

Semilinear elliptic equations with a critical Sobolev exponent and a non-homogeneous term

Kazune Takahashi

24 January 2015

1 概要

N を 3 以上の自然数とする。 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする。 $p = (N+2)/(N-2)$ とする。 $f \in H^{-1}(\Omega)$ は、 $f \geq 0$ 、 $f \neq 0$ をみたすとする。 $a, b \in L^\infty(\Omega)$ とする。 κ_1 を $-\Delta$ の Ω におけるディリクレ条件下での第 1 固有値とする。 $\kappa > -\kappa_1$ が存在して、 $a \geq \kappa$ となると仮定する。また、 $b \geq 0$ 、 $b \neq 0$ と仮定する。 $\lambda \geq 0$ をパラメータとする。以下の方程式を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = bu^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\spadesuit)_\lambda$$

定理 1.1. $(\spadesuit)_\lambda$ には minimal solution が存在する。

定理 1.2. $(\spadesuit)_\lambda$ には extremal solution が存在する。とくに、 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution が存在する。また、 $b > 0$ in Ω ならば、 $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution は、 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution に限る。

定理 1.3. $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。 b は Ω 上のある点 p で最大値 $M_1 = \|b\|_{L^\infty}(\Omega) > 0$ を達成するものと仮定する。 $r_0 > 0$ が存在し、 $\{|x - p| < 2r_0\} \subset \Omega$ 、かつ、 $\{|x - p| < r_0\}$ 上

$$\begin{aligned} b(x) &= M_1 - M_2|x - p|^q, \\ a(x) &= m_1 + m_2|x - p|^{q'} \end{aligned}$$

であると仮定する。ここで $q, q' > 0$ 、 $M_2 > 0$ 、 $m_1 > \kappa$ 、 $m_2 \neq 0$ は定数である。さらに、以下の (i) – (iv) のいずれかの成立を仮定する。

- (i) $m_1 < 0$ 、かつ、 $N \geq 3$ 。
- (ii) $m_1 > 0$ 、かつ、 $N = 3, 4, 5$ 。
- (iii) $m_1 = 0$ 、かつ、 $m_2 < 0$ 、かつ、 $N \geq 3$ 。
- (iv) $m_1 = 0$ 、かつ、 $m_2 > 0$ 、かつ、 $3 \leq N < 6 + 2q'$ 。

このとき、 $(\spadesuit)_\lambda$ は、minimal solution \underline{u}_λ 以外の弱解 $\bar{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ をもつ。

1.1 記号

ルベグ空間を $L^q(\Omega)$ ($1 \leq q \leq \infty$) と表記する。ソボレフ空間 $W^{1,2}(\Omega)$ を $H^1(\Omega)$ と表記する。トレースの意味で $u|_{\partial\Omega} = 0$ が成立する $u \in H^1(\Omega)$ 全体を $H_0^1(\Omega)$ と表記する。ヘルダー空間を $C^{k+\alpha}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$ 、 $0 < \alpha < 1$) と表記する。コンパクト台を持つ Ω 上の C^∞ 級関数全体を $C_c^\infty(\Omega)$ と表記する。

ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する。ノルム空間 X の双対空間を X^* と表記する。 $H_0^1(\Omega)^*$ を $H^{-1}(\Omega)$ と表記す

る。 $f \in H^{-1}$ の $u \in H_0^1(\Omega)$ への作用を $\langle f, u \rangle$ と表記する。 $H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|_\kappa$ を、 $w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\|_\kappa = \left(\int_{\Omega} (|Dw|^2 + \kappa w^2) dx \right)^{1/2}$$

と定める。 $\kappa > -\kappa_1$ 、 Ω が有界領域であることにより、ポアンカレの不等式から $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。また、 $H_0^1(\Omega)$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を、 $w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\|w\| = \left(\int_{\Omega} |Dw|^2 dx \right)^{1/2}$$

と定める。やはりポアンカレの不等式から $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであることがしたがう。

2 minimal solution の存在と性質

本節では、 $(\spadesuit)_\lambda$ の解のうち、minimal solution について取り扱う。まずは minimal solution を定義する。

記号 2.1. $\lambda > 0$ に対し、

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \text{ は } (\spadesuit)_\lambda \text{ の弱解である}\}$$

と定める。

定義 2.2. $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ が **minimal solution** であるとは、任意の $u \in S_\lambda$ に対し、 $\underline{u}_\lambda \leq u$ in Ω が成立することをいう。

記号 2.3. $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution を \underline{u}_λ と表記する。

2.1 $H_0^1(\Omega)$ の原点付近における様子

minimal solution を調べる第一歩として、 $\lambda > 0$ が十分小さいときに、 $(\spadesuit)_\lambda$ が弱解を持つことを、陰関数定理を用いて示す。

補題 2.4. 1. $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し、 $(\spadesuit)_\lambda$ は U 内の唯一の弱解 u_λ をもつ。また、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

2. さらに、 $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ を仮定する。このとき、1. の弱解 u_λ は、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ をみたし、次が成立する。

$$\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \searrow 0).$$

証明. 1. $\Phi: [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を

$$\Phi(\lambda, u) = -\Delta u + au - b(u_+)^p - \lambda f \tag{1}$$

とする。 Φ の u についてのフレッシュエ微分は、 $w \in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\Phi_u(\lambda, u): w \mapsto -\Delta w + aw - bp(u_+)^{p-1}w. \tag{2}$$

と書かれる。特に、

$$\Phi_u(0, 0)w = -\Delta w + aw.$$

が成立する。 $a > -\kappa_1$ により、 $\Phi_u(0, 0): H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ は可逆である。ゆえに、陰関数定理より、 $\lambda_0 > 0$ と $H_0^1(\Omega)$ の原点の近傍 U が存在して、 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ に対し、 $\Phi(\lambda, u_\lambda) = 0$ をみたす $u_\lambda \in U$ が唯一存在し、次をみたす。

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

つまり、 u_λ は、以下の方程式の弱解である。

$$\begin{cases} -\Delta u + au = b(u_+)^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

ここで $b(u_+)^p + \lambda f \geq 0$ であり、 $a > -\kappa_1$ であるから、強最大値原理により、 $u_\lambda > 0$ in Ω が成立する。よって、 u_λ は $(\clubsuit)_\lambda$ の U における唯一の弱解である。

2. $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ のとき、 $\Phi: [0, \infty) \times C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$ を、(1) で定義する。以下、1. の証明と同様にすると、 $u_\lambda \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ と $\|u_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0$ ($\lambda \searrow 0$) が示される。 ■

以下では基本的に、1. の結果を使用し、弱解の枠組みで議論する。2. の結果は、§ 5 で使用する。

2.2 優解との関係

続いて、ある $\lambda = \widehat{\lambda}$ で $(\clubsuit)_\lambda$ が優解をもつときに、 $0 < \lambda \leq \widehat{\lambda}$ で minimal solution が存在することを示す。

