

# Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

## 1 概要

$N$  を 3 以上の自然数とする。 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  を有界領域とする。 $p = (N+2)/(N-2)$  とする。 $f \in H^{-1}(\Omega)$  は、 $f \geq 0$ 、 $f \neq 0$  をみたすとする。 $a, b \in L^\infty(\Omega)$  とする。 $\kappa_1$  を  $-\Delta$  の  $\Omega$  におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。 $\kappa > -\kappa_1$  があって、 $a \geq \kappa$  となると仮定する。また、 $b \geq 0$ 、 $b \neq 0$  と仮定する。 $\lambda \geq 0$  をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\star)_\lambda$$

**定理 1.1.**  $(\star)_\lambda$  には minimal solution が存在する。

### 1.1 記号

$w \in H_0^1(\Omega)$  に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left( \int_\Omega (|Dw|^2 + \kappa|w|^2) dx \right)^{1/2}$$

と定める。 $\kappa > -\kappa_1$ 、 $\Omega$  が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から  $\|\cdot\|_\kappa$  は  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  と同値なノルムであることが従う。

$w \in H_0^1(\Omega)$  に対し、

$$\|w\| = \left( \int_\Omega |Dw|^2 dx \right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から  $\|\cdot\|$  は  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  と同値なノルムであることが従う。

## 2 minimal solution の存在と性質

本節では、 $(\star)_\lambda$  の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

**記号 2.1.**  $\lambda > 0$  に対し、

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\star)_\lambda \text{ の弱解である} \}$$

と定める。

**定義 2.2.**  $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$  が **minimal solution** であるとは、任意の  $u \in S_\lambda$  に対し、

$$\underline{u}_\lambda \leq u \text{ in } \Omega$$

が成立することをいう。

**記号 2.3.**  $(\star)_\lambda$  の minimal solution を  $\underline{u}_\lambda$  と表記する。

## 2.1 $H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、 $\lambda > 0$  が十分小さいときに、 $(\star)_\lambda$  が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

**補題 2.4.** 1.  $H_0^1(\Omega)$  の原点の近傍  $U$  と  $\lambda_0 > 0$  が存在して、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$  に対し、 $(\star)_\lambda$  は  $U$  内の唯一の弱解  $u_\lambda$  をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

2. さらに、 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  を仮定する。このとき、1. の弱解  $u_\lambda$  は、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$  をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

**証明.** 1.  $\Phi: [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \quad (1)$$

とする。 $\Phi$  の  $u$  についてのフレッシュエ微分は、 $w \in H_0^1(\Omega)$  とすると、次が成立する。

$$\Phi_u(\lambda, u): w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1}w.$$

特に、次が成立する。

$$\Phi_u(0, 0)w = -\Delta w + aw.$$

$a > -\kappa_1$  により、 $\Phi_u(0, 0): H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、 $\lambda_0 > 0$  と  $H_0^1(\Omega)$  の原点の近傍  $U$  が存在して、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$  に対し、 $\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$  をみたす  $u_\lambda \in U$  が唯一存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、 $u_\lambda$  は、

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

の弱解である。ここで  $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$  であり、 $a > -\kappa_1$  であるから、強最大値原理により、 $u_\lambda > 0$  in  $\Omega$  が成立する。よって、 $u_\lambda$  は  $(\star)_\lambda$  の  $U$  における唯一の弱解である。

2.  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  のとき、 $\Phi: [0, \infty) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$  を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$  と  $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0)$  が示される。■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 3 で使用する。

## 2.2 優解との関係

続いて、ある  $\lambda = \hat{\lambda}$  で  $(\star)_\lambda$  が優解をもつときに、 $0 < \lambda \leq \hat{\lambda}$  で minimal solution が存在することを示す。

**補題 2.5.**  $\hat{\lambda} > 0$  とする。以下をみたす  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$  が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} + a\hat{u} \geq b\hat{u}^p + \hat{\lambda}f & \text{in } \Omega, \\ \hat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

このとき、 $\lambda \in (0, \hat{\lambda}]$  に対し、 $(\star)_\lambda$  の minimal solution  $\underline{u}_\lambda$  が存在する。また、 $\underline{u}_\lambda < \hat{u}$  in  $\Omega$  が成立する。

**証明.**  $H_0^1(\Omega)$  の点列  $\{u_n\}_{n=0}^\infty$  を、次の通りに帰納的に定める。 $u_0 \equiv 0$  とする。 $u_n$  が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

