Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1　概要

N を 3 以上の自然数とする。$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。$p = (N+2)/(N-2)$ とする。$f \in H^{-1}(\Omega)$ は、$f \geq 0$、$f \not\equiv 0$ をみたすとする。$a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。$\kappa > -\kappa_1$ があって、$a \geq \kappa$ となると仮定する。また、$b \geq 0$、$b \not\equiv 0$ と仮定する。$\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\star$}_\lambda$$

定理 1.1. $(\star)_\lambda$ には minimal solution が存在する。

定理 1.2. $(\star)_\lambda$ には extremal solution が存在する。また、$(\star)_\lambda$ の extremal solution は、$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution に限る。

1.1　記号

$1 \leq q \leq \infty$ についてのルベーグ空間を $L^q(\Omega)$ と表記する。ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する。$\partial\Omega$ のトレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H_0^1(\Omega)$ と表記する。$k \in \mathbb{N}$、$0 < \alpha < 1$ について、$k + \alpha$ 階のヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ と表記する。

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する。ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する。$H_0^1(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記する。$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_\Omega \left(|Dw|^2 + \kappa |w|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

と定める。$\kappa > -\kappa_1$、Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。また、$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |Dw|^2 dx \right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。

2　minimal solution の存在と性質

本節では、$(\star)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1. $\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\star)_\lambda \text{ の弱解である } \}$$

と定める。

定義 2.2. $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、

$$\underline{u}_\lambda \le u \text{ in } \Omega$$

が成立することをいう。

記号 2.3. $(\star)_\lambda$ の minimal solution を $\underline{u}_\lambda$ と表記する。

2.1　$H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、$\lambda > 0$ が十分小さいときに、$(\star)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

補題 2.4. 1. $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$(\star)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

2. さらに、$f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の弱解 u_λ は、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

証明. 1. $\Phi\colon [0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \tag{1}$$

とする。Φ の u についてのフレッシェ微分は、$w \in H_0^1(\Omega)$ とすると、次が成立する。

$$\Phi_u(\lambda, u)\colon w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1} w.$$

特に、次が成立する。

$$\Phi_u(0,0)w = -\Delta w + aw.$$

$a > -\kappa_1$ により、$\Phi_u(0,0)\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、$\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、$0 < \lambda \le \lambda_0$ に対し、$\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一つ存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、u_λ は、以下の方程式の弱解である。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \ge 0$ であり、$a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、$u_\lambda > 0$ in Ω が成立する。よって、u_λ は $(\star)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき、$\Phi\colon [0,\infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0 \ (\lambda \searrow 0)$ が示される。 ∎

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 3 で使用する。

2.2　優解との関係

続いて、ある $\lambda = \widehat{\lambda}$ で $(\star)_\lambda$ が優解をもつときに、$0 < \lambda \le \widehat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す。

補題 2.5. $\widehat{\lambda} > 0$ とする。以下をみたす $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u} + a\widehat{u} \ge b\widehat{u}^p + \widehat{\lambda} f & \text{in } \Omega, \\ \qquad \widehat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

このとき、$\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ に対し、$(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が存在する。また、$\underline{u}_\lambda < \widehat{u}$ in Ω が成立する。

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ を、次の通りに帰納的に定める。$u_0 \equiv 0$ とする。u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \qquad u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(4) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、$u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、$u_n^p \subset L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。$b \in L^\infty(\Omega)$、$f \in H^{-1}(\Omega)$ より、$bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。$a > -\kappa_1$ と合わせて、(4) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、n についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \text{ in } \Omega. \tag{5}$$

$n = 0$ のときは、$\widehat{u} > 0$ in Ω であることから、(5) が成立する。$n \in \mathbb{N}$ とする。n における (5) の成立を仮定し、$n+1$ における (5) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、$u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta\widehat{u} + a\widehat{u} &> b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、$\widehat{u} > u_{n+1}$ in Ω もしたがう。以上により、(5) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について (5) の成立が示された。

