8　2 重積分の計算（累次積分）

8.1　縦線集合・横線集合上の 2 重積分

2 重積分の計算は次の定理を使うのが一般的である．この定理の証明はおまけとして 8.4 節で述べる．

定理 8.1. $f(x,y)$ を有界閉領域 D 上連続な 2 変数関数とする．

(1) 実数 a,b と閉区間 $[a,b]$ 上 $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ かつ連続な関数 φ_1, φ_2 によって D が

$$D = \{\, (x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \,\}$$

と表せるとき，$f(x,y)$ は D 上重積分可能で以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx$$

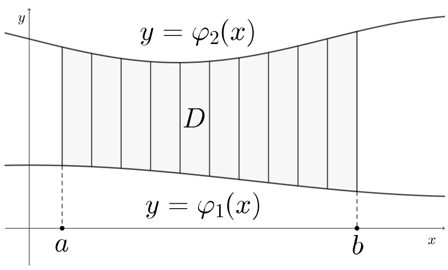
(2) 実数 c,d と閉区間 $[c,d]$ 上 $\psi_1(y) \leqq \psi_2(y)$ かつ連続な関数 ψ_1, ψ_2 によって D が

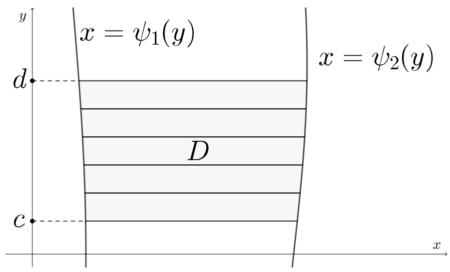
$$D = \{\, (x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y) \,\}$$

と表せるとき，$f(x,y)$ は D 上重積分可能で以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx \right) dy$$

定理 8.1(1) の D を**縦線集合**（左下図）といい，(2) の D を**横線集合**（右下図）という．





例 8.2. $D = \{\, (x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x \,\}$ に対して，$\displaystyle\iint_D (x+y)\ dxdy$ は次のように計算できる．

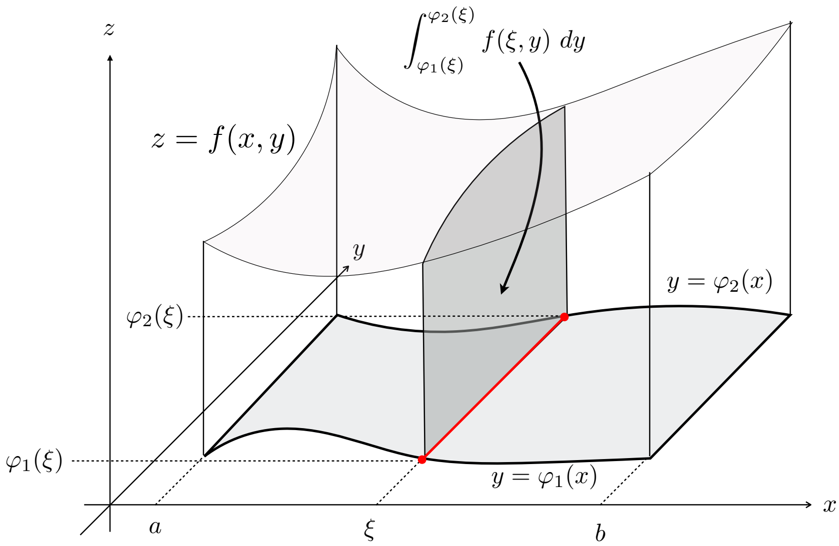
$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\ dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^x (x+y)\ dy \right) dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{3}{2}x^2\ dx = \frac{1}{2}\left[x^3 \right]_1^2 = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

8.2 定理 8.1 の幾何学的意味

2 変数関数 $f(x, y)$ の有界閉領域 D 上の 2 重積分は，D の境界に沿って伸びる xy 平面に垂直な曲面と xy 平面と $z = f(x, y)$ で囲まれる立体の体積に等しい．ただし，xy 平面よりも下側にある部分の体積は負の値として扱う．定理 8.1 の累次積分の内側に

$$F(x) = \int_{\phi_1(x}^{\phi_2(x)} f(x, y)\ dy, \quad G(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\ dx$$