補題 2.5. $\widehat{\lambda} > 0$ とする。以下をみたす $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u} + a\widehat{u} \geq b\widehat{u}^p + \widehat{\lambda}f & \text{in } \Omega, \\ \widehat{u} > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (4)$$

このとき、 $\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ に対し、 $(\clubsuit)_\lambda$ の minimal solution u_λ が存在する。また、 $u_\lambda < \widehat{u}$ in Ω が成立する。

証明. $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ を、次の通りに帰納的に定める。 $u_0 \equiv 0$ とする。 u_n が定まっているときに、線形方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} = bu_n^p + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

の唯一の弱解を $u_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ と定める。

(5) が唯一の弱解であることを確かめる。ソボレフ埋め込みにより、 $u_n \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ だから、 $u_n^p \in L^{(p+1)/p}(\Omega) = L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ である。 $b \in L^\infty(\Omega)$ 、 $f \in H^{-1}(\Omega)$ より、 $bu_n^p + \lambda f \in H^{-1}(\Omega)$ である。 $a > -\kappa_1$ と合わせて、(5) には唯一の弱解が存在する。

ここで、次の事実を、 n についての数学的帰納法を用いて証明する。

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \widehat{u} \text{ in } \Omega. \quad (6)$$

$n = 0$ のときは、 $\widehat{u} > 0$ in Ω であることから、(6) が成立する。 $n \in \mathbb{N}$ とする。 n における (6) の成立を仮定し、 $n+1$ における (6) の成立を示す。

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f, \\ -\Delta u_n + au_n &= bu_{n-1}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + a(u_{n+1} - u_n) = b(u_n^p - u_{n-1}^p).$$

右辺は仮定により 0 以上である。ゆえに強最大値原理より、 $u_{n+1} > u_n$ in Ω である。また、

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{u} + a\widehat{u} &> b\widehat{u}^p + \lambda f, \\ -\Delta u_{n+1} + au_{n+1} &= bu_n^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて同様にすると、 $\widehat{u} > u_{n+1}$ in Ω もしたがう。以上により、(6) は $n+1$ でも正しい。数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について (6) の成立が示された。

続いて、 $\{u_n\}$ が $H_0^1(\Omega)$ における有界列であることを示す。 u_{n+1} は (5) の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx = \int_{\Omega} bu_n^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f \psi dx \quad (7)$$

$\psi = u_{n+1}$ とすると、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + a|u_{n+1}|^2) dx = \int_{\Omega} bu_n^p u_{n+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f u_{n+1} dx.$$

ここで、右辺は、次の通りに評価される。

$$(\text{右辺}) \leq \int_{\Omega} b\hat{u}^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f\hat{u} dx < \infty. \quad (8)$$

ここで $\hat{u} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ に注意した。また左辺について、

$$(\text{左辺}) \geq \int_{\Omega} (|Du_{n+1}|^2 + \kappa|u_{n+1}|^2) dx = \|u_{n+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (9)$$

もわかる。 $\|\cdot\|_{\kappa}$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムである。したがって、(8) および (9) より、 $\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (10)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$

$$u_n \rightarrow u \text{ a. e. in } \Omega. \quad (11)$$

ここで u が $(\spadesuit)_{\lambda}$ の弱解であることを示す。(10) により、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Du_{n+1} \cdot D\psi + au_{n+1}\psi) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx.$$

また、 $b \in L^{\infty}(\Omega)$ 、 $\hat{u}, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n\psi| \leq b\hat{u}^p|\psi| \text{ a. e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(11) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_{\Omega} bu_n^p \psi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} bu^p \psi dx.$$

したがって、(7) で $n \rightarrow \infty$ とすると次を得る。

$$\int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx = \int_{\Omega} bu^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f\psi dx. \quad (12)$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、 $u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_{\lambda}$ の弱解である。

最後に、 u は $(\spadesuit)_{\lambda}$ の minimal solution であることを示す。 $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ を $(\spadesuit)_{\lambda}$ の弱解とする。このとき、(6) と同様の議論により、 $\tilde{u} > u_n$ in Ω が数学的帰納法で示される。 $n \rightarrow \infty$ として、 $\tilde{u} \geq u$ in Ω となる。よって u は $(\spadesuit)_{\lambda}$ の minimal solution である。 ■

補題 2.5 から、次の事実がしたがう。

- 補題 2.6.**
1. $\lambda_0 > 0$ が存在して、 $S_{\lambda_0} \neq \emptyset$ とする。このとき、 $0 < \lambda < \lambda_0$ に対し、 $S_{\lambda} \neq \emptyset$ となる。
 2. $\lambda > 0$ とする。 $S_{\lambda} \neq \emptyset$ ならば、 $(\spadesuit)_{\lambda}$ には minimal solution $\underline{u}_{\lambda} \in S_{\lambda}$ が存在する。
 3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ とする。 $S_{\lambda_1} \neq \emptyset$ 、 $S_{\lambda_2} \neq \emptyset$ ならば、 $\underline{u}_{\lambda_1} \in S_{\lambda_1}$ 、 $\underline{u}_{\lambda_2} \in S_{\lambda_2}$ について、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が成立する。
 4. 補題 2.4 における $(\spadesuit)_{\lambda}$ の弱解を u_{λ} とする。このとき、 $u_{\lambda} = \underline{u}_{\lambda}$ である。

証明.

1. $u_{\lambda_0} \in S_{\lambda_0}$ とする。 $\hat{u} = u_{\lambda_0}$ とし補題 2.5 を適用すると結論が得られる。

2. $u_{\lambda} \in S_{\lambda}$ とする。 $\hat{u} = u_{\lambda}$ とし補題 2.5 を適用すると、 $(\spadesuit)_{\lambda}$ の minimal solution \underline{u}_{λ} が得られる。

3. $\hat{u} = \underline{u}_{\lambda_2}$ とし、補題 2.5 (6) を適用すると、 $\underline{u}_{\lambda_1} \leq \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω が得られる。

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\lambda_1} + a\underline{u}_{\lambda_1} &= b\underline{u}_{\lambda_1}^p + \lambda_1 f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda_2} + a\underline{u}_{\lambda_2} &= b\underline{u}_{\lambda_2}^p + \lambda_2 f \end{aligned}$$

の両辺を引くと、次が成立する。

$$-\Delta(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) + a(\underline{u}_{\lambda_2} - \underline{u}_{\lambda_1}) = b(\underline{u}_{\lambda_2}^p - \underline{u}_{\lambda_2}) + (\lambda_2 - \lambda_1)f.$$

