

## 8 2 重積分の計算（累次積分）

### 8.1 縦線集合・横線集合上の2重積分

2重積分の計算は次の定理を使うのが一般的である。この定理の証明はおまけとして8.4節で述べる。

**定理 8.1.**  $f(x, y)$  を有界閉領域  $D$  上連続な2変数関数とする。

(1) 実数  $a, b$  と閉区間  $[a, b]$  上  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  かつ連続な関数  $\varphi_1, \varphi_2$  によって  $D$  が

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

と表せるとき、 $f(x, y)$  は  $D$  上重積分可能で以下が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

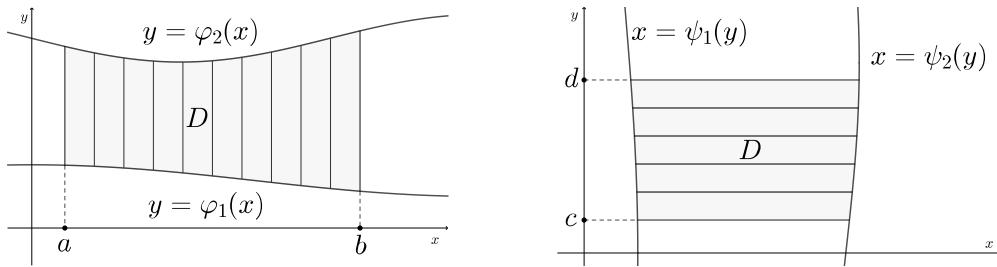
(2) 実数  $c, d$  と閉区間  $[c, d]$  上  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$  かつ連続な関数  $\psi_1, \psi_2$  によって  $D$  が

$$D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

と表せるとき、 $f(x, y)$  は  $D$  上重積分可能で以下が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

定理 8.1(1) の  $D$  を縦線集合（左下図）といい、(2) の  $D$  を横線集合（右下図）という。



**例 8.2.**  $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \}$  に対して、 $\iint_D (x + y) dx dy$  は次のように計算できる。

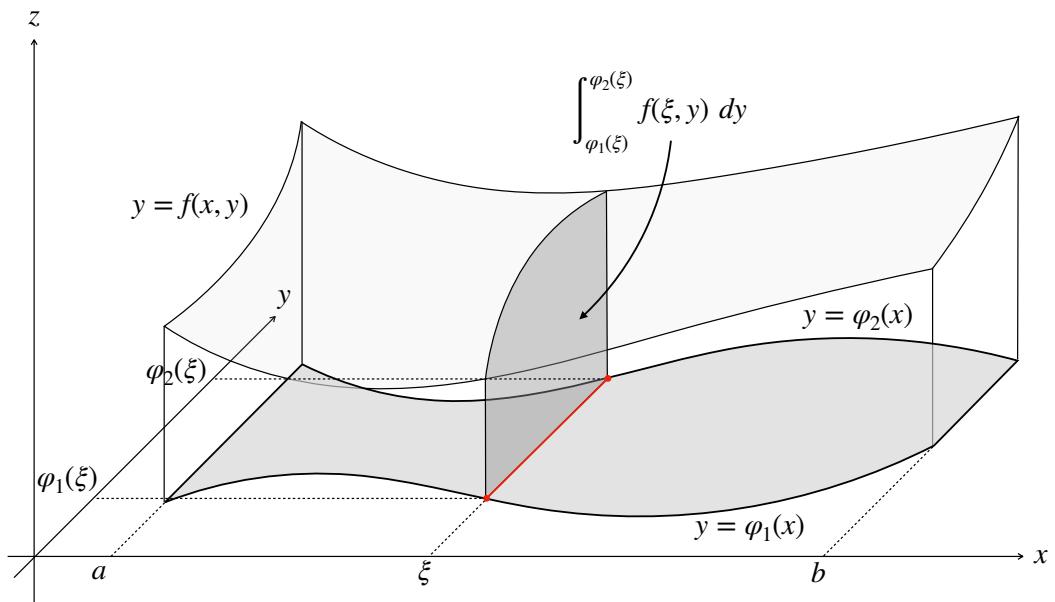
$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \int_1^2 \left( \int_0^x (x + y) dy \right) dx = \int_1^2 \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \left[ x^3 \right]_1^2 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

## 8.2 定理 8.1 の幾何学的意味

2 変数関数  $f(x, y)$  の有界閉領域  $D$  上の 2 重積分は、 $D$  の境界に沿って伸びる  $xy$  平面に垂直な曲面と  $xy$  平面と  $z = f(x, y)$  で囲まれる立体の体積に等しい。ただし、 $xy$  平面よりも下側にある部分の体積は負の値として扱う。定理 8.1 の累次積分の内側に

