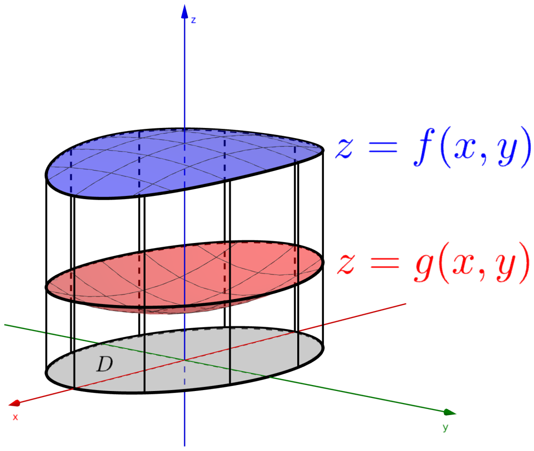
12　体積と面積と曲面積

12.1　2 重積分と体積

定理 12.1. f, g を有界閉領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上重積分可能な関数とし，D 上で $f(x,y) \geqq g(x,y)$ とする．D から xy 平面に垂直に生やした柱と曲面 $z = f(x,y)$ と $z = g(x,y)$ で囲まれた立体

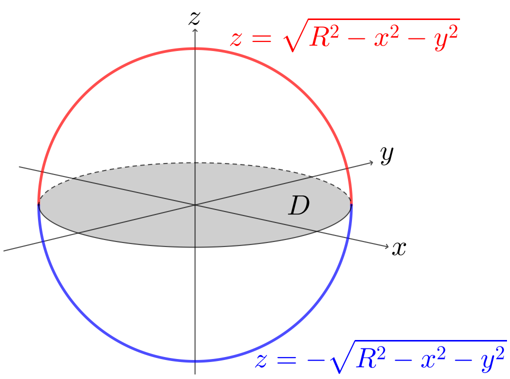
$$V = \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ g(x,y) \leqq z \leqq f(x,y) \}$$

の体積は 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \Big(f(x,y) - g(x,y)\Big)dxdy$ に等しい．

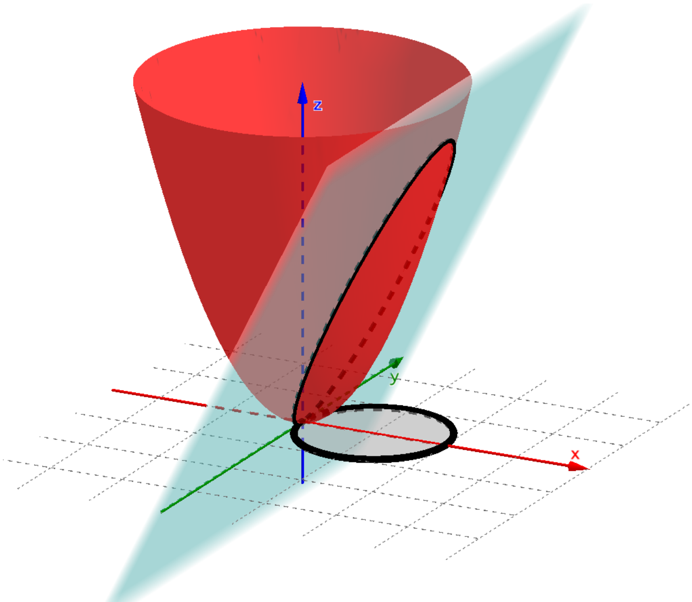


例 12.2. 半径 $R > 0$ の球の体積 $V(R)$ は $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq R^2 \right\}$ 上の以下の 2 重積分で求められる．

$$\begin{aligned}
V(R) &= \iint_D \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)\right) dxdy \\
&= 2\iint_E r\sqrt{R^2 - r^2}\, drd\theta \quad \Big(E = \{ (r,\theta) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}\Big) \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\, dr\right) d\theta = 4\pi \left[-\frac{1}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$



例 12.3. 下図のような曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれる立体の体積を求める．



平面 $z = 2x$ が曲面 $z = x^2 + y^2$ より上部にある閉領域上で 2 重積分を計算すればよい．つまり，

$$D = \{\, (x, y) \ \mid x^2 + y^2 \leqq 2x \,\}$$

として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \left(2x - \left(x^2 + y^2\right)\right)\, dxdy$ を計算する．

