit)_\lambda$ と $(\heartsuit)_\lambda$ の関係、および、$(\heartsuit)_\lambda$ と I_λ の関係を明らかにする。

補題 3.2. 1. 以下の (1), (2) は同値である。

(1) $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

(2) $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

2. $v \in H_0^1(\Omega)$ は (45) で定まる I_λ の臨界点であると仮定する。このとき、v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である。

ここで次の記号を置く。

記号 3.3. $V \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする。

$$S = \inf_{u \in H_0^1(V), u \not\equiv 0} \frac{\|Du\|^2_{L^2(V)}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(V)}} \tag{46}$$

と定める。

S は V には依存しないことが知られている。

次の 2 つの命題を証明することにより、定理 1.3 を証明する。

命題 3.4. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。$v \geq 0$ in Ω、$v_0 \not\equiv 0$、かつ、

$$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_0) <= \frac{1}{NM^{(n-2)/2}} S^{N/2} \tag{47}$$

をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在することを仮定する。このとき、$(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

命題 3.5. 定理 1.3 の仮定のもとで、$v_0 \geq 0$ in Ω、$v_0 \not\equiv 0$、および、(47) をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

命題 3.4 の証明は本節、命題 3.5 の証明は次節でおこなう。

4 second solution の存在 2 — 命題 3.5 の証明

本節では、命題 3.5 を証明する。本節を通し、定理 1.3 の仮定をおく。必要ならば Ω を平行移動することにより、$p = 0$ としてよい。以降 $p = 0$ とする。

4.1 タレンティー関数の考察

本小節では、命題 3.5 の証明の鍵となるタレンティー関数を考察する。命題 3.5 の v_0 は、タレンティー関数を加工することにより得られる。そこで本小節では、次小節で必要となる具体的計算を実行する。

まずは、タレンティー関数を定義する。

定義 4.1. **タレンティー関数** $U \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$U(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{(N-2)/2}}$$

と定める。

U について、以下の事実が知られている。

補題 4.2. タレンティー関数 U について、次式が成立する。

$$S = \frac{\|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}}. \tag{48}$$

すなわち、(46) の右辺の下限は、$V = \mathbb{R}^N$ のとき、U により達成される。

記号 4.3. Ω 上の cut off function η を、$\eta \in C_c^\infty(\Omega)$、$0 \le \eta \le 1$ in Ω、$\{|x| \le r_0\}$ 上 $\eta \equiv 1$、$\{|x| \ge 2r_0\}$ 上 $\eta \equiv 0$ となるものとする。$\epsilon > 0$ とする。Ω 上の関数 u_ϵ, v_ϵ を、

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}},$$
$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{\left\| b^{1/(p+1)} u_\epsilon \right\|_{L^{p+1}(\Omega)}}$$

と定める。

さて、[BN83] の p. 444 より、次式が成立する。

$$\|Du_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \epsilon^{-(N-2)/2} + O(1). \tag{49}$$

次に、$\left\| b^{1/(p+1)} u_\epsilon \right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$ を考察する。

$$\int_\Omega b u_\epsilon^{p+1} dx = \int_\Omega \frac{b(x)\eta(x)^{p+1}}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = O(1) + \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{b(x)}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx.$$

最左辺の積分を I とおく。ここで q と N の大小により場合分けをする。

<u>$q < N$ のとき</u>：変数変換により、

$$I = \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{M_1 - M_2|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = \frac{M_1}{\epsilon^{N/2}} \int_{\{|x|<r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{1}{(1+|x|^2)^N} dx - \frac{M_2}{\epsilon^{(N-q)/2}} \int_{\{|x|<r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^q}{(1+|x|^2)^N} dx$$

である。第 1 項の積分を $I_1(\epsilon)$、第 2 項の積分を $I_2(\epsilon)$ とおく。$\epsilon \searrow 0$ のとき、$I_1(\epsilon) \to \|U\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}$ である。$q < N$ であるから、$I_2(\epsilon)$ は有限の値に収束する。

$$\left\| b^{1/(p+1)} u_\epsilon \right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = \frac{M_1^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)/2}} I_1(\epsilon)^{1/(p+1)} - \frac{M_2^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)(N-q)/2N}} I_2(\epsilon)^{1/(p+1)} + O(1)$$

