

## 10 広義 2 重積分

有界閉領域とは限らない集合上の有界とは限らない関数の 2 重積分を定義する.

### 10.1 増加近似列

有界閉領域でない集合  $D$  上の 2 重積分は,  $D$  に近づく有界閉領域上の 2 重積分の極限として定義する. そこで, まず「集合  $D$  に近づく」ということを正確に定義する.

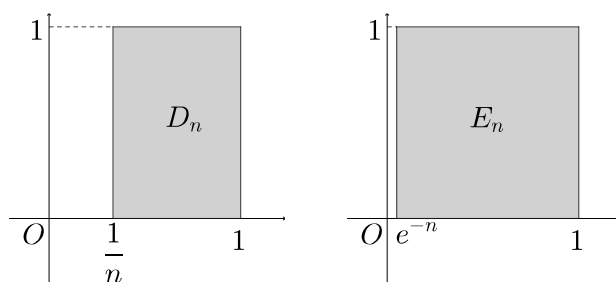
**定義.**  $D \subset \mathbb{R}^2$  に対し, 以下を満たす有界閉領域の列  $\{D_n\}$  を  $D$  の**増加近似列**という.

- (1)  $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \subset D$
- (2) 任意の有界閉領域  $K \subset D$  に対して, 十分大きな自然数  $n$  を選べば  $K \subset D_n$  となる.

**例 10.1.** 自然数  $n$  に対して ( $D_n$  に関しては  $n \geq 2$  とする)

$$D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times [0, 1], \quad E_n = [e^{-n}, 1] \times [0, 1]$$

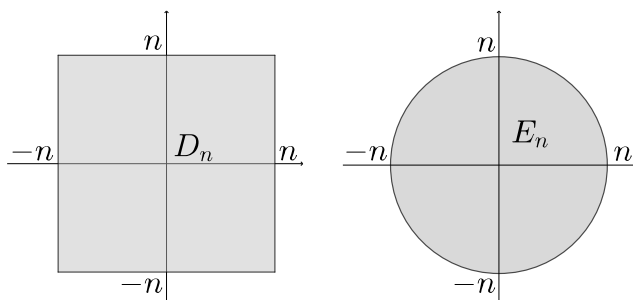
とすると,  $\{D_n\}$  と  $\{E_n\}$  はいずれも  $D = (0, 1] \times [0, 1]$  の増加近似列である.



**例 10.2.** 自然数  $n$  に対して

$$D_n = [-n, n] \times [-n, n], \quad E_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

とすると,  $\{D_n\}$  と  $\{E_n\}$  はいずれも  $\mathbb{R}^2$  の増加近似列である.



## 10.2 広義 2 重積分の定義

**定義.**  $f$  を  $D \subset \mathbb{R}^2$  上定義された 2 変数関数とし,  $D$  に含まれる任意の有界閉領域上有界とする. このとき,  $D$  のどんな増加近似列  $\{D_n\}$  に対しても  $f$  が各  $D_n$  上重積分可能で, 増加近似列  $\{D_n\}$  によらず極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

が一定の値に収束するとき,  $f$  は  $D$  上**広義重積分可能**であるといい, その極限値を

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

と書き,  $f$  の  $D$  上の**広義 2 重積分**という. 上の極限が存在するとき広義 2 重積分は**収束する**といい, 極限が存在しなかったり増加近似列によって値が変わるときは**発散する**という.

**定理 10.3.**  $f$  を集合  $D \subset \mathbb{R}^2$  上の 2 変数関数とする. 任意の  $(x, y) \in D$  に対して  $f(x, y) \geq 0$  であるとき,  $D$  のどれか 1 つの増加近似列  $\{D_n\}$  に対して極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

が収束するなら,  $f$  の  $D$  上の広義 2 重積分はこの極限値に収束する.