続いて、$\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す。u_{n+1} は (4) の弱解であるから、$\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次をみたす。

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx = \int_\Omega bu_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f\psi dx \tag{6}$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると、次が成立する。

$$\int_\Omega (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2)dx = \int_\Omega bu_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_\Omega fu_{n+1} dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \leq \int_\Omega b\widehat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f\widehat{u} dx < \infty. \tag{7}$$

ここで $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \geq \int_\Omega \left(|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2\right) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{8}$$

もわかる。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。したがって、(7) および (8) より、$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{9}$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{10}$$

ここで u が $(\star)_\lambda$ の弱解であることを示す。(9) により、次が成立する。

$$\int_\Omega (Du_{n+1}\cdot D\psi + au_{n+1}\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du\cdot D\psi + au\psi)dx.$$

また、$\widehat{u},\psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n\psi| \le b\widehat{u}^p|\psi| \quad \text{a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(10) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって、(6) で $n\to\infty$ とすると次を得る。

$$\int_\Omega (Du\cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \lambda\int_\Omega f\psi dx. \tag{11}$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\star)_\lambda$ の弱解である。

最後に、u は $(\star)_\lambda$ の minimal solution であることを示す。$\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\star)_\lambda$ の弱解とする。このとき、(5) と同様の議論により、$\widetilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。$n\to\infty$ として、$\widetilde{u} \ge u$ in Ω となる。よって u は $(\star)_\lambda$ の minimal solution である。 ∎

補題 2.5 から、次の事実がしたがう。

補題 2.6. 1. $\lambda_0 > 0$ が存在して、$S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ とする。このとき、$0<\lambda<\lambda_0$ に対し、$S_\lambda \neq \emptyset$ となる。
2. $\lambda > 0$ とする。$S_\lambda \neq \emptyset$ ならば、$(\star)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が存在する。
3. $0<\lambda_1<\lambda_2$ とする。$S_{\lambda_1} \neq \emptyset$、$S_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば、$\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
4. 補題 2.4 における $(\star)_\lambda$ の弱解を u_λ とする。このとき、$u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である。

証明. 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。$\widehat{u} = u_{\lambda_0}$ とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。

2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする。$\widehat{u} = u_\lambda$ として補題 2.5 を適用すると、$(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が得られる。

3. $\widehat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として、補題 2.5 (5) を適用すると、$\underline{u}_{\lambda_1} \le \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる。

$$-\Delta\underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} = b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f,$$
$$-\Delta\underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} = b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_2}) + (\lambda_2 - \lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、$a > -\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω がしたがう。

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より、$S_\lambda \neq \emptyset$ である。したがって、2. より、$(\star)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ をもつ。よって、(11) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とおくと、以下が得られる。

$$\int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + a|\underline{u}_\lambda|^2\right)dx = \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^p dx + \lambda\int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx. \tag{12}$$

ここで、minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが、$\lambda \searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((12)\ \text{の左辺}) \ge \int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + \kappa|\underline{u}_\lambda|^2\right)dx \ge C\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|_\kappa^2$ であり、$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから、$C>0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、$\underline{u}_\lambda \le u_\lambda$ in Ω より、次がしたがう。

$$\begin{aligned}((12)\ \text{の右辺}) &\le \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx\\ &\le \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C'\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C''\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

ここで、$C', C'' > 0$ は、$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C'\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C''\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

補題 2.4 より、$\lambda \searrow 0$ のとき、$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ が成立する。ゆえに、$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。再び補題 2.4 によると、$\lambda > 0$ が十分小さいとき、u_λ は $(\star)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

2.3　解が存在する λ の有界性

補題 2.4 により、$\lambda > 0$ が存在して、$(\star)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.6 により、$(\star)_\lambda$ の解が存在する λ が見つかれば、それより小さい λ については、$(\star)_\lambda$ の解が存在する。そこで、$(\star)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.7. $\overline{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ と定める。

