Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi *

28 January 2015

概要

以下の非斉次半線形楕円型方程式のディリクレ境界条件下の正値解を考察する．

$$-\Delta u + au = bu^p + \lambda f \ \text{ in } \Omega.$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域，$f \in H^{-1}(\Omega)$，$f \geq 0$ in Ω，$a, b \in L^\infty(\Omega)$，$b \geq 0$ in Ω とし，$\lambda > 0$ はパラメータである．この方程式が正値解を複数個持つか否かが，次元 N と a により変化する．特に，b が内点 $x_0 \in \Omega$ で最大値をとり，x_0 のある近傍上 b は連続かつ $q, m > 0$ を用いて a が $a(x) = m|x - x_0|^q + o(|x - x_0|^q)$ と表されるとき，$3 \leq N < 6 + 2q$ において，方程式は正値解を複数個を持つ．本論文の証明は，解の存在は変分法，解の非存在はポホザエフの議論による．

1 はじめに

N を 3 以上の自然数とする．$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする．境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級とする．$p = (N+2)/(N-2)$ とする．$f \in H^{-1}(\Omega)$ は，$f \geq 0$，$f \not\equiv 0$ をみたすとする．$a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする．κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ境界条件下の第 1 固有値とする．$a \geq \kappa$ in Ω をみたす $\kappa > -\kappa_1$ が存在すると仮定する．また，$b \geq 0$ in Ω，$b \not\equiv 0$ と仮定する．$\lambda > 0$ をパラメータとする．以下の方程式を考察する．

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\spadesuit$}_\lambda$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ が $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であるとは，任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)\, dx = \int_\Omega bu^p \psi\, dx + \lambda \int_\Omega f\psi\, dx$$

が成立することをいう．

1.1 先行研究

$p = (N-2)/(N+2)$ はソボレフ臨界指数と呼ばれる．ソボレフ臨界指数 p については，ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ はコンパクトではないことがよく知られている．そのため，ソボレフ臨界指数を持つ半線形楕円型偏微分方程式の正値解の存在・非存在は，次元 N や領域の形状に依存していることが知られている．本小節では，特に次元 N に注目し，正値解についての主要な先行研究を取り上げる．

まずは，以下の斉次方程式を取り上げる．

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa u = u^p & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

* Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. Email: kazune@ms.u-tokyo.ac.jp

ポホザエフの恒等式 [Poh65] を用いると，$\kappa \geq 0$ においては (1.1) が非自明な弱解を持たないことが分かる．一方で，$\kappa < 0$ の場合は複雑である．ブレジス – ニレンベルグは [BN83] において，以下を示した．

1. $N \geq 4$ の場合，$-\kappa_1 < \kappa < 0$ であることは，(1.1) が非自明な弱解を持つことと同値である．
2. $N = 3$ かつ Ω が球である場合，$-\kappa_1 < \kappa < -\kappa_1/4$ であることは，(1.1) が非自明な弱解を持つことと同値である．

(1.1) は，領域の次元 N により解の存在・非存在が異なる例となっている．

(1.1) では，自明解と，ある 1 つの非自明解の存在が議論された．一方で，自明解を持たない方程式ではしばしば，非自明解が複数個存在するか否かが焦点となる．次の方程式は，その例である．

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(1+u)^p & \text{in } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

(1.2) の弱解 $\underline{u}_\lambda$ が minimal solution であるとは，(1.2) の任意の弱解 u に対し，$u \geq \underline{u}_\lambda$ in Ω をみたすことをいう．(1.2) の minimal solution については，[BN83] より前に，次の条件 (i) – (iii) をみたす $0 < \overline{\lambda} < \infty$ の存在が知られている．

(i) $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において，(1.2) は minimal solution を持つ．
(ii) $\lambda = \overline{\lambda}$ において，(1.2) は唯一の弱解を持つ．
(iii) $\lambda > \overline{\lambda}$ において，(1.2) は弱解を持たない．

弱解の存在する λ の上限 $\overline{\lambda}$ は一般に extremal value と呼ばれる．この事実はキーナー – ケラー [KK74] によって一般的な枠組みで示された．クランダール – ラビノビッツ [CR75] は [KK74] の仮定をより簡潔にした．さて minimal solution 以外の弱解は，便宜上 second solution と呼ばれる．[BN83] は，second solution について以下の結果を与えた．すなわち，任意の $N \geq 3$ に対し，$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において，(1.2) は second solution を持つ．この事実は，[BN83] 以前より，Ω が球である場合に限っては，ジョゼフ – ルンドグレン [JL73] により事実上証明がなされていた．球対称性から常微分方程式の議論に帰着され，示された．しかし，[BN83] では Ω の形状を限定しなかった．道具として，パレ・スメイル条件 (以下，(PS) 条件) を課さない峠の定理 [AR73] とソボレフ最良定数とタレンティー関数の関係 [Tal76] を用いており，この部分が [BN83] の新しいところであった．任意の $N \geq 3$ に対し (1.2) の second solution の結果は同一である．しかし，[BN83] の証明においては，(1.1) と同様，領域の次元 N が鍵となっている．$N = 3$，$N = 4$，$N \geq 5$ では，それぞれ議論が異なっている．

以上は斉次方程式の例であった．以下ではパラメータ λ が非斉次項につく先行研究を取り上げる．$(\spadesuit)_\lambda$ において，$a = 0$，$b = 1$ としたものは，以下の方程式である．

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

タランテッロは [Tar92] において，(1.3) に少なくとも 2 つの弱解が存在することが示された．ここでも (PS) 条件を課さない峠の定理およびソボレフ最良定数とタレンティー関数の関係が道具として用いられている．(1.3) の方程式に，適当な意味で p より「低い」オーダーを持つ項 $g(x,u)$ を加えた

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + g(x,u) + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

についても，曹 – 周 [CZ96] により少なくとも 2 つの弱解が存在することが示された．

$(\spadesuit)_\lambda$ において，$a = \kappa$，$b = 1$ としたものは，以下の方程式である．

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa u = u^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ \qquad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

内藤 – 佐藤 [NS12] は，(1.5) について以下の事実を示した．

1. 全ての $N \geq 3$，$\kappa > -\kappa_1$ に対し，(1.5) の extremal value $\overline{\lambda}$ は $0 < \overline{\lambda} < \infty$ をみたし，任意の $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，(1.5) の minimal solution が存在する．
2. $-\kappa_1 < \kappa \leq 0$ のとき，全ての $N \geq 3$ に対し，任意の $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，(1.5) の second solution が存在する．
3. $\kappa > 0$ のとき，$N = 3,4,5$ については，任意の $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，(1.5) の second solution が存在する．一方，$N \geq 6$ については，Ω が球かつ $f \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ が球対称のときは十分小さい $\lambda > 0$ に対しては，(1.5) の解は一意的である．

特に 3. は，領域の次元 N により (1.5) の解の存在・非存在が異なることを主張しており，目を引くところである．

1.2　主要な結果と証明の方針

本論文は，内藤 – 佐藤 [NS12] の議論を踏襲し，$(\spadesuit)_\lambda$ を考察する．まずは minimal solution について以下の定理が従う．

定理 1.1. 1. 以下の (i), (ii) をみたす $0 < \overline{\lambda} < \infty$ が存在する．
 (i) $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution を持つ．
 (ii) $\lambda > \overline{\lambda}$ において，$(\spadesuit)_\lambda$ は弱解を持たない．
2. 正の数 λ_1, λ_2 が $\lambda_1 < \lambda_2 < \overline{\lambda}$ をみたすと仮定する．$\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ に対応する $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\lambda_1}$，$\underline{u}_{\lambda_2}$ について，$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する．
3. $\lambda \searrow 0$ のとき，$\underline{u}_\lambda \to 0$ in $H_0^1(\Omega)$ が成立する．

$\lambda = \overline{\lambda}$ における弱解を extremal solution という．$(\spadesuit)_\lambda$ の場合，extremal solution について，以下が成立する．

定理 1.2. $(\spadesuit)_\lambda$ には extremal solution が存在する．とくに，$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution が存在する．また，$b > 0$ in Ω ならば，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は，$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution に限る．

続けて second solution の結果を述べる．その前に，比較のため内藤 – 佐藤 [NS12] の結果を $(\spadesuit)_\lambda$ に即して述べる．

定理 1.3 ([NS12] Theorem 1.3). $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．Ω 上 $a = \kappa$，$b = 1$ は定数とする．以下の (i), (ii) のいずれかの成立を仮定する．

(i) $-\kappa_1 < \kappa \leq 0$ かつ $N \geq 3$.
(ii) $\kappa > 0$ かつ $N = 3,4,5$.

このとき，$(\spadesuit)_\lambda$ は，minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ を持ち，$\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ in Ω が成立する．

$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution について，本論文では，以下の定理を証明する．

定理 1.4. $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．b は Ω 上のある点 x_0 で最大値 $M = \|b\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$ を達成するものと仮定する．$r_0 > 0$ が存在し，$\{|x - x_0| < 2r_0\} \subset \Omega$，かつ，$\{|x - x_0| < r_0\}$ 上，b は連続であり a は

$$a(x) = m_1 + m_2|x - x_0|^q + o(|x - x_0|^q) \tag{1.6}$$

であると仮定する．ここで $q > 0$，$m_1 > \kappa$，$m_2 \neq 0$ は定数である．さらに，以下の (i) – (iv) のいずれかの成立を仮定する．

(i) $m_1 < 0$，かつ，$N \geq 3$.
(ii) $m_1 > 0$，かつ，$N = 3,4,5$.
(iii) $m_1 = 0$，かつ，$m_2 < 0$，かつ，$N \geq 3$.
(iv) $m_1 = 0$，かつ，$m_2 > 0$，かつ，$3 \leq N < 6 + 2q$.

このとき，$(\spadesuit)_\lambda$ は，minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ を持ち，$\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ in Ω が成立する．

本論文の定理 1.4 の意義は大きく 2 つあると思われる．1 つは，second solution の存在が，b の最大点を達成する近傍での性質で決定されていることを示している点である．もう 1 つは，解の存在・非存在が変化する次元 N が，a に由来するパラメータで変化しうることを示している点である．特に後者は新しい点であると思われる．内藤 – 佐藤の定理 1.3 では，$a = \kappa$

および $b = 1$ であるとき，κ が非正から正へと変化すると，$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution が存在する次元 $N \geq 3$ が，$N < \infty$ から $N < 6$ へと変化することを示している．この観点から本論文の定理 1.4.4 を見ると，$a = m_2|x-p|^q + o(|x-x_0|^q)$ $(m_2 > 0)$ は，定数 $a = \kappa$ が非正から正へと変化する，いわば「中間部分」と見ることができる．$N < 6+2q$ で $(\spadesuit)_\lambda$ の second solution が存在するという結果は，「$N < \infty$」と「$N < 6$」の「中間部分」の結果に相当すると考えられる．しかもこの $q > 0$ は a に由来するパラメータであり，$6+2q$ は 6 より大きい値を全てとり得る．いわば「$N < \infty$」と「$N < 6$」の「中間部分」の例を全て与えているとも言える．

$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution が $(0,\overline{\lambda})$ 上一様には存在しない場合もある．

定理 1.5.

1. $N \geq 3$ とする．$b > 0$ in Ω であると仮定する．このとき，$0 < \lambda^* < \overline{\lambda}$ が存在し，任意の $\lambda^* \leq \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda$ を持ち，$\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ in Ω が成立する．
2. $N \geq 6$ とする．$R > 0$ とし，$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$ と仮定する．$a = a(|x|)$，$b = b(|x|)$，$f = f(|x|)$ は Ω 上球対称とする．また，$0 < \alpha < 1$ とし，$a, b \in C^1([0,R])$，$f \in C^\alpha([0,R])$ であり，a は $[0,R]$ 上単調増加，b, f は $[0,R]$ 上単調減少と仮定する．また，$a(0), b(0) > 0$ とする．このとき，$0 < \lambda_*$ が存在し，任意の $0 < \lambda < \lambda_*$ に対し，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解を持たない．

2. の仮定に $b > 0$ in Ω を加えたものは，1. の仮定をみたす．このとき，$(\spadesuit)_\lambda$ について，second solution を持つ $\lambda \in [\lambda^*, \overline{\lambda})$ と second solution を持たない $\lambda \in (0, \lambda_*]$ が両方存在することになる．

定理 1.1 を証明するために，まず陰関数定理を用い，$\lambda > 0$ が十分小さいときに，$H_0^1(\Omega)$ の原点付近で $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解が存在することを示す．次に，既に得られた $\lambda = \widehat{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の解が $\lambda < \widehat{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の優解であることを示し，この優解を用いて，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ をある点列の極限として得る．最後に，λ によらないある $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ と $\underline{u}_\lambda$ を比較し，minimal solution が存在する λ が定数で抑えられることを示す．

定理 1.2 を証明するために，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution における線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu p b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \ \ \phi \in H_0^1(\Omega)$$

を考察する．特に，第 1 固有値 $\mu_1(\lambda)$ の値を詳しく調べる．$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ では $\mu_1(\lambda) > 1$ であることが効き，extremal solution の存在が分かる．また，$b > 0$ in Ω ならば，$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ であることが効いて，extremal solution の一意性が分かる．

$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution $\overline{u}_\lambda$ を見出すために，以下の方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ を考察する．

$$\begin{cases} -\Delta v + av = b\left((v+\underline{u}_\lambda)^p - \underline{u}_\lambda^p\right) & \text{in } \Omega, \\ \qquad v > 0 & \text{in } \Omega, \\ \qquad v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\heartsuit$}_\lambda$$

定理 1.4 を証明するために，まず，$(\heartsuit)_\lambda$ の「エネルギー」を表す汎関数 I_λ を定義する．I_λ に (PS) 条件を課さない峠の定理を用いることを考える．具体的には，まず，峠における「エネルギー」c が $0 < c < S^{N/2}/N \, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{(N-2)/2}$ をみたすことをタレンティー関数を用いることで示す．ここで S は以下で定義されるソボレフ最良定数である．

$$S = \inf_{u \in H_0^1(V), u \not\equiv 0} \frac{\|Du\|_{L^2(V)}^2}{\|u\|_{L^{p+1}(V)}^2} \quad (V \subset \mathbb{R}^N \text{ は領域}).$$

次に，この c について，I_λ が $(\mathrm{PS})_c$ 条件をみたすことを示す．その他の仮定も確かめ，(PS) 条件を課さない峠の定理を用いると，I_λ の臨界点 v が得られる．v が $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である．この v を用いて，$(\spadesuit)_\lambda$ の second solution を $\overline{u}_\lambda = v + \underline{u}_\lambda$ と構成する．

定理 1.5.1 も，おおよそ上記の方法で分かるが，峠における「エネルギー」c の条件は，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution における線形化固有値問題の第 1 固有関数を考察することで得られる．定理 1.5.2 は，以下の通りに証明される．まずは $\lambda > 0$ が小さいところでは，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution も $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解も古典解になることを確かめる．すると [GNN79] より，球対称解のみ考慮すれば十分である．方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ は，動径 r についての常微分方程式に帰着する．その解 v が存在するならば，ポホザエフ式の議論から分かるある等式をみたす必要がある．しかし $\lambda > 0$ が十分小さい時は，$C^{2+\alpha}(\Omega)$ の原点付近に minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が存在すること，それゆえに $\lambda \searrow 0$ のとき $\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ となることから，λ が十分小さいとき v は前述の等式をみたさなくなる．こうして解の非存在が分かる．

1.3　本論文の構成

§2 では，minimal solution について論じ，定理 1.1 を証明する．§3 では，extremal solution について論じ，定理 1.2 を証明する．§4，§5 では，定理 1.4 を 2 つの命題に分割して証明する．このうち §4 は，(PS) 条件を課さない峠の定理に関係する部分であり，§5 は，タレンティー関数を用いて峠の「エネルギー」を抑える部分である．§6 では，定理 1.5.1 を，§7 では，定理 1.5.2 を証明する．

1.4　記号

ルベーグ空間を $L^q(\Omega)$ $(1 \le q \le \infty)$ と表記する．ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する．トレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H_0^1(\Omega)$ と表記する．ヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha < 1)$ と表記する．コンパクト台を持つ Ω 上の C^∞ 級関数全体を $C_c^\infty(\Omega)$ と表記する．$k \in \mathbb{N}$ に対し，Ω 上の C^k 級関数全体を $C^k(\Omega)$ と表記する．$k = 0$ のとき，$C^0(\Omega) = C(\Omega)$ は Ω 上の連続関数全体である．

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する．ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する．$H_0^1(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記する．$f \in H^{-1}$ の $u \in H_0^1(\Omega)$ への作用を $\langle f, u\rangle$ と表記する．$H_0^1(\Omega)$ 上の標準的なノルム $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ を

$$\|w\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega \left(|Dw|^2 + w^2\right) dx\right)^{1/2}$$

とする．$H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|_\kappa$ を，$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_\Omega \left(|Dw|^2 + \kappa w^2\right) dx\right)^{1/2}$$

と定める．$\kappa > -\kappa_1$，Ω が有界領域であることにより，ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムとなる．また，$H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を，$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |Dw|^2 dx\right)^{1/2}$$

と定める．やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムとなる．

$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha_+ = \max\{\alpha, 0\}$，$\alpha_- = \max\{-\alpha, 0\}$ と定める．文字 C および C に飾りをつけたものは重要でない正の定数を表す．これらは式変形中，断りなしに導入され，断りなしに取りかえることがある．