であるから、(49) および (48) より、

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\|Du_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\left\| b^{1/(p+1)} u_\epsilon \right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}} = \frac{\|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{M_1^{2/(p+1)} \|U\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}} = \frac{S}{M_1^{2/(p+1)}} \tag{50}$$

と計算される。すなわち、次式がしたがう。

$$\|v_\epsilon\|^2 = \|Dv_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{S}{M^{2/(p+1)}} + O(\epsilon^{(N-2)/2}). \tag{51}$$

<u>$q = N$ のとき</u>：極座標変換をすると、次式が得られる。

$$\int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = \mathrm{vol}(S^{N-1}) \int_0^{r_0} \frac{r^N}{(\epsilon + r^2)^N} r^{N-1} dr = O(|\log \epsilon|).$$

ここで $\mathrm{vol}(S^{N-1})$ は半径 1 の $(N-1)$ 次元球面の体積である。ゆえに、(50)、(51) が同様にしたがう。

<u>$q > N$ のとき</u>：

$$\int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx < \int_{\{|x|<r_0\}} |x|^{q-2N} dx < \infty$$

であるから、最右辺は $O(1)$ である。ゆえに、やはり (50)、(51) がしたがう。いずれの場合でも、

$$\left\| b^{1/(p+1)} u_\epsilon \right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = O(\epsilon^{-(N-2)/2}) \tag{52}$$

である。

次に、

$$\int_\Omega a u_\epsilon^2 dx = O(1) + \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{m_1 + m_2|x|^{q'}}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} dx$$

を考察する。I_1, I_2 を

$$I_1 = \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} dx,$$
$$I_2 = \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^{q'}}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} dx$$

とおく。[BN83] の p. 444 より、次式が成立する。

$$I_1 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-4)/2}) & (n \geq 5), \\ O(|\log \epsilon|) & (n = 4), \\ O(1) & (n = 3). \end{cases}$$

I_2 を、N と $q'+4$ の大小で場合分けして計算する。

$N > q'+4$ のとき：変数変換により、

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon^{(N-q'-4)/2}} \int_{\{|x|<r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^{q'}}{(1+|x|^2)^{N-2}} dx$$

である。右辺の積分を $I(\epsilon)$ とおく。$N > q'+4$ であるから、$\epsilon \searrow 0$ のとき、$I(\epsilon)$ は収束する。よって、$I_1 = O(\epsilon^{-(N-q'-4)/2})$ である。

$N = q'+4$ のとき：極座標変換により、

$$I_2 = \mathrm{vol}(S^{N-1}) \int_0^{r_0} \frac{|x|^{N-4}}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} r^{N-1} dr = O(|\log \epsilon|)$$

と計算される。

$N < q'+4$ のとき：

$$I_2 = \int_{\{|x|<r_0\}} |x|^{q'-2(N-2)} dx < \infty$$

であるから、$I_2 = O(1)$ である。

よって、$\epsilon \searrow 0$ のときの I_2 の挙動は次の通りにまとめられる。

$$I_2 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-q'-4)/2}) & (n > q'+4), \\ O(|\log \epsilon|) & (n = q'+4), \\ O(1) & (n < q'+4). \end{cases}$$

以上の結果と、(52) より、以下が成立する。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a v_\epsilon dx = O(1) + m_1 I_1' + m_2 I_2', \\ \qquad I_1' = \begin{cases} O(\epsilon) & (N \geq 5), \\ O(\epsilon |\log \epsilon|) & (N = 4), \\ O(\epsilon^{1/2}) & (N = 3), \end{cases} \\ \qquad I_2' = \begin{cases} O(\epsilon^{1+q'/2}) & (N > q'+4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2} |\log \epsilon|) & (N = q'+4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2}) & (N < q'+4). \end{cases} \end{cases} \tag{53}$$

4.2　命題 3.5 の証明

5　$N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献

[BN83]　Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 36, No. 4, pp. 437–477, 1983.

[NS07] Yūki Naito and Tokushi Sato. Positive solutions for semilinear elliptic equations with singular forcing terms. *J. Differential Equations*, Vol. 235, No. 2, pp. 439–483, 2007.

[Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.