数学 II / 2

内海 和樹

2025 年 12 月 2 日

「11　Gauss 積分と誤差関数」まで

積分基本問題集

- 壱（1 変数） https://github.com/kazutsumi/Integral1/blob/main/integral1.pdf
- 弐（2 変数） https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf

双曲線関数について

https://github.com/kazutsumi/hyperbolic/blob/main/hyperbolic.pdf

目次

たぶんここまで目次ページが続く

1　不定積分計算の基礎

1.1　基礎中の基礎

なにはともあれ，以下の微分公式を思い出しておこう．いずれも春学期に学んだはず．

$f(x)$	x^n	e^x	$\log\lvert x\rvert$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\sin^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	$\tan^{-1} x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	e^x	$\dfrac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

この表を逆に読むことで，以下の基礎中の基礎の公式を導ける．面倒なので，以降積分定数は省略する．

- $x^n = \dfrac{n+1}{n+1} x^n = \dfrac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \left(\dfrac{1}{n+1} x^{n+1}\right)'$ より $\boxed{\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1)}$

- $e^x = (e^x)'$ より $\boxed{\displaystyle\int e^x\ dx = e^x}$

- $\dfrac{1}{x} = (\log x)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x}$

- $\cos x = (\sin x)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x}$

- $\sin x = -(-\sin x) = -(\cos x)' = (-\cos x)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x}$

- $\dfrac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\sin^{-1} x\right)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\left(\cos^{-1} x\right)' = \left(-\cos^{-1} x\right)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x}$

- $\dfrac{1}{1+x^2} = \left(\tan^{-1} x\right)'$ より $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x}$

初めの公式 $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$ において n は自然数だけでなく，

$$\int \frac{1}{x^2}\ dx = \int x^{-2}\ dx = -x^{-1}, \qquad \int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

のように，$n=-2$ や $n=1/2$ などでも適用できるので，結構適用範囲が広い．

合成関数の微分公式から，例えば $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$ なので，$\cos(3x) = \dfrac{1}{3}\,(\sin(3x))' = \left(\dfrac{1}{3}\sin(3x)\right)'$ である．これを逆に読んで

$$\int \cos(3x)\ dx = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

を導ける．他にも，例えば $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$ なので，$e^{-2x} = -\dfrac{1}{2}\left(e^{-2x}\right)' = \left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)'$ より

$$\int e^{-2x}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

である．このように，どんな方法であれ関数 f に対して $F' = f$ となる F を見つけてしまえば

$$\int f(x)\ dx = F(x)$$

である．もう少しだけ複雑な例をあげておく．例えば $\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1/2}{1+(x/2)^2} = \dfrac{2}{4+x^2}$ より

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)'$$

となるので，これを逆に読めば

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

を導ける．これと同様に，$\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right)' = \dfrac{1/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ から

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{3}$$

などを導くこともできる．逆三角関数に臆することなく，しっかり使いこなせるようになろう．

また，微分可能な関数 f に対して，合成関数の微分公式から $(\log|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ なので，

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log|f(x)|}$$

である．この形は割とよく現れるのでしっかり使いこなそう．例えば，次のような使い方ができる．

$$\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\ dx = -\log|\cos x|$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \int \frac{1}{2}\ \frac{2x}{1+x^2}\ dx = \int \frac{1}{2}\ \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\log|1+x^2|$$

1.2　積分計算のテクニック

基礎中の基礎の公式だけではもちろん足りないので，その他の公式（テクニック）を紹介する．

まず，以下の積分の線形性は基本的すぎて公式として認識されていないかもしれない．

積分の線形性

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx \quad (\alpha, \beta \text{ は定数 })$$

これは微分の線形性 $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$ から容易に導かれる．例えば次のように使う．

$$\int \left(3x^2 + 2e^x + \cos x\right) dx = 3\int x^2\ dx + 2\int e^x\ dx + \int \cos x\ dx = x^3 + 2e^x + \sin x$$