2　minimal solution の存在と性質

本節では，$(\spadesuit)_\lambda$ の解のうち，minimal solution について取り扱う．まずは minimal solution を定義する．

記号 2.1.　$\lambda > 0$ に対し，

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\spadesuit)_\lambda \text{ の弱解である }\}$$

と定める．

定義 2.2.　$\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは，任意の $u \in S_\lambda$ に対し，$\underline{u}_\lambda \le u$ in Ω が成立することをいう．

記号 2.3.　$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution を $\underline{u}_\lambda$ と表記する．

2.1　$H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として，$\lambda > 0$ が十分小さいときに，$(\spadesuit)_\lambda$ が弱解を持つことを，陰関数定理を用いて示す．

補題 2.4. 1. $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して，$0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し，$(\spadesuit)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ．また，次式が成立する．

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

2. さらに，$0 < \alpha < 1$ とし，$f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する．このとき，1. の弱解 u_λ は，$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ をみたし，次式が成立する．

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

証明. 1. $\Phi\colon (0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda,u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \tag{2.1}$$

とする．Φ の u についてのフレッシェ微分は，$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\Phi_u(\lambda,u)\colon w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1} w \tag{2.2}$$

と書かれる．特に，

$$\Phi_u(0,0)w = -\Delta w + aw.$$

が成立する．$a > -\kappa_1$ により，$\Phi_u(0,0)\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は可逆である．ゆえに，陰関数定理より，$\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して，$0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し，$\Phi(\lambda,u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一つ存在し，次をみたす．

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり，u_λ は，以下の方程式の弱解である．

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$ であり，$a > -\kappa_1$ であるから，強最大値原理により，$u_\lambda > 0$ in Ω が成立する．よって，u_λ は $(\spadesuit)_\lambda$ の U における唯一の弱解である．

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき，$\Phi\colon (0,\infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ を，(2.1) で定義する．以下，1. の証明と同様にすると，$u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \to 0$ $(\lambda \searrow 0)$ が示される． ■

以下では基本的に，1. の結果を使用し，弱解の枠組みで議論する．2. の結果は，§ 7 で使用する．

2.2 優解との関係

続いて，ある $\lambda = \widehat{\lambda}$ で $(\spadesuit)_\lambda$ が優解をもつときに，$0 < \lambda \leq \widehat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す．

補題 2.5. $\widehat{\lambda} > 0$ とする．以下をみたす $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する．

$$\begin{cases} -\Delta\widehat{u} + a\widehat{u} \geq b\widehat{u}^p + \widehat{\lambda} f & \text{in } \Omega, \\ \widehat{u} > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

このとき，$\lambda \in (0,\widehat{\lambda}]$ に対し，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が存在する．また，$\underline{u}_\lambda < \widehat{u}$ in Ω が成立する．

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ を，次の通りに帰納的に定める．$u_0 \equiv 0$ とする．u_n が定まっているときに，u に関する線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める．

u_{n+1} が (2.5) の唯一の弱解であることを確かめる．ソボレフ埋め込みにより，$u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ であるから，$u_n^p \in L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である．$b \in L^\infty(\Omega)$，$f \in H^{-1}(\Omega)$ より，$bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である．$a > -\kappa_1$ と合わせて，(2.5) には唯一の弱解が存在する．

ここで，次の事実を，n についての数学的帰納法を用いて証明する．

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \ \text{ in } \Omega. \tag{2.6}$$

$n = 0$ のときは，$\widehat{u} > 0$ in Ω であることから，(2.6) が成立する．$n \in \mathbb{N}$ とする．n における (2.6) の成立を仮定する．

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} &= b u_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + a u_n &= b u_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと，次式が成立する．

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である．ゆえに強最大値原理より，$u_{n+1} > u_n$ in Ω である．また，

$$\begin{aligned} -\Delta\widehat{u} + a\widehat{u} &\geq b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + a u_{n+1} &= b u_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると，$\widehat{u} > u_{n+1}$ in Ω も従う．以上により，任意の $n \in \mathbb{N}$ について (2.6) の成立が示された．

続いて，$\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す．u_{n+1} は (2.5) の弱解であるから，任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し，次式が成立する．

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + a u_{n+1} \psi) dx = \int_\Omega b u_n^p \psi dx + \lambda \int_\Omega f \psi dx. \tag{2.7}$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると，次式が成立する．

$$\int_\Omega (|Du_{n+1}|^2 + a u_{n+1}^2) dx = \int_\Omega b u_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_\Omega f u_{n+1} dx.$$

ここで，右辺は，次の通りに評価される．

$$\int_\Omega b u_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_\Omega f u_{n+1} dx \leq \int_\Omega b\widehat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f\widehat{u} dx < \infty. \tag{2.8}$$

ここで $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した．また左辺について，

$$\int_\Omega (|Du_{n+1}|^2 + a u_{n+1}^2) dx \geq \int_\Omega \left(|Du_{n+1}|^2 + \kappa u_{n+1}^2\right) dx = \|u_{n+1}\|_\kappa \tag{2.9}$$

もわかる．$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである．したがって，(2.8)，(2.9) より，$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である．

ゆえに，必要ならば部分列をとることにより，$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して，$n \to \infty$ とすると，以下が成立する．

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1),$$

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ a.e. in } \Omega. \tag{2.11}$$

ここで u が $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であることを示す．(2.10) により，次式が成立する．

$$\int_\Omega (Du_{n+1} \cdot D\psi + a u_{n+1} \psi) dx \xrightarrow{n \to \infty} \int_\Omega (Du \cdot D\psi + a u \psi) dx.$$

また，$b \in L^\infty(\Omega)$，$\widehat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より，

$$|b u_n \psi| \leq b\widehat{u}^p |\psi| \ \text{ a.e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である．(2.11) より，優収束定理から，次式が得られる．

$$\int_\Omega b u_n^p \psi\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b u^p \psi\, dx.$$

したがって，(2.7) で $n \to \infty$ とすると次式が得られる．

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)\, dx = \int_\Omega b u^p \psi\, dx + \lambda \int_\Omega f\psi\, dx. \tag{2.12}$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから，$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解である．

最後に，u は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であることを示す．$\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解とする．このとき，(2.6) と同様の議論により，$\widetilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される．$n \to \infty$ として，$\widetilde{u} \geq u$ in Ω となる．よって u は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution である．■

補題 2.5 から，次の事実が従う．

補題 2.6. 1. $S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ をみたす $\lambda_0 > 0$ が存在すると仮定する．このとき，$0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し，$S_\lambda \neq \emptyset$ となる．

2. $\lambda > 0$ とする．$S_\lambda \neq \emptyset$ ならば，$(\spadesuit)_\lambda$ には minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が存在する．
3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ とする．$S_{\lambda_1} \neq \emptyset$，$S_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば，$\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について，$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する．
4. 補題 2.4 における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解を u_λ とする．このとき，$u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ である．

証明. 1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする．$\widehat{u} = u_{\lambda_0}$ とし，補題 2.5 を適用すると，結論が得られる．

2. $u_\lambda \in S_\lambda$ とする．$\widehat{u} = u_\lambda$ として補題 2.5 を適用すると，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ が得られる．
3. $\widehat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ として，補題 2.5 を適用すると，$\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる．

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} &= b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} &= b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f \end{aligned}$$

の両辺を引くと，次式が成立する．

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_2}) + (\lambda_2 - \lambda_1) f.$$

右辺が 0 以上であること，および，$a > -\kappa_1$ により，強最大値原理を用いると，$\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が従う．

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より，$S_\lambda \neq \emptyset$ である．したがって，2. より，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution $\underline{u}_\lambda$ をもつ．よって，(2.12) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とおくと，以下が得られる．

$$\int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + a\underline{u}_\lambda^2 \right) dx = \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^p dx + \lambda \int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx. \tag{2.13}$$

ここで，minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが，$\lambda \searrow 0$ のとき，0 に収束することを示す．

$$\int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + a\underline{u}_\lambda^2 \right) dx \geq \int_\Omega \left(|D\underline{u}_\lambda|^2 + \kappa\underline{u}_\lambda^2 \right) dx = \left\|\underline{u}_\lambda\right\|_\kappa^2 \geq C \left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから，$C > 0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい．また，$\underline{u}_\lambda \leq u_\lambda$ in Ω より，次式が従う．

$$\begin{aligned} \int_\Omega b\underline{u}_\lambda^p dx + \lambda \int_\Omega f\underline{u}_\lambda dx &\leq \int_\Omega b u_\lambda^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f u_\lambda dx \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

ここで，$C', C'' > 0$ は，$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である．以上より，次式が成立する．

$$C \left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

補題 2.4 より，$\lambda \searrow 0$ のとき，$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ が成立する．ゆえに，$\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる．再び補題 2.4 によると，$\lambda > 0$ が十分小さいとき，u_λ は $H_0^1(\Omega)$ の原点のある近傍における $(\spadesuit)_\lambda$ の唯一の弱解であった．したがって，このことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している． ■

2.3　解が存在する λ の有界性

補題 2.4 により，ある $\lambda > 0$ については，$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する．補題 2.6 により，$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ が見つかれば，それより小さい λ については，$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する．そこで，$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる．そのために次の定義をおく．

定義 2.7.　$\overline{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の **extremal value** という．

ここから先は，$\overline{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める．その準備として，$\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する．

記号 2.8.　$g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ \qquad\quad g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

の唯一の弱解と定める．強最大値原理により，$g_0 > 0$ in Ω である．

g_0 について，次の補題を示す．

補題 2.9.　固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu b(g_0)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \;\; \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第 1 固有値を μ_1 とする．このとき，$\mu_1 > 0$ である．また，μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち，$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものが存在する．

証明.　μ_1 はレイリー商により，

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a\psi^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{2.15}$$

と特徴付けられる．また，(2.15) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば，ϕ が μ_1 に付随する固有関数である．

(2.15) より，以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ が存在する．

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx = 1, \tag{2.16}$$

$$\int_\Omega \left(|D\psi_n|^2 + a\psi_n^2\right) dx \searrow \mu_1. \tag{2.17}$$

$a > \kappa$ であるから，(2.17) の左辺は $\|\psi_n\|_\kappa^2$ 以上である．$\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから，$\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である．

ゆえに，必要ならば部分列をとることにより，$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して，$n \to \infty$ とすると，以下が成立する．

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \;\text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{2.18}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \;\text{ in } L^q(\Omega) \;\; (q < p+1), \tag{2.19}$$

$$\psi_n \longrightarrow \phi_1 \;\text{ a.e. in } \Omega. \tag{2.20}$$

(2.18) より，$H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から，次式が成立する．

$$\liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

ゆえに，(2.19) と合わせて，次式が得られる．

$$\mu_1 \geq \int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx. \tag{2.21}$$

また，ソボレフ不等式より，$H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である．したがって，$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である．よって，必要ならば部分列をとると，$\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる．一方 (2.20) から，$\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する．したがって，次式が成立する．

$$\psi_n^2 \longrightarrow \phi_1^2 \ \text{ weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より，$b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である．$\left(L^{N/(N-2)}(\Omega)\right)^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より，次式が成立する．

$$\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\psi_n^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx. \tag{2.22}$$

(2.22) の証明は，[Wil96] の Lemma 2.13 によった．(2.21) と (2.22) により，次式が従う．

$$\mu_1 \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega b(g_0)^{p-1}\phi_1^2 dx}. \tag{2.23}$$

(2.15) により，(2.23) の不等号は実際には等号が成立する．すなわち，(2.15) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される．よって $\mu_1 > 0$ である．

(2.15) の右辺の形から，ϕ_1 が (2.15) の右辺の下限を達成するならば，$|\phi_1|$ も下限を達成する．すなわち，$\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第 1 固有関数がある．この ϕ_1 について，次式が成立する．

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \geq 0 \ \text{ in } \Omega.$$

ゆえに，強最大値原理により，$\phi_1 > 0$ in Ω となる． ■

g_0 を用いて，次の命題を証明する．

命題 2.10.　$\overline{\lambda}$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal value とする．このとき，$0 < \overline{\lambda} < \infty$ が成立する．

証明.　補題 2.4 により，$\lambda_0 > 0$ が存在し，$0 < \lambda < \lambda_0$ に対して，$(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する．ゆえに $\overline{\lambda} > 0$ である．そこで，$\overline{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する．

$\lambda > 0$ は，$S_\lambda \neq \emptyset$ をみたすものとする．$u \in S_\lambda$ とし，$v = u - \lambda g_0$ とする．このとき，次式が成立する．

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって，強最大値原理より，$v > 0$ in Ω である．つまり，$u > \lambda g_0$ in Ω が従う．よって，以下が成立する．

$$-\Delta u + au \geq bu^p > b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \ \text{ in } \Omega. \tag{2.24}$$

一方，補題 2.9 の $\mu_1 > 0$，$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$，について，次式が成立する．

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \ \text{ in } \Omega. \tag{2.25}$$

そこで，(2.24) $\times \phi_1$ − (2.25) $\times u$ を Ω 上積分すると，次式が得られる．

$$0 > (\lambda^{p-1} - \mu_1)\int_\Omega b(g_0)^{p-1}u\phi_1 dx.$$

ここで，$b \geq 0$ in Ω，$b \not\equiv 0$，$g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから，右辺の積分は正である．ゆえに，$\lambda^{p-1} - \mu_1 < 0$ である．つまり，$\lambda < \mu_1^{1/(p-1)}$ となる．$\lambda > 0$ は $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから，$\overline{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ が従う． ■

証明 (定理 1.1).

1. $\overline{\lambda}$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal value とする．命題 2.10 により，$0 < \overline{\lambda} < \infty$ である．定義 2.7 より，(i), (ii) が成立する．
2. 補題 2.6.3 より従う．
3. 補題 2.4.1 より従う． ■

2.4　minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega,\ \ \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.26}$$

を考察する．特に第 1 固有値，第 1 固有関数について論ずる．

記号 2.11.　$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (2.26) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく．

補題 2.12.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．このとき，以下が成立する．

1. $\mu_1(\lambda) > 0$ である．また，$\mu_1(\lambda)$ に付随する (2.26) の固有関数 ϕ_1 のうち，$\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものが存在する．
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し，次式が成立する．

$$\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a\psi^2\right) dx \geq \mu_1(\lambda)\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx. \tag{2.27}$$

　また，ψ が $\mu_1(\lambda)$ に付随する固有関数であることと (2.27) の等号が成立することは同値である．

証明.　1.　補題 2.9 と同様である．

2.　$\mu_1(\lambda)$ のレイリー商による特徴付け

$$\mu_1(\lambda) = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a\psi^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\psi^2 dx} \tag{2.28}$$

から (2.27) が成立する．(2.27) の等号が成立することは，ψ が (2.28) の右辺の下限を達成することと同値であり，ψ が $\mu_1(\lambda)$ に付随する固有関数であることと同値である．■

補題 2.12 から，$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ ならば $\mu_1(\lambda) > 0$ であることがわかる．次の補題では，方程式 $(\spadesuit)_\lambda$ に着目し，$\mu_1(\lambda)$ についてより多くの情報を引き出す．

補題 2.13.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．このとき，$\mu_1(\lambda) > 1$ である．

証明.　$\widehat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \widehat{\lambda} < \overline{\lambda}$ をみたすものとする．$z = \underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda$ とおく．補題 2.6.3 より，$z > 0$ in Ω である．

$$\begin{aligned} -\Delta\underline{u}_{\widehat{\lambda}} + a\underline{u}_{\widehat{\lambda}} &= b\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p + \widehat{\lambda} f, \\ -\Delta\underline{u}_\lambda + a\underline{u}_\lambda &= b\underline{u}_\lambda^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて，次式が得られる．

$$-\Delta z + az = b(\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p) + (\widehat{\lambda} - \lambda) f.$$

$x \geq 0$ に対し，$x \mapsto x^p$ は下に凸であるから，次式が従う．

$$\underline{u}_{\widehat{\lambda}}^p - \underline{u}_\lambda^p > p\underline{u}_\lambda^{p-1}(\underline{u}_{\widehat{\lambda}} - \underline{u}_\lambda) = p\underline{u}_\lambda^{p-1} z.$$

$(\widehat{\lambda} - \lambda) f \geq 0$ と合わせて，次式が得られる．

$$-\Delta z + az > bp\underline{u}_\lambda^{p-1} z \ \text{ in } \Omega. \tag{2.29}$$

$\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ とする．補題 2.12.1 の ϕ_1 について，

$$-\Delta\phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 pb\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_1 \ \text{ in } \Omega \tag{2.30}$$

が成立する．(2.29) $\times \phi_1 -$ (2.30) $\times z$ を Ω 上積分すると，

$$0 > (1-\mu_1)p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_1 z dx$$

が従う．ここで，$b \geq 0$ in Ω，$b \not\equiv 0$，$\underline{u}_\lambda, z, \phi_1 > 0$ in Ω であるから，右辺の積分は正である．ゆえに，$1-\mu_1 < 0$ である．つまり $\mu_1 > 1$ である． ■

3 extremal solution の存在と一意性

本節では，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution について考察する．$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ を考察する．

定義 3.1. $\overline{\lambda}$ を $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal value とする．$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解を $(\spadesuit)_\lambda$ の **extremal solution** という．

3.1 extremal solution の存在

本小節では，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在することを示す．このために，まず以下の集合を考察する．

$$K = \{\underline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}. \tag{3.1}$$