と名前を付ける．$F(\xi)$ の値は下図のように平面 $x = \xi$ によって立体を切ったときの断面積に等しい．同様に $G(\eta)$ の値は平面 $y = \eta$ で立体を切ったときの断面積に等しい．従って，定理 8.1 は**立体の断面積を積分したものが体積である**ことを主張している．



8.3 練習問題

次の 2 重積分を求めよう．

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\ dxdy, \quad D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq x \leqq y\ \right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y) \mid y \leqq x \leqq \sqrt{y}\ \}$

(3) $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y) \mid x+y \leqq 2,\ y^2 \leqq x,\ 0 \leqq y\ \}$

(4) $\displaystyle\iint_D \sin\left(\pi x^2\right)\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y) \mid y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\ \}$

(5) $\displaystyle\iint_D y\ dxdy, \quad D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ \frac{y}{2} \leqq x \leqq 2y,\ x+y \leqq 1\ \right\}$

(6) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y) \mid -2 \leqq x \leqq 1,\ x^2+4x+1 \leqq y \leqq -x^2+2x+1\ \}$

「積分基本問題集 弐」(1) ∼ (4), (11), (14), (15) も参考にしてください．

https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf

答え：(1) 1　(2) $\dfrac{1}{12}$　(3) $\dfrac{3}{8}$　(4) $\dfrac{1}{\pi}$　(5) $\dfrac{1}{18}$　(6) $-\dfrac{1}{6}$

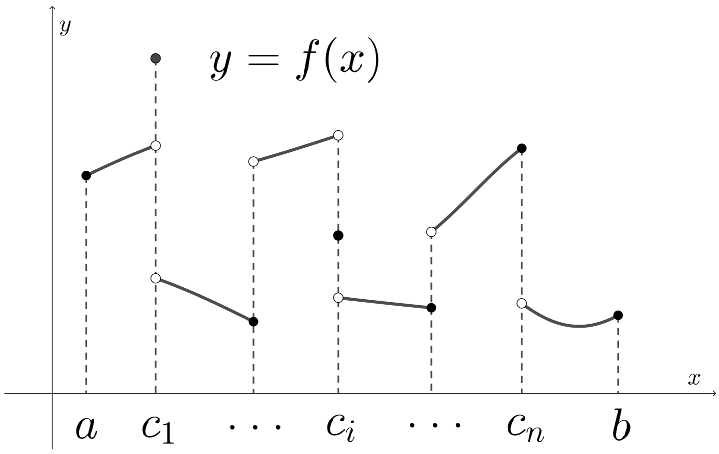
8.4 （おまけ）定理 8.1 の証明

定理 8.1 の (1) を証明する．ただし，f が D 上で重積分可能であることの証明は省略する．

1 変数関数の積分に関する以下の定理 8.3 を使う．

定理 8.3. 有界閉区間で区分的に連続な 1 変数関数はこの区間で積分可能である．

有界閉区間 $[a,b]$ で定義された 1 変数関数 f が有限個の点 $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a,b]$ を除いて連続で，各 c_i における左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to c_i-0} f(x)$ と右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to c_i+0} f(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は $[a,b]$ で**区分的に連続**であるという．ただし，両端 a,b では区間の内側からの片側極限のみ存在すればよい．すなわち，a では右側極限が，b では左側極限のみが存在すればよい．区分的に連続な関数は有界である．また，連続関数は区分的に連続である．



有界閉区間 $[a,b]$ で区分的に連続な関数 f の積分は，区分ごとの積分値を足し合わせればよい．つまり，不連続な点 $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a,b]$ $(c_1 < c_2 < \cdots < c_n)$ と $c_0 = a,\ c_{n+1} = b$ に対し

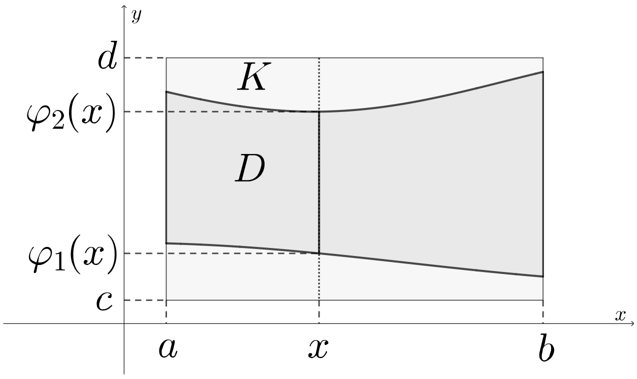
$$f_i(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to c_{i-1}+0} f(x) & (x = c_{i-1}) \\ f(x) & (c_{i-1} < x < c_i) \\ \displaystyle\lim_{x\to c_i-0} f(x) & (x = c_i) \end{cases}, \quad i =, 1, \dots, n+1$$

とすれば，各 f_i は $[c_{i-1}, c_i]$ で連続なので以下が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x)\ dx$$

定理 8.1(1) の証明.