簡単な不等式の変形により，D は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円板であることがわかる．そこで，極座標変換と x 方向の平行移動を合成した変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + 1 \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を使う．この変換によって $r\theta$ の閉領域

$$E = \{\, (r, \theta) \ \mid\ 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$$

が D に変換される．変換の Jacobian は

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

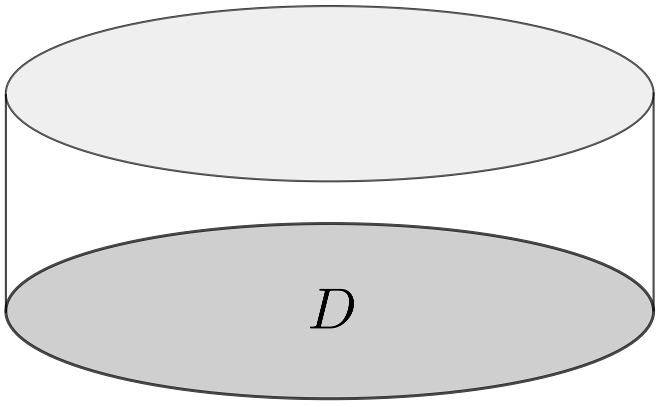
なので，求めたい体積は次のように計算できる．

$$\iint_D \left(2x - \left(x^2 + y^2\right)\right)\, dxdy = \iint_E \left(1 - r^2\right) r\ drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r - r^3\right) dr\right) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

12.2　2 重積分と面積

xy 平面内の有界閉領域 D を底面とする高さ 1 の立体の体積は D の面積に等しい．

定理 12.4. 定数関数が重積分可能な有界閉領域 D の面積は 2 重積分 $\displaystyle\iint_D dxdy$ の値に等しい．



例 12.5. 半径 $R > 0$ の円の面積 $S(R)$ は 1 変数関数の積分で求められるが，定理 12.4 より

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq R \right\}$$

上で定数関数の 2 重積分を計算しても求められる．

$$S(R) = \iint_D dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \right) \right) \, dx = \pi R^2$$

この例を見てわかるように，定理 12.4 を使ったからといって特に計算が楽になる訳でもなく，途中からこれまで通りの 1 変数の積分計算に合流している．より一般に，有界閉領域 D が縦線集合として

$$D = \{ (x, y) \;\mid\; a \leqq x \leqq b, \; \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \}$$

と書けるなら D 上の定数関数 $z = 1$ の 2 重積分は次のように計算される．

$$\iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_b^a \Big(\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \Big) \, dx$$

これは結局 $y = \varphi_1(x)$ と $y = \varphi_2(x)$ と $x = a$ と $x = b$ で囲まれる平面図形 D の面積を求める積分である．D が横線集合として書けるときも全く同様である．

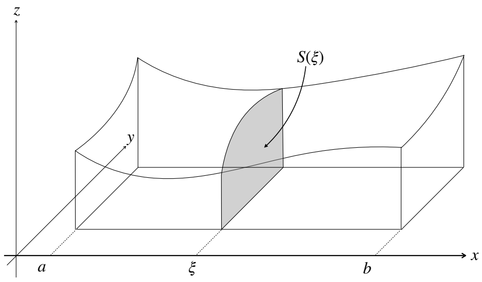
「だから定理 12.4 なんて意味がない」と主張したい訳**ではない**．むしろこの定理によって定数関数の 2 重積分に面積という意味付けが与えられる．

12.3　立体の断面積と積分と体積

立体の断面積を積分すればその立体の体積が得られる．

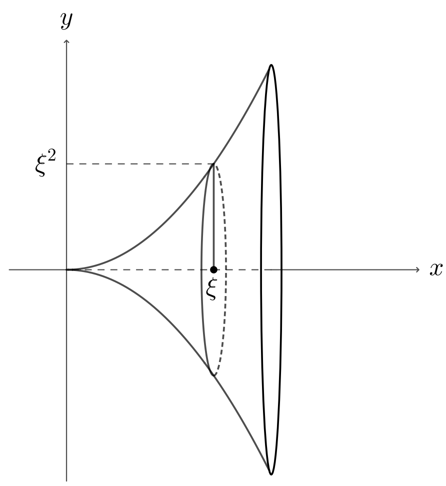
定理 12.6. xyz 空間にある立体を x 軸に垂直な平面 $x = \xi$ で切断したときの断面積が $S(\xi)$ であり，この立体が $a \leqq x \leqq b$ の範囲に含まれているとする．関数 $S(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で積分可能なら，この立体図形の体積は以下の積分値に等しい．

$$\int_a^b S(x)\ dx$$



注意. 当たり前だが，x 軸だけに限らず y 軸や z 軸についてもこの定理と同様のことが成り立つ．さらには，座標軸だけに限らず空間の任意の直線とそれに垂直な平面での断面積に関して同様のことが成り立つ．