補題 3.2. (3.1) の K は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である．

証明. $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を記号 2.8 のものとする．$v_\lambda = \underline{u}_\lambda - \lambda g_0$ と定める．すると，次式が成立する．

$$-\Delta v_\lambda + a v_\lambda = b(\underline{u}_\lambda - \lambda g_0)^p \quad \text{in } \Omega.$$

ゆえに，$\psi \in H_0^1(\Omega)$ とすると，次式が成立する．

$$\int_\Omega (Dv_\lambda \cdot D\psi + a v_\lambda \psi) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p \psi dx.$$

$\psi = v_\lambda$ とおくと，次式が得られる．

$$\int_\Omega \left(|Dv_\lambda|^2 + a v_\lambda^2\right) dx = \int_\Omega b(v_\lambda + \lambda g_0)^p v_\lambda dx. \tag{3.2}$$

ここで，次の事実を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C > 0$ が存在し，任意の $s, t \geq 0$ に対し，次式が成立する．

$$(t+s)^p \leq (1+\epsilon)(t+s)^{p-1}t + Cs^p. \tag{3.3}$$

まず，$(t+s)^{p-1}s$ にヤングの不等式を用いる．$q, r > 1$ は，$q^{-1} + r^{-1} = 1$ をみたすものとする．任意の $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ に対し，$\widetilde{C} > 0$ が存在し，次式が成立する．

$$(t+s)^{p-1}s \leq \widetilde{\epsilon}\left((t+s)^{p-1}\right)^q + \widetilde{C}s^r.$$

ここで $q = p/(p-1)$ とおくと，$r = p$ である．ゆえに，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
(t+s)^{p-1}s &\leq \widetilde{\epsilon}(t+s)^p + \widetilde{C}s^p \\
&= \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}t + \widetilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}s + \widetilde{C}s^p, \\
(t+s)^{p-1}s &\leq \frac{\widetilde{\epsilon}}{1-\widetilde{\epsilon}}(t+s)^{p-1}t + \frac{\widetilde{C}}{1-\widetilde{\epsilon}}s^p.
\end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\epsilon = \widetilde{\epsilon}/(1-\widetilde{\epsilon})$ となる $0 < \widetilde{\epsilon} < 1$ は存在する．この $\widetilde{\epsilon}$ に対し，$C = \widetilde{C}/(1-\widetilde{\epsilon})$ とすると，次式が成立する．

$$(t+s)^{p-1}s \leq \epsilon(t+s)^{p-1}t + Cs^p.$$

$(t+s)^p = (t+s)^{p-1}s + (t+s)^{p-1}t$ より，(3.3) が得られる．以上の (3.3) の証明は [NS07] の Lemma 4.1 によった．

(3.3) より，次式が成立する．

$$\int_\Omega b(v_\lambda+\lambda g_0)^p v_\lambda dx \le (1+\epsilon)\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v_\lambda^2 dx + C\lambda^p\int_\Omega bg_0^p v_\lambda dx. \tag{3.4}$$

(3.2) の左辺を I とおく．補題 2.12.2，補題 2.13 から，次式が得られる．

$$I \ge \mu_1 p\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}v_\lambda^2 dx > p\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}v_\lambda^2 dx.$$

すなわち，次式が得られる．

$$\int_\Omega b(\underline{u}_\lambda)^{p-1}v_\lambda^2 dx < \frac{I}{p} \tag{3.5}$$

また，$g_0, v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$，及び，ヘルダーの不等式，ソボレフの不等式から，次式が得られる．

$$\int_\Omega bg_0^p v_\lambda dx \le \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|g_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}^p\|v_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le C\|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le C'\|v_\lambda\|_\kappa. \tag{3.6}$$

ここで $C, C' > 0$ は λ によらない．

(3.2)，(3.5)，(3.6) から，次式が従う．

$$I < \frac{1+\epsilon}{p}I + \overline{\lambda}^p C\|v_\lambda\|_\kappa.$$

$\epsilon > 0$ を $(1+\epsilon)/p < 1$ となるよう小さくとれば，$I \le C\|v_\lambda\|_\kappa$ となる．ここで $I \ge \|v_\lambda\|_\kappa^2$，$v_\lambda \not\equiv 0$ であるから，$\|v_\lambda\|_\kappa \le C$ である．$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は同値であるから，$\{v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \overline{\lambda}\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である．v_λ の定め方から $\underline{u}_\lambda = v_\lambda + \lambda g_0$ であるため，次の式が成立する．

$$\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} + \overline{\lambda}\|g_0\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

右辺は λ によらない定数で抑えられる．従って，(3.1) の K は，$H_0^1(\Omega)$ の有界集合である． ■

$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のときの $\underline{u}_\lambda$ の極限をとることで，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution を構成する．

命題 3.3. 1. $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する．とくに，$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する．

2. $\lambda > 0$ とする．$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき，$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a. e. in Ω となる．

証明. 1. 正の実数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ は，$\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする．$u_n = \underline{u}_{\lambda_n}$ とかく．u_n は $\lambda = \lambda_n$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解であるから，任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し，次式が成立する．

$$\int_\Omega (Du_n\cdot D\psi + au_n\psi)dx = \int_\Omega bu_n^p\psi dx + \lambda\int_\Omega f\psi dx. \tag{3.7}$$

補題 3.2 より，$\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である．ゆえに，必要ならば部分列をとることにより，$u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して，$n \to \infty$ とすると，以下が成立する．

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$
$$u_n \longrightarrow u \ \text{ in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1),$$
$$u_n \longrightarrow u \ \text{ a. e. in } \Omega. \tag{3.9}$$

u が $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution であることを示す．(3.8) により，次式が成立する．

$$\int_\Omega (Du_n\cdot D\psi + au_n\psi)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega (Du\cdot D\psi + au\psi)dx.$$

補題 2.6.3 と (3.9) により，$u_n \le u$ in Ω となる．とくに，$u > 0$ in Ω である．(3.9) より，単調収束定理を用いて，次式が得られる．

$$\int_\Omega bu_n^p\psi dx = \int_\Omega bu_n^p\psi_+ dx - \int_\Omega bu_n^p\psi_- dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega bu^p\psi_+ dx - \int_\Omega bu^p\psi_- dx = \int_\Omega bu^p\psi dx.$$

したがって，(3.7) で $n \to \infty$ とすると次式が得られる．

$$\int_\Omega (Du \cdot D\psi + au\psi)dx = \int_\Omega bu^p\psi dx + \overline{\lambda}\int_\Omega f\psi dx.$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから，$u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution である．すなわち，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する．補題 2.6.2 より，特に $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ が存在する．

2. 補題 2.6.3 より，$u_n = \underline{u}_{\lambda_n} < \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω である．$n \to \infty$ とすると，$u \leq \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω が得られる．$u \in S_{\overline{\lambda}}$ であり，$\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ は $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であるから，$u = \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ である．したがって，$n \to \infty$ のとき，$\underline{u}_{\lambda_n} \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a. e. in Ω となる．$\{\lambda_n\}$ の任意性により，$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき，$\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a. e. in Ω となる． ■

3.2　extremal solution の一意性

前小節では，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution の存在を示した．本小節では，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が $b > 0$ in Ω のときは唯一つに限ることを示す．

鍵となるのは，(2.26) の第 1 固有値 $\mu_1(\lambda)$ である．補題 2.13 では，$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において $\mu_1(\lambda) > 1$ となることを示した．$b > 0$ in Ω のときは，$\lambda = \overline{\lambda}$ において，この不等式が成立しなくなることを示す．その準備として，まずは λ が大きくなると $\mu_1(\lambda)$ が小さくなることを示す．

補題 3.4. λ_1, λ_2 は，$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \overline{\lambda}$ とする．このとき，$\mu_1(\lambda_1) \geq \mu_1(\lambda_2)$ が成立する．

証明. ϕ_1 を $\lambda = \lambda_1$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution に関する線形化固有値問題 (2.26) の第 1 固有関数とする．レイリー商より，$\mu_1(\lambda_1)$，$\mu_1(\lambda_2)$ は以下の通りに書ける．

$$\mu_1(\lambda_1) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb\underline{u}_{\lambda_1}^{p-1}\phi_1^2 dx},$$

$$\mu_1(\lambda_2) = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega),\ \psi \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\psi|^2 + a\psi^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb\underline{u}_{\lambda_2}^{p-1}\psi^2 dx}.$$

補題 2.6.3 より，$\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$ a. e. in Ω であるから，

$$\mu_1(\lambda_2) \leq \inf_{\phi_1 \in H_0^1(\Omega),\ \phi_1 \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb\underline{u}_{\lambda_2}^{p-1}\phi_1^2 dx} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega pb\underline{u}_{\lambda_1}^{p-1}\phi_1^2 dx} = \mu_1(\lambda_1)$$

が得られる． ■

補題 3.5. 1. $\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき，$\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\overline{\lambda})$ である．

2. $b > 0$ in Ω ならば，$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ である．

証明. 1. $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ を，$\mu_1(\overline{\lambda})$ に付随する $\phi_1 > 0$ in Ω をみたす固有関数とする．正の実数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ は $\lambda_n \nearrow \overline{\lambda}$ をみたすものとする．単調収束定理より，次式が成立する．

$$\int_\Omega bp(\underline{u}_{\lambda_n})^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \ \ (n \to \infty).$$

$\{\lambda_n\}$ の任意性より，次式が成立する．

$$\int_\Omega bp(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \ \ (\lambda \nearrow \overline{\lambda}). \tag{3.10}$$

$\epsilon > 0$ とする．(3.10) より，$\delta > 0$ が存在し，$0 < \overline{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば，

$$0 < \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx} - \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega bp(\underline{u}_{\lambda})^{p-1}\phi_1^2 dx} < \epsilon \tag{3.11}$$

が成立する．ここで，$\widetilde{\mu}(\lambda)$ を

$$\widetilde{\mu}(\lambda) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2\right) dx}{\displaystyle\int_\Omega bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx}$$

と定めると，(3.11) は $0 < \widetilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) < \epsilon$ と書き直される．(2.28) より，$\mu_1(\lambda) \leq \widetilde{\mu}(\lambda)$ である．補題 3.4 より $\mu_1(\overline{\lambda}) \leq \mu_1(\lambda)$ である．したがって，$0 < \overline{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば，$0 \leq \mu_1(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) \leq \widetilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\overline{\lambda}) < \epsilon$ となる．以上より，$\lambda \nearrow \overline{\lambda}$ のとき，$\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\overline{\lambda})$ である．

2. 補題 2.13 および 1. より，$\mu_1(\overline{\lambda}) \geq 1$ である．$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ を背理法を用いて示す．

$\mu_1(\overline{\lambda}) > 1$ であると仮定する．$\Phi\colon (0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を (2.1) の通りに定める．(2.2) より，$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})w = -\Delta w + aw - bp(\underline{u}_{\overline{\lambda}})^{p-1}w. \tag{3.12}$$

となる．ここで，$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ が可逆であることを示す．

まずは $\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})$ が全射であることを示す．$f \in H^{-1}(\Omega)$ とする．$I_f\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ を次式で定める．

$$I_f(w) = \int_\Omega \left(|Dw| + aw^2\right) dx - \int_\Omega bp\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1} w^2 dx - \int_\Omega fw dx. \tag{3.13}$$

I_f の $H_0^1(\Omega)$ における下限を達成する元 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在するとすれば，u は $\Phi(\overline{\lambda}, \underline{u}_\lambda)u = f$ をみたす．以下，この u の存在を示す．$w \in H_0^1(\Omega)$ とする．補題 2.12.1 より，次式が従う．

$$\int_\Omega \left(|Dw|^2 + aw^2\right) dx \geq \mu_1(\overline{\lambda}) \int_\Omega bp\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1} w^2 dx. \tag{3.14}$$

ゆえに，(3.13) は以下の通りに下から評価される．

$$I_f(w) \geq \left(1 - \frac{1}{\mu_1(\overline{\lambda})}\right) \int_\Omega \left(|Dw|^2 + aw^2\right) dx - \int_\Omega fw dx \geq \left(1 - \frac{1}{\mu_1(\overline{\lambda})}\right) \|w\|_\kappa^2 - \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

仮定より，$\mu_1(\overline{\lambda}) > 1$ であるから，$1 - 1/\mu_1(\overline{\lambda}) > 0$ である．また，$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は同値なノルムである．ゆえに，$C, C' > 0$ が存在し，$w \in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$I_f(w) \geq C \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C' \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

が成立する．ゆえに，$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ のとき，$I_f(w) \to \infty$ となる．すなわち，I_f は強圧的であり，下に有界である．ここで $w \mapsto \langle f, w\rangle$ は弱連続であり，$L\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$ を

$$L(t,s,x) = |t|^2 + a(x)s^2 - b(x)p\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1}(x)s^2$$

と定めると，(3.13) より

$$I_f(w) = \int_\Omega L(Dw, w, x)dx - \langle f, w\rangle$$

である．L は t, s について連続であり，t について下に凸であるから，I_f は弱下半連続である．したがって，I_f の $H_0^1(\Omega)$ における下限を達成する元 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．この部分は，例えば [Eva10] の § 8.2 の THEOREM 1, 2 を参照されたい．以上より，$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は全射である．

次に，$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ が単射であることを示す．$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})$ は線形写像であるから，$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})w = 0$ となる $w \in H_0^1(\Omega)$ が $w = 0$ に限ることを示せば良い．いま，$f = 0$ であるから，$\langle \Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})w, w \rangle = 0$ である．つまり，

$$\int_\Omega \left(|Dw|^2 + aw^2 \right) dx = \int_\Omega pb\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1} w^2 dx$$

である．(3.14) と合わせて，

$$\left(\mu_1(\overline{\lambda}) - 1 \right) p \int_\Omega b\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1} w^2 dx \leq 0$$

が従う．仮定より，$\mu_1(\overline{\lambda}) > 1$ であるから，

$$\int_\Omega b\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1} w^2 dx \leq 0$$

となるが，$b, \underline{u}_{\overline{\lambda}} > 0$ in Ω であるから，$w \equiv 0$ と結論付けられる．したがって，$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})$ は単射である．

以上より，$\Phi_u(\overline{\lambda}, \underline{u}_{\overline{\lambda}})\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ は可逆である．ゆえに，陰関数定理より，$\epsilon > 0$ が存在して，$\lambda \in (\overline{\lambda} - \epsilon, \overline{\lambda} + \epsilon)$ に対し，$\Phi(\lambda, \underline{u}_\lambda) = 0$ をみたす $\underline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．補題 2.4.1 の証明と同様にすると，$\underline{u}_\lambda$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解である．ゆえに，$S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす $\lambda > \overline{\lambda}$ が存在する．しかしこれは，定義 2.7 に反する．したがって，背理法により，$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ と結論付けられる． ■

$\mu_1(\overline{\lambda}) = 1$ であることから，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution の一意性が証明される．

命題 3.6.　$b > 0$ in Ω と仮定する．$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は，$\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ に限る．

証明.　$u \in S_{\overline{\lambda}}$ とする．$z = u - \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ とする．$\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ は $\lambda = \overline{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であるから，$z \geq 0$ in Ω である．また，

$$-\Delta u + au = bu^p + \overline{\lambda} f,$$
$$-\Delta \underline{u}_{\overline{\lambda}} + a\underline{u}_{\overline{\lambda}} = b\underline{u}_{\overline{\lambda}}^p + \overline{\lambda} f$$

の両辺を引くと，

$$-\Delta z + az = b\left(u^p - \underline{u}_{\overline{\lambda}}^p \right) \text{ in } \Omega \tag{3.15}$$

が得られる．

$\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ を，$\mu_1(\overline{\lambda})$ に付随する $\phi_1 > 0$ in Ω をみたす固有関数とする．補題 2.12.2，及び，補題 3.5.2 より，

$$-\Delta \phi_1 + a\phi_1 = pb\underline{u}_{\overline{\lambda}}^{p-1} \phi_1 \text{ in } \Omega \tag{3.16}$$

が成立する．$(3.15) \times \phi_1 - (3.16) \times z$ を Ω 上積分すると，

$$\int_\Omega bF(u, \underline{u}_{\overline{\lambda}}) \phi_1 dx = 0 \tag{3.17}$$

が得られる．ここで $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，$F(t, s) = t^p - s^p - ps^{p-1}(t - s)$ である．$\alpha(t) = t^p$ とする．α の $t = s$ の周りの 1 次のテイラー多項式は，$s^p + ps^{p-1}(t - s)$ である．ゆえに，2 次の剰余項は $F(t, s)$ に一致する．テイラーの定理より，ある $0 < \theta < 1$ を用いて，

$$F(t, s) = \frac{\alpha''(s + \theta t)}{2!}(t - s)^2 = \frac{1}{2} p(p - 1)(s + \theta t)^{p-2}(t - s)^2$$

と書ける．ここで次の (i), (ii) がわかる．

(i)　$t \geq s > 0$ ならば，$F(t, s) \geq 0$ である．

(ii)　$t \geq s > 0$ のとき，$F(t, s) = 0$ であることは，$t = s$ であることと同値である．

$u \geq \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ in Ω であることに注意する．(i)，$b, \phi_1 > 0$ in Ω，および，(3.17) より，$F(u, \underline{u}_{\overline{\lambda}}) = 0$ a. e. in Ω である．さらに (ii) より，$u = \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ a. e. in Ω である．つまり，$H_0^1(\Omega)$ の元として，$u = \underline{u}_{\overline{\lambda}}$ である．すなわち，$(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は，$\underline{u}_{\overline{\lambda}}$ に限る． ■

