

Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1 概要

N を 3 以上の自然数とする。 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。 $p = (N+2)/(N-2)$ とする。 $f \in H^{-1}(\Omega)$ は、 $f \geq 0$ 、 $f \neq 0$ をみたすとする。 $a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。 κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。 $\kappa > -\kappa_1$ があって、 $a \geq \kappa$ となると仮定する。また、 $b \geq 0$ 、 $b \neq 0$ と仮定する。 $\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\star)_\lambda$$

定理 1.1. $(\star)_\lambda$ には minimal solution が存在する。

定理 1.2. $(\star)_\lambda$ には extremal solution が存在する。また、 $(\star)_\lambda$ の extremal solution は、 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\star)_\lambda$ の minimal solution に限る。

1.1 記号

$1 \leq q \leq \infty$ についてのルベグ空間を $L^q(\Omega)$ と表記する。ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する。 $\partial\Omega$ のトレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H_0^1(\Omega)$ と表記する。 $k \in \mathbb{N}$ 、 $0 < \alpha < 1$ について、 $k + \alpha$ 階のヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ と表記する。

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する。ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する。 $H_0^1(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記する。 $w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_\Omega (|Dw|^2 + \kappa|w|^2) dx \right)^{1/2}$$

と定める。 $\kappa > -\kappa_1$ 、 Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。また、 $w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |Dw|^2 dx \right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることが従う。

2 minimal solution の存在と性質

本節では、 $(\star)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1. $\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\star)_\lambda \text{ の弱解である} \}$$

と定める。

定義 2.2. $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、

$$\underline{u}_\lambda \leq u \text{ in } \Omega$$

が成立することをいう。

記号 2.3. $(\star)_\lambda$ の minimal solution を \underline{u}_λ と表記する。

2.1 $H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、 $\lambda > 0$ が十分小さいときに、 $(\star)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

補題 2.4. 1. $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し、 $(\star)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

2. さらに、 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の弱解 u_λ は、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

証明. 1. $\Phi: [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \quad (1)$$

とする。 Φ の u についてのフレッシェ微分は、 $w \in H_0^1(\Omega)$ となると、次が成立する。

$$\Phi_u(\lambda, u): w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1}w.$$

特に、次が成立する。

$$\Phi_u(0, 0)w = -\Delta w + aw.$$

$a > -\kappa_1$ により、 $\Phi_u(0, 0): H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、 $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し、 $\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、 u_λ は、以下の方程式の弱解である。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$ であり、 $a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、 $u_\lambda > 0$ in Ω が成立する。よって、 u_λ は $(\star)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ のとき、 $\Phi: [0, \infty) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0$ ($\lambda \searrow 0$) が示される。■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 3 で使用する。

2.2 優解との関係

続いて、ある $\lambda = \hat{\lambda}$ で $(\star)_\lambda$ が優解をもつときに、 $0 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す。

補題 2.5. $\hat{\lambda} > 0$ とする。以下をみたす $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} + a\hat{u} \geq b\hat{u}^p + \hat{\lambda}f & \text{in } \Omega, \\ \hat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

このとき、 $\lambda \in (0, \hat{\lambda}]$ に対し、 $(\star)_\lambda$ の minimal solution \underline{u}_λ が存在する。また、 $\underline{u}_\lambda < \hat{u}$ in Ω が成立する。

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ を、次の通りに帰納的に定める。 $u_0 \equiv 0$ とする。 u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(4) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、 $u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、 $u_n^p \in L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。 $b \in L^\infty(\Omega)$ 、 $f \in H^{-1}(\Omega)$ より、 $bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。 $a > -\kappa_1$ と合わせて、(4) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、 n についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \hat{u} \text{ in } \Omega. \quad (5)$$

$n = 0$ のときは、 $\hat{u} > 0$ in Ω であることから、(5) が成立する。 $n \in \mathbb{N}$ とする。 n における (5) の成立を仮定し、 $n+1$ における (5) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、 $u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{u} + a\hat{u} &> b\hat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、 $\hat{u} > u_{n+1}$ in Ω もしたがう。以上により、(5) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について (5) の成立が示された。

続いて、 $\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す。 u_{n+1} は (4) の弱解であるから、 $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次をみたす。