次に，置換積分とその使い方を紹介する．この公式は合成関数の微分公式を逆に読めば導ける．

置換積分

$u = g(x)$ が C^1 級関数なら次が成り立つ．

$$\int f\left(g(x)\right) \frac{du}{dx}\ dx = \int f(u)\ du$$

- $\displaystyle\int (2x+1)^2 dx$
  $u = 2x+1$ とおくと， $\frac{du}{dx} = 2$ より $1 = \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$ であるから，
  $$\int (2x+1)^2 \cdot 1\ dx = \int u^2\ \frac{1}{2}\frac{du}{dx}\ dx = \frac{1}{2}\int u^2\ du = \frac{1}{6}u^3 = \frac{1}{6}(2x+1)^3.$$
- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$
  $u = 1 + \sin x$ とおくと，$\frac{du}{dx} = \cos x$ より，
  $$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\ dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|1+\sin x|.$$
- $\displaystyle\int xe^{x^2} dx$
  $u = e^{x^2}$ とおくと，$\frac{du}{dx} = 2xe^{x^2}$ より $xe^{x^2} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$ であるから，
  $$\int xe^{x^2} dx = \int \frac{1}{2}\frac{du}{dx}\ dx = \int \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$
- $\displaystyle\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx$
  $u = \cos x$ とおくと，$\frac{du}{dx} = -\sin x$ より $\sin x = -\frac{du}{dx}$ であるから，
  $$\int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = \int \frac{1}{u}\left(-\frac{du}{dx}\right)\ dx = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| = -\log|\cos x|.$$

続いて，部分積分とその使い方を紹介する．この公式は積の微分公式を逆に読むことで導ける．

部分積分

$f(x)$, $g(x)$ がともに C^1 級関数なら次が成り立つ．

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

- $\displaystyle\int xe^x dx = \int x\left(e^x\right)'\ dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

- $\displaystyle\int x\log x\ dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$

- $\displaystyle\int \log x\ dx = \int (x)'\log x\ dx = x\log x - \int \frac{x}{x}\ dx = x\log x - x$

- $\displaystyle\int \tan^{-1} x\ dx = \int (x)'\tan^{-1} x\ dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

  なお，$1+x^2>0$ なので $\log|1+x^2| = \log(1+x^2)$ である．

- $\displaystyle\int \sin^{-1} x\ dx = \int (x)'\sin^{-1} x\ dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

  後半は $u = 1-x^2$ といて置換積分を適用すればよい．$\dfrac{du}{dx} = -2x$ なので $x = -\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx}$ である．

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\ du = -\frac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

  あるいは，$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)'$ とみなせればはやい．

- $\displaystyle\int e^x\sin x\ dx$

$$\begin{aligned}\int e^x\sin x\ dx &= e^x\sin x - \int e^x\cos x\ dx = e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\ dx\right)\\ &= e^x\left(\sin x - \cos x\right) - \int e^x\sin x\ dx\end{aligned}$$

  より移項して，$\displaystyle\int e^x\sin x\ dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right)$ を得る．

1.3 積分計算で悩んだら

積分の計算テクニックはそんなに多くない．迷ったらとりあえず以下を試してみよう．

- **基礎中の基礎の公式を見逃していないか**

  例えば，以下は基礎中の基礎の公式に含まれているが，見逃す人が少なくない．

  $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$$

  まずは基礎中の基礎の公式を思い出そう．

- **部分積分はできないか**

  求めたい積分が

  $$\int f(x)g(x)\ dx$$

  という形ならまずは部分積分を試そう．$F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ か $G'(x) = g(x)$ となる $G(x)$ がすぐに分かれば

  $$\int f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ dx$$

  あるいは

  $$\int f(x)g(x)\ dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\ dx$$

  と変形できる．$F(x)$ も $G(x)$ もすぐに見つかった場合は，両方やってみて右辺に残った積分が求められそうな方を採用すればよい．どちらも見つからない場合や，見つかったとしても右辺に残った積分が難しい場合には別の方法を考える．

- **置換積分はできないか**

  結局のところ，うまい置換積分を見つけられるかどうかにかかっていることが多い．失敗を恐れず，とにかくいろいろと試行錯誤してみよう．

- **その他**

  分数関数や無理関数などは別途特殊なテクニックがあったり，自分で思いつくのが困難な置換積分も多々あるが，結局は上記のどれかに帰着される場合が多い．また例えば，部分積分をして右辺に残った積分の計算に置換積分を用いるなど複数のテクニックを用いることも多い．