証明 (定理 1.2).　命題 3.3.1 と命題 3.6 から従う． ■

4 second solution の存在 1 — 命題 4.4 の証明

4.1 second solution を求めるための方針

本節と次節で，定理 1.4 を証明する．本節と次節を通し，$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．方程式 $(\heartsuit)_\lambda$ を考察するために，以下の記号をおく．

記号 4.1. 1. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Omega$ を定義域とする実数値関数 g, G を以下の通りに定める．

$$g(t,s,x) = b(x)\left((t_+ + s)^p - s^p\right) - a(x)t_+, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} G(t,s,x) &= \int_0^{t_+} g(t,s,x)dt \\ &= b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t_+ + s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t_+\right) - \frac{1}{2}a(x)t_+^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$g(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $g(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する．$G(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $G(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する．

2. $I_\lambda \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ を以下の通りに定める．

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 dx - \int_\Omega G(v, \underline{u}_\lambda)dx. \tag{4.3}$$

I_λ のフレッシェ微分を I'_λ と表記する．

$(\heartsuit)_\lambda$ の考察を始める前に，$(\spadesuit)_\lambda$ と $(\heartsuit)_\lambda$ の関係，および，$(\heartsuit)_\lambda$ と I_λ の関係を明らかにする．

補題 4.2. 1. 以下の (1), (2) は同値である．

(1) $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ 以外の弱解 $\overline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．

(2) $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．

2. $v \in H_0^1(\Omega)$ は (4.3) で定まる I_λ の臨界点であると仮定する．このとき，v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である．

証明. 1. (1)⇒(2)：$v = \overline{u}_\lambda - \underline{u}_\lambda$ とする．$\underline{u}_\lambda$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であるから，$v \geq 0$ in Ω である．そこで，

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u}_\lambda + a\overline{u}_\lambda &= b\overline{u}_\lambda^p + \lambda f, \\ -\Delta\underline{u}_\lambda + a\underline{u}_\lambda &= b\underline{u}_\lambda^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと，

$$-\Delta v + av = b\left((\underline{u}_\lambda + v)^p - \underline{u}_\lambda^p\right)$$

が得られる．この右辺は非負である．$a > -\kappa_1$ であるから，強最大値原理より，$v > 0$ in Ω である．以上より，$v \in H_0^1(\Omega)$ は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である．

(2)⇒(1)：$\overline{u}_\lambda = v + \underline{u}_\lambda$ とすれば，$\overline{u}_\lambda$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の弱解である．

2. I_λ は C^1 級であり，そのフレッシェ微分は，$u \in H_0^1(\Omega)$，$\psi \in H_0^1(\Omega)$ として，

$$I'_\lambda(u)\psi = \int_\Omega \left(Dv\cdot D\psi - g(v, \underline{u}_\lambda)\psi\right)dx.$$

と表される．$v \in H_0^1(\Omega)$ は I_λ の臨界点であるから，$I'_\lambda(v) = 0$ である．すなわち，

$$\int_\Omega \left(Dv\cdot D\psi - g(v, \underline{u}_\lambda)\psi\right)dx = 0 \tag{4.4}$$

が成立する．この $\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから，$v \in H_0^1(\Omega)$ は

$$\begin{cases} -\Delta v + av = b\left((v_+ + \underline{u}_\lambda)^p - (\underline{u}_\lambda)^p\right) & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

の弱解である．$(v_+ + \underline{u}_\lambda)^p - (\underline{u}_\lambda)^p \geq 0$ in Ω，$a \geq \kappa > -\kappa_1$ より，強最大値原理から，$v > 0$ in Ω が従う．ゆえに $v \in H_0^1(\Omega)$ は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である． ■

ここで次の記号を置く．

定義 4.3.　$V \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする．

$$S = \inf_{u \in H_0^1(V), u \not\equiv 0} \frac{\|Du\|_{L^2(V)}^2}{\|u\|_{L^{p+1}(V)}^2} \tag{4.6}$$

を**ソボレフ最良定数**という．

S は V には依存しないことが知られている．例えば [田中 08] の定理 2.31 (i) を参照されたい．
次の 2 つの命題を証明することにより，定理 1.4 を証明する．

命題 4.4.　$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ とする．$v_0 \geq 0$ in Ω，かつ，

$$\int_\Omega b v_0^{p+1} dx > 0, \tag{4.7}$$

かつ，

$$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_0) < \frac{1}{N \|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{(N-2)/2}} S^{N/2} \tag{4.8}$$

をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在することを仮定する．このとき，$(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．

命題 4.5.　定理 1.4 の仮定のもとで，$v_0 \geq 0$ in Ω，(4.7)，および，(4.8) をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．

命題 4.4 の証明は本節，命題 4.5 の証明は次節でおこなう．

4.2　命題 4.4 の証明

本小節では，命題 4.4 の証明を与える．
まずは，以降の議論で使用する積分の極限について議論する．

記号 4.6.　関数 H, h, H', h', G', g' を以下の通りに定める．

$$\begin{aligned} H(t,s,x) &= G(t,s,x) - \frac{1}{p+1} b(x) t_+^{p+1}, \\ h(t,s,x) &= g(t,s,x) - b(x) t_+^p, \\ H'(t,s,x) &= H(t,s,x) + \frac{1}{2} a(x) t_+^2, \\ h'(t,s,x) &= h(t,s,x) + a(x) t_+, \\ G'(t,s,x) &= G(t,s,x) + \frac{1}{2} a(x) t_+^2, \\ g'(t,s,x) &= g(t,s,x) + a(x) t_+. \end{aligned}$$

$H(v, \underline{u}_\lambda, x)$ を $H(v, \underline{u}_\lambda)$ と表記する．$h(v, \underline{u}_\lambda)$，$H'(v, \underline{u}_\lambda)$，$h'(v, \underline{u}_\lambda)$，$G'(v, \underline{u}_\lambda)$，$g'(v, \underline{u}_\lambda)$ も全て同様である．

補題 4.7.　$v \in H_0^1(\Omega)$ とし，$\{v_k\}_{k=0}^\infty$ を $H_0^1(\Omega)$ の有界列とする．$k \to \infty$ のとき，$v_k \to v$ a.e. in Ω と仮定する．このとき，$k \to \infty$ とすると，以下が成立する．

$$\int_\Omega H(v_k, \underline{u}_\lambda) dx \longrightarrow \int_\Omega H(v, \underline{u}_\lambda) dx, \tag{4.9}$$

$$\int_\Omega h(v_k, \underline{u}_\lambda) v_k dx \longrightarrow \int_\Omega h(v, \underline{u}_\lambda) v dx. \tag{4.10}$$

また，任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\int_\Omega g(v_k, \underline{u}_\lambda) \psi dx \longrightarrow \int_\Omega g(v, \underline{u}_\lambda) \psi dx \tag{4.11}$$

が成立する．

証明.　まず，(4.9) を証明する．$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列で，v に Ω 上ほとんどいたるところ収束するから，必要ならば部分列をとることにより，$k \to \infty$ とすると，以下が成立する．

$$v_k \rightharpoonup v \ \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{4.12}$$
$$v_k \longrightarrow v \ \text{ in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1), \tag{4.13}$$
$$v_k \longrightarrow v \ \text{ a.e. in } \Omega. \tag{4.14}$$

(4.13) より，

$$\int_\Omega \frac{1}{2} a v_k^2 dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{2} a v^2 dx$$

がわかるので，(4.9) を示すためには，

$$\int_\Omega H'(v_k, \underline{u}_\lambda) dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega H'(v, \underline{u}_\lambda) dx \tag{4.15}$$

を示せば十分である．以下 (4.15) を示す．$t, s \geq 0$ のとき，次式が成立する．

$$\begin{aligned} H'(t,s,x) &= b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) \\ &\leq b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) \\ &\leq b(x)\int_0^t \left((\tau+s)^p - \tau^p\right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.16}$$

ここで，$x \geq 0$ に対し，$x \mapsto x^p$ は下に凸であるから，$(\tau+s)^p - \tau^p \leq p(\tau+s)^{p-1}s$ である．さらに，

$$(\tau+s)^{p-1} \leq (2\max\{\tau, s\})^{p-1} = 2^{p-1}\max\{\tau^{p-1}, s^{p-1}\} \leq C(\tau^{p-1} + s^{p-1}) \tag{4.17}$$

であるから，次が得られる．

$$H'(t,s,x) \leq Cb\int_0^t (\tau^{p-1} + s^{p-1}) s d\tau \leq Cb(t^p s + s^p t). \tag{4.18}$$

(4.18) の証明は，[NS07] の Lemma C.4 を参考にした．さらにヤングの不等式を適用すると，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C > 0$ が存在し，$s, t \geq 0$ に対し，$H'(t,s,x) \leq b(\epsilon t^{p+1} + C s^{p+1})$ が成立する．ゆえに，次式が得られる．

$$\left|H'(v_k, \underline{u}_\lambda) - H'(v, \underline{u}_\lambda)\right| \leq b\left(\epsilon (v_k)_+^{p+1} + \epsilon v_+^{p+1} + C\underline{u}_\lambda^{p+1}\right). \tag{4.19}$$

そこで，

$$W_{\epsilon,k} = \left(\left|H'(v_k, \underline{u}_\lambda) - H'(v, \underline{u}_\lambda)\right| - \epsilon b (v_k)_+^{p+1}\right)_+ \tag{4.20}$$

とおくと，$k \to \infty$ のとき，$W_{\epsilon,k} \to 0$ a.e. in Ω である．また，(4.19) より，$|W_{\epsilon,k}| \leq b\left(\epsilon v_+^{p+1} + C\underline{u}_\lambda^{p+1}\right)$ であり，この右辺は可積分である．したがって，優収束定理により，

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega W_{\epsilon,k}(x) dx = 0$$

である．さて，$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列であった．$H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ のソボレフ不等式も考慮すると，

$$\int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx \leq C$$

をみたす k によらない $C > 0$ が存在する．(4.20) より，

$$\int_\Omega \left|H(v_k, \underline{u}_\lambda) - H(v, \underline{u}_\lambda)\right| dx \leq \int_\Omega W_{\epsilon,k}(x) dx + \epsilon \int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx$$

であるから，$k \to \infty$ の上極限をとると，次式が得られる．

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega \left|H(v_k, \underline{u}_\lambda) - H(v, \underline{u}_\lambda)\right| dx \leq C\epsilon.$$

$C>0$ は k,ϵ によらず，$\epsilon>0$ は任意であるから，このことは

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \left|H(v_k,\underline{u}_\lambda)-H(v,\underline{u}_\lambda)\right|dx=0$$

と同値である．ゆえに (4.9) が成立する．以上の証明は，直接は [NS12] の Lemma 3.1 を参考にしているが， [BL83] のアイデアを参考にした．

(4.10) も (4.9) と同様に証明される．(4.10) を示すためには，やはり

$$\int_\Omega h'(v_k,\underline{u}_\lambda)v_k dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega h'(v,\underline{u}_\lambda)v dx$$

を示せば十分である．$t,s\geq 0$ に対し，

$$h(t,s,x)t\leq Cb(x)(t^p s+s^p t)$$

が従うため，(4.10) と同様に (4.9) も得られる．

最後に (4.11) を証明する．(4.12) より，

$$\int_\Omega a v_k\psi dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega a v\psi dx$$

であるから，(4.11) を示すためには，

$$\int_\Omega g'(v_k,\underline{u}_\lambda)\psi dx \xrightarrow{k\to\infty} \int_\Omega g'(v,\underline{u}_\lambda)\psi dx$$

を示せば十分である．(4.16)，(4.17) と同様にすれば，$s,t,r\geq 0$ に対し，次式が従う．

$$g'(t,s,x)r=b(x)\left((t+s)^p-s^p\right)r\leq Cb(x)\left(t^p r+s^p r\right).$$

ヤングの不等式を 2 回使用すると，$\epsilon>0$ に対し，$C,C'>0$ が存在し，$s,t,r\geq 0$ に対し，

$$t^p r+s^p r\leq \epsilon t^{p+1}+Cr^{p+1}+s^p r\leq \epsilon t^{p+1}+C'(r^{p+1}+s^{p+1})$$

が成立する．ゆえに，g' は

$$g'(t,s,x)r\leq b\left(\epsilon t^{p+1}+C(r^{p+1}+s^{p+1})\right)$$

と評価される．したがって，次式が成立する．

$$\left|g'(v_k,\underline{u}_\lambda)\psi-g'(v,\underline{u}_\lambda)\psi\right|\leq b\left(\epsilon(v_k)_+^{p+1}+\epsilon v_+^{p+1}+C(\underline{u}_\lambda^{p+1}+|\psi|^{p+1})\right).$$

そこで，$\widetilde{W}_{\epsilon,k}$ を

$$\widetilde{W}_{\epsilon,k}=\left(\left|g'(v_k,\underline{u}_\lambda)\psi-g'(v,\underline{u}_\lambda)\psi\right|-\epsilon b(v_k)_+^{p+1}\right)_+$$

と定める．以降は，(4.9) の証明と同様に，(4.11) が示される． ■

命題 4.4 を証明には，(PS) 条件を課さない峠の定理を使用する．このため，I_λ の $(\mathrm{PS})_c$ 条件が必要となる．I_λ の $(\mathrm{PS})_c$ 条件を調べる準備として，I_λ についてのパレ・スメイル列が $H_0^1(\Omega)$ の有界列であることを証明する．

補題 4.8.　$H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ は，I_λ についてのパレ・スメイル列であるとする．すなわち，以下の (i)，(ii) を仮定する．

(i)　$\{I_\lambda(v_k)\}$ は有界列．

(ii)　$I'_\lambda(v_k)\xrightarrow{k\to\infty} 0$ in $H^{-1}(\Omega)$.

このとき，$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である．

証明.　(i) より，

$$\frac{1}{2}\|v_k\|^2-\int_\Omega G(v_k,\underline{u}_\lambda)dx\leq M \tag{4.21}$$

となる $k\in\mathbb{N}$ によらない $M>0$ が存在する．$\epsilon>0$ とする．(ii) より，$K\in\mathbb{N}$ が存在し，$k\geq K$，$\psi\in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\left|\int_\Omega (Dv_k\cdot D\psi)dx-\int_\Omega g(v_k,\underline{u}_\lambda)\psi dx\right|\leq\epsilon\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

が成立する．$\psi = v_k$ とすると，次式が得られる．

$$\|v_k\|^2 \geq \int_\Omega g(v_k, \underline{u}_\lambda) v_k dx - \epsilon \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.22}$$

$\alpha > 0$ とする．(4.21)，(4.22) より，以下が従う．

$$\begin{aligned} \alpha M &\geq \frac{\alpha}{2} \|v_k\|^2 - \alpha \int_\Omega G(v_k, \underline{u}_\lambda) dx \\ &\geq \frac{\alpha - 2}{2} \|v_k\|^2 + \int_\Omega \left(g(v_k, \underline{u}_\lambda) v_k - \alpha G(v_k, \underline{u}_\lambda) \right) dx - \epsilon \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

右辺の積分の中身を考察する．$t, s \geq 0$ に対し，

$$g(t,s)t - \alpha G(t,s) = b\left((t+s)^p t - s^p t - \frac{\alpha}{p+1}(t+s)^{p+1} + \frac{\alpha}{p+1} s^{p+1} + \alpha s^p t \right) - a\left(t^2 - \frac{\alpha}{2} t^2 \right)$$

である．ここで

$$F(t) = (t+s)^p t - \frac{\alpha}{p+1}(t+s)^{p+1}$$

の $t = 0$ のまわりの 2 次のテイラー多項式は，

$$s^p t + p s^{p-1} t^2 - \frac{\alpha}{p+1} s^{p+1} - \alpha s^p t - \frac{\alpha p}{2} s^{p-1} t^2$$

と計算される．F の 3 階の導関数は，

$$F'''(t) = p(p-1)(p-2)(t+s)^{p-3} t + (3-\alpha) p(p-1)(t+s)^{p-2}$$

と計算される．テイラーの定理より，3 次の剰余項 R_3 は，$0 < \theta < 1$ を用いて，

$$R_3 = \frac{F'''(\theta t)}{3!} t^3 = \frac{t^3}{6} \left(p(p-1)(p-2)(\theta t + s)^{p-3} \theta t + (3-\alpha) p(p-1)(\theta t + s)^{p-2} \right)$$

とかける．以下では，α を p に応じて定め，$R_3 \geq 0$ となるようにする．p の値に応じて場合分けをする．

$\underline{p \geq 2 \text{ のとき}}$：$\alpha = 3$ とすると，$R_3 \geq 0$ が従う．

$\underline{1 < p \leq 2 \text{ のとき}}$：$\alpha = p + 1$ とすると，以下の通り $R_3 \geq 0$ が従う．

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{t^3}{6} p(p-1)(\theta t + s)^{p-3} \left((p-2)\theta t + (2-p)(\theta t + s) \right) \\ &= \frac{t^3}{6} p(p-1)(2-p) s (\theta t + s)^{p-3} \geq 0. \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned} g(t,s,x)t - \alpha G(t,s,x) &= b\left(p s^{p-1} t^2 - \frac{\alpha p}{2} s^{p-1} t^2 + R_3 \right) - a\left(t^2 - \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \\ &\geq b\left(p s^{p-1} t^2 - \frac{\alpha p}{2} s^{p-1} t^2 \right) - a\left(t^2 - \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(a t^2 - b p s^{p-1} t^2 \right) \end{aligned}$$

と下から評価される．これを (4.23) に適用すると，$a > \kappa$，及び，$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ が同値であることから，途中で補題 2.12.2 も考慮して，以下の式変形が進む．

$$\begin{aligned} \alpha M &\geq \frac{\alpha - 2}{2} \left(\|v_k\|^2 - \int_\Omega b p \underline{u}_\lambda^{p-1} v_k^2 dx + \int_\Omega a v_k^2 dx \right) - \epsilon \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{\alpha - 2}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_1(\lambda)} \right) \left(\|v_k\|^2 + \int_\Omega a v_k^2 dx \right) - \epsilon \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{\alpha - 2}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_1(\lambda)} \right) \|v_k\|_\kappa^2 - \epsilon \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{\alpha - 2}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_1(\lambda)} \right) C \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \epsilon \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

$C > 0$ はポアンカレの不等式から決まる k によらない定数である．α の定め方から $\alpha > 2$，補題 2.13 から $1 - 1/\mu_1(\lambda) > 0$ であるから，結局 $k \geq K$ に対し，

$$\alpha M \geq C' \|v_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \epsilon \|v_k\|_{H^1_0(\Omega)}$$

が成立する．ゆえに，$\{v_k\}$ は $H^1_0(\Omega)$ の有界列である．■

補題 4.8 を用いて，I_λ の $(\mathrm{PS})_c$ 条件を調べる．

補題 4.9. 1. $0 < c < S^{N/2}/N \|b\|^{(N-2)/2}_{L^\infty(\Omega)}$ とする．このとき，I_λ は $(\mathrm{PS})_c$ 条件をみたす．すなわち，次の条件 (i), (ii) をみたす $H^1_0(\Omega))$ の点列 $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ は，収束する部分列をもつ．

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} I_\lambda(v_k) = c$.

