

$$(1) \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$$

$D$  上で  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0$  なので,  $D$  の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい.

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right\} \quad (n \geq 2)$$

とすれば  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列なので, 以下の極限を調べればよい.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad (\heartsuit)$$

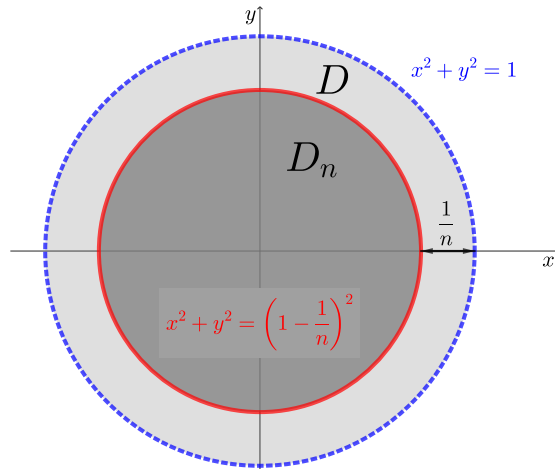
極座標変換  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  によって  $r\theta$  平面の閉領域

$$E_n = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 - \frac{1}{n}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

が  $xy$  平面の  $D_n$  に変換される. 極座標変換の Jacobian は  $J(r, \theta) = r$  なので

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \iint_{E_n} \frac{|J(r, \theta)|}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\theta \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) = 2\pi \left[ -\sqrt{1-r^2} \right]_{r=0}^{r=1-\frac{1}{n}} \\ &= 2\pi \left( 1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \right) \rightarrow 2\pi \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって, 極限  $(\heartsuit)$  が存在したので  $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$  である.



$$(2) \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D = \{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x \}$$

$D$  上で  $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$  なので  $D$  の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい.

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\} \quad (n \geq 2)$$

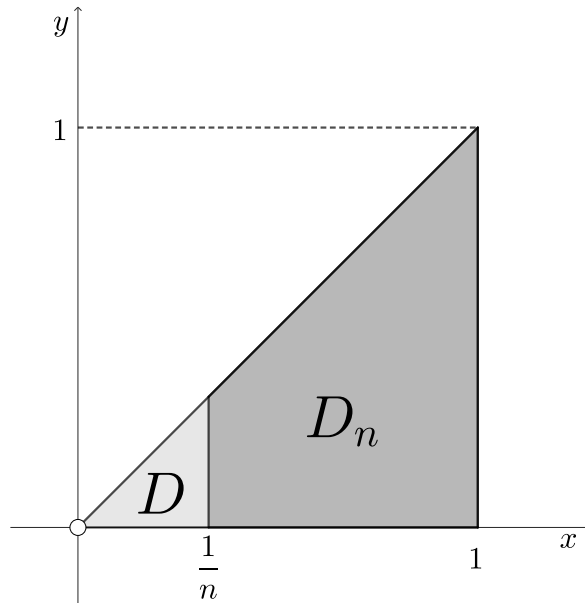
とすれば  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列なので, 以下の極限を調べればよい.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\diamond)$$

$D_n$  上の 2 重積分は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \log \left( y + \sqrt{x^2+y^2} \right) \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \log \left( x + \sqrt{2x^2} \right) - \log \left( \sqrt{x^2} \right) \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \log \left( 1 + \sqrt{2} \right) dx \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \log \left( 1 + \sqrt{2} \right) \rightarrow \log \left( 1 + \sqrt{2} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

よって, 極限  $(\diamond)$  が存在したので  $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log \left( 1 + \sqrt{2} \right)$  である.



$$(3) \iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, 0 < x, 0 \leq y \}$$

$D$  上で  $\tan^{-1} \frac{y}{x} \geq 0$  なので,  $D$  の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい. 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  によって

$$E_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right\}$$

が変換される  $xy$  平面の閉領域を  $D_n$  とすれば,  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列なので, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy \quad (\clubsuit)$$

を調べればよい.  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  なので  $\tan^{-1}(\tan \theta) = \theta$  であり, 極座標変換の Jacobian は  $J(r, \theta) = r$  なので,

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy &= \iint_{E_n} \tan^{-1}(\tan \theta) |J(r, \theta)| dr d\theta = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}} \theta d\theta \right) \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{2}} r dr \right) \\ &= \left[ \frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right)^2 \left( 2 - \left( \frac{1}{n} \right)^2 \right) \rightarrow \frac{\pi^2}{8} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって, 極限  $(\clubsuit)$  が存在したので  $\iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy = \frac{\pi^2}{8}$  である.