ここから先は、$\overline{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、$\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。$g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

の唯一の弱解と定める。g_0 について、次の補題を示す。

補題 2.8. 固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu b(g_0)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、$\mu_1 > 0$ である。また、μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。

証明. μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{14}$$

と特徴付けられる。また、(14) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(14) より、以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ が存在する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx = 1, \tag{15}$$

$$\int_\Omega \left(|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2\right) dx \searrow \mu_1. \tag{16}$$

$a > \kappa$ であるから、(16) の左辺は $\|\psi_n\|_\kappa^2$ 以下である。$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから、$\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、$n \to \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{17}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \tag{18}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{19}$$

(17) より、$H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から、次が成立する。

$$\liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

ゆえに、(18) と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx. \tag{20}$$

また、ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、$H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である。したがって、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である。よって、必要なら部分列をとると、$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる。一方 (19) から、$\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する。したがって、次が成立する。

$$\psi_n^2 \rightharpoonup \phi_1^2 \ \text{ weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より、$b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である。$\left(L^{N/(N-2)}(\Omega)\right)^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より、次が成立する。

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx. \tag{21}$$

(21) の証明は、[Wil96] の Lemma 2.13 によった。(20) と (21) により、次がしたがう。

$$\mu_1 \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx}. \tag{22}$$

(14) により、(22) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(14) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される。よって $\mu_1 > 0$ である。

(14) の右辺の形から、ϕ_1 が (14) の右辺の下限を達成するならば、$|\phi_1|$ も下限を達成する。すなわち、$\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第 1 固有関数がある。この ϕ_1 について、次が成立する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ゆえに、強最大値原理により、$\phi_1 > 0$ in Ω となる。 ■

g_0 を用いて、次の補題を証明する。

補題 2.9. $0 < \overline{\lambda} < \infty$ である。

証明. 補題 2.4 により、$\lambda_0 > 0$ が存在し、$0 < \lambda < \lambda_0$ に対して、$(\star)_\lambda$ の解が存在する。ゆえに $\overline{\lambda} > 0$ である。そこで、$\overline{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$ は、$S_\lambda \neq \emptyset$ をみたすものとする。$u \in S_\lambda$ とし、$v = u - \lambda g_0$ とする。このとき、次が成立する。

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって、強最大値原理より、$v > 0$ in Ω である。つまり、$u > \lambda g_0$ in Ω がしたがう。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \text{ in } \Omega. \tag{23}$$

一方、補題 2.8 により、以下が成立する $\mu_1 > 0$、$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$、$\phi_1 > 0$ in Ω が存在する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \text{ in } \Omega. \tag{24}$$

そこで、$(23) \times \phi_1 - (24) \times u$ を Ω 上積分すると、次を得る。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1)\int_\Omega b(g_0)^{p-1}u\phi_1 dx.$$

ここで、$b \geq 0$ in Ω、$b \not\equiv 0$、$g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、$\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$ である。つまり、$\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$ となる。$\lambda > 0$ は $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから、$\overline{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ がしたがう。 ■

証明 (定理 1.1).

2.4　minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\star)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{25}$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

補題 2.10. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。$(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (25) の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、以下が成立する。

1. $\mu_1 > 0$ である。また、μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx \geq \mu_1 \int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx. \tag{26}$$

証明. 1. 補題 2.8 と同様である。
2. μ_1 のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1 = \inf_{\psi\in H_0^1(\Omega),\psi\not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a|\psi|^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx}$$

から (26) が成立する。 ■

記号 2.11. $(\star)_\lambda$ の minimal solution に関する線形化固有値問題 (25) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく。

補題 2.12. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする。このとき、$\mu_1(\lambda) > 1$ である。

証明. $\widehat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \widehat{\lambda} < \overline{\lambda}$ をみたすものとする。$z = \underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda$ とおく。補題 2.6.3 より、

3　$N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献

[Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.