(ii) $I'_\lambda(v_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ in $H^{-1}(\Omega)$.

2. 1. における $\{v_k\}$ の部分列の収束先を v とする．v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である．

証明. 仮定 (i), (ii) と補題 4.8 より，$\{v_k\}$ は $H^1_0(\Omega)$ の有界列である．したがって，必要ならば部分列をとることにより，$v \in H^1_0(\Omega)$ が存在し，$k \to \infty$ とすると，以下が成立する．

$$v_k \rightharpoonup v \ \text{ weakly in } H^1_0(\Omega), \tag{4.24}$$
$$v_k \longrightarrow v \ \text{ in } L^q(\Omega) \ \ (q < p+1), \tag{4.25}$$
$$v_k \longrightarrow v \ \text{ a.e. in } \Omega. \tag{4.26}$$

(ii) より，任意の $\psi \in H^1_0(\Omega)$ に対し，

$$\int_\Omega (Dv_k \cdot D\psi)dx - \int_\Omega g(v_k, \underline{u}_\lambda)\psi dx = o(1)$$

が成り立つ．(4.24) と補題 4.7 より，$k \to \infty$ とすると，次式が従う．

$$\int_\Omega (Dv \cdot D\psi)dx - \int_\Omega g(v, \underline{u}_\lambda)\psi dx = 0. \tag{4.27}$$

つまり，$v \in H^1_0(\Omega)$ は，I_λ の臨界点である．よって補題 4.2.2 により，v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である．したがって，あとは，$k \to \infty$ のとき，$v_k \to v$ in $H^1_0(\Omega)$ であることを示せば，補題の証明が完了する．

ここで，

$$I_\lambda(v) \geq 0 \tag{4.28}$$

であることを示す．(4.27) で $\psi = v$ とすると，

$$\int_\Omega |Dv|^2 dx = \int_\Omega g(v, \underline{u}_\lambda)v dx \tag{4.29}$$

という関係式が導かれる．ゆえに，v における I_λ の値は

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega g(v, \underline{u}_\lambda)v dx - \int_\Omega G(v, \underline{u}_\lambda)dx \tag{4.30}$$

と書けることがわかる．そこで，$t, s \geq 0$，$x \in \Omega$ に対し，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g(t,s,x)t - G(t,s,x) &= \frac{1}{2}\left(b\left((t+s)^p - s^p\right) - at\right)t - \left(b\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t - \frac{1}{2}at^2\right)\right) \\ &= b\left(\frac{1}{2}\left((t+s)^p t - s^p t\right) - \left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right)\right)\end{aligned}$$

を考える．

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}(t+s)^p t - \frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1}$$

の $t = 0$ のまわりの 1 次のテイラー多項式は，

$$\frac{1}{2}s^p t - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t$$

である．α の 2 階の導関数は，

$$\alpha''(t) = \frac{p(p-1)}{2}(t+s)^{p-2}t$$

と計算されるから，2 次の剰余項は，$0 < \theta < 1$ を用いて，

$$\frac{\alpha''(\theta t)}{2}t^2 = \frac{p(p-1)}{2}(\theta t+s)^{p-2}\theta t^3$$

と表すことができる．ゆえに，

$$\frac{1}{2}g(t,s,x)t - G(t,s,x) = b(x)\frac{p(p-1)}{2}(\theta t+s)^{p-2}\theta t^3 \geq 0$$

とわかる．(4.30) と合わせ，(4.28) が得られる．(4.28) は，本証明の最後で重要な役割を担う．

$k \to \infty$ のとき $v_k \to v$ in $H_0^1(\Omega)$ であることを示すために，$w_k = v_k - v$ とおく．(4.24)，(4.25)，(4.26) より，$H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ について，以下が成立する．

$$w_k \rightharpoonup 0 \;\text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \tag{4.31}$$
$$w_k \longrightarrow 0 \;\text{ in } L^q(\Omega) \;\; (q < p+1), \tag{4.32}$$
$$w_k \longrightarrow 0 \;\text{ a.e. in } \Omega. \tag{4.33}$$

$I_\lambda(v)$ と $I_\lambda(v_k)$ の差を，w_k を用いて評価する．(4.31) より，以下が成立する．

$$\int_\Omega |Dv_k|^2 dx = \int_\Omega |Dw_k + Dv|^2 dx = \int_\Omega |Dv|^2 dx + \int_\Omega |Dw_k|^2 dx + o(1). \tag{4.34}$$

ここで，$\widetilde{w}_k = (v_k)_+ - v$ とおく．$v > 0$ in Ω より，$|\widetilde{w}_k| \leq |w_k|$ in Ω である．また，$k \to \infty$ とすると，$\widetilde{w}_k \to 0$ a.e. in Ω となる．ゆえに，ブレジス・リーブの補題 [BL83] より，次式が成立する．

$$\int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx = \int_\Omega bv^{p+1} dx + \int_\Omega |b\widetilde{w}_k|^{p+1} dx + o(1). \tag{4.35}$$

(4.35) と補題 4.7，および，$k \to \infty$ のとき $(v_k)_+ \to v$ a.e. in Ω より，次式が成立する．

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(v_k, \underline{u}_\lambda)v_k dx &= \int_\Omega h(v_k, \underline{u}_\lambda)v_k dx + \int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx \\ &= \int_\Omega h(v, \underline{u}_\lambda)v dx + \int_\Omega bv^{p+1} dx + \int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1} dx + o(1) \\ &= \int_\Omega g(v, \underline{u}_\lambda)v dx + \int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1} dx + o(1).\end{aligned} \tag{4.36}$$

同様にして，次式も得られる．

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(v_k, \underline{u}_\lambda)dx &= \int_\Omega H(v_k, \underline{u}_\lambda)dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(v_k)_+^{p+1} dx \\ &= \int_\Omega G(v, \underline{u}_\lambda)dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1} dx + o(1).\end{aligned} \tag{4.37}$$

(4.34)，(4.37) より，$I_\lambda(v_k)$ と $I_\lambda(v)$ の差は以下の通りに書ける．

$$I_\lambda(v_k) = I_\lambda(v) + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw_k|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\widetilde{w}_k|^{p+1} dx + o(1).$$

ここで (i) より，次式が得られる．

$$I_\lambda(v) + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw_k|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\widetilde{w}_k|^{p+1} dx = c + o(1). \tag{4.38}$$

(ii) より，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$K \in \mathbb{N}$ が存在し，$k > K$ に対し，

$$\left|\int_\Omega |Dv_k|^2 dx - \int_\Omega g(v_k, \underline{u}_\lambda)v_k dx\right| \leq \epsilon \,\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}$$

が成立する．$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列であるから，ϵ，k によらない $C>0$ が存在し，$k>K$ のとき，

$$\left|\int_\Omega |Dv_k|^2dx - \int_\Omega g(v_k,\underline{u}_\lambda)v_k\,dx\right| \le \epsilon C$$

が成り立つ．ゆえに，次式が従う．

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega |Dv_k|^2dx - \int_\Omega g(v_k,\underline{u}_\lambda)v_k\,dx\right) = 0.$$

(4.29)，(4.34)，および，(4.36) より，

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega |Dw_k|^2dx - \int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1}dx\right) = 0$$

が成立する．この事実と，$\{v_k\}$ が $H_0^1(\Omega)$ の有界列であることから，実数列

$$\left\{\int_\Omega |Dw_k|^2dx\right\}_k,\ \left\{\int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1}dx\right\}_k \tag{4.39}$$

は両方共ある有界閉区間上の数列である．したがって，必要ならば $\{w_k\}$ の部分列を取ると，(4.39) は収束する．収束先を $l\ge 0$ とすると，

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |Dw_k|^2dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1}dx = l$$

をみたす．(4.6) により，

$$\int_\Omega |Dw_k|^2dx \ge S\left(\int_\Omega |\widetilde{w}_k|^{p+1}dx\right)^{2/(p+1)} \ge S\left(\frac{1}{\|b\|_{L^\infty(\Omega)}}\int_\Omega b|\widetilde{w}_k|^{p+1}dx\right)^{2/(p+1)}$$

が成立する．$k\to\infty$ として，

$$Sl^{2/(p+1)} \le \|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{2/(p+1)}\, l \tag{4.40}$$

が得られる．ここで $l=0$ であることを背理法を用いて示す．$l>0$ と仮定する．(4.40) より，$l\ge S^{N/2}/\,\|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{(N-2)/2}$ である．一方，(4.38) で $k\to\infty$ とすると，

$$I_\lambda(v) = c - \frac{1}{N}l \le c - \frac{S^{N/2}}{N\,\|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{(N-2)/2}} < 0$$

が得られる．これは (4.28) に反する．したがって，$l=0$ である．以上より，$k\to\infty$ のとき，$w_k\to 0$ in $H_0^1(\Omega)$ である．すなわち，$v_k\to v$ in $H_0^1(\Omega)$ である．これが示すべきことであった． ∎

続いて，(PS) 条件を課さない峠の定理の仮定がみたされていることを確認する．

補題 4.10.　以下の条件をみたす $\delta>0$，$\rho>0$ が存在する．

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \delta \text{ をみたす } v\in H_0^1(\Omega) \text{ に対し，} I_\lambda(v)\ge\rho \text{ が成立する．} \tag{4.41}$$

証明.　$v\in H_0^1(\Omega)$ は任意のものとする．$I_\lambda(v) = I_\lambda(v_+)$ であるから，$v\ge 0$ in Ω と仮定しても一般性を失わない．

$$\begin{aligned} I_\lambda(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G(v,\underline{u}_\lambda)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega\left(|Dv|^2+av^2\right)dx - \int_\Omega pb\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2dx\right) - \int_\Omega b\left(\frac{1}{p+1}(v+\underline{u}_\lambda)^{p-1} - \frac{1}{p+1}\underline{u}_\lambda^{p+1} - \underline{u}_\lambda^p v - \frac{p}{2}\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2\right)dx. \end{aligned}$$

第 1 項を J_1 とおき，第 2 項の積分を J_2 とおく．補題 2.12.2 より，

$$J_1 \ge \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu_1(\lambda)}\right)\int_\Omega\left(|Dv|^2+av^2\right)dx \tag{4.42}$$

と下から評価される．補題 2.13 より，この括弧の中は正である．次に，$t,s\ge 0$ に対し，$\alpha(t) = (t+s)^{p+1}/(p+1)$ と定める．ここで，p と 2 の大小で場合分けをして J_2 を評価する．

<u>$p > 2$ のとき</u>：α の $t = 0$ の周りの 2 次のテイラー多項式は，

$$\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} + s^p t + \frac{p}{2} s^{p-1} t^2$$

である．α の 3 階の導関数は $\alpha'''(t) = p(p-1)(t+s)^{p-2}$ であるから，3 次の剰余項

$$R_3 = \frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1} s^{p+1} - s^p t - \frac{p}{2} s^{p-1} t^2 \tag{4.43}$$

は，テイラーの定理より，$0 < \theta < 1$ を用いて，

$$R_3 = \frac{\alpha'''(\theta t)}{3!} t^3 = \frac{p(p-1)}{6} (\theta t + s)^{p-2} t^3$$

とかける．この R_3 は，$p - 2 > 0$ のとき，

$$R_3 \leq C(2\max\{t, s\})^{p-2} t^3 = C2^{p-2}(\max\{t^{p-2}, s^{p-2}\}) t^3 \leq C(t^{p-2} + s^{p-2}) t^3 = C(t^{p+1} + s^{p-2} t^3) \tag{4.44}$$

と評価される．さらに，ヤングの不等式より，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$C > 0$ が存在し，$s, t \geq 0$ に対し，$s^{p-2} t^3 \leq \epsilon s^{p-1} t^2 + C t^{p+1}$ となる．ゆえに，R_3 は

$$R_3 \leq \epsilon s^{p-1} t^2 + C t^{p+1} \tag{4.45}$$

と評価される．(4.43) と (4.45) より，J_2 の評価

$$J_2 \leq \epsilon \int_\Omega b \underline{u}_\lambda^{p-1} v^2 dx + C \int_\Omega b v^{p+1} dx \tag{4.46}$$

が得られる．

<u>$p \leq 2$ のとき</u>：α の $t = 0$ の周りのテイラー多項式における 2 次の剰余項

$$R_2 = \frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1} s^{p+1} - s^p t$$

はテイラーの定理より，$0 < \theta < 1$ を用いて，

$$R_2 = \frac{\alpha''(\theta t)}{2!} t^2 = \frac{p}{2}(s + \theta t)^{p-1} t^2$$

と書ける．そこで，

$$R_2 - \frac{p}{2} s^{p-1} t^2 = \frac{p}{2}(s + \theta t)^{p-1} t^2 - \frac{p}{2} s^{p-1} t^2$$

を考えると，$0 < p - 1 \leq 1$ であるから，

$$(s + \theta t)^{p-1} \leq (t + s)^{p-1} \leq t^{p-1} + s^{p-1}$$

である．ゆえに

$$R_2 - \frac{p}{2} s^{p-1} t^2 \leq \frac{p}{2} t^{p+1}$$

である．よって，(4.46) において $C = p/2$，$\epsilon = 0$ としたものが成立する．J_2 の評価式としては，$\epsilon > 0$ の項を加えた (4.46) に合流する．

(4.46) の 2 つの項は，それぞれ補題 2.12.2，ソボレフ不等式より，

$$\int_\Omega b \underline{u}_\lambda^{p-1} v^2 dx \leq \frac{1}{p\mu_1(\lambda)} \int_\Omega \left(|Dv|^2 + av^2\right) dx,$$
$$\int_\Omega b v^{p+1} dx \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$$

と更に評価が進む．これらと (4.42) より，$I_\lambda(v)$ は

$$I_\lambda(v) = J_1 - J_2 \geq C \int_\Omega \left(|Dv|^2 + av^2\right) dx - \epsilon C' \int_\Omega \left(|Dv|^2 + av^2\right) dx - C'' \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$$

と下から評価される．必要ならば $\epsilon > 0$ を小さくすれば，次式が得られる．

$$I_\lambda(v) \geq C \int_\Omega \left(|Dv|^2 + av^2\right) dx - C' \|v\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)} \geq C \|v\|^p_\kappa - C' \|v\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}.$$

$\|\cdot\|_\kappa$ と $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ が同値なノルムであることを考慮すると，

$$I_\lambda \geq C'' \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - C' \|v\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}$$

と導かれる．$C'', C' > 0$ は v によらない．$2 < p+1$ であるから，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$\rho = C''\delta^2 - C'\delta^{p+1} > 0$ とできる．つまり，(4.41) が成立する． ■

命題 4.4 を証明する最後の準備として，次の補題を証明する．

補題 4.11. $v \geq 0$ in Ω および (4.7) をみたす $v \in H^1_0(\Omega)$ について，次式が成立する．

$$\lim_{t\to\infty} I_\lambda(tv) = -\infty. \tag{4.47}$$

証明. $t, s \geq 0$，$x \in \Omega$ とする．

$$G'(t,s,x) - \frac{b(x)}{p+1}t^{p+1} = b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right)$$

である．右辺の括弧の中を $\alpha(s)$ とおく．α の 1 階導関数は，

$$\alpha'(s) = (t+s)^p - s^p - ps^{p-1}t$$

である．右辺を t の関数とみると，テイラーの定理より，

$$\alpha'(s) = \frac{p(p-1)}{2}(s+\theta t)^{p-1}t^2$$

をみたす $0 < \theta < 1$ が存在する．したがって，$\alpha'(s) \geq 0$ である．すなわち，α は s についての単調増加関数である．ゆえに，

$$G'(t,s,x) - \frac{b(x)}{p+1}t^{p+1} \geq G'(t,0,x) - \frac{b(x)}{p+1}t^{p+1} = 0$$