**証明.**  $\{E_n\}$  を  $D$  の任意の増加近似列とし, 数列  $\{I_n\}$ ,  $\{J_n\}$  を以下のように定める.

$$I_n := \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy, \quad J_n := \iint_{E_n} f(x, y) \, dx dy$$

仮定から数列  $\{I_n\}$  は収束するので, その極限値を  $I$  とする.  $D$  上で  $f(x, y) \geq 0$  なので, いずれの数列も単調増加である. また, 増加近似列の定義から各  $E_n$  に対して十分大きな自然数  $N$  で  $E_n \subset D_N$  となるので  $J_n \leq I_N \leq I$  である. 従って,  $\{J_n\}$  は上に有界で単調増加なので収束し, その極限値を  $J$  とすれば  $J \leq I$  である.  $\{I_n\}, \{J_n\}$  の役割を入れ替えて, 同様の議論から  $I \leq J$  が得られる. よって,  $I = J$  である.  $\square$

**注意.** 任意の  $(x, y) \in D$  に対して  $f(x, y) \leq 0$  であるときも上と同様の定理が成り立つ.

**例 10.4.** 次の広義 2 重積分を計算しよう.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}} \, dx dy, \quad D = (0, 1] \times [0, 1]$$

$D$  において  $\frac{y}{\sqrt{x}} > 0$  だから, 定理 10.3 より  $D$  の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい. 例 10.1 で見たように, 自然数  $n \geq 2$  に対して  $D_n = [\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1]$  とすれば  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり,

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{y}{\sqrt{x}} \, dx dy &= \int_0^1 \left( y \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) dy = \int_0^1 y \left[ 2\sqrt{x} \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} dy = \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \int_0^1 2y \, dy \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なので, 定理 10.3 から  $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}} \, dx dy = 1$  である.

### 10.3 練習問題

$$(1) \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$$

$$(2) \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D = \{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x \}$$

$$(3) \iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dxdy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, 0 < x, 0 \leq y \}$$

「積分基本問題集 式」(16) ~ (24) も参考にしてください.

<https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf>

答え : (1)  $2\pi$    (2)  $\log(1 + \sqrt{2})$    (3)  $\frac{\pi^2}{8}$

#### 10.4 (おまけ) 広義 2 重積分の収束・発散

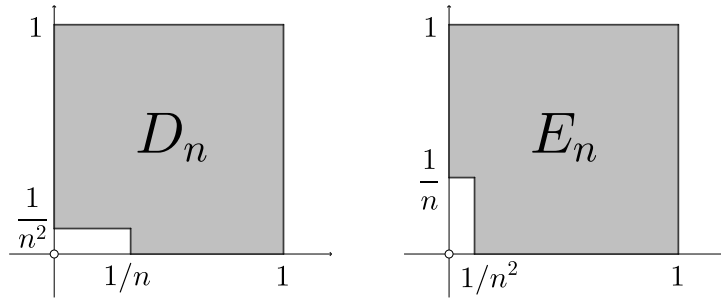
増加近似列の選び方によって極限値が異なるとき広義積分は発散すると定義した．例として

$$D = [0, 1] \times [0, 1] - \{(0, 0)\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$$

に対し，以下の広義 2 重積分を考えてみる．

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$$

$D_n, E_n$  ( $n \geq 2$ ) を下図のような閉領域とすると， $\{D_n\}$  と  $\{E_n\}$  はいずれも  $D$  の増加近似列である．



$$D_n = D - ([0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n^2}]) \quad E_n = D - ([0, \frac{1}{n^2}] \times [0, \frac{1}{n}])$$

このとき，以下のように増加近似列の選び方によって極限値が異なる．

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left( \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=\frac{1}{n^2}}^{y=1} dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1/n^2}{(x+1/n^2)^2} \right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+1/n} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{E_n} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left( \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left[ \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=\frac{1}{n}}^1 dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \left[ \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1/n}{(x+1/n)^2} \right) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

これより広義積分  $\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$  は発散する．

先程の例のように、広義 2 重積分

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy \quad (10.1)$$

において、 $D$  で  $f(x, y) > 0$  となることも  $f(x, y) < 0$  となることもある場合は定理 10.3 は使えず、1 個の増加近似列に関する極限を調べるだけでは不十分であり、あらゆる増加近似列に対して同じ極限值に収束するかどうかを調べる必要がある。このような場合は、まず被積分関数  $f$  に対して

$$f_+(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & (f(x, y) \geq 0) \\ 0 & (f(x, y) \leq 0) \end{cases} \quad f_-(x, y) := \begin{cases} 0 & (f(x, y) \geq 0) \\ -f(x, y) & (f(x, y) \leq 0) \end{cases} \quad (10.2)$$