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx = \int_{\Omega} bu_n^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx \quad (6)$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2) dx = \int_{\Omega} bu_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f u_{n+1} dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \leq \int_{\Omega} b\hat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f\hat{u} dx < \infty. \quad (7)$$

ここで $\hat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \geq \int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (8)$$

もわかる。 $\|\cdot\|_{\kappa}$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。したがって、(7) および (8) より、 $\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (9)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$

$$u_n \rightarrow u \text{ a.e. in } \Omega. \quad (10)$$

ここで u が $(\star)_\lambda$ の弱解であることを示す。(9) より、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx.$$

また、 $\widehat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n\psi| \leq b\widehat{u}^p|\psi| \quad \text{a. e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(10) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_{\Omega} bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} bu^p\psi dx.$$

したがって、(6) で $n \rightarrow \infty$ とすると次を得る。

$$\int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx = \int_{\Omega} bu^p\psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx. \quad (11)$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、 $u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\star)_\lambda$ の弱解である。

最後に、 u は $(\star)_\lambda$ の minimal solution であることを示す。 $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\star)_\lambda$ の弱解とする。このとき、(5) と同様の議論により、 $\tilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。 $n \rightarrow \infty$ として、 $\tilde{u} \geq u$ in Ω となる。よって u は $(\star)_\lambda$ の minimal solution である。 ■

補題 2.5 から、次の事実がしたがう。

- 補題 2.6.** 1. $\lambda_0 > 0$ が存在して、 $S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ とする。このとき、 $0 < \lambda < \lambda_0$ に対し、 $S_\lambda \neq \emptyset$ となる。
 2. $\lambda > 0$ とする。 $S_\lambda \neq \emptyset$ ならば、 $(\star)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が存在する。
 3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ とする。 $S_{\lambda_1} \neq \emptyset$ 、 $S_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば、 $\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ 、 $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
 4. 補題 2.4 における $(\star)_\lambda$ の弱解を u_λ とする。このとき、 $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である。

- 証明.** 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。 $\widehat{u} = u_{\lambda_0}$ とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。
 2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする。 $\widehat{u} = u_\lambda$ として補題 2.5 を適用すると、 $(\star)_\lambda$ の minimal solution \underline{u}_λ が得られる。
 3. $\widehat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として、補題 2.5 (5) を適用すると、 $\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる。

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} &= b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} &= b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_1}^p) + (\lambda_2 - \lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、 $a > -\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω がしたがう。

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より、 $S_\lambda \neq \emptyset$ である。したがって、2. より、 $(\star)_\lambda$ は minimal solution \underline{u}_λ をもつ。よって、(11) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とおくと、以下が得られる。

$$\int_{\Omega} (|D\underline{u}_\lambda|^2 + a|\underline{u}_\lambda|^2) dx = \int_{\Omega} b\underline{u}_\lambda^p dx + \lambda \int_{\Omega} f\underline{u}_\lambda dx. \quad (12)$$

ここで、minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが、 $\lambda \searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((12) \text{ の左辺}) \geq \int_{\Omega} (|D\underline{u}_\lambda|^2 + \kappa|\underline{u}_\lambda|^2) dx \geq C \|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|_{\kappa}^2$ であり、 $\|\cdot\|_{\kappa}$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから、 $C > 0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、 $\underline{u}_\lambda \leq u_\lambda$ in Ω より、次がしたがう。

$$\begin{aligned} ((12) \text{ の右辺}) &\leq \int_{\Omega} b\underline{u}_\lambda^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f\underline{u}_\lambda dx \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ここで、 $C', C'' > 0$ は、 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

補題 2.4 より、 $\lambda \searrow 0$ のとき、 $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ が成立する。ゆえに、 $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。再び補題 2.4 によると、 $\lambda > 0$ が十分小さいとき、 u_λ は $(\star)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

2.3 解が存在する λ の有界性

補題 2.4 より、 $\lambda > 0$ が存在して、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.6 より、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する λ が見つければ、それより小さい λ については、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する。そこで、 $(\star)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.7. $\bar{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ と定める。

ここから先は、 $\bar{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、 $\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。 $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

の唯一の弱解と定める。 g_0 について、次の補題を示す。

補題 2.8. 固有値問題

$$-\Delta \phi + a \phi = \mu b(g_0)^{p-1} \phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、 $\mu_1 > 0$ である。また、 μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、 $\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。