右辺が 0 以上であること、および、 $a > -\kappa_1$ により、強最大値原理を用いると、 $\underline{u}_{\lambda_1} < \underline{u}_{\lambda_2}$ in Ω がしたがう。

4. $u_\lambda \in S_\lambda$ より、 $S_\lambda \neq \emptyset$ である。したがって、2. より、 $(\spadesuit)_\lambda$ は minimal solution \underline{u}_λ をもつ。よって、(12) で $u = \psi = \underline{u}_\lambda$ とおくと、以下が得られる。

$$\int_{\Omega} (|D\underline{u}_{\lambda}|^2 + a|\underline{u}_{\lambda}|^2) dx = \int_{\Omega} b\underline{u}_{\lambda}^p dx + \lambda \int_{\Omega} f\underline{u}_{\lambda} dx. \quad (13)$$

ここで、minimal solution の $H_0^1(\Omega)$ ノルムが、 $\lambda \searrow 0$ のとき、0 に収束することを示す。

$$((13) \text{ の左辺}) \geq \int_{\Omega} (|D\underline{u}_{\lambda}|^2 + \kappa |\underline{u}_{\lambda}|^2) dx \geq C \|\underline{u}_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

中辺は $\|\underline{u}_\lambda\|_\kappa^2$ であり、 $\|\cdot\|_\kappa$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値であるから、 $C > 0$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数であることに注意されたい。また、 $\underline{u}_\lambda \leq u_\lambda$ in Ω より、次がしたがう。

$$\begin{aligned}
((13) \text{ の右辺}) &\leq \int_{\Omega} b \underline{u}_{\lambda}^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f \underline{u}_{\lambda} dx \\
&\leq \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\underline{u}_{\lambda}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} + \lambda \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\underline{u}_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C' \|\underline{u}_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|\underline{u}_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

ここで、 $C', C''' > 0$ は、 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ の中身によらない定数である。以上より、以下が成立する。

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} + C'' \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

補題 2.4 より、 $\lambda \searrow 0$ のとき、 $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ が成立する。ゆえに、 $\|\underline{u}_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \searrow 0$ となる。再び補題 2.4 によると、 $\lambda > 0$ が十分小さいとき、 u_λ は $(\spadesuit)_\lambda$ の唯一の弱解であった。したがってこのことは $u_\lambda = \underline{u}_\lambda$ を示している。 ■

2.3 解が存在する λ の有界性

補題 2.4 により、 $\lambda > 0$ が存在して、 $(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。補題 2.6 により、 $(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ が見つければ、それより小さい λ については、 $(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。そこで、 $(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する λ がどこまで大きくなるのかを調べる。そのために次の記号を置く。

記号 2.7. $\bar{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid S_\lambda \neq \emptyset\}$ と定める。

ここから先は、 $\bar{\lambda} < \infty$ を示すことを目標に議論を進める。その準備として、 $\lambda > 0$ によらない $H_0^1(\Omega)$ の元 g_0 を用意する。

記号 2.8. $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\Delta g_0 + a g_0 = f & \text{in } \Omega, \\ g_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (14)$$

の唯一の弱解と定める。

q_0 について、次の補題を示す。

補題 2.9. 固有値問題

$$-\Delta\phi + a\phi = \mu b(g_0)^{p-1}\phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の第1固有値を μ_1 とする。このとき、 $\mu_1 > 0$ である。また、 μ_1 に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、 $\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものがある。

証明. μ_1 はレーリッヒ商により、

$$\mu_1 = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi^2 dx} \quad (15)$$

と特徴付けられる。また、(15) の右辺の下限を達成する関数 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ があるとすれば、 ϕ が μ_1 に付随する固有関数である。

(15) より、以下が成立する $H_0^1(\Omega)$ の点列 $\{\psi_n\}$ が存在する。

$$\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi_n^2 dx = 1, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} (|D\psi_n|^2 + a|\psi_n|^2) dx \searrow \mu_1. \quad (17)$$

$a > \kappa$ であるから、(17) の左辺は $\|\psi_n\|_{\kappa}^2$ 以下である。 $\|\cdot\|_{\kappa}$ は $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と同値なノルムであるから、 $\{\psi_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。

ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ とすると、以下が成立する。

$$\psi_n \rightharpoonup \phi_1 \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (18)$$

$$\psi_n \rightarrow \phi_1 \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1), \quad (19)$$

$$\psi_n \rightarrow \phi_1 \text{ a.e. in } \Omega. \quad (20)$$

(18) より、 $H_0^1(\Omega)$ ノルムの弱下半連続性から、次が成立する。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\phi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

ゆえに、(19) と合わせて、以下が成立する。

$$\mu_1 \geq \int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2) dx. \quad (21)$$

また、ソボレフ埋め込み $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、 $H_0^1(\Omega)$ の有界列 $\{\psi_n\}$ は $L^{p+1}(\Omega)$ の有界列である。したがって、 $\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の有界列である。よって、必要なら部分列をとると、 $\{\psi_n^2\}$ は $L^{N/(N-2)}(\Omega)$ の弱収束列となる。一方 (20) から、 $\{\psi_n^2\}$ は ϕ_1^2 に Ω 上ほとんどいたるところ収束する。したがって、次が成立する。

$$\psi_n^2 \rightharpoonup \phi_1^2 \text{ weakly in } L^{N/(N-2)}(\Omega).$$

$g_0 \in L^{p+1}(\Omega)$ より、 $b(g_0)^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ である。 $(L^{N/(N-2)}(\Omega))^* \cong L^{N/2}(\Omega)$ より、次が成立する。

$$\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \psi_n^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \phi_1^2 dx. \quad (22)$$

(22) の証明は、[Wil96] の Lemma 2.13 によった。(21) と (22) により、次がしたがう。

$$\mu_1 \geq \frac{\int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a|\phi_1|^2) dx}{\int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} \phi_1^2 dx}. \quad (23)$$

(15) より、(23) の不等号は実際には等号が成立する。すなわち、(15) の右辺の下限は $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ により達成される。よって $\mu_1 > 0$ である。

(15) の右辺の形から、 ϕ_1 が (15) の右辺の下限を達成するならば、 $|\phi_1|$ も下限を達成する。すなわち、 $\phi_1 \geq 0$ in Ω となる第1固有関数がある。この ϕ_1 について、次が成立する。

$$-\Delta \phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1} \phi_1 \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

ゆえに、強最大値原理により、 $\phi_1 > 0$ in Ω となる。 ■

g_0 を用いて、次の命題を証明する。

命題 2.10. $\bar{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。 $0 < \bar{\lambda} < \infty$ である。

証明. 補題 2.4 により、 $\lambda_0 > 0$ が存在し、 $0 < \lambda < \lambda_0$ に対して、 $(\spadesuit)_\lambda$ の解が存在する。ゆえに $\bar{\lambda} > 0$ である。そこで、 $\bar{\lambda} < \infty$ を示せば証明が完了する。