下図のように D を含む長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ をとる.



ここで K 上の関数 f^* を

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D) \\ 0 & ((x,y)\notin D) \end{cases}$$

により定める．f は D 上重積分可能（証明略）だから，有界閉領域上の 2 重積分の定義から f^* は K 上重積分可能で，

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy=\iint_K f^*(x,y)\ dxdy \tag{8.1}$$

である．任意の $\xi\in[a,b]$ に対して，y の 1 変数関数 $f^*(\xi,y)$ は $[c,d]$ において $\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi)$ を不連続点とする区分的に連続な関数である．従って，定理 8.3 より $f^*(\xi,y)$ は $[c,d]$ で積分可能で，

$$\begin{aligned}\int_c^d f^*(\xi,y)\ dy&=\int_c^{\varphi_1(\xi)} f^*(\xi,y)\ dy+\int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f^*(\xi,y)\ dy+\int_{\varphi_2(\xi)}^{d} f^*(\xi,y)\ dy\\ &=0+\int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f^*(\xi,y)\ dy+0=\int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f(\xi,y)\ dy\end{aligned}$$

である．従って，1 変数関数 $F(x)=\displaystyle\int_c^d f^*(x,y)\ dy$ が $[a,b]$ で積分可能で，かつ以下が成り立つことを証明すればよい．

$$\iint_K f^*(x,y)\ dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f^*(x,y)\ dy\right)dx$$

$\Delta=(x_0,\ldots,x_m;\ y_0,\ldots,y_n)$ を長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ の任意の分割とする．x 方向の各小区間 $[x_{i-1},x_i]$ から代表点 ξ_i を任意に選ぶ．y 方向の各小区間 $[y_{j-1},y_j]$ での $f^*(\xi_i,y)$ の最小値を $m_{ij}=f^*(\xi_i,s_{ij})$ とし，最大値を $M_{ij}=f^*(\xi_i,S_{ij})$ とすると，各小区間 $[y_{j-1},y_j]$ で $m_{ij}\leqq f^*(\xi_i,y)\leqq M_{ij}$ であるから，定理**??**より

$$m_{ij}(y_j-y_{j-1})\leqq\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i,y)\ dy\leqq M_{ij}(y_j-y_{j-1})$$

である．これが各 i, j で成り立つので以下の不等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leqq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y)\ dy\right)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})
\end{aligned}
$$

この不等式の左辺は Δ と $\{\,(\xi_i, s_{ij})\,\}$ に関する f^* の Riemann 和であり，右辺は Δ と $\{\,(\xi_i, S_{ij})\,\}$ に関する f^* の Riemann 和である．また，不等式の中辺は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y)\ dy\right)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{c}^{d} f^*(\xi_i, y)\ dy\right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

である．これは区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta_X = (x_0, \ldots, x_m)$ と代表点集合 $\{\,\xi_i\,\}$ に関する 1 変数関数 F の Riemann 和である．よって，以下の不等式が成り立つ．

$$
R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, s_{ij})\,\}, f^*\right) \leqq R\left(\Delta_X, \{\,\xi_i\,\}, F\right) \leqq R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, S_{ij})\,\}, f^*\right)
$$

f^* は K 上重積分可能なので，$|\Delta| \to 0$ のときこの不等式の左辺と右辺，従って中辺も，(8.1) に収束する．また，$|\Delta| \to 0$ のとき $|\Delta_X| \to 0$ であるから，F は $[a, b]$ で積分可能であり，以下を得る．

$$
\begin{aligned}
\iint_K f^*(x, y)\ dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0} R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, s_{ij})\,\}, f^*\right) = \lim_{|\Delta|\to 0} R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, S_{ij})\,\}, f^*\right) \\
&= \lim_{|\Delta_X|\to 0} R\left(\Delta_X, \{\,\xi_i\,\}, F\right)\ = \int_a^b F(x)\ dx \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y)\ dy\right) dx
\end{aligned}
$$

$\square$