として、 $f(x, y)$  を

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y)$$

と分ける。 $D$  上で  $f_+(x, y) \geq 0$ ,  $f_-(x, y) \geq 0$  なので、定理 10.3 から広義 2 重積分

$$\iint_D f_+(x, y) \, dxdy, \quad \iint_D f_-(x, y) \, dxdy \quad (10.3)$$

の収束・発散はそれぞれ  $D$  の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい。これらのいずれもが収束するとき、広義 2 重積分 (10.1) は収束し、以下が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy = \iint_D f_+(x, y) \, dxdy - \iint_D f_-(x, y) \, dxdy$$

一方、(10.3) のどちらか一方でも発散すれば広義積分 (10.1) は発散する。以上を定理としてまとめる。

**定理 10.5.** 広義 2 重積分  $\iint_D f(x, y) \, dxdy$  の収束に関して次が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy \text{ は収束する} \iff \iint_D f_+(x, y) \, dxdy, \iint_D f_-(x, y) \, dxdy \text{ が共に収束する}$$

さらに、広義 2 重積分  $\iint_D f(x, y) \, dxdy$  が収束するとき、以下が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy = \iint_D f_+(x, y) \, dxdy - \iint_D f_-(x, y) \, dxdy$$

なお、広義 2 重積分の収束・発散を判定するのみであれば、次の定理を根拠として  $|f(x, y)|$  の広義 2 重積分の収束・発散を定理 10.3 を使って判定してもよい。

**定理 10.6.** 広義 2 重積分  $\iint_D f(x, y) \, dxdy$  の収束に関して次が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy \text{ は収束する} \iff \iint_D |f(x, y)| \, dxdy \text{ は収束する}$$

特に、広義 2 重積分  $\iint_D |f(x, y)| \, dxdy$  が収束するとき、以下が成り立つ。

$$\iint_D |f(x, y)| \, dxdy = \iint_D f_+(x, y) \, dxdy + \iint_D f_-(x, y) \, dxdy$$

前々ページで例として挙げた，以下の広義 2 重積分の収束・発散を定理 10.5 を使って判定してみる．

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy \quad D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0) \}$$

被積分関数に  $f(x, y)$  と名前をつければ，(10.2) の  $f_+, f_-$  はそれぞれ

$$f_+(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & (x \geq y) \\ 0 & (x \leq y) \end{cases} \quad f_-(x, y) = \begin{cases} 0 & (x \geq y) \\ -\frac{x-y}{(x+y)^3} & (x \leq y) \end{cases}$$

である．そこで，

$$D^+ := D \cap \{ (x, y) \mid x \geq y \} \quad D^- := D \cap \{ (x, y) \mid x \leq y \}$$

とすれば， $D = D^+ \cup D^-$  であり， $D^+ \cap D^-$  の面積は 0 なので

$$\begin{aligned} \iint_D f^+(x, y) dx dy &= \iint_{D^+} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy + \iint_{D^-} 0 dx dy = \iint_{D^+} f(x, y) dx dy \\ \iint_D f^-(x, y) dx dy &= \iint_{D^+} 0 dx dy + \iint_{D^-} -\frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = - \iint_{D^-} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

である．従って， $D^+, D^-$  上での  $f(x, y)$  の広義 2 重積分の収束・発散を調べればよい．

まず， $D^+$  上での  $f(x, y)$  の広義 2 重積分の収束・発散を調べる． $D^+$  上で  $f(x, y) \geq 0$  であり，

$$D_n^+ := \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\} \quad (n \geq 2)$$

とすれば  $\{D_n^+\}$  は  $D^+$  の増加近似列なので，定理 10.3 から極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n^+} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$$

が収束するか  $+\infty$  に発散するかを判定すればよい．

$$\begin{aligned} \iint_{D_n^+} f(x, y) dx dy &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{4x} \\ &= \frac{\log n}{4} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

なので，広義 2 重積分  $\iint_{D^+} f(x, y) dx dy$  は発散する．よって， $D^-$  上の広義 2 重積分を調べるまでもなく，

定理 10.5 から広義 2 重積分  $\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$  は発散することがわかる．

ちなみに， $D^-$  上の広義 2 重積分  $\iint_{D^-} f(x, y) dx dy$  も  $+\infty$  に発散することが同様の計算で確かめられる．