の唯一の弱解を  $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$  と定める。

(4) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、 $u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$  だから、 $u_n^p \in L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  である。 $b \in L^\infty(\Omega)$ 、 $f \in H^{-1}(\Omega)$  より、 $bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$  である。 $a > -\kappa_1$  と合わせて、(4) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、 $n$  についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \text{ in } \Omega. \quad (5)$$

$n = 0$  のときは、 $\widehat{u} > 0$  in  $\Omega$  であることから、(5) が成立する。 $n \in \mathbb{N}$  とする。 $n$  における (5) の成立を仮定し、 $n+1$  における (5) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、 $u_{n+1} > u_n$  in  $\Omega$  である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{u} + a\widehat{u} &> b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、 $\widehat{u} > u_{n+1}$  in  $\Omega$  も従う。以上により、(5) は  $n+1$  でも正しい。数学的帰納法により、任意の  $n \in \mathbb{N}$  について (5) の成立が示された。

続いて、 $\{u_n\}$  が  $H_0^1(\Omega)$  における有界列であることを示す。 $u_{n+1}$  は (4) の弱解であるから、 $\psi \in H_0^1(\Omega)$  に対し、次をみ

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx = \int_{\Omega} bu_n^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx \quad (6)$$

$\psi = u_{n+1}$  とすると、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2) dx = \int_{\Omega} bu_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f u_{n+1} dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \leq \int_{\Omega} b\widehat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f\widehat{u} dx < \infty. \quad (7)$$

ここで  $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$  に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \geq \int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (8)$$

もわかる。 $\|\cdot\|_{\kappa}$  は  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  と同値なノルムである。従って、(7) および (8) より、 $\{u_n\}$  は  $H_0^1(\Omega)$  の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $u \in H_0^1(\Omega)$  が存在して、 $n \rightarrow \infty$  とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (9)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$

$$u_n \rightarrow u \text{ a. e. in } \Omega. \quad (10)$$

ここで  $u$  が  $(\star)_\lambda$  の弱解であることを示す。(6) で  $n \rightarrow \infty$  とすることを試みる。(9) により、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx.$$

また、(10) と

$$|bu_n\psi| \leq b\widehat{u}^p|\psi| \text{ a. e. in } \Omega$$

の右辺は可積分であること ( $\hat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$  からわかる) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_{\Omega} bu_n^p \psi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} bu^p \psi dx.$$

したがって、(6) で  $n \rightarrow \infty$  とすると、次を得る。

$$\int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx = \int_{\Omega} bu^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx. \quad (11)$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$  は任意であるから、 $u \in H_0^1(\Omega)$  は  $(\star)_{\lambda}$  の弱解である。

最後に、 $u$  は  $(\star)_{\lambda}$  の minimal solution であることを示す。 $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  を  $(\star)_{\lambda}$  の弱解とする。このとき、(5) と同様の議論により、 $\tilde{u} > u_n$  in  $\Omega$  が数学的帰納法で示される。 $n \rightarrow \infty$  として、 $\tilde{u} \geq u$  in  $\Omega$  となる。よって  $u$  は  $(\star)_{\lambda}$  の minimal solution である。 ■

補題 2.5 から、次の事実が従う。

- 補題 2.6.** 1.  $\lambda_0 > 0$  が存在して、 $S_{\lambda_0} \neq \emptyset$  とする。このとき、 $0 < \lambda < \lambda_0$  に対し、 $S_{\lambda} \neq \emptyset$  となる。  
 2.  $\lambda > 0$  とする。 $S_{\lambda} \neq \emptyset$  ならば、 $(\star)_{\lambda}$  には minimal solution  $\underline{u}_{\lambda} \in S_{\lambda}$  が存在する。  
 3.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  とする。 $S_{\lambda_1} \neq \emptyset$ 、 $S_{\lambda_2} \neq \emptyset$  ならば、 $\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ 、 $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$  について、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$  in  $\Omega$  が成立する。  
 4. 補題 2.4 における  $(\star)_{\lambda}$  の弱解を  $u_{\lambda}$  とする。このとき、 $u_{\lambda} = \underline{u}_{\lambda}$  である。

- 証明.** 1.  $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$  とする。 $\hat{u} = u_{\lambda_0}$  とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。  
 2.  $u_{\lambda} \in S_{\lambda}$  とする。 $\hat{u} = u_{\lambda}$  として補題 2.5 を適用すると、 $(\star)_{\lambda}$  の minimal solution  $\underline{u}_{\lambda}$  が得られる。  
 3.  $\hat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$  として、補題 2.5 (5) を適用すると、 $\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$  in  $\Omega$  が得られる。