例 12.7. 放物線 $y = x^2$ を x 軸の周りで回転させて得られる回転体の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の体積を求める．



この立体を平面 $x = \xi$ で切断したときの断面は半径 ξ^2 の円なので，その面積は $\pi\xi^4$ である．従って，定理 12.6 からこの立体の体積は以下のように計算できる．

$$\int_0^1 \pi x^4\ dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

12.4　曲面積

φ, ψ, χ を uv 平面内の有界閉領域 D 上定義された C^1 級関数とする．点 (u,v) が D を動くとき，xyz 空間内の点 $(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ はなめらかな曲面 S を描く．これを

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \in D$$

と書き，曲面 S の**媒介変数表示**という．

定理 12.8. 有界閉領域 D 上の C^1 級関数 φ, ψ, χ によって媒介変数表示される曲面の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\, dudv$$

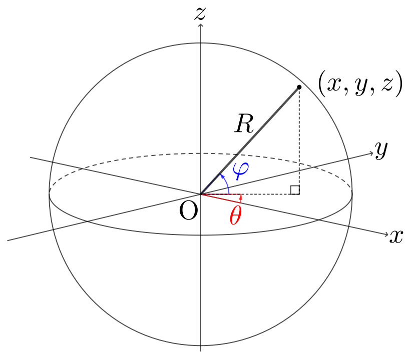
に等しい．ただし，ここで

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix},\quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix},\quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$$

であり，被積分関数は D 上重積分可能であるとする．

例 12.9. 半径 $R > 0$ の球面は以下の媒介変数表示で与えられる．

$$x = R\cos\theta\cos\varphi,\quad y = R\sin\theta\cos\varphi,\quad z = R\sin\varphi,\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$



曲面積の計算に必要な 3 個の Jacobian は以下の通りである．

$$\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_\theta & x_\varphi \\ y_\theta & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi & -R\cos\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = R^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} y_\theta & y_\varphi \\ z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & R\cos\varphi \end{vmatrix} = R^2\cos\theta\cos^2\varphi$$

$$\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} z_\theta & z_\varphi \\ x_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & R\cos\varphi \\ -R\sin\theta\cos\varphi & -R\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = R^2\sin\theta\cos^2\varphi$$

これより半径 R の球の表面積 $S(R)$ は $D = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上の 2 重積分として以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}\right)^2} d\theta d\varphi = \iint_D R^2 \left|\cos\varphi\right|\ d\theta d\varphi \\ &= R^2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

C^1 級関数 $z = f(x, y)$ のグラフとして与えられる曲面は

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u, v),\ (u, v) \in D$$

と媒介変数表示できる．このとき

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = -f_x, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f_y$$

なので，定理 12.8 の特別な場合として以下の定理が得られる．

定理 12.10. 有界閉領域 D 上の C^1 級関数 $z = f(x, y)$ のグラフの曲面積は以下の積分で与えられる．ただし，被積分関数は D 上重積分可能であるとする．

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ dxdy$$

例 12.11. 半径 $R > 0$ の球の表面積 $S(R)$ は，2 変数関数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ のグラフの曲面積の 2 倍なので，$D = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < R^2 \right\}$ 上の広義 2 重積分として以下のようにも計算できる．

$$S(R) = 2\iint_D \sqrt{1 + {z_x}^2 + {z_y}^2}\ dxdy = 2R\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 4\pi R^2$$

例 12.12. 放物線をその軸の周りで回転して得られる回転放物面 $z = x^2 + y^2$ の $x^2 + y^2 \leqq 1$ の部分の表面積を求める．つまり，$D = \left\{ (x,y) \ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ として，以下の 2 重積分を計算する．

$$\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\ dxdy$$

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって，$r\theta$ 平面の

$$E = \{ (r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq 0 \leqq 2\pi \}$$

が xy 平面の D に変換される．極座標変換の Jacobian は $J(r,\theta) = r$ なので，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\ dxdy &= \iint_E \sqrt{1 + 4r^2}\ |J(r,\theta)|\ drd\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\ dr\right) \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12}\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6} \end{aligned}$$