が成立する．したがって，

$$\int_\Omega G(tv, \underline{u}_\lambda)dx \geq \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega bv^{p+1}dx$$

である．ゆえに，$I_\lambda(tv)$ は，次の通りに上から評価される．

$$I_\lambda(tv) \leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|Dv|^2 + av^2\right) dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega bv^{p+1}dx.$$

$2 \leq p+1$，および，(4.7) より，(4.47) が成立する． ■

(PS) 条件を課さない峠の定理を用いて，命題 4.4 を証明する．

証明 (命題 4.4). 補題 4.10 の $\delta > 0$ について，$e = Tv_0$ が $\|e\|_{H^1_0(\Omega)} > \delta$ をみたすよう，$T > 0$ を定める．この $T > 0$ は，補題 4.11 により存在する．

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(s))$$

と定める．ここで Γ は，$\gamma(0) = 0$ を始点，$\gamma(1) = e$ を終点とする $H^1_0(\Omega)$ 上の連続な道 γ 全体である．補題 4.10，および，(4.8) より，補題 4.10 の $\rho > 0$ について，

$$0 < \rho \leq c < \frac{1}{N\|b\|^{(N-2)/2}_{L^\infty(\Omega)}} S^{N/2}$$

が成立する．補題 4.9.1 より，$(\mathrm{PS})_c$ 条件が成立する．ゆえに，(PS) 条件を課さない峠の定理 [AR73] が適用できる．すると，補題 4.9.1 の (i), (ii) をみたす $H^1_0(\Omega)$ の点列 $\{v_k\}$ が得られる．補題 4.9.2 より，$(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H^1_0(\Omega)$ が得られる． ■

5　second solution の存在 2 — 命題 4.5 の証明

本節では，命題 4.5 を証明する．本節を通し，定理 1.4 の仮定をおく．必要ならば Ω を平行移動することにより，$x_0 = 0$ としてよい．以降 $x_0 = 0$ とする．

5.1　タレンティー関数の考察

本小節では，命題 4.5 の証明の鍵となるタレンティー関数を考察する．命題 4.5 の v_0 は，タレンティー関数を加工することにより得られる．そこで本小節では，次小節で必要となる具体的計算を実行する．

まずは，タレンティー関数を定義する．

定義 5.1.　**タレンティー関数** $U\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$U(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N-2)/2}}$$

と定める．

U について，以下の事実が知られている．

補題 5.2 ([Tal76]).　タレンティー関数 U について，次式が成立する．

$$S = \frac{\|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|U\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}}. \tag{5.1}$$

すなわち，(4.6) の右辺の下限は，$V = \mathbb{R}^N$ のとき，U により達成される．

記号 5.3.　Ω 上の cut off function η を，$\eta \in C_c^\infty(\Omega)$，$0 \le \eta \le 1$ in Ω，$\{|x| \le r_0\}$ 上 $\eta \equiv 1$，$\{|x| \ge 2r_0\}$ 上 $\eta \equiv 0$ となるものとする．$\epsilon > 0$ とする．Ω 上の関数 u_ϵ, v_ϵ を，

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}}, \tag{5.2}$$

$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{\|b^{1/(p+1)} u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \tag{5.3}$$

と定める．

さて，[BN83] の p. 444 より，次式が成立する．

$$\|Du_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \|DU\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \epsilon^{-(N-2)/2} + O(1). \tag{5.4}$$

次に，$\left\|b^{1/(p+1)} u_\epsilon\right\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$ を考察する．

$$\int_\Omega b u_\epsilon^{p+1} dx = \int_\Omega \frac{b(x)\eta(x)^{p+1}}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = O(1) + \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{b(x)}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx.$$

最左辺の積分を I とおく．$e > 0$ とする．$\delta > 0$ が存在し，$|x| < \delta$ ならば，$M - e \le b(x) \le M$ が成立する．必要ならば，$\delta > 0$ を小さくとりなおすと，$\delta < r_0$ となる．この e, δ は，ϵ とは無関係であることに注意されたい．ここで $\widetilde{I}$，$\widehat{I}$ を

$$\widetilde{I} = \int_{\{|x|<\delta\}} \frac{b(x)}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx,$$

$$\widehat{I} = \int_{\{|x|<\delta\}} \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx$$

とおく．$I = O(1) + \widetilde{I}$，$(M - e)\widehat{I} \le \widetilde{I} \le M\widehat{I}$ である．変数変換により，

$$\widehat{I} = \frac{1}{\epsilon^{N/2}} \int_{\{|x|<\delta/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{1}{(1+|x|^2)^N} dx$$

が得られる．

$$I(\epsilon)=\int_{\{|x|<\delta/\sqrt{\epsilon}\}}\frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx$$

とすると，単調収束定理より，

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}I(\epsilon)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx=\|U\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}$$

がわかる．$\widetilde{I}$ と $I(\epsilon)$ の関係は，

$$\frac{(M-e)I(\epsilon)}{\epsilon^{N/2}}\le\widetilde{I}\le\frac{MI(\epsilon)}{\epsilon^{N/2}}$$

である．ここで $J(\epsilon)=I-\widetilde{I}$ とおく．$J(\epsilon)=O(1)$ であり，

$$\frac{(M-e)I(\epsilon)}{\epsilon^{N/2}}+J(\epsilon)\le I\le\frac{MI(\epsilon)}{\epsilon^{N/2}}+J(\epsilon)$$

両辺を $2/(p+1)$ 乗すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{(M-e)^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)/2}}I(\epsilon)^{2/(p+1)}\left(1+\frac{\epsilon^{N/2}}{(M-e)I(\epsilon)}J(\epsilon)\right)^{2/(p+1)}&\\ \le\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2&\\ \le\frac{M^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)/2}}I(\epsilon)^{2/(p+1)}\left(1+\frac{\epsilon^{N/2}}{MI(\epsilon)}J(\epsilon)\right)^{2/(p+1)}&\end{aligned}\tag{5.5}$$

最右辺，最左辺の括弧の中は，$\epsilon\searrow 0$ のとき 1 に収束する．$\{\epsilon_n\}_{n=0}^\infty$ を $n\to\infty$ のとき $\epsilon_n\searrow 0$ となる任意の数列とする．(5.5)，(5.4)，および，(5.1) より，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|Du_{\epsilon_n}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|b^{1/(p+1)}u_{\epsilon_n}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2}\ge\frac{\|DU\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}{M^{2/(p+1)}\|U\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^2}=\frac{S}{M^{2/(p+1)}},\tag{5.6}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|Du_{\epsilon_n}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|b^{1/(p+1)}u_{\epsilon_n}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2}\le\frac{\|DU\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}{(M-e)^{2/(p+1)}\|U\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^2}=\frac{S}{(M-e)^{2/(p+1)}}\tag{5.7}$$

が得られる．$e>0$ は任意であるから，(5.7) から

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|Du_{\epsilon_n}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|b^{1/(p+1)}u_{\epsilon_n}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2}\le\frac{S}{M^{2/(p+1)}}\tag{5.8}$$

が従う．(5.6)，(5.8) より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|Du_{\epsilon_n}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|b^{1/(p+1)}u_{\epsilon_n}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2}=\frac{S}{M^{2/(p+1)}}$$

であるとわかる．$\{\epsilon_n\}$ の任意性から，

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{\|Du_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|b^{1/(p+1)}u_{\epsilon}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2}=\frac{S}{M^{2/(p+1)}}$$

が成立する．すなわち，次式が従う．

$$\|v_\epsilon\|^2=\|Dv_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2=\frac{S}{M^{2/(p+1)}}+O(\epsilon^{(N-2)/2}).\tag{5.9}$$

また，議論の途中で次式も判明している．

$$\left\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2=O(\epsilon^{-(N-2)/2}).\tag{5.10}$$

次に，

$$\int_\Omega au_\epsilon^2dx=O(1)+\int_{\{|x|<r_0\}}\frac{a(x)}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}dx$$

を考察する．$a(x)$ の $o(|v|^q)$ の項を $m_2 \neq 0$ で割ったものを $\theta(x)$ と書く．つまり，a は，

$$a(x) = m_1 + m_2|x|^q + m_2\theta(x) = m_1 + m_2|x|^q\left(1 + \frac{\theta(x)}{|x|^q}\right)$$

と表される．I_1, I_2 を

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}}dx, \\ I_2 &= \int_{\{|x|<r_0\}} \frac{|x|^q\,(1 + \theta(x)/|x|^q)}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}}dx \end{aligned}$$

とおく．[BN83] の p. 444 より，次式が成立する．

$$I_1 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-4)/2}) & (N \geq 5), \\ O(|\log\epsilon|) & (N = 4), \\ O(1) & (N = 3). \end{cases}$$

$0 < e < 1$ とする．$\theta(x) = o(|x|^q)$ より，$\delta > 0$ が存在し，$|x| < \delta$ ならば，$|\theta(x)| \leq e|x|^q$ となる．必要ならば $\delta > 0$ を小さくし，$\delta < r_0$ とする．$\widetilde{I_2}, \widehat{I_2}$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{I_2} &= \int_{\{|x|<\delta\}} \frac{|x|^q\,(1 + \theta(x)/|x|^q)}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}}dx, \\ \widehat{I_2} &= \int_{\{|x|<\delta\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}}dx \end{aligned}$$

と定める．$I_2 = O(1) + \widetilde{I_2}$，$(1-e)\widehat{I} \leq \widetilde{I_2} \leq (1+e)\widehat{I_2}$，$e$ は ϵ と無関係であるから，$O(I_2) = O(\widetilde{I_2}) = O(\widehat{I_2})$ である．$\widehat{I_2}$ を，N と $q+4$ の大小で場合分けして計算する．

<u>$N > q+4$ のとき</u>：変数変換により，

$$\widehat{I_2} = \frac{1}{\epsilon^{(N-q-4)/2}} \int_{\{|x|<\delta/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^q}{(1 + |x|^2)^{N-2}}dx$$

である．

$$I(\epsilon) = \int_{\{|x|<\delta/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^q}{(1 + |x|^2)^{N-2}}dx$$

とおく．$N > q+4$ であるから，$\epsilon \searrow 0$ のとき，$I(\epsilon)$ は収束する．よって，$I_1 = O(\epsilon^{-(N-q-4)/2})$ である．

<u>$N = q+4$ のとき</u>：極座標変換により，

$$\widehat{I_2} = \mathrm{vol}(S^{N-1}) \int_0^\delta \frac{|x|^{N-4}}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} r^{N-1}dr = O(|\log\epsilon|)$$

と計算される．

<u>$N < q+4$ のとき</u>：

$$\widehat{I_2} < \int_{\{|x|<\delta\}} |x|^{q-2(N-2)}dx < \infty$$

であるから，$\widehat{I_2} = O(1)$ である．

以上より，$\epsilon \searrow 0$ のときの I_2 の挙動は次の通りにまとめられる．

$$I_2 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-q-4)/2}) & (N > q+4), \\ O(|\log\epsilon|) & (N = q+4), \\ O(1) & (N < q+4). \end{cases}$$

以上の結果と，(5.10) より，以下が成立する．

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_\Omega a v_\epsilon^2 dx = O(1) + m_1 I_1' + m_2 I_2', \\
I_1' = \begin{cases} O(\epsilon) & (N \geq 5), \\ O(\epsilon|\log\epsilon|) & (N = 4), \\ O(\epsilon^{1/2}) & (N = 3), \end{cases} \\
I_2' = \begin{cases} O(\epsilon^{1+q/2}) & (N > q+4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2}|\log\epsilon|) & (N = q+4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2}) & (N < q+4). \end{cases}
\end{cases}
\tag{5.11}
$$

5.2　命題 4.5 の証明

本小節では，補題を積み重ね，命題 4.5 に証明を与える．

補題 5.4.　$\tau_\epsilon = \|v_\epsilon\|^{2/(p-1)}$ とする．このとき，次式が成立する．

$$
\lim_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{NM^{(N-2)/2}} S^{N/2}. \tag{5.12}
$$

証明.　(5.3) より，

$$
\int_\Omega b v_\epsilon^{p+1} dx = 1
$$

であるから，$t \geq 0$ に対し，次式が得られる．

$$
I_\lambda(tv_\epsilon) = \frac{1}{2}t^2\|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t^{p+1} - \int_\Omega H(tv_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx.
$$

したがって，次式が成立する．

$$
I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{N}\left(\|v_\epsilon\|^2\right)^{N/2} - \int_\Omega H(\tau_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx.
$$

(5.9) より，以下が従う．

$$
\lim_{\epsilon\searrow 0} \tau_\epsilon = \frac{S^{2/(p-1)}}{M^{2/(p+1)(p-1)}},
$$
$$
\lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1}{N}\left(\|v_\epsilon\|^2\right)^{N/2} = \frac{1}{NM^{(N-2)/2}} S^{N/2}.
$$

$\epsilon \searrow 0$ のとき，$\tau_\epsilon v_\epsilon \to 0$ a. e. in Ω である．ゆえに，補題 4.7 より，次式が成立する．

$$
\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\Omega H(\tau_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx = 0.
$$

以上より，(5.12) が得られる．■

補題 5.5.　$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon)$ を達成する $t > 0$ が存在する．

証明.　補題 4.11 より，$t \to \infty$ のとき，$I_\lambda(tv_\epsilon) \to -\infty$ となる．したがって，ある $K > 0$ が存在し，$K < t$ においては，$I_\lambda(tv_\epsilon) < 0$ となる．また，$I_\lambda(0) = 0$ である．ゆえに，$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon) = \sup_{t\in[0,K]} I_\lambda(tv_\epsilon)$ となる．$I_\lambda(tv_\epsilon)$ は t についての連続関数であるから，$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon)$ を達成する $t > 0$ が存在する．■

記号 5.6.　補題 5.5 の t を t_ϵ とかく．$t_\epsilon > 0$ であり，次式が成立する．

$$
I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) = \sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon). \tag{5.13}
$$

補題 5.7.　$\epsilon_0 > 0$ と $C > 0$ が存在し，$0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対し，

$$
\int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx \geq C\epsilon^{(N-2)/4} \tag{5.14}
$$

が成立する．

証明.　まず，次式を背理法を用いて証明する．

$$\liminf_{\epsilon \searrow 0} t_\epsilon > 0. \tag{5.15}$$

(5.15) の意味は，0 に収束する任意の正の実数列 $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し，$\liminf_{n\to\infty} t_{\epsilon_n} > 0$ であるということである．(5.15) を否定し，$\liminf_{\epsilon\searrow 0} t_\epsilon = 0$ であることを仮定する．$s,t \geq 0$，$x \in \Omega$ に対し，$G'(s,t,x) \geq 0$ であることを確かめる．テイラーの定理より，

$$G'(t,s,x) = b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right) = b(x)p(s+\theta t)^{p-1}t^2$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する．最右辺は 0 以上である．ゆえに $G'(s,t,x) \geq 0$ が成立する．そこで，

$$I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{2}t_\epsilon^2 \int_\Omega \left(|Dv_\epsilon|^2 a v_\epsilon^2\right) dx - \int_\Omega G'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda) dx \leq \frac{1}{2}t_\epsilon^2 \int_\Omega \left(|Dv_\epsilon|^2 a v_\epsilon^2\right) dx| \leq Ct_\epsilon^2 \|v_\epsilon\|^2 \tag{5.16}$$

において，$\epsilon \searrow 0$ における下極限をとると，仮定と (5.9) により

$$\liminf_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \leq 0 \tag{5.17}$$

が従う．一方で，(5.13) より $I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \geq I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon)$ であるから，補題 5.4 より，

$$\liminf_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \geq \lim_{\epsilon\searrow 0} I_\lambda(\tau_\epsilon v_\epsilon) = \frac{1}{NM^{(N-2)/2}} S^{N/2} > 0. \tag{5.18}$$

(5.17) と (5.18) は同時に成立しない．よって，背理法により，(5.15) が従う．

　さて，(5.15) と (5.10) より，$\epsilon_0 > 0$，$C > 0$ が存在し，$0 < \epsilon < \epsilon_0$ のとき，$|x| < r_0$ に対し，

$$t_\epsilon v_\epsilon(x) = t_\epsilon \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{(N-2)/2} \|b^{1/(p+1)} u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \geq \frac{C\epsilon^{(N-2)/4}}{(\epsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}} \tag{5.19}$$

が成立する．必要ならば $\epsilon_0 > 0$ を小さくとりなおし，$\sqrt{\epsilon_0} < r_0$ が成立するとして良い．すると，$|x| < \sqrt{\epsilon}$ に対し，

$$t_\epsilon v_\epsilon(x) \geq C_0 \epsilon^{-(N-2)/2} \tag{5.20}$$

となる．$C_0 > 0$ は ϵ によらない．この C_0 について，

$$t_0 = C_0 \epsilon_0^{-(N-2)/2} \tag{5.21}$$

と定める．また，強最大値原理より，

$$\underline{u}_\lambda(x) > s_0 \ \text{ in } \{|x| \leq \sqrt{\epsilon_0}\} \tag{5.22}$$