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} &= b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} &= b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_1}^p) + (\lambda_2 - \lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、 $a > -\kappa_1$  により、強最大値原理を用いると、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$  in  $\Omega$  が従う。

4.  $u_{\lambda} \in S_{\lambda}$  より、 $S_{\lambda} \neq \emptyset$  である。したがって、2. より、 $(\star)_{\lambda}$  は minimal solution  $\underline{u}_{\lambda}$  をもつ。よって、(11) で  $u = \psi = \underline{u}_{\lambda}$  とおくと、以下が得られる。

$$\int_{\Omega} (|D\underline{u}_{\lambda}|^2 + a|\underline{u}_{\lambda}|^2) dx = \int_{\Omega} b\underline{u}_{\lambda}^p dx + \lambda \int_{\Omega} f\underline{u}_{\lambda} dx. \quad (12)$$

ここで、minimal solution の  $H_0^1(\Omega)$  ノルムが、 $\lambda \searrow 0$  のとき、0 に収束することを示す。

$$((12) \text{ の左辺}) \geq \int_{\Omega} (|D\underline{u}_{\lambda}|^2 + \kappa|\underline{u}_{\lambda}|^2) dx \geq C \|\underline{u}_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

中辺は  $\|\underline{u}_{\lambda}\|_{\kappa}^2$  であり、 $\|\cdot\|_{\kappa}$  は  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  と同値であるから、 $C > 0$  は  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  の中身によらない定数であることに注意されたい。また、 $\underline{u}_{\lambda} \leq u_{\lambda}$  in  $\Omega$  より、

$$\begin{aligned} ((12) \text{ の右辺}) &\leq \int_{\Omega} b\underline{u}_{\lambda}^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f\underline{u}_{\lambda} dx \\ &\leq \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|u_{\lambda}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C' \|u_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

である。ここで、 $C', C'' > 0$  は、 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|u_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

補題 2.4 より、 $\lambda \searrow 0$  のとき、 $\|u_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$  が成立する。ゆえに、 $\|\underline{u}_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$  となる。再び補題 2.4 によると、 $\lambda > 0$  が十分小さいとき、 $u_{\lambda}$  は  $(\star)_{\lambda}$  の唯一の弱解であった。したがってこのことは  $u_{\lambda} = \underline{u}_{\lambda}$  を示している。 ■

### 2.3 解が存在する $\lambda$ の有界性

補題 2.4 により、 $\lambda > 0$  が存在して、 $(\star)_\lambda$  の解が存在する。補題 2.6 により、 $(\star)_\lambda$  の解が存在する  $\lambda$  が見つければ、それより小さい  $\lambda$  については、 $(\star)_\lambda$  の解が存在する。そこで、 $(\star)_\lambda$  の解が存在する  $\lambda$  がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

**記号 2.7.**  $\bar{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$  と定める。

ここから先は、 $\bar{\lambda} < \infty$  を示すことを目標に議論を進める。その準備として、 $\lambda > 0$  によらない  $H_0^1(\Omega)$  の元  $g_0$  を用意する。 $g_0 \in H_0^1(\Omega)$  を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

の唯一の弱解と定める。 $g_0$  について、次の補題を示す。

**補題 2.8.** 固有値問題

$$-\Delta \phi + a \phi = \mu b(g_0)^{p-1} \phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を  $\mu_1$  とする。このとき、 $\mu_1 > 0$  である。また、 $\mu_1$  に付随する固有関数  $\phi_1$  のうち、 $\phi_1 > 0$  in  $\Omega$  をみたすものがある。

**証明.**  $\mu_1$  はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi^2 dx} \quad (14)$$

と特徴付けられる。また、(14) の右辺の下限を達成する関数  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  があるとすれば、 $\phi$  が  $\mu_1$  に付随する固有関数である。

(14) より、 $H_0^1(\Omega)$  の点列  $\{\psi_n\}$  が存在し、以下が成立する。

$$\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi_n^2 dx = 1, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} (|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2) dx \searrow \mu_1. \quad (16)$$

$a > \kappa$  であるから、(16) の左辺は  $\|\psi_n\|_{\kappa}^2$  以下である。 $\|\cdot\|_{\kappa}$  は  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  と同値なノルムであるから、 $\{\psi_n\}$  は  $H_0^1(\Omega)$  の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$  が存在して、 $n \rightarrow \infty$  とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (17)$$

$$\psi_n \rightarrow \phi_1 \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \quad (18)$$

$$\psi_n \rightarrow \phi_1 \text{ a.e. in } \Omega.$$

(17) より、 $H_0^1(\Omega)$  ノルムの弱下半連続性により、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}$$

