

Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1 概要

N を 3 以上の自然数とする。 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。 $p = (N+2)/(N-2)$ とする。 $f \in H^{-1}(\Omega)$ は、 $f \geq 0$ 、 $f \neq 0$ をみたすとする。 $a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。 κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。 $\kappa > -\kappa_1$ があって、 $a \geq \kappa$ となると仮定する。また、 $b \geq 0$ 、 $b \neq 0$ と仮定する。 $\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\star)_\lambda$$

$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \int_\Omega (|Dw|^2 + \kappa|w|^2) dx$$

と定める。 $\kappa > -\kappa_1$ 、 Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。

$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \int_\Omega |Dw|^2 dx$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。

2 minimal solution の存在と性質

本節では、 $(\star)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1. $\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\star)_\lambda \text{ の弱解である} \}$$

と定める。

定義 2.2. $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、

$$\underline{u}_\lambda \leq u \text{ in } \Omega$$

が成立することをいう。

以下では、 $(\star)_\lambda$ の minimal solution を \underline{u}_λ と表記する。

minimal solution を調べる第一歩として、 $\lambda > 0$ が十分小さいときに、 $(\star)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理より示す。

補題 2.3. 1. $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U があって、 $\lambda_0 > 0$ があって、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し、 $(\star)_\lambda$ は U における唯一の弱解 u_λ をもつ。また、

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0)$$

となる。

2. さらに、 $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の u_λ は、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0)$$

となる。

証明. 1. $\Phi: [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \quad (1)$$

とする。 Φ の u についてのフレッシュエ微分は、 $w \in H_0^1(\Omega)$ とすると、

$$\Phi_u(\lambda, u): w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1}w$$

となる。とくに、

$$\Phi_u(0, 0)w = -\Delta w + aw$$

である。 $a > -\kappa_1$ により、 $\Phi_u(0, 0): H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、 $\lambda_0 > 0$ があって、 $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U があって、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し、 $u_\lambda \in U$ がただ 1 つあって、 $\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ 、かつ、 $\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$ となる。つまり、 u_λ は、

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

の弱解である。ここで $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$ であり、 $a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、 $u_\lambda > 0$ in Ω となる。よって、 u_λ は $(\star)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき、 $\Phi: [0, \infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$ を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0$ ($\lambda \searrow 0$) が示される。 ■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで進行していく。2. の結果は、§ 3 で使用する。

続いて、ある $\lambda = \hat{\lambda}$ で $(\star)_\lambda$ が優解をもつときに、 $0 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ で minimal solution の存在が従うことを示す。

補題 2.4. $\hat{\lambda} > 0$ とする。 $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ があって、 $\hat{u} > 0$ in Ω かつ

$$\Delta \hat{u} + a\hat{u} \geq b\hat{u}^p + \hat{\lambda}f \text{ in } \Omega$$

をみたすとする。このとき、 $\lambda \in (0, \hat{\lambda}]$ に対し、 $(\star)_\lambda$ の minimal solution \underline{u}_λ が存在する。また、 $\underline{u}_\lambda < \hat{u}$ in Ω となる。

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\underline{u}_n\}$ を、次の通りに帰納的に定める。 $u_0 \equiv 0$ とする。 u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(3) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、 $u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、 $u_n^p \subset L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。 $b \in L^\infty(\Omega)$ 、 $f \in H^{-1}(\Omega)$ より、 $bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。 $a > -\kappa_1$ と合わせて、(3) には確かに唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、 n についての数学的帰納法で証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \hat{u} \text{ in } \Omega \quad (4)$$

$n = 0$ のときは、 $\hat{u} > 0$ in Ω により成立する。 $n \in \mathbb{N}$ とする。 n での (4) の成立を仮定し、 $n+1$ での成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p)$$

となる。右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、 $u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{u} + a\hat{u} &= b\hat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、 $\hat{u} > u_{n+1}$ in Ω も従う。以上により、(4) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、 $n \in \mathbb{N}$ での (4) の成立が示された。

続いて、 $\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ での有界列であることを示す。 u_{n+1} は (3) の弱解であるから、 $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx = \int_{\Omega} bu_n^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx \quad (5)$$

となる。 $\psi = u_{n+1}$ とすると、

$$\int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2) dx = \int_{\Omega} bu_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f u_{n+1} dx$$

となる。ここで、右辺は、

$$(\text{右辺}) \leq \int_{\Omega} b\hat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f\hat{u} dx < \infty \quad (6)$$

