9　2重積分の計算（変数変換）

偏微分可能な 2 変数関数 φ, ψ による変数変換 $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ に対して，u, v に関する 2 変数関数

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \; \Big(= \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u \Big)$$

をこの変換の Jacobian という．Jacobian は以下のように書かれることもある．

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

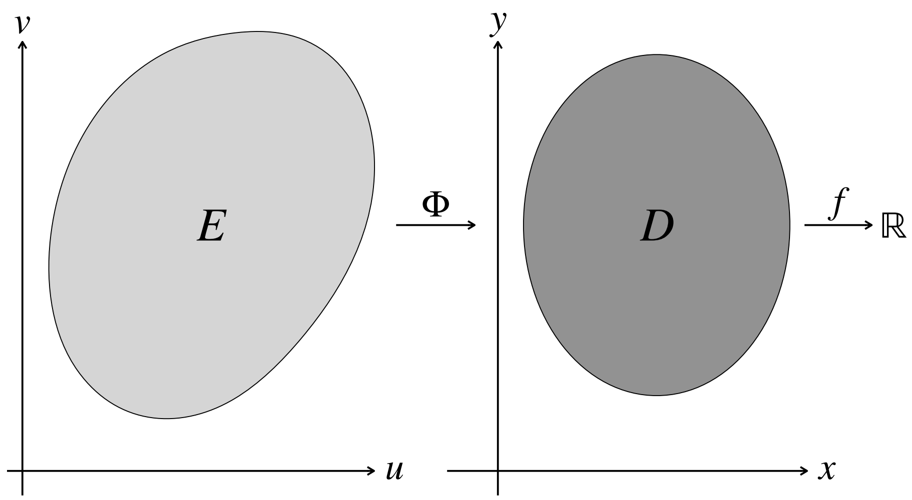
9.1　変数変換の公式

定理 9.1. uv 平面の閉領域 E から xy 平面の閉領域 D への 1 対 1 の変数変換（全単射）

$$\Phi : \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \qquad \big(\varphi, \psi \text{ は } C^1 \text{ 級} \big)$$

の Jacobian を $J(u,v)$ とし，全ての $(u,v) \in E$ に対して $J(u,v) \neq 0$ とする．このとき D 上積分可能な連続関数 $f(x,y)$ に対して以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\; dxdy = \iint_E f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) |J(u,v)|\, dudv \tag{9.1}$$



例 9.2. 次の重積分の計算に定理 9.1 を適用してみよう．

$$\iint_D x^2\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y) \mid \ |x+2y| \leqq 1,\ |x-y| \leqq 1\ \}$$

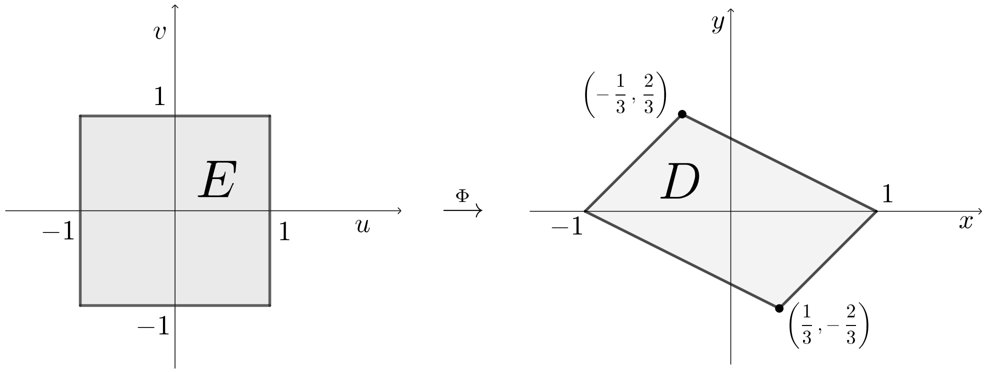
$u = x+2y,\ v = x-y$ とおく．すなわち，変数変換

$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v \end{cases}$$

を考える．Φ は下図のように uv 平面の閉領域

$$E = \{\ (u,v) \mid -1 \leqq u \leqq 1,\ -1 \leqq v \leqq 1\ \}$$

から xy 平面の閉領域 D への 1 対 1 の写像である．



変数変換 Φ の Jacobian は

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

であるから，$(u,v) \in E$ に対して $J(u,v) \neq 0$ である．よって，定理 9.1 より以下を得る．

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\ dxdy &= \iint_E \left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\right)^2 |J(u,v)|\ dudv = \iint_E \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\right)^2 dudv \\ &= \frac{1}{27}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(u+2v)^2\,du\right)dv = \frac{1}{27}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(u+2v)^3\right]_{u=-1}^{u=1} dv \\ &= \frac{1}{81}\int_{-1}^{1}\left((2v+1)^3 - (2v-1)^3\right)dv = \frac{1}{81}\left[\frac{(2v+1)^4}{8} - \frac{(2v-1)^4}{8}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{20}{81}\end{aligned}$$

注意. 定理 9.1 の最後の等式 (9.1) は, 変数変換 Φ が E の面積 0 の部分集合 N を除いて 1 対 1 で, $(u,v) \notin N$ に対して $J(u,v) \neq 0$ であれば成立する.

例えば, 正の実数 R に対し極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

は下図のように $r\theta$ 平面の閉領域

$$E = \{\, (r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq R,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$$

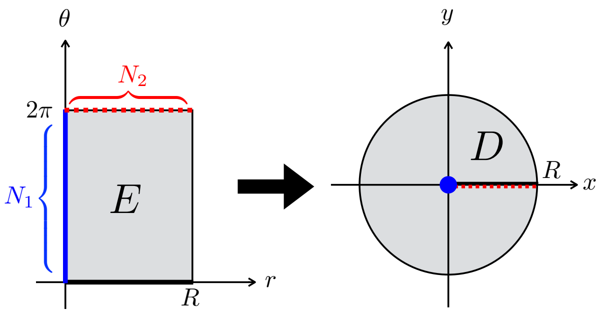
から xy 平面の閉領域

$$D = \left\{\, (x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq R^2 \,\right\}$$

への変換を与えるが, これは 1 対 1 の対応ではない. しかしながら,

$$N = \{\, (r,\theta) \in E \mid r = 0 \,\} \cup \{\, (r,\theta) \mid \theta = 2\pi \,\}$$

とおけば, N は E の面積 0 の部分集合であり, 極座標変換は $E - N$ から $D - \{\, (0,0) \,\}$ への 1 対 1 の対応（全単射）を与える.



$N = N_1 \cup N_2$

このとき, 極座標変換の Jacobian は

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であるから, $(r,\theta) \notin N$ ならば $J(r,\theta) \neq 0$ である. 従って, D 上重積分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_E f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r\ drd\theta$$

9.2　練習問題

次の 2 重積分を求めよう．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\ dxdy, \quad D = \{\ (x, y) \mid 1 \leqq x + y \leqq 2,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\ \}$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy, \quad D = \left\{\ (x, y) \ \middle|\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9\ \right\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy, \quad D = \left\{\ (x, y) \ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x\ \right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\ dxdy, \quad D = \left\{\ (x, y) \ \middle|\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 1\ \right\}$

(5) $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy, \quad D = \left\{\ (x, y) \ \middle|\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\ \right\}$

「積分基本問題集 弍」(5) ～ (10), (12), (13) も参考にしてください．

`https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf`

答え：(1) $\dfrac{3}{8}$　(2) $\pi\left(e^{-1} - e^{-9}\right)$　(3) $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2}{9}$　(4) $\dfrac{39\pi}{2}$　(5) $\dfrac{1}{280}$