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy, \quad G(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

と名前を付ける。 $F(\xi)$  の値は下図のように平面  $x = \xi$  によって立体を切ったときの断面積に等しい。同様に  $G(\eta)$  の値は平面  $y = \eta$  で立体を切ったときの断面積に等しい。従って、定理 8.1 は立体の断面積を積分したものが体積であることを主張している。



### 8.3 練習問題

次の2重積分を求めよう。

$$(1) \iint_D \sin(x+y) \, dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq y \right\}$$

$$(2) \iint_D x \, dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{y} \}$$

$$(3) \iint_D xy \, dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x + y \leq 2, y^2 \leq x, 0 \leq y \}$$

$$(4) \iint_D \sin(\pi x^2) \, dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$$

$$(5) \iint_D y \, dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{y}{2} \leq x \leq 2y, x + y \leq 1 \right\}$$

$$(6) \iint_D x \, dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 1, x^2 + 4x + 1 \leq y \leq -x^2 + 2x + 1 \}$$

「積分基本問題集 弐」(1)~(4), (11), (14), (15) も参考にしてください。

<https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf>

答え：(1) 1 (2)  $\frac{1}{12}$  (3)  $\frac{3}{8}$  (4)  $\frac{1}{\pi}$  (5)  $\frac{1}{18}$  (6)  $-\frac{1}{6}$

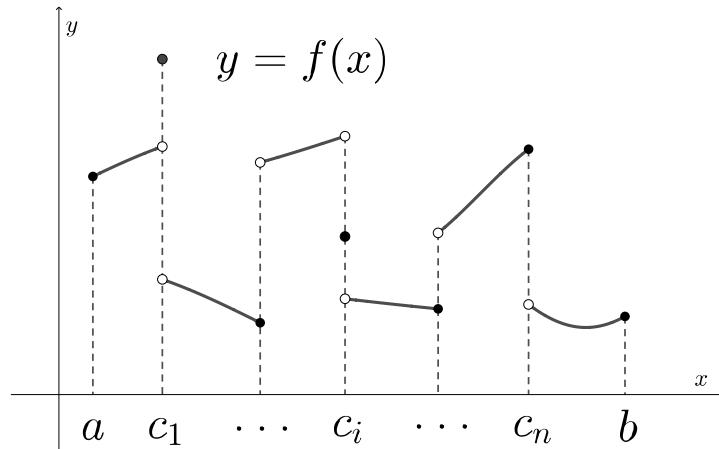
## 8.4 (おまけ) 定理 8.1 の証明

定理 8.1 の (1) を証明する。ただし、 $f$  が  $D$  上で重積分可能であることを証明は省略する。

1 変数関数の積分に関する以下の定理 8.3 を使う。

**定理 8.3.** 有界閉区間で区分的に連続な 1 変数関数はこの区間で積分可能である。

有界閉区間  $[a, b]$  で定義された 1 変数関数  $f$  が有限個の点  $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$  を除いて連続で、各  $c_i$  における左側極限  $\lim_{x \rightarrow c_i-0} f(x)$  と右側極限  $\lim_{x \rightarrow c_i+0} f(x)$  が存在するとき、 $f(x)$  は  $[a, b]$  で区分的に連続であるという。ただし、両端  $a, b$  では区間の内側からの片側極限のみ存在すればよい。すなわち、 $a$  では右側極限が、 $b$  では左側極限のみが存在すればよい。区分的に連続な関数は有界である。また、連続関数は区分的に連続である。



有界閉区間  $[a, b]$  で区分的に連続な関数  $f$  の積分は、区分ごとの積分値を足し合わせればよい。つまり、不連続な点  $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$  ( $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ ) と  $c_0 = a, c_{n+1} = b$  に対し

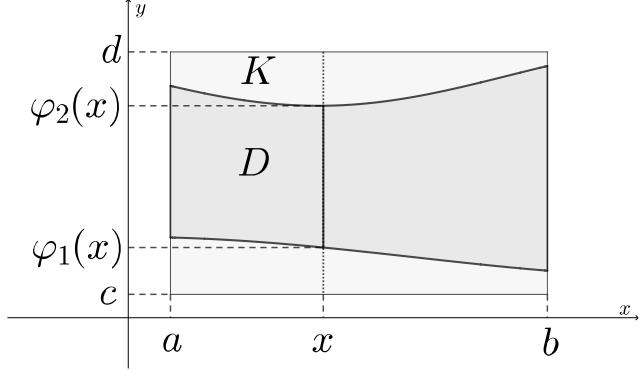
$$f_i(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c_{i-1}+0} f(x) & (x = c_{i-1}) \\ f(x) & (c_{i-1} < x < c_i) \\ \lim_{x \rightarrow c_i-0} f(x) & (x = c_i) \end{cases}, i = 1, \dots, n+1$$