を成立させる x によらない $s_0 > 0$ が存在する．

　ここで，$x \in \Omega$，$t \geq t_0$，$s \geq s_0$ に対し，

$$H'(t,s,x) \geq Cb(x)t^p \tag{5.23}$$

を成り立たせる t,s,x によらない定数 $C > 0$ が存在することを示す．$s,t \geq 0$ に対し，

$$H'(t,s,x) = b(x)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right)$$

である．そこで s についての偏導関数は，

$$H'_s(t,s,x) = b(x)\left((t+s)^p - s^p - ps^{p-1}t\right)$$

である．右辺はテイラーの定理より，$0 < \theta < 1$ を用いて $p(p-1)(s+\theta t)^{p-2}t^2/2$ と表される．これは非負であるから，$H'_s(t,s,x) \geq 0$ である．すなわち，H' は s についての増加関数である．したがって，$s \geq s_0$，$t \geq 0$ に対し，

$$H'(t,s,x) \geq H'(t,s_0,x) \tag{5.24}$$

である．また，$s \geq 0$，$t \geq 0$ に対し，

$$H'(t,s,x) \geq H'(t,0,x) = 0 \tag{5.25}$$

もわかる．ここでテイラーの定理より，

$$\frac{1}{p+1}(t+s_0)^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1} = (t+\theta s_0)^p s_0$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する．ゆえに $t \geq t_0$ に対し，以下が従う．

$$\begin{aligned} H'(t,s_0,x) &\geq b(x)\left((t+\theta s_0)^p s_0 - \frac{1}{p+1}s_0^{p+1} - s_0^p t\right) \\ &\geq b(x)\left(t^p s_0 - \frac{1}{p+1}s_0^{p+1} - s_0^p t\right) \\ &= t^p b(x)\left(s_0 - \frac{s_0^{p-1}}{p+1}\frac{1}{t^p} - s_0^p \frac{1}{t^{p-1}}\right) \\ &\geq t^p b(x)\left(s_0 - \frac{s_0^{p-1}}{p+1}\frac{1}{t_0^p} - s_0^p \frac{1}{t_0^{p-1}}\right). \end{aligned}$$

ここで最右辺の括弧の中が正となるよう，必要ならば $\epsilon_0>0$ を小さくとりなおす．s_0 と C_0 は ϵ_0 によっているが，$|x| < \sqrt{\epsilon_0}$ に対して (5.20) および (5.22) を成り立たせるために s_0 と C_0 は変更する必要がないことに注意されたい．(5.21) により，最右辺の括弧の中が正となるよう，t_0 を大きくすることができる．以上により，$t \geq t_0$ に対し，

$$H'(t,s_0,x) \geq Cb(x)t^p \tag{5.26}$$

が成立する．(5.24) と (5.26) より，$t \geq t_0$，$s \geq s_0$ に対し，(5.23) が従う．

b は $\{|x| < \sqrt{\epsilon_0}\}$ 上連続であるから，$\delta>0$ が存在し，$|x|<\sqrt{\epsilon_0}$ ならば，$b(x) \geq M_1 - \delta$ となる．必要ならば $\epsilon_0>0$ を小さく取り直せば，$M_1-\delta>0$ とできる．(5.25)，(5.23)，(5.19) を順に使うと，$0<\epsilon<\epsilon_0$ に対し，以下が成立する．

$$\begin{aligned} \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon, \underline{u}_\lambda)dx &\geq \int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} H'(t_\epsilon v_\epsilon,\underline{u}_\lambda)dx \\ &\geq C\int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} b(x)(t_\epsilon v_\epsilon)^p dx \\ &\geq C\int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} (M-\delta)\left(\frac{\epsilon^{(N-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\right)^p dx \\ &\geq C\int_{\{|x|\leq\sqrt{\epsilon}\}} \left(\frac{\epsilon^{(N-2)/4}}{(\epsilon+|x|^2)^{(N-2)/2}}\right)^p dx \\ &= C\epsilon^{(N-2)/4}\int_{\{|y|\leq 1\}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{(N+2)/2}}dx \\ &= C'\epsilon^{(N-2)/4}. \end{aligned}$$

$C'>0$ は ϵ によらない．所望の (5.14) が得られた．■

証明 (命題 4.5).　(5.13) より，以下が成立する．

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon) &= I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \\ &= \frac{1}{2}t_\epsilon^2\|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t_\epsilon^p - \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon,\underline{u}_\lambda)dx + \int_\Omega a v_\epsilon^2 dx \\ &\leq \sup_{t>0}\left(\frac{1}{2}t^2\|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) - \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon,\underline{u}_\lambda)dx + \int_\Omega a v_\epsilon^2 dx \\ &= \frac{1}{N}\left(\|v_\epsilon\|^2\right)^{N/2} - \int_\Omega H'(t_\epsilon v_\epsilon,\underline{u}_\lambda)dx + \int_\Omega a v_\epsilon^2 dx. \end{aligned}$$

ここで，最後の変形では，$t>0$ の関数

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}t^2\|v_\epsilon\|^2 - \frac{1}{p+1}t^{p+1}$$

が，$t = \|v_\epsilon\|^{2/(p-1)}$ において最大値をとることに注意した．(5.9)，(5.11)，補題 5.4，補題 5.7 により，$\epsilon_0 > 0$，$C, C' > 0$ が存在し，$0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対し，

$$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_\epsilon) \le \frac{1}{NM^{(N-2)/2}} S^{N/2} + \left(C\epsilon^{(N-2)/2} - C'\epsilon^{(N-2)/4} + m_1 I_1' + m_2 I_2'\right) \tag{5.27}$$

が成立する．ここで I_1'，I_2' は，(5.11) のものである．以下の条件を考える．

$$\text{(5.27) の右辺の括弧の中が負となる } \epsilon > 0 \text{ が存在する．} \tag{5.28}$$

(5.28) が成立するならば，その ϵ を用いて $v_0 = v_\epsilon$ とすると，$v_0 \ge 0$ in Ω，(4.7)，および，(4.8) が成立する．すなわち，(5.28) は，命題 4.5 の帰結の十分条件である．以下，m_1, m_2 の正負で場合分けして検証する．すべての $N \ge 3$，$q > 0$ に対し，$\epsilon \searrow 0$ のとき $I_1' \gg I_2'$ であることに注意されたい．

(i) $m_1 < 0$ のとき：$\epsilon \searrow 0$ のとき $\epsilon^{(N-2)/2} \ll \epsilon^{(N-2)/4}$ であるから，すべての $N \ge 3$ について，(5.28) はみたされる．

(ii) $m_1 > 0$ のとき：$\epsilon \searrow 0$ のとき $I_1' \ll \epsilon^{(N-2)/4}$ となれば，(5.28) はみたされる．(5.11) より，$N = 3,4,5$ であれば (5.28) はみたされる．

(iii) $m_1 = 0$，$m_2 < 0$ のとき：(i) と同様に，すべての $N \ge 3$ について，(5.28) はみたされる．

(iv) $m_1 = 0$，$m_2 > 0$ のとき：$\epsilon \searrow 0$ のとき $I_2' \ll \epsilon^{(N-2)/4}$ となれば，(5.28) はみたされる．(5.11) より，$N \le q + 4$ のときは，この式は成立している．$N > q + 4$ のとき，この式が成立する条件は，

$$1 + \frac{q}{2} > \frac{N-2}{4}$$

である．これを変形して，$N < 2q + 6$ が得られる．以上により，$3 \le N < 2q + 6$ のとき，(5.28) はみたされる．■

証明 (定理 1.4). 命題 4.4 と命題 4.5 より $(\heartsuit)_\lambda$ は弱解 v を持つ．これと補題 4.2.2 より，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution 以外の弱解を持つ．■

6 extremal value 付近での second solution の存在

本節では，定理 1.5.1 を証明する．

$0 < \lambda \le \overline{\lambda}$ に対し，ϕ_λ を (2.26) の第 1 固有関数とする．補題 2.12.1 より，Ω 上正値であるものが存在するので，$\phi_\lambda > 0$ in Ω と仮定して良い．また，$\|\phi_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$ と正規化されたものとする．次の命題を示せば，命題 4.4 と合わせて，証明が完了する．

命題 6.1. 定理 1.5.1 の仮定のもとで，$0 < \lambda^* < \overline{\lambda}$ が存在し，$\lambda^* \le \lambda < \overline{\lambda}$ に対し，

$$\sup_{t>0} I_\lambda(t\phi_\lambda) < \frac{1}{N\|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{(N-2)/2}} S^{N/2} \tag{6.1}$$

が成立する．

証明. $v \in H_0^1(\Omega)$ とする．

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \left(|Dv|^2 + av^2\right)dx - p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2 dx\right) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega bv^{p+1}dx + \frac{p}{2}\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2dx - \int_\Omega H'(v, \underline{u}_\lambda)dx \tag{6.2}$$

である．ここで，$t, s \ge 0$，$x \in \Omega$ とし，

$$A = \frac{p}{2}b(x)s^{p-1}t^2 - H'(t,s) = b(x)\left(\frac{p}{2}s^{p-1}t^2 - \left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}t^p - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t\right)\right)$$

を考察する．ここで $0 < \epsilon < 1$ を，後述の (6.5) をみたすよう定める．補題 A.1 より，

$$A \le b\left(\left(\frac{1}{p+1} - \frac{p}{2}\epsilon\right)t^{p+1} + \frac{p}{2}\epsilon s^{p-1}t^2\right)$$

が成立する．$p>1$ であるから，$p/2>1/(p+1)$ である．ゆえに，

$$A \leq b\left(\frac{1-\epsilon}{p+1}t^{p+1}+\frac{p\epsilon}{2}s^{p-1}t^2\right)$$

が得られる．したがって，

$$\frac{p}{2}\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2dx-\int_\Omega H'(v,\underline{u}_\lambda)dx \leq \int_\Omega b\left(\frac{1-\epsilon}{p+1}v^{p+1}+\frac{p\epsilon}{2}\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2\right)dx$$

である．(6.2) より，I_λ は

$$I_\lambda(v) \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega\left(|Dv|^2+av^2\right)dx-(1-\epsilon)p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2dx\right)-\frac{\epsilon}{p+1}\int_\Omega bv^{p+1}dx$$

と評価される．ここで右辺の括弧の中を $P_\epsilon(v)$ とおく．補題 2.12.2，補題 2.13 より，

$$P_\epsilon(v) \geq \left(\mu_1(\lambda)-(1-\epsilon)\right)p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2dx \geq \epsilon p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2dx \geq 0$$

とわかる．また，

$$K=\int_\Omega b\phi_\lambda^{p+1}dx \tag{6.3}$$

とおく．$b\geq 0$ in Ω，$b\not\equiv 0$，$\phi_\lambda>0$ in Ω であるから，$K>0$ である．$t>0$ に対し，

$$I_\lambda(t\phi_\lambda) \leq \frac{t^2}{2}P_\epsilon(\phi_\lambda)-\frac{\epsilon K t^{p+1}}{p+1}$$

である．ゆえに，

$$\sup_{t>0}I_\lambda(t\phi_\lambda) \leq \sup_{t>0}\left(\frac{t^2}{2}P_\epsilon(\phi_\lambda)-\frac{\epsilon K t^{p+1}}{p+1}\right)=\frac{P_\epsilon(\phi_\lambda)^{N/2}}{(\epsilon K)^{(N-2)/2}} \tag{6.4}$$

と抑えられる．最後の変形は，中辺の括弧の中を t の関数と見たとき，$t=(P_\epsilon(\phi_\lambda)/\epsilon K)^{1/(p-1)}$ において最大値をとることに注意した．ここで，補題 2.12.2 より，

$$\int_\Omega\left(|D\phi_\lambda|^2+a\phi_\lambda^2\right)dx=\mu_1(\lambda)p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_\lambda^2dx$$

が成立することを用いれば，$P_\epsilon(\phi_\lambda)$ は

$$P_\epsilon(\phi_\lambda)=\left(\mu_1(\lambda)-1+\epsilon\right)p\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_\lambda^2dx$$

と変形される．ヘルダーの不等式より，次式が成立する．

$$\int_\Omega b\underline{u}_\lambda^{p-1}\phi_\lambda^2dx \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}\|\phi_\lambda\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2=\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}.$$

命題 3.3.2 より，$\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \left\|\underline{u}_{\overline{\lambda}}\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}$ が成立する．ゆえに，次式が成り立つ．

$$P_\epsilon(\phi_\lambda) \leq \left(\mu_1(\lambda)-1+\epsilon\right)\|b\|_{L^{p+1}(\Omega)}\,p\left\|\underline{u}_{\overline{\lambda}}\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}.$$

補題 3.5 より，$0<\lambda^*<\overline{\lambda}$ が存在し，$\lambda^*\leq\lambda<\overline{\lambda}$ ならば，$\mu_1(\lambda)-1<\epsilon$ となる．ゆえに，

$$P_\epsilon(\phi_\lambda) \leq 2\epsilon p\|b\|_{L^{p+1}(\Omega)}\left\|\underline{u}_{\overline{\lambda}}\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}$$

が従う．(6.4) より，

$$\sup_{t>0}I_\lambda(t\phi_\lambda) \leq \frac{\left(2p\|b\|_{L^{p+1}(\Omega)}\left\|\underline{u}_{\overline{\lambda}}\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}\right)^{N/2}\epsilon}{K^{(N-2)/2}}$$

と評価される．ゆえに，

$$\epsilon<\frac{K^{(N-2)/2}S^{N/2}}{N\left(2p\|b\|_{L^{p+1}(\Omega)}\left\|\underline{u}_{\overline{\lambda}}\right\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}\right)^{N/2}\|b\|_{L^\infty(\Omega)}^{(N-2)/2}} \tag{6.5}$$

としておけば，(6.1) が成立する． ∎

証明 (定理 1.5.1). $\phi_\lambda > 0$ in Ω であり，(6.3) の K は $K > 0$ をみたすことは，命題 6.1 の証明中確かめた．加えて命題 6.1 の主張より，$v_0 = \phi_\lambda$ とすると，命題 4.4 の仮定をみたす．したがって，$(\heartsuit)_\lambda$ は弱解 v を持つ．これと補題 4.2.2 より，$(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution 以外の弱解を持つ． ■

7 λ が小さい場合の second solution の非存在

本節では，定理 1.5.2 を証明する．本節を通して，定理 1.5.2 の仮定をおく．以下では，r を引数とする関数 f の導関数を，f' とも，f_r とも表す．

まずは，定理 1.5.2 の仮定の下での解の正則性を検討し，以降球対称解のみ考慮すればよいことを証明する．正則性の検討において，次の補題を使用する．

補題 7.1 ([BK79]). $N \geq 3$ とし，$K \in L^{N/2}(\Omega)$ とする．$u \in H_0^1(\Omega)$ は

$$-\Delta u = Ku \quad \text{in } \Omega$$

の弱解であるとする．このとき，任意の $q < \infty$ に対し，$u \in L^q(\Omega)$ が成立する．

補題 7.1 の主張の書き方は，[BN83] LEMMA 1.5 を参考にした．

補題 7.2. 定理 1.5.2 の仮定の下で，$\lambda_0 > 0$ が存在し，$0 < \lambda \leq \lambda_*$ に対し，以下が成立する．

1. $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda$ は球対称解であり，$u = u(|x|) \in C^{2+\alpha}([0, R])$ をみたす．
2. $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 v は球対称解に限り，$v = v(|x|) \in C^2([0, R])$ をみたす．
3. $v = v(|x|) \in C^2([0, R])$ が $(\heartsuit)_\lambda$ の解であることは，$v = v(r)$ が次の常微分方程式の解であることと同値である．

$$\begin{cases} -v_{rr} - \dfrac{N-1}{r} v_r = g(v, \underline{u}_\lambda) & \text{in } (0, R), \\ \qquad\qquad v > 0 & \text{in } [0, R), \\ v_r(0) = v(R) = 0. & \end{cases} \tag{7.1}$$

証明. 1. $\lambda_0 > 0$ を補題 2.4 における λ_0 とする．このとき，補題 2.4.2 により，$u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ である．$s \geq 0$ に対し，$r \in [0, R]$ の関数 $-a(r)s + b(r)s^p + \lambda f(r)$ は単調減少である．したがって, [GNN79] より, $(\spadesuit)_\lambda$ の解 $u = u(|x|) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ は球対称解に限り，$0 \leq r \leq R$ に対し，$u_r(r) < 0$ である．とくに，

$$\underline{u}_\lambda(r) \in C^{2+\alpha}([0, R]), \tag{7.2}$$

$$\underline{u}'_\lambda(r) < 0 \quad (0 \leq r \leq R) \tag{7.3}$$

が成立する．

2. $v \in H_0^1(\Omega)$ は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解であるとする．Ω 上の関数 $K \colon \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$K(x) = \begin{cases} \dfrac{(v(x) + \underline{u}_\lambda(x))^p - \underline{u}_\lambda(x)^p}{v} & (v(x) \neq 0), \\ p\underline{u}_\lambda(x)^{p-1} & (v(x) = 0) \end{cases} \tag{7.4}$$