である。ゆえに、18 と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2) dx$$

また、 $g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$  より、 $b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$  より、以下が成立する。

$$\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi_n^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \phi_1^2 dx.$$

以上より、次が成立する。

$$\mu_1 \geq \frac{\int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \phi_1^2 dx}. \quad (19)$$

(14) により、(19) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(14) の右辺の下限は  $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$  により達成される。よって  $\mu_1 > 0$  である。

(14) の右辺の形から、 $\phi_1$  が (14) の右辺の下限を達成するならば、 $|\phi_1|$  も下限を達成する。すなわち、 $\phi_1 \geq 0$  in  $\Omega$  となる第 1 固有関数がある。この  $\phi_1$  について、

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1} \phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega$$

であるから、強最大値原理により、 $\phi_1 > 0$  in  $\Omega$  となる。 ■

$g_0$  を用いて、次の補題を証明する。

**補題 2.9.**  $0 < \bar{\lambda} < \infty$  である。

**証明.** 補題 2.4 により、 $\lambda_0 > 0$  が存在して、 $0 < \lambda < \lambda_0$  に対して、 $(\star)_\lambda$  の解が存在する。ゆえに  $\bar{\lambda} > 0$  である。そこで、 $\bar{\lambda} < \infty$  を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$  は、 $S_\lambda \neq \emptyset$  をみたすものとする。 $u \in S_\lambda$  とし、 $v = u - \lambda g_0$  とする。このとき、

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

であるから、強最大値原理より、 $v > 0$  in  $\Omega$  である。つまり、 $u > \lambda g_0$  in  $\Omega$  が従う。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1} (g_0)^{p-1} u \text{ in } \Omega. \quad (20)$$

一方、補題 2.8 により、 $\mu_1 > 0$ 、 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ 、 $\phi_1 > 0$  in  $\Omega$  が存在して、以下が成立する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1} \phi_1 \text{ in } \Omega. \quad (21)$$

そこで、(20)  $\times \phi_1 - (21) \times u$  を  $\Omega$  上積分すると、以下が成立する。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1) \int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} u \phi_1 dx$$

ここで、 $b \geq 0$  in  $\Omega$ 、 $b \not\equiv 0$ 、 $g_0, u, \phi_1 > 0$  in  $\Omega$  であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、 $\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$  である。つまり、 $\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$  となる。 $\lambda > 0$  は  $S_\lambda \neq \emptyset$  をみたす任意の正の数であるから、 $\bar{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$  が従う。 ■

**証明 (定理 1.1).**

## 2.4 minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\star)_\lambda$  の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu p b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} \phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (22)$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

**補題 2.10.**  $0 < \lambda < \bar{\lambda}$  とする。 $(\star)_\lambda$  の minimal solution  $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$  に関する線形化固有値問題 (22) の第 1 固有値を  $\mu_1$  とする。このとき、以下が成立する。

1.  $\mu_1 > 0$  である。また、 $\mu_1$  に付随する固有関数  $\phi_1$  のうち、 $\phi_1 > 0$  in  $\Omega$  をみたすものがある。

2. 任意の  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  に対し、

$$\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx \geq \mu_1 \int_{\Omega} pb(\underline{u}_{\lambda})^{p-1} \psi^2 dx \quad (23)$$

が成立する。

**証明.** 1. 補題 2.8 と同様である。

2.  $\mu_1$  のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx}{\int_{\Omega} pb(\underline{u}_{\lambda})^{p-1} \psi^2 dx}$$

から (23) が成立する。 ■

**記号 2.11.**  $(\star)_{\lambda}$  の minimal solution に関する線形化固有値問題 (22) の第 1 固有値を  $\mu_1(\lambda)$  とかく。

**補題 2.12.**  $0 < \lambda < \bar{\lambda}$  とする。このとき、 $\mu_1(\lambda) > 1$  である。

**証明.**  $\hat{\lambda}$  を  $0 < \lambda < \hat{\lambda} < \bar{\lambda}$  をみたすものとする。 $z = \underline{u}_{\hat{\lambda}} - \underline{u}_{\lambda}$  とおく。補題 2.6.3 より、

### 3 $N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

#### 参考文献