とすれば、各  $f_i$  は  $[c_{i-1}, c_i]$  で連続なので以下が成り立つ。

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x) dx$$

**定理 8.1(1) の証明.**

下図のように  $D$  を含む長方形  $K = [a, b] \times [c, d]$  をとる.



ここで  $K$  上の関数  $f^*$  を

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}$$

により定める.  $f$  は  $D$  上重積分可能 (証明略) だから, 有界閉領域上の 2 重積分の定義から  $f^*$  は  $K$  上重積分可能で,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_K f^*(x, y) dx dy \quad (8.1)$$

である. 任意の  $\xi \in [a, b]$  に対して,  $y$  の 1 変数関数  $f^*(\xi, y)$  は  $[c, d]$  において  $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$  を不連続点とする区別的に連続な関数である. 従って, 定理 8.3 より  $f^*(\xi, y)$  は  $[c, d]$  で積分可能で,

$$\begin{aligned} \int_c^d f^*(\xi, y) dy &= \int_c^{\varphi_1(\xi)} f^*(\xi, y) dy + \int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f^*(\xi, y) dy + \int_{\varphi_2(\xi)}^d f^*(\xi, y) dy \\ &= 0 + \int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f^*(\xi, y) dy + 0 = \int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f(\xi, y) dy \end{aligned}$$

である. 従って, 1 変数関数  $F(x) = \int_c^d f^*(x, y) dy$  が  $[a, b]$  で積分可能で, かつ以下が成り立つことを証明すればよい.

$$\iint_K f^*(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f^*(x, y) dy \right) dx$$

$\Delta = (x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n)$  を長方形  $K = [a, b] \times [c, d]$  の任意の分割とする.  $x$  方向の各小区間  $[x_{i-1}, x_i]$  から代表点  $\xi_i$  を任意に選ぶ.  $y$  方向の各小区間  $[y_{j-1}, y_j]$  での  $f^*(\xi_i, y)$  の最小値を  $m_{ij} = f^*(\xi_i, s_{ij})$  とし, 最大値を  $M_{ij} = f^*(\xi_i, S_{ij})$  とすると, 各小区間  $[y_{j-1}, y_j]$  で  $m_{ij} \leq f^*(\xi_i, y) \leq M_{ij}$  だから,

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

である。これが各  $i, j$  で成り立つので以下の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y) dy \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

この不等式の左辺は  $\Delta$  と  $\{(\xi_i, s_{ij})\}$  に関する  $f^*$  の Riemann 和であり、右辺は  $\Delta$  と  $\{(\xi_i, S_{ij})\}$  に関する  $f^*$  の Riemann 和である。また、不等式の中辺は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y) dy \right) (x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^m \left( \int_c^d f^*(\xi_i, y) dy \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

である。これは区間  $[a, b]$  の分割  $\Delta_X = (x_0, \dots, x_m)$  と代表点集合  $\{\xi_i\}$  に関する 1 変数関数  $F$  の Riemann 和である。よって、以下の不等式が成り立つ。

$$R(\Delta, \{(\xi_i, s_{ij})\}, f^*) \leq R(\Delta_X, \{\xi_i\}, F) \leq R(\Delta, \{(\xi_i, S_{ij})\}, f^*)$$

$f^*$  は  $K$  上重積分可能なので、 $|\Delta| \rightarrow 0$  のときこの不等式の左辺と右辺、従って中辺も、(8.1) に収束する。また、 $|\Delta| \rightarrow 0$  のとき  $|\Delta_X| \rightarrow 0$  であるから、 $F$  は  $[a, b]$  で積分可能であり、以下を得る。

$$\begin{aligned} \iint_K f^*(x, y) dx dy &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \{(\xi_i, s_{ij})\}, f^*) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \{(\xi_i, S_{ij})\}, f^*) \\ &= \lim_{|\Delta_X| \rightarrow 0} R(\Delta_X, \{\xi_i\}, F) = \int_a^b F(x) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f^*(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

□