$\lambda > 0$ は、 $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたすものとする。 $u \in S_\lambda$ とし、 $v = u - \lambda g_0$ とする。このとき、次が成立する。

$$-\Delta v + av = bu^p \geq 0$$

したがって、強最大値原理より、 $v > 0$ in Ω である。つまり、 $u > \lambda g_0$ in Ω がしたがう。よって、以下が成立する。

$$-\Delta u + au \geq bu^p \geq b\lambda^{p-1}(g_0)^{p-1}u \text{ in } \Omega. \quad (24)$$

一方、補題 2.9 により、以下が成立する $\mu_1 > 0$ 、 $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ 、 $\phi_1 > 0$ in Ω が存在する。

$$-\Delta \phi_1 + a\phi_1 = \mu_1 b(g_0)^{p-1}\phi_1 \text{ in } \Omega. \quad (25)$$

そこで、 $(24) \times \phi_1 - (25) \times u$ を Ω 上積分すると、次を得る。

$$0 \geq (\lambda^{p-1} - \mu_1) \int_{\Omega} b(g_0)^{p-1} u \phi_1 dx.$$

ここで、 $b \geq 0$ in Ω 、 $b \neq 0$ 、 $g_0, u, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、 $\lambda^{p-1} - \mu_1 \leq 0$ である。つまり、 $\lambda \leq \mu_1^{1/(p-1)}$ となる。 $\lambda > 0$ は $S_\lambda \neq \emptyset$ をみたす任意の正の数であるから、 $\bar{\lambda} \leq \mu_1^{1/(p-1)} < \infty$ がしたがう。 ■

証明 (定理 1.1). 命題 2.10 により、

2.4 minimal solution に関する線形化固有値問題

$(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution についての線形化固有値問題

$$-\Delta \phi + a\phi = \mu p b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} \phi \text{ in } \Omega, \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (26)$$

を考察する。特に第 1 固有値、第 1 固有関数について論ずる。

記号 2.11. $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_\lambda \in S_\lambda$ に関する線形化固有値問題 (26) の第 1 固有値を $\mu_1(\lambda)$ とかく。

補題 2.12. $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。このとき、以下が成立する。

1. $\mu_1(\lambda) > 0$ である。また、 $\mu_1(\lambda)$ に付随する固有関数 ϕ_1 のうち、 $\phi_1 > 0$ in Ω をみたすものが存在する。
2. 任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx \geq \mu_1(\lambda) \int_{\Omega} p b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} \psi^2 dx. \quad (27)$$

証明. 1. 補題 2.9 と同様である。

2. $\mu_1(\lambda)$ のレーリッヒ商による特徴付け

$$\mu_1(\lambda) = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|D\psi|^2 + a|\psi|^2) dx}{\int_{\Omega} p b(\underline{u}_\lambda)^{p-1} \psi^2 dx} \quad (28)$$

から (27) が成立する。 ■

補題 2.12 から即座に、 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ ならば $\mu_1(\lambda) > 0$ であることがわかる。次の補題では、方程式 $(\spadesuit)_\lambda$ に着目し、 $\mu_1(\lambda)$ についてより多くの情報を引き出す。

補題 2.13. $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。このとき、 $\mu_1(\lambda) > 1$ である。

証明. $\hat{\lambda}$ を $0 < \lambda < \hat{\lambda} < \bar{\lambda}$ をみたすものとする。 $z = \underline{u}_{\hat{\lambda}} - \underline{u}_{\lambda}$ とおく。補題 2.6.3 より、 $z > 0$ in Ω である。

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}_{\hat{\lambda}} + a \underline{u}_{\hat{\lambda}} &= b \underline{u}_{\hat{\lambda}}^p + \hat{\lambda} f, \\ -\Delta \underline{u}_{\lambda} + a \underline{u}_{\lambda} &= b \underline{u}_{\lambda}^p + \lambda f \end{aligned}$$

の両辺を引いて、次を得る。

$$-\Delta z + az = b(\underline{u}_{\hat{\lambda}}^p - \underline{u}_{\lambda}^p) + (\hat{\lambda} - \lambda)f.$$

$x \geq 0$ に対し、 $x \mapsto x^p$ は下に凸であるから、次がしたがう。

$$\underline{u}_{\hat{\lambda}}^p - \underline{u}_{\lambda}^p > p \underline{u}_{\lambda}^{p-1} (\underline{u}_{\hat{\lambda}} - \underline{u}_{\lambda}) = p \underline{u}_{\lambda}^{p-1} z.$$

$(\hat{\lambda} - \lambda)f \geq 0$ と合わせて、次を得る。

$$-\Delta z + az > b p \underline{u}_{\lambda}^{p-1} z \quad \text{in } \Omega. \quad (29)$$

$\mu_1 = \mu_1(\lambda)$ とする。補題 2.12 より、 $\phi_1 > 0$ in Ω があって、

$$-\Delta \phi_1 + a \phi_1 = \mu_1 b \underline{u}_{\lambda}^{p-1} \phi_1 \quad \text{in } \Omega \quad (30)$$

(29) $\times \phi_1 - (30) \times z$ を Ω 上積分すると、

$$0 > (1 - \mu_1) p \int_{\Omega} b \underline{u}_{\lambda}^{p-1} \phi_1 z dx$$

となる。ここで、 $b \geq 0$ in Ω 、 $b \not\equiv 0$ 、 $\underline{u}_{\lambda}, z, \phi_1 > 0$ in Ω であるから、右辺の積分は正である。ゆえに、 $1 - \mu_1 < 0$ である。つまり $\mu_1 > 1$ である。 ■

2.5 extremal solution の存在

以下では、 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_{\lambda}$ を考察する。

定義 2.14. $\bar{\lambda}$ を記号 2.7 のものとする。 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_{\lambda}$ の弱解を $(\spadesuit)_{\lambda}$ の **extremal solution** という。

本小節では、 $(\spadesuit)_{\lambda}$ の extremal solution が存在することを示す。このために、まず以下の集合を考察する。

$$K = \{\underline{u}_{\lambda} \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \bar{\lambda}\}. \quad (31)$$

補題 2.15. (31) の K は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。

証明. $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ を記号 2.8 のものとする。 $v_{\lambda} = \underline{u}_{\lambda} - \lambda g_0$ と定める。すると、次が成立する。

$$-\Delta v_{\lambda} = \underline{u}_{\lambda} - \lambda g_0 \quad \text{in } \Omega.$$

ゆえに、 $\psi \in H_0^1(\Omega)$ とすると、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Dv_{\lambda} \cdot D\psi + av_{\lambda}\psi) dx = \int_{\Omega} b(v_{\lambda} + \lambda g_0)^p \psi dx.$$