証明. μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi^2 dx} \quad (14)$$

と特徴付けられる。また、(14) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、 ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(14) より、以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ が存在する。

$$\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi_n^2 dx = 1, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} (|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2) dx \searrow \mu_1. \quad (16)$$

$a > \kappa$ であるから、(16) の左辺は $\|\psi_n\|_{\kappa}^2$ 以下である。 $\|\cdot\|_{\kappa}$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから、 $\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (17)$$

$$\psi_n \rightarrow \phi_1 \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \quad (18)$$

$$\psi_n \rightarrow \phi_1 \text{ a.e. in } \Omega. \quad (19)$$

(17) より、 $H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から、次が成立する。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

ゆえに、(18) と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2) dx. \quad (20)$$

また、ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、 $H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である。したがって、 $\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である。よって、必要なら部分列をとると、 $\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる。一方 (19) から、 $\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する。したがって、次が成立する。

$$\psi_n^2 \rightharpoonup \phi_1^2 \text{ weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より、 $b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である。 $(L^{N/(N-2)}(\Omega))^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より、次が成立する。

$$\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi_n^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \phi_1^2 dx. \quad (21)$$

(21) の証明は、[Wil96] の Lemma 2.13 によった。(20) と (21) により、次がしたがう。

$$\mu_1 \geq \frac{\int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \phi_1^2 dx}. \quad (22)$$

(14) により、(22) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(14) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される。よって $\mu_1 > 0$ である。

(14) の右辺の形から、 ϕ_1 が (14) の右辺の下限を達成するならば、 $|\phi_1|$ も下限を達成する。すなわち、 $\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第 1 固有関数がある。この ϕ_1 について、次が成立する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1} \phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ゆえに、強最大値原理により、 $\phi_1 > 0$ in Ω となる。 ■

g_0 を用いて、次の補題を証明する。

補題 2.9. $0 < \bar{\lambda} < \infty$ である。

証明. 補題 2.4 により、 $\lambda_0 > 0$ が存在し、 $0 < \lambda < \lambda_0$ に対して、 $(*)_{\lambda}$ の解が存在する。ゆえに $\bar{\lambda} > 0$ である。そこで、 $\bar{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$ は、 $S_{\lambda} \neq \emptyset$ をみたすものとする。 $u \in S_{\lambda}$ とし、 $v = u - \lambda g_0$ とする。このとき、次が成立する。

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって、強最大値原理より、 $v > 0$ in Ω である。つまり、 $u > \lambda g_0$ in Ω がしたがう。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \text{ in } \Omega. \quad (23)$$

一方、補題 2.8 により、以下が成立する $\mu_1 > 0$ 、 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ 、 $\phi_1 > 0$ in Ω が存在する。

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1} \phi_1 \text{ in } \Omega. \quad (24)$$

そこで、(23) $\times \phi_1$ - (24) $\times u$ を Ω 上積分すると、次を得る。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1) \int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} u \phi_1 dx.$$

ここで、 $b \geq 0$ in Ω 、 $b \not\equiv 0$ 、 $g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、 $\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$ である。つまり、 $\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$ となる。 $\lambda > 0$ は $S_{\lambda} \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから、 $\bar{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ がしたがう。 ■

証明 (定理 1.1).

2.4 minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\star)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (25)$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

補題 2.10. $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。 $(\star)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (25) の第 1 固有値を μ_1 とする。このとき、以下が成立する。

1. $\mu_1 > 0$ である。また、 μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、 $\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx \geq \mu_1 \int_{\Omega} pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx. \quad (26)$$

証明. 1. 補題 2.8 と同様である。

2. μ_1 のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx}{\int_{\Omega} pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx}$$

から (26) が成立する。 ■

記号 2.11. $(\star)_\lambda$ の minimal solution に関する線形化固有値問題 (25) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく。

補題 2.12. $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。このとき、 $\mu_1(\lambda) > 1$ である。

証明. $\hat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \hat{\lambda} < \bar{\lambda}$ をみたすものとする。 $z = \underline{u}_{\hat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda$ とおく。補題 2.6.3 より、

3 $N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献

[Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.