とし，$K' = bK - a$ と定める．K, K' は，Ω 上ほとんど至るところ定義される．ここで $v > 0$ in Ω，$y \geq 0$ について $y \mapsto y^p$ は下に凸であるから，$(v + \underline{u}_\lambda)^p - \underline{u}_\lambda^p \leq p(v + \underline{u}_\lambda)^{p-1} v$ が成立する．$(\heartsuit)_\lambda$ より，$v \in H_0^1(\Omega)$ は $-\Delta v = K'v$ in Ω をみたす．ゆえに，Ω 上 $|K| \leq p(v + \underline{u}_\lambda)^{p-1}$ とわかる．$v + \underline{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より，$(v + \underline{u}_\lambda)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である．したがって，$K \in L^{N/2}(\Omega)$ である．$a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ であるから，$K' \in L^{N/2}(\Omega)$ である．$(\heartsuit)_\lambda$ より，$v \in H_0^1(\Omega)$ は $-\Delta v = K'v$ in Ω をみたす．ゆえに，補題 7.1 より，任意の $q < \infty$ に対し，$v \in L^q(\Omega)$ が成立する．したがって，$b\left((v + \underline{u}_\lambda)^p - \underline{u}_\lambda^p\right) - av \in L^q(\Omega)$ である．また，$\partial\Omega$ は C^∞ 級であることに注意する．v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解であるから，$v \in W^{2,q}(\Omega)$ である．$q > N$ とすると, $2 - N/q > 1$ であるから, ソボレフ埋め込みにより, $v \in W^{2,q}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ である．$\underline{u}_\lambda \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ も考慮すると，$b\left((v + \underline{u}_\lambda)^p - \underline{u}_\lambda^p\right) - av \in C(\overline{\Omega})$ である．再び，v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解であるから，$v \in C^2(\overline{\Omega})$ である．

a, b は球対称であるから，$g = g(t, s, |x|)$ とみなせる．$t \geq 0$，$r \in [0, R]$ に対し，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} g(t, \underline{u}_\lambda(r), r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(b(r)\left((t + \underline{u}_\lambda(r))^p - \underline{u}_\lambda(r)^p\right) - a(r)t\right) \\ &= b(r)p\left((t + \underline{u}_\lambda(r))^{p-1} - \underline{u}_\lambda(r)^{p-1}\right)\underline{u}'_\lambda(r) + b'(r)\left((t + \underline{u}_\lambda(r))^p - \underline{u}_\lambda(r)^p\right) - a'(r)t \qquad (7.5)\end{aligned}$$

である．(7.3)，$b'(r) \leq 0$，$a'(r) \geq 0$ より，(7.5) の最右辺は 0 以下である．再び [GNN79] より，$(\heartsuit)_\lambda$ の解 $v = v(|x|) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ は球対称解に限る．

3. $(\heartsuit)_\lambda$ を極座標形式に書き換える．2. より，$(\heartsuit)_\lambda$ の解は球対称解しかないことから，動径 r 以外の微分演算子の寄与はない．v は $0 \in \Omega$ において微分可能であることとディリクレ境界条件も考慮し，(7.1) が得られる． ■

ポホザエフ [Poh65] の議論から，(7.1) の解がみたすべき等式を導出する．

補題 7.3. (7.1) の解 $v = v(r) \in C^2([0, R])$ は，以下の等式をみたす．

$$\int_0^R r^{N-1}\left(\frac{2N}{N-2}G(v, \underline{u}_\lambda, r) - g(v, \underline{u}_\lambda, r)v\right)dr + \frac{2}{N-2}\int_0^R r^N\left(G_s(v, \underline{u}_\lambda, r)(\underline{u}_\lambda)_r + G_r(v, \underline{u}_\lambda, r)\right)dr = \frac{1}{N-2}R^N v_r(R)^2. \qquad (7.6)$$

ここで G_s, G_r は，以下の偏導関数である．

$$\begin{aligned}G_s(t, s, r) &= \frac{\partial}{\partial s}G(t, s, r), \\ G_r(t, s, r) &= \frac{\partial}{\partial r}G(t, s, r).\end{aligned}$$

証明. (7.1) の方程式に r^{N-1} をかけて変形すると，次式が得られる．

$$(r^{N-1}v_r)_r + r^{N-1}g(v, \underline{u}_\lambda, r) = 0. \qquad (7.7)$$

(7.7) に v をかけて $[0, R]$ 上積分すると，部分積分により次式が得られる．

$$-\int_0^R r^{N-1}(v_r)^2 dr + \int_0^R r^{N-1}g(v, \underline{u}_\lambda, r)v dr = 0. \qquad (7.8)$$

(7.7) に rv_r をかけて $[0, R]$ 上積分する．まず (7.7) の第 1 項を計算する．部分積分により，順次以下の計算が進む．

$$\begin{aligned}\int_0^R rv_r(r^{N-1}v_r)_r dr &= R^N v_r(R)^2 - \int_0^R (rv_r)_r r^{N-1}v_r dr, \\ \int_0^R (rv_r)_r r^{N-1}v_r dr &= \int_0^R r^{N-1}(v_r)^2 dr + \int_0^R r^N v_r v_{rr} dr, \\ \int_0^R r^N v_r v_{rr} dr &= \int_0^R r^N\left(\frac{1}{2}(v_r)^2\right)' dr = \frac{1}{2}R^N v_r(R)^2 - \frac{N}{2}\int_0^R r^{N-1}(v_r)^2 dr.\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}\int_0^R rv_r(r^{N-1}v_r)_r dr &= R^N v_r(R)^2 - \int_0^R r^{N-1}(v_r)^2 dr - \frac{1}{2}R^N v_r(R)^2 + \frac{N}{2}\int_0^R r^{N-1}(v_r)^2 dr \\ &= \frac{1}{2}R^N v_r(R)^2 + \frac{N-2}{2}\int_0^R r^{N-1}(v_r)^2 dr \qquad (7.9)\end{aligned}$$

と変形される．次に，第 2 項の計算をする．以下の式に注意する．

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left(r^N G(v(r), \underline{u}_\lambda(r), r)\right) = Nr^{N-1}G(v(r), \underline{u}_\lambda(r), r) + r^N g(v(r), \underline{u}_\lambda(r), r) + r^N G_s(v(r), \underline{u}_\lambda(r), r)(\underline{u}_\lambda)_r + r^N G_r(v(r), \underline{u}_\lambda(r), r), \\ &R^N G(v(R), \underline{u}_\lambda(R), R) = R^N G(0, 0, R) = 0.\end{aligned}$$

やはり部分積分により，以下の通り計算がなされる．

$$\int_0^R r^N g(v, \underline{u}_\lambda, r)v_r dr = -N\int_0^R r^{N-1}G(v, \underline{u}_\lambda, r)(\underline{u}_\lambda)_r dr - \int_0^R r^N G_r(v, \underline{u}_\lambda, r)dr. \qquad (7.10)$$

(7.9)，(7.10) より，次式が得られる．

$$\frac{1}{2}R^N v_r(R)^2+\frac{N-2}{2}\int_0^R r^{N-1}(v_r)^2dr-N\int_0^R r^{N-1}G(v,\underline{u}_\lambda,r)(\underline{u}_\lambda)_r dr-\int_0^R r^N G_r(v,\underline{u}_\lambda,r)dr=0. \tag{7.11}$$

(7.8) + (7.11) × 2/(N − 2) より，(7.6) が証明される． ■

(7.6) から，不等式を導出する．

補題 7.4. (7.1) の解 $v=v(r)\in C^2([0,R])$ は，以下の不等式をみたす．

$$\int_0^R r^{N-1}\left(p(2b(r)+b'(r)r)\underline{u}_\lambda^{p-1}-(2a(r)+a'(r)r)\right)v^2dr\geq 0. \tag{7.12}$$

証明. まず，(7.6) の右辺について

$$\frac{1}{N-2}R^N v_r(R)^2\geq 0 \tag{7.13}$$

である．次に，G_s を調べる．$t,s\geq 0$，$0\leq r\leq R$ に対し，

$$G_s(t,s,r)=\frac{\partial}{\partial s}\left(b(r)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1}-\frac{1}{p+1}s^{p+1}-s^pt\right)-\frac{1}{2}a(r)t^2\right)=b(r)\left((t+s)^p-s^p-ps^{p-1}t\right)$$

である．テイラーの定理より，$0<\theta<1$ を用いて，

$$(t+s)^p-s^p-ps^{p-1}t=\frac{p(p-1)}{2}(s+\theta t)^{p-2}t^2$$

と書ける．これは 0 以上である．よって，(7.3) も考慮すると，次式が得られる．

$$\int_0^R r^N G_s(v,\underline{u}_\lambda,r)(\underline{u}_\lambda)_r dr\leq 0. \tag{7.14}$$

続けて，G_r を調べる．$t,s\geq 0$，$0\leq r\leq R$ に対し，

$$G_r(t,s,r)=b'(r)\left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1}-\frac{1}{p+1}s^{p+1}-s^pt\right)-\frac{1}{2}a'(r)t^2$$

である．テイラーの定理より，

$$\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1}-\frac{1}{p+1}s^{p+1}-s^pt-\frac{p}{2}s^{p-1}t^2=\frac{p(p-1)}{6}(s+\theta t)^{p-2}t^3$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する．右辺は 0 以上であるから，$b'(r)\leq 0$ も合わせて，

$$\int_0^R r^N G_r(v,\underline{u}_\lambda,r)dr\leq\int_0^R r^N\left(\frac{p}{2}b'\underline{u}_\lambda^{p-1}v^2-\frac{1}{2}a'v^2\right)dr=\int_0^R r^N\left(\frac{p}{2}b'\underline{u}_\lambda^{p-1}-\frac{1}{2}a'\right)v^2dr \tag{7.15}$$

と評価できる．最後に，

$$\begin{aligned}\frac{2N}{N-2}G(t,s,r)-g(t,s,r)t&=\left(b\left((t+s)^{p+1}-s^{p+1}-(p+1)s^pt\right)-\frac{p+1}{2}a(r)t^2\right)-\left(b(r)\left((t+s)^p-s^p\right)-a(r)t\right)t\\&=b(r)\left((t+s)^{p+1}-(t+s)^pt-s^{p+1}-(p+1)s^pt+s^pt\right)-\frac{p-1}{2}a(r)t^2\end{aligned}$$

を考察する．$\alpha(t)=(t+s)^{p+1}-(t+s)^pt=(t+s)^ps$ とおく．1,2,3 階導関数を計算すると，それぞれ以下の通りである．

$$\begin{aligned}\alpha'(t)&=p(t+s)^{p-1}s,\\\alpha''(t)&=p(p-1)(t+s)^{p-2}s,\\\alpha'''(t)&=p(p-1)(p-2)(t+s)^{p-3}s.\end{aligned}$$

α の $t=0$ のまわりのテイラー多項式を考える．3 次の剰余項を R_3 とすると，

$$R_3=s^{p+1}+p(t+s)^{p-1}s\frac{1}{2}p(p-1)s^{p-1}t^2$$

である．テイラーの定理より，R_3 は $0 < \theta < 1$ を用いて

$$R_3 = \frac{p(p-1)(p-2)}{6}(s+\theta t)^{p-3}st^3$$

と表される．$N \geq 6$ であるから，$1 < p \leq 2$ である．ゆえに，$R_3 \leq 0$ とわかる．以上より，

$$\int_0^R r^{N-1}\left(\frac{2N}{N-2}G(v,\underline{u}_\lambda,r) - g(v,\underline{u}_\lambda,r)v\right)dr \leq \int_0^R r^{N-1}\left(\frac{1}{2}p(p-1)b\underline{u}_\lambda^{p-1} - \frac{p-1}{2}a\right)v^2dr \tag{7.16}$$

と評価される．(7.13)，(7.14)，(7.15)，(7.16) より，(7.6) から

$$\int_0^R r^{N-1}\left(\frac{1}{2}p(p-1)b\underline{u}_\lambda^{p-1} - \frac{p-1}{2}a\right)v^2dr + \frac{p-1}{4}\int_0^R r^N\left(b'p\underline{u}_\lambda^{p-1} - a'\right)v^2dr \geq 0$$

が得られる．変形すると，

$$\int_0^R \frac{p-1}{4}r^{N-1}\left(p(2b+b'r)\underline{u}_\lambda^{p-1} - (2a+a'r)\right)v^2dr \geq 0.$$

がわかる．$(p-1)/4 > 0$ より，(7.12) が得られる． ■

証明 (定理 1.5.2). 　補題 2.4.2 より，

$$\lim_{\lambda\searrow 0}\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

が成立する．ゆえに，$0 < \lambda_*$ が存在し，$0 < \lambda \leq \lambda_*$ に対し，

$$\left\|\underline{u}_\lambda\right\|_{L^\infty(\Omega)} < \left(\frac{a(0)}{pb(0)}\right)^{1/(p-1)}$$

が成立する．a が単調増加, b が単調減少であることから，$0 \leq r \leq R$ に対し，$a'(r) \geq 0$, $b'(r) \leq 0$, $a(0) \leq a(r)$，$b(0) \leq b(r)$ である．以上より，$0 \leq r \leq R$ に対し，次式が成立する．

$$p(2b(r)+b'(r)r)\underline{u}_\lambda(r)^{p-1} - (2a(r)+a'(r)r) \leq 2pb(r)\underline{u}_\lambda(r)^{p-1} - 2a(r) < 2\left(b(r)\frac{a(0)}{b(0)} - a(r)\right) \leq 2(a(r)-a(r)) \leq 0.$$

したがって，任意の $v = v(r) \in C^2([0,R])$ に対し，(7.12) は成立しない．したがって，(7.1) の解は存在しない．ゆえに，補題 7.2.3，補題 7.2.2，補題 4.2.1 より，$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution 以外の弱解は存在しない． ■

A　命題 6.1 で使用される不等式の証明

本付録では，命題 6.1 で使用される不等式の証明を与える．2

補題 A.1. 　任意の $0 < \epsilon < 1$，$s,t \geq 0$ に対し，次式が成立する．

$$\frac{p}{2}s^{p-1}t^2 - \left(\frac{1}{p+1}(t+s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^pt - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\right) \leq \frac{\epsilon p}{2}s^{p-1}t^2 + \frac{1-\epsilon}{p+1}t^{p+1}. \tag{A.1}$$

証明. 　(A.1) の左辺を $Y(t,s)$ とおく．Y の t についての 2 階偏導関数は,

$$\begin{aligned} Y_{tt}(t,s) &= ps^{p-1} - p(t+s)^{p-1} + pt^{p-1} \\ &= p\left((1-\epsilon)t^{p-1} + \epsilon t^{p-1} + s^{p-1} - (t+s)^{p-1}\right) \end{aligned}$$

である．$p-1 > 0$ より，以下の計算が進む．

$$\begin{aligned} \epsilon t^{p-1} + s^{p-1} - (s+t)^{p-1} &= \epsilon t^{p-1} + s^{p-1} - (1-\epsilon)(t+s)^{p-1} - \epsilon(t+s)^{p-1} \\ &\leq \epsilon t^{p-1} + s^{p-1} - (1-\epsilon)s^{p-1} - \epsilon t^{p-1} = \epsilon s^{p-1}. \end{aligned}$$

ゆえに，Y_{tt} は,

$$Y_{tt}(t,s) \leq p\left((1-\epsilon)t^{p-1} + \epsilon s^{p-1}\right)$$

と評価される．$Y_t(0,s) = Y(0,s) = 0$ であるから，以下が成り立つ．

$$Y_t(t,s) \le \int_0^t p\left((1-\epsilon)t^{p-1} + \epsilon s^{p-1}\right) dt = (1-\epsilon)t^p + \epsilon p s^{p-1} t,$$
$$Y(t,s) \le \int_0^t \left((1-\epsilon)t^p + \epsilon p s^{p-1} t\right) dt = \frac{1-\epsilon}{p+1} t^{p+1} + \frac{\epsilon p}{2} s^{p-1} t^2.$$

以上より，(A.1) が成立する． ■

補題 A.1 は，[NS12] の Lemma B.2 (iii) とほぼ同一である．またその証明は，以上の証明と同一である．それにもかかわらず，本付録で証明を改めて書いたのは，[NS12] の Lemma B.2 (iii) では $1 < p \le 2$ という仮定がついているからである．この仮定がなくとも補題 A.1 は成立する．

参考文献

[AR73] Antonio Ambrosetti and Paul H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, Vol. 14, pp. 349–381, 1973.

[BK79] Haïm Brézis and Tosio Kato. Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials. *J. Math. Pures Appl. (9)*, Vol. 58, No. 2, pp. 137–151, 1979.

[BL83] Haïm Brézis and Elliott Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 88, No. 3, pp. 486–490, 1983.

[BN83] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 36, No. 4, pp. 437–477, 1983.

[CR75] Michael G. Crandall and Paul H. Rabinowitz. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 58, No. 3, pp. 207–218, 1975.

[CZ96] Dao-Min Cao and Huan-Song Zhou. On the existence of multiple solutions of nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 47, No. 1, pp. 89–96, 1996.

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, Vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[GNN79] B. Gidas, Wei Ming Ni, and L. Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 68, No. 3, pp. 209–243, 1979.

[JL73] D. D. Joseph and T. S. Lundgren. Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 49, pp. 241–269, 1972/73.

[KK74] J. P. Keener and H. B. Keller. Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems. *J. Differential Equations*, Vol. 16, pp. 103–125, 1974.

[NS07] Yūki Naito and Tokushi Sato. Positive solutions for semilinear elliptic equations with singular forcing terms. *J. Differential Equations*, Vol. 235, No. 2, pp. 439–483, 2007.

[NS12] Yūki Naito and Tokushi Sato. Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 191, No. 1, pp. 25–51, 2012.

[Poh65] S. I. Pohožaev. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 165, pp. 36–39, 1965.

[Tal76] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 110, pp. 353–372, 1976.

[Tar92] G. Tarantello. On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, Vol. 9, No. 3, pp. 281–304, 1992.

[Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[田中 08] 田中和永. 変分問題入門 — 非線形楕円型方程式とハミルトン系. 岩波書店, 2008.

謝辞

本論文を書く際に、宮本 安人 准教授から的確なご指摘を頂きました。ここに感謝の意を表します。