$\psi = v_{\lambda}$ とおくと、次を得る。

$$\int_{\Omega} (|Dv_{\lambda}|^2 + a|v_{\lambda}|^2) dx = \int_{\Omega} b(v_{\lambda} + \lambda g_0)^p v_{\lambda} dx. \quad (32)$$

ここで、次の事実を示す。任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $C > 0$ が存在し、任意の $s, t \geq 0$ に対し、次式が成立する。

$$(t + s)^p \leq (1 + \epsilon)(t + s)^{p-1}t + Cs^p. \quad (33)$$

まず、 $(t + s)^{p-1}s$ にヤングの不等式を用いる。 $q, r > 1$ は、 $q^{-1} + r^{-1} = 1$ をみたすものとする。任意の $0 < \tilde{\epsilon} < 1$ に対し、 $\tilde{C} > 0$ が存在し、次が成立する。

$$(t + s)^{p-1}s \leq \tilde{\epsilon}((t + s)^{p-1})^q + \tilde{C}s^r.$$

ここで $q = p/(p-1)$ とおくと、 $r = p$ である。ゆえに、以下が成立する。

$$\begin{aligned} (t+s)^{p-1}s &\leq \tilde{\epsilon}(t+s)^p + \tilde{C}s^p \\ &= \tilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}t + \tilde{\epsilon}(t+s)^{p-1}s + \tilde{C}s^p, \\ (t+s)^{p-1}s &\leq \frac{\tilde{\epsilon}}{1-\tilde{\epsilon}}(t+s)^{p-1}t + \frac{\tilde{C}}{1-\tilde{\epsilon}}s^p. \end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\epsilon = \tilde{\epsilon}/(1-\tilde{\epsilon})$ となる $0 < \tilde{\epsilon} < 1$ は存在する。この $\tilde{\epsilon}$ に対し、 $C = \tilde{C}/(1-\tilde{\epsilon})$ とすると、次が成立する。

$$(t+s)^{p-1}s \leq \epsilon(t+s)^{p-1}t + Cs^p.$$

$(t+s)^p = (t+s)^{p-1}s + (t+s)^{p-1}t$ より、(33) が得られる。以上の (33) の証明は [NS07] の Lemma 4.1 によった。

(32) の左辺を I とおく。(33) より、次式が成立する。

$$\int_{\Omega} b(v_{\lambda} + \lambda g_0)^p v_{\lambda} dx \leq (1+\epsilon) \int_{\Omega} b \underline{u}_{\lambda}^{p-1} v_{\lambda}^2 dx + C \lambda^p \int_{\Omega} b g_0^p v_{\lambda} dx. \quad (34)$$

ここで、補題 2.12.2、補題 2.13 から、次式を得る。

$$I \leq \mu_1 p \int_{\Omega} b(\underline{u}_{\lambda})^{p-1} \underline{v}_{\lambda}^2 dx > p \int_{\Omega} b(\underline{u}_{\lambda})^{p-1} \underline{v}_{\lambda}^2 dx.$$

すなわち、次を得る。

$$\int_{\Omega} b(\underline{u}_{\lambda})^{p-1} v_{\lambda}^2 dx < \frac{I}{p} \quad (35)$$

また、 $g_0, v_{\lambda} \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ 、及び、ヘルダーの不等式、ソボレフの不等式から、次式を得る。

$$\int_{\Omega} b g_0^p v_{\lambda} dx \leq \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|g_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}^p \|v_{\lambda}\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C \|v_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|v_{\lambda}\|_{\kappa}. \quad (36)$$

ここで $C, C' > 0$ は λ によらない。

(32)、(35)、(36) から、次式がしたがう。

$$I \leq \frac{1+\epsilon}{p} I + \bar{\lambda}^p C \|v_{\lambda}\|_{\kappa}.$$

$\epsilon > 0$ を $(1+\epsilon)/p < 1$ となるよう小さくとれば、 $I \leq C \|v_{\lambda}\|_{\kappa}$ となる。ここで $I \geq \|v_{\lambda}\|_{\kappa}^2$ 、 $v_{\lambda} \not\equiv 0$ であるから、 $\|v_{\lambda}\|_{\kappa} \leq C$ である。 $\|\cdot\|_{\kappa}$ と $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は同値であるから、 $\{v_{\lambda} \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \lambda < \bar{\lambda}\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。 v_{λ} の定め方から $\underline{u}_{\lambda} = v_{\lambda} + \lambda g_0$ であるため、次の式が成立する。

$$\|\underline{u}_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v_{\lambda}\|_{H_0^1(\Omega)} + \bar{\lambda} \|g_0\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

右辺は λ によらない定数で抑えられる。従って、(31) の K は、 $H_0^1(\Omega)$ の有界集合である。 ■

$\lambda \nearrow \bar{\lambda}$ のときの \underline{u}_{λ} の極限をとることで、 $(\spadesuit)_{\lambda}$ の extremal solution を構成する。

命題 2.16. 1. $(\spadesuit)_{\lambda}$ の extremal solution が存在する。とくに、 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_{\lambda}$ の minimal solution $\underline{u}_{\bar{\lambda}}$ が存在する。

2. $\lambda > 0$ とする。 $\lambda \nearrow \bar{\lambda}$ のとき、 $\underline{u}_{\lambda} \nearrow \underline{u}_{\bar{\lambda}}$ a.e. in Ω となる。

証明. 1. 正の数の列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ は、 $\lambda_n \nearrow \bar{\lambda}$ をみたすものとする。 $u_n = \underline{u}_{\lambda_n}$ とかく。 u_n は $\lambda = \lambda_n$ における $(\spadesuit)_{\lambda}$ の弱解であるから、任意の $\psi \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Du_n \cdot D\psi + a u_n \psi) dx = \int_{\Omega} b u_n^p \psi dx + \lambda \int_{\Omega} f \psi dx. \quad (37)$$

補題 2.15 より、 $\{u_n\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である。ゆえに、必要ならば部分列をとることにより、 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ とすると、以下が成立する。

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (38)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^q(\Omega) \quad (q < p+1),$$

$$u_n \rightarrow u \text{ a. e. in } \Omega. \quad (39)$$

u が $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution であることを示す。(38) により、次が成立する。

$$\int_{\Omega} (Du_n \cdot D\psi + au_n\psi) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx.$$

補題 2.6.3 と (39) により、 $u_n \leq u$ in Ω となる。とくに、 $u > 0$ in Ω である。また、 $b \in L^\infty(\Omega)$ 、 $u, \psi \in H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ より、

$$|bu_n^p\psi| \leq b\hat{u}^p|\psi| \text{ a. e. in } \Omega$$

の右辺は可積分である。(39) より、優収束定理から、次を得る。

$$\int_{\Omega} bu_n^p\psi dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} bu^p\psi dx.$$