と評価される。ここで $\hat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \geq \int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (7)$$

もわかる。 $\|\cdot\|_{\kappa}$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。従って、(6) および (7) より、 $\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $u \in H_0^1(\Omega)$ があって、 $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \\ u_n &\rightarrow u \text{ a.e. in } \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで u が $(\star)_{\lambda}$ の弱解であることを示す。(5) で $n \rightarrow \infty$ とすることを試みる。(8) により、

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx$$

となる。また、(9) と

$$|bu_n\psi| \leq b\hat{u}^p|\psi| \text{ a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分であること ($\hat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ からわかる) より、優収束定理から、

$$\int_{\Omega} bu_n^p \psi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} bu^p \psi dx$$

となる。したがって、(5) で $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx = \int_{\Omega} bu^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx \quad (10)$$

を得る。 $\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、 $u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\star)_{\lambda}$ の弱解である。

最後に、 u は $(\star)_{\lambda}$ の minimal solution であることを示す。 $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\star)_{\lambda}$ の弱解とする。このとき、(4) と同様の議論により、 $\tilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。 $n \rightarrow \infty$ として、 $\tilde{u} \geq u$ in Ω となる。よって u は $(\star)_{\lambda}$ の minimal solution である。 ■

補題 2.4 から、次の事実が従う。

- 補題 2.5.** 1. $\lambda_0 > 0$ があって、 $S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ とする。このとき、 $0 < \lambda < \lambda_0$ に対し、 $S_\lambda \neq \emptyset$ となる。
 2. $\lambda > 0$ とする。 $S_\lambda \neq \emptyset$ ならば、 $(\star)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ がある。
 3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ とする。 $S_{\lambda_1} \neq \emptyset$ 、 $S_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば、 $\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ 、 $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
 4. 補題 2.3 における $(\star)_\lambda$ の弱解を u_λ とする。このとき、 $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である。

- 証明.** 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。 $\hat{u} = u_{\lambda_0}$ として補題 2.4 を適用すると結論を得る。
 2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする。 $\hat{u} = u_\lambda$ として補題 2.4 を適用すると、 $(\star)_\lambda$ の minimal solution \underline{u}_λ を得る。
 3. $\hat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として、補題 2.4 (4) を適用すると、 $\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω を得る。

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\lambda_1} + a \underline{u}_{\lambda_1} &= b \underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda_2} + a \underline{u}_{\lambda_2} &= b \underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_1}^p) + (\lambda_2 - \lambda_1)f$$

を得る。右辺が 0 以上であること、および、 $a > -\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が従う。

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より、 $S_\lambda \neq \emptyset$ である。したがって、2. より、 $(\star)_\lambda$ は minimal solution \underline{u}_λ をもつ。よって、(10) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とすると、

$$\int_{\Omega} (|D\underline{u}_\lambda|^2 + a|\underline{u}_\lambda|^2) dx = \int_{\Omega} b \underline{u}_\lambda^p dx + \lambda \int_{\Omega} f \underline{u}_\lambda dx \quad (11)$$

を得る。

ここで、minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが、 $\lambda \searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((11) \text{ の左辺}) \geq \int_{\Omega} (|D\underline{u}_\lambda|^2 + \kappa|\underline{u}_\lambda|^2) dx = C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

である。中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|_\kappa$ であり、 $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから、 $C > 0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、 $\underline{u}_\lambda \leq u_\lambda$ in Ω より、

$$\begin{aligned} ((11) \text{ の右辺}) &\leq \int_{\Omega} b \underline{u}_\lambda^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f \underline{u}_\lambda dx \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

である。ここで、 $C', C'' > 0$ は、 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}$$

となる。補題 2.3 より、 $\lambda \searrow 0$ のとき、 $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。ゆえに、 $\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。

再び補題 2.3 によると、 $\lambda > 0$ が十分小さいとき、 u_λ は $(\star)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

補題 2.3 により、 $\lambda > 0$ があって、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.5 により、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する λ が見つければ、それより小さい λ については、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する。そこで、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.6. $\bar{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ と定める。

ここから先は、 $\bar{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、 $\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。 $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

の唯一の弱解と定める。 g_0 について、次の補題を示す。

補題 2.7. 固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu b(g_0)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、 $\mu_1 > 0$ である。また、 μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、 $\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。

証明. μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (\|D\psi\|^2 + a\psi^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1}\psi^2 dx} \quad (13)$$

と特徴付けられる。また、(13) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、 ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(13) より、 $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ があって、

■

3 $N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献