したがって、(37) で $n \rightarrow \infty$ とすると次を得る。

$$\int_{\Omega} (Du \cdot D\psi + au\psi) dx = \int_{\Omega} bu^p\psi dx + \bar{\lambda} \int_{\Omega} f\psi dx.$$

$\psi \in H_0^1(\Omega)$ は任意であるから、 $u \in H_0^1(\Omega)$ は $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution である。すなわち、 $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が存在する。補題 2.5.2 より、特に $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution $\underline{u}_{\bar{\lambda}}$ が存在する。

2. 補題 2.5.3 より、 $u_n = \underline{u}_{\lambda_n} < \underline{u}_{\bar{\lambda}}$ in Ω である。 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $u \leq \underline{u}_{\bar{\lambda}}$ in Ω を得る。 $u \in S_{\bar{\lambda}}$ であり、 $\underline{u}_{\bar{\lambda}}$ は $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution であるから、 $u = \underline{u}_{\bar{\lambda}}$ である。したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\underline{u}_{\lambda_n} \nearrow \underline{u}_{\bar{\lambda}}$ a. e. in Ω となる。 $\{\lambda_n\}$ の任意性により、 $\lambda \nearrow \bar{\lambda}$ のとき、 $\underline{u}_\lambda \nearrow \underline{u}_{\bar{\lambda}}$ a. e. in Ω となる。 ■

2.6 extremal solution の一意性

前小節では、 $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution の存在を示した。本小節では、 $(\spadesuit)_\lambda$ の extremal solution が $b > 0$ in Ω のときは唯一つに限ることを示す。

鍵となるのは、(26) の第 1 固有値 $\mu_1(\lambda)$ である。補題 2.13 では、 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ において $\mu_1(\lambda) > 1$ となることを示した。 $b > 0$ in Ω $\lambda = \bar{\lambda}$ において、この不等式が成立しなくなることを示す。

補題 2.17. λ_1, λ_2 は、

補題 2.18. 1. $\lambda \nearrow \bar{\lambda}$ のとき、 $\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\bar{\lambda})$ である。

2. $b > 0$ in Ω ならば、 $\mu_1(\bar{\lambda}) = 1$ である。

証明. 1. $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ を、 $\mu_1(\bar{\lambda})$ に付随する $\phi_1 > 0$ in Ω をみたす固有関数とする。正の実数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ を λ_n を、 $\lambda_n \nearrow \bar{\lambda}$ をみたすものとする。単調収束定理より、次式が成立する。

$$\int_{\Omega} bp(\underline{u}_{\lambda_n})^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_{\Omega} bp(\underline{u}_{\bar{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\{\lambda_n\}$ の任意性より、次式が成立する。

$$\int_{\Omega} bp(\underline{u}_\lambda)^{p-1}\phi_1^2 dx \nearrow \int_{\Omega} bp(\underline{u}_{\bar{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx \quad (\lambda \nearrow \bar{\lambda}). \quad (40)$$

$\epsilon > 0$ とする。(40) より、 $\delta > 0$ が存在し、 $0 < \bar{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば、

$$0 < \frac{\int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2) dx}{\int_{\Omega} bp(\underline{u}_{\bar{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx} - \frac{\int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2) dx}{\int_{\Omega} bp(\underline{u}_{\lambda})^{p-1}\phi_1^2 dx} < \epsilon \quad (41)$$

が成立する。ここで、 $\tilde{\mu}(\lambda)$ を

$$\tilde{\mu}(\lambda) = \frac{\int_{\Omega} (|D\phi_1|^2 + a\phi_1^2) dx}{\int_{\Omega} bp(\underline{u}_{\bar{\lambda}})^{p-1}\phi_1^2 dx}$$

と定めると、(41) は $0 < \tilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\bar{\lambda}) < \epsilon$ と書き直される。(28) より、 $\mu_1(\lambda) \leq \tilde{\mu}(\lambda)$ である。補題 2.17 より $\mu_1(\bar{\lambda}) \leq \mu_1(\lambda)$ である。したがって、 $0 < \bar{\lambda} - \lambda < \delta$ ならば、 $0 \leq \mu_1(\lambda) - \mu_1(\bar{\lambda}) \leq \tilde{\mu}(\lambda) - \mu_1(\bar{\lambda}) < \epsilon$ となる。以上より、 $\lambda \nearrow \bar{\lambda}$ のとき、 $\mu_1(\lambda) \searrow \mu_1(\bar{\lambda})$ である。

2. 補題 2.13 および 1. より、 $\mu_1(\bar{\lambda}) \geq 1$ である。 $\mu_1(\bar{\lambda}) = 1$ を背理法を用いて示す。

$\mu_1(\bar{\lambda}) > 1$ であると仮定する。 $\Phi: [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ を (1) の通りに定める。(2) より、 $w \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$\Phi_u(\bar{\lambda}, \underline{u}_{\bar{\lambda}})w = -\Delta w + aw - bp(\underline{u}_{\bar{\lambda}})^{p-1}w. \quad (42)$$

となる。

ここで、 $\Phi_u(\bar{\lambda}, \underline{u}_{\bar{\lambda}})$ が可逆であることを示す。 $f \in H^{-1}(\Omega)$ とする。 ■

命題 2.19. $b > 0$ in Ω と仮定する。 $(\spadesuit)_{\lambda}$ の extremal solution は、 $\lambda = \bar{\lambda}$ における $(\spadesuit)_{\lambda}$ の minimal solution $\underline{u}_{\bar{\lambda}}$ に限る。

証明 (定理 1.2). 命題 2.16.1 と命題 2.19 からしたがう。 ■

3 second solution の存在 1 — 命題 3.4 の証明

本節と次節で、定理 1.3 を証明する。本節と次節を通し、 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。

$(\spadesuit)_{\lambda}$ の minimal solution 以外の解 \bar{u}_{λ} を見出すために、以下の方程式 $(\heartsuit)_{\lambda}$ を考察する。

$$\begin{cases} -\Delta v + av = b((v + \underline{u}_{\lambda})^p - (\underline{u}_{\lambda})^p) & \text{in } \Omega, \\ v > 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\heartsuit)_{\lambda}$$

方程式 $(\heartsuit)_{\lambda}$ を考察するために、以下の記号をおく。

記号 3.1. 1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ を定義域とする実数値関数 g, G を以下の通りに定める。

$$g(t, s, x) = b(x)((t_+ + s)^p - s^p)at_+, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} G(t, s, x) &= \int_0^{t_+} g(t, s, x)dt \\ &= b(x) \left(\frac{1}{p+1}(t_+ + s)^{p+1} - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - s^p t_+ \right) - \frac{1}{2}a(x)t_+^2. \end{aligned} \quad (44)$$

$g(v, \underline{u}_{\lambda}, x)$ を $g(v, \underline{u}_{\lambda})$ と表記する。 $G(v, \underline{u}_{\lambda}, x)$ を $G(v, \underline{u}_{\lambda})$ と表記する。

2. $I_{\lambda}: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ を以下の通りに定める。

$$I_{\lambda}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Dv|^2 dx - \int_{\Omega} G(v, \underline{u}_{\lambda}) dx. \quad (45)$$

$(\heartsuit)_{\lambda}$ の考察を始める前に、 $(\spadesuit)_{\lambda}$ と $(\heartsuit)_{\lambda}$ の関係、および、 $(\heartsuit)_{\lambda}$ と I_{λ} の関係を明らかにする。

補題 3.2. 1. 以下の (1), (2) は同値である。

(1) $(\spadesuit)_\lambda$ の minimal solution \underline{u}_λ 以外の弱解 $\bar{u}_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

(2) $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

2. $v \in H_0^1(\Omega)$ は (45) で定まる I_λ の臨界点であると仮定する。このとき、 v は $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解である。

ここで次の記号を置く。

記号 3.3. $V \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする。

$$S = \inf_{u \in H_0^1(V), u \neq 0} \frac{\|Du\|_{L^2(V)}^2}{\|u\|_{L^{p+1}(V)}^2} \quad (46)$$

と定める。

S は V には依存しないことが知られている。

次の 2 つの命題を証明することにより、定理 1.3 を証明する。

命題 3.4. $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ とする。 $v \geq 0$ in Ω 、 $v_0 \neq 0$ 、かつ、

$$\sup_{t>0} I_\lambda(tv_0) < \frac{1}{NM^{(n-2)/2}} S^{N/2} \quad (47)$$

をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在することを仮定する。このとき、 $(\heartsuit)_\lambda$ の弱解 $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

命題 3.5. 定理 1.3 の仮定のもとで、 $v_0 \geq 0$ in Ω 、 $v_0 \neq 0$ 、および、(47) をみたす $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

命題 3.4 の証明は本節、命題 3.5 の証明は次節でおこなう。

補題 3.6.

補題 3.7.

4 second solution の存在 2 — 命題 3.5 の証明

本節では、命題 3.5 を証明する。本節を通し、定理 1.3 の仮定をおく。必要ならば Ω を平行移動することにより、 $p = 0$ としてよい。以降 $p = 0$ とする。

4.1 タレンティー関数の考察

本小節では、命題 3.5 の証明の鍵となるタレンティー関数を考察する。命題 3.5 の v_0 は、タレンティー関数を加工することにより得られる。そこで本小節では、次小節で必要となる具体的計算を実行する。

まずは、タレンティー関数を定義する。

定義 4.1. タレンティー関数 $U: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$U(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{(N-2)/2}}$$

と定める。

U について、以下の事実が知られている。

補題 4.2. タレンティー関数 U について、次式が成立する。

$$S = \frac{\|DU\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}{\|U\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^2}. \quad (48)$$

すなわち、(46) の右辺の下限は、 $V = \mathbb{R}^N$ のとき、 U により達成される。

記号 4.3. Ω 上の cut off function η を、 $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ 、 $0 \leq \eta \leq 1$ in Ω 、 $\{|x| \leq r_0\}$ 上 $\eta \equiv 1$ 、 $\{|x| \geq 2r_0\}$ 上 $\eta \equiv 0$ となるものとする。 $\epsilon > 0$ とする。 Ω 上の関数 u_ϵ, v_ϵ を、

$$u_\epsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{(N-2)/2}}, \quad (49)$$

$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \quad (50)$$

と定める。

さて、[BN83] の p. 444 より、次式が成立する。

$$\|Du_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|DU\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \epsilon^{-(N-2)/2} + O(1). \quad (51)$$

次に、 $\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2$ を考察する。

$$\int_{\Omega} bu_\epsilon^{p+1} dx = \int_{\Omega} \frac{b(x)\eta(x)^{p+1}}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = O(1) + \int_{\{|x| < r_0\}} \frac{b(x)}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx.$$

最左辺の積分を I とおく。ここで q と N の大小により場合分けをする。

$q < N$ のとき：変数変換により、

$$I = \int_{\{|x| < r_0\}} \frac{M_1 - M_2|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = \frac{M_1}{\epsilon^{N/2}} \int_{\{|x| < r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{1}{(1 + |x|^2)^N} dx - \frac{M_2}{\epsilon^{(N-q)/2}} \int_{\{|x| < r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^q}{(1 + |x|^2)^N} dx$$

である。第 1 項の積分を $I_1(\epsilon)$ 、第 2 項の積分を $I_2(\epsilon)$ とおく。 $\epsilon \searrow 0$ のとき、 $I_1(\epsilon) \rightarrow \|U\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}$ である。 $q < N$ であるから、 $I_2(\epsilon)$ は有限の値に収束する。

$$\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2 = \frac{M_1^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)/2}} I_1(\epsilon)^{1/(p+1)} - \frac{M_2^{2/(p+1)}}{\epsilon^{(N-2)(N-q)/2N}} I_2(\epsilon)^{1/(p+1)} + O(1)$$

であるから、(51) および (48) より、

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\|Du_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2} = \frac{\|DU\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}{M_1^{2/(p+1)} \|U\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^2} = \frac{S}{M_1^{2/(p+1)}} \quad (52)$$

と計算される。すなわち、次式がしたがう。

$$\|v_\epsilon\|^2 = \|Dv_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{S}{M^{2/(p+1)}} + O(\epsilon^{(N-2)/2}). \quad (53)$$

$q = N$ のとき：極座標変換をすると、次式が得られる。

$$\int_{\{|x| < r_0\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx = \text{vol}(S^{N-1}) \int_0^{r_0} \frac{r^N}{(\epsilon + r^2)^N} r^{N-1} dr = O(|\log \epsilon|).$$

ここで $\text{vol}(S^{N-1})$ は半径 1 の $(N-1)$ 次元球面の体積である。ゆえに、(52)、(53) が同様にしたがう。

$q > N$ のとき：

$$\int_{\{|x| < r_0\}} \frac{|x|^q}{(\epsilon + |x|^2)^N} dx < \int_{\{|x| < r_0\}} |x|^{q-2N} dx < \infty$$

であるから、最右辺は $O(1)$ である。ゆえに、やはり (52)、(53) がしたがう。いずれの場合でも、

$$\|b^{1/(p+1)}u_\epsilon\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2 = O(\epsilon^{-(N-2)/2}) \quad (54)$$

である。

次に、

$$\int_{\Omega} au_\epsilon^2 dx = O(1) + \int_{\{|x| < r_0\}} \frac{m_1 + m_2|x|^{q'}}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} dx$$

を考察する。 I_1, I_2 を

$$I_1 = \int_{\{|x| < r_0\}} \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} dx,$$

$$I_2 = \int_{\{|x| < r_0\}} \frac{|x|^{q'}}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} dx$$

とおく。[BN83] の p. 444 より、次式が成立する。

$$I_1 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-4)/2}) & (n \geq 5), \\ O(|\log \epsilon|) & (n = 4), \\ O(1) & (n = 3). \end{cases}$$

I_2 を、 N と $q' + 4$ の大小で場合分けして計算する。

$N > q' + 4$ のとき：変数変換により、

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon^{(N-q'-4)/2}} \int_{\{|x| < r_0/\sqrt{\epsilon}\}} \frac{|x|^{q'}}{(1 + |x|^2)^{N-2}} dx$$

である。右辺の積分を $I(\epsilon)$ とおく。 $N > q' + 4$ であるから、 $\epsilon \searrow 0$ のとき、 $I(\epsilon)$ は収束する。よって、 $I_1 = O(\epsilon^{-(N-q'-4)/2})$ である。

$N = q' + 4$ のとき：極座標変換により、

$$I_2 = \text{vol}(S^{N-1}) \int_0^{r_0} \frac{|x|^{N-4}}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} r^{N-1} dr = O(|\log \epsilon|)$$

と計算される。

$N < q' + 4$ のとき：

$$I_2 < \int_{\{|x| < r_0\}} |x|^{q'-2(N-2)} dx < \infty$$

であるから、 $I_2 = O(1)$ である。

よって、 $\epsilon \searrow 0$ のときの I_2 の挙動は次の通りにまとめられる。

$$I_2 = \begin{cases} O(\epsilon^{-(N-q'-4)/2}) & (N > q' + 4), \\ O(|\log \epsilon|) & (N = q' + 4), \\ O(1) & (N < q' + 4). \end{cases}$$

以上の結果と、(54) より、以下が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a v_{\epsilon}^2 dx = O(1) + m_1 I'_1 + m_2 I'_2, \\ I'_1 = \begin{cases} O(\epsilon) & (N \geq 5), \\ O(\epsilon |\log \epsilon|) & (N = 4), \\ O(\epsilon^{1/2}) & (N = 3), \end{cases} \\ I'_2 = \begin{cases} O(\epsilon^{1+q'/2}) & (N > q' + 4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2} |\log \epsilon|) & (N = q' + 4), \\ O(\epsilon^{(N-2)/2}) & (N < q' + 4). \end{cases} \end{array} \right. \quad (55)$$

4.2 命題 3.5 の証明

本小節では、いくつかの補題を積み重ね、命題 3.5 に証明を与える。

補題 4.4. $\tau_{\epsilon} = \|v_{\epsilon}\|^{2/(p-1)}$ とする。このとき、次式が成立する。

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} I_{\lambda}(\tau_{\epsilon} v_{\epsilon}) = \frac{1}{N M_1^{(N-2)/2}} S^{N/2}. \quad (56)$$

証明. (50) より、

$$\int_{\Omega} b v_{\epsilon}^{p+1} dx = 1$$

であるから、 $t \geq 0$ に対し、次式が得られる。

$$I_{\lambda}(t v_{\epsilon}) = \frac{1}{2} t^2 \|v_{\epsilon}\|^2 - \frac{1}{p+1} t^{p+1} - \int_{\Omega} H(t v_{\epsilon}, \underline{u}_{\lambda}) dx.$$

したがって、次式が成立する。

$$I_{\lambda}(\tau_{\epsilon} v_{\epsilon}) = \frac{1}{N} \left(\|v_{\epsilon}\|^2 \right)^{N/2} - \int_{\Omega} H(\tau_{\epsilon} v_{\epsilon}, \underline{u}_{\lambda}) dx.$$

(53) より、以下がしたがう。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \searrow 0} \tau_{\epsilon} &= \frac{S^{1/(p-1)}}{M_1^{2/(p+1)(p-1)}}, \\ \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{N} \left(\|v_{\epsilon}\|^2 \right)^{N/2} &= \frac{1}{N M_1^{(N-2)/2}} S^{N/2}. \end{aligned}$$

$\epsilon \searrow 0$ のとき、 $\tau_{\epsilon} v_{\epsilon} \rightarrow 0$ a. e. in Ω である。ゆえに、補題 3.6 より、次式が成立する。

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\Omega} H(\tau_{\epsilon} v_{\epsilon}, \underline{u}_{\lambda}) dx = 0.$$

以上より、(56) を得る。 ■

補題 4.5. $\epsilon_0 > 0$ と $C > 0$ が存在し、 $0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対し、

$$\int_{\Omega} H'(t_{\epsilon} v_{\epsilon}, \underline{u}_{\lambda}) dx \geq C \epsilon^{(N-2)/4} \quad (57)$$

が成立する。

証明. 補題 3.7 より、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $I_{\lambda}(t v_{\epsilon}) \rightarrow -\infty$ となる。したがって、ある $K > 0$ が存在し、 $K < t$ においては、 $I_{\lambda}(t v_{\epsilon}) < 0$ となる。また、 $I_{\lambda}(0) = 0$ である。ゆえに、 $\sup_{t \geq 0} I_{\lambda}(t v_{\epsilon}) = \sup_{t \in [0, K]} I_{\lambda}(t v_{\epsilon})$ となる。 $I_{\lambda}(t v_{\epsilon})$ は t についての連続関数であるから、 $\sup_{t \geq 0} I_{\lambda}(t v_{\epsilon})$ を達成する $t > 0$ が存在する。この t を t_{ϵ} とかく。 $t_{\epsilon} > 0$ であり、次式が成立する。

$$I_{\lambda}(t_{\epsilon} v_{\epsilon}) = \sup_{t \geq 0} I_{\lambda}(t v_{\epsilon}). \quad (58)$$

ここで、次式を背理法を用いて証明する。

$$\liminf_{\epsilon \searrow 0} t_{\epsilon} > 0. \quad (59)$$

(59) を否定し、 $\liminf_{\epsilon \searrow 0} t_{\epsilon} = 0$ であることを仮定する。 $s, t \geq 0$ に対し、 $G(s, t) \geq 0$ である。そこで、よって、背理法により、(59) がしたがう。 ■

5 $N \geq 6$ かつ $\lambda > 0$ が小さい場合

参考文献

- [BN83] Haïm Brézis and Louis Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 36, No. 4, pp. 437–477, 1983.
- [NS07] Yūki Naito and Tokushi Sato. Positive solutions for semilinear elliptic equations with singular forcing terms. *J. Differential Equations*, Vol. 235, No. 2, pp. 439–483, 2007.
- [Wil96] Michel Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.