1.4　練習問題

次の不定積分を求めよう．(答えは次のページ)

(1) $\displaystyle\int \left(3x^2+5x-3\right) dx$　　(2) $\displaystyle\int (8x+2)^3\, dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$　　(5) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}\right)\, dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx$　　(8) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$　　(9) $\displaystyle\int \cos^2 x\; dx$

(10) $\displaystyle\int \sin^2 x\; dx$　　(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$　　(12) $\displaystyle\int \tan^2 x\; dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$　　(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$　　(15) $\displaystyle\int 2^x\; dx$

(16) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}\right)^x\; dx$　　(17) $\displaystyle\int \log_2 x\; dx$　　(18) $\displaystyle\int x\log x\; dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$　　(20) $\cos^{-1} x\; dx$　　(21) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2}\, dx$

(22) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$　　(23) $\displaystyle\int \sin^{-1}\frac{x}{2}\, dx$　　(24) $\displaystyle\int \tan^{-1}(2x-1)\; dx$

(25) $\displaystyle\int x^2\cos x\; dx$　　(26) $\displaystyle\int e^x \cos x\; dx$　　(27) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\; dx$

(28) $\displaystyle\int \log(x^2)\; dx$　　(29) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}}\, dx$　　(30) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+2x^3}\; dx$

解答

積分定数は省略する．

(1) $x^3+\frac{5}{2}x^2-3x$

(2) $\frac{1}{32}(8x+2)^4$

(3) $\frac{1}{2}\log|2x+1|$

(4) $-\frac{1}{4}(2x+3)^{-2}$

(5) $2\log|x|+x^{-2}$

(6) $\frac{15}{16}x^{\frac{16}{15}}$

(7) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

(8) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

(9) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

(10) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

(11) $\tan x$

(12) $\tan x - x$

(13) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

(14) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$

(15) $\frac{2^x}{\log 2}$

(16) $-\frac{3^{-x}}{\log 3}$

(17) $\frac{x\log x - x}{\log 2}$

(18) $\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$

(19) $\log|\sin x|$

(20) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$

(21) $\frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right)$

(22) $\sqrt{1+x^2}$

(23) $x\sin^{-1}\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$

(24) $\frac{1}{2}(2x-1)\tan^{-1}(2x-1)-\frac{1}{4}\log\left(2x^2-2x+1\right)$

(25) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$

(26) $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

(27) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

(28) $2(x\log x - x)$

(29) $\frac{1}{3}\left(x^2-10\right)\sqrt{x^2+5}$

(30) $\frac{1}{9}\left(1+2x^3\right)^{\frac{3}{2}}$

1.5 （おまけ）不定積分と微分方程式

定積分を計算する過程で生じる不定積分計算において積分定数を省略しても大きな問題は起こらないが，微分方程式を解く過程での不定積分計算においては積分定数は明示しておいた方がよい．

与えられた関数 f の不定積分を求めることは，最も基本的な微分方程式

$$F'(x) = f(x)$$

の一般解 F を求めることに相当する．例えば，微分方程式

$$F'(x) = x^2$$

の一般解は任意の定数 C を用いて

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

と表せる．これはまさに以下の不定積分の計算そのものであり，この定数 C が積分定数と呼ばれる．

$$\int x^2 \ dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

これにさらに初期条件として，例えば $F(1) = 1$ などが加わると，

$$1 = F(1) = \frac{1}{3} + C = 1$$

から定数 C が決定し，解が以下のようにただ 1 つに定まる．

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$$

別の例を見てみよう．重力加速度 g のもとで鉛直方向に自由落下をする質量 m の物体の時刻 t における位置 $x(t)$ は，以下の微分方程式を満たすことが知られている．

$$mx''(t) = -mg$$

いわゆる，Newton の運動方程式である．この両辺を m で割って t で積分して

$$x'(t) = -gt + C_1$$

が得られる．C_1 は積分定数である．さらに，両辺をもう一度 t で積分して

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

が得られる．C_2 は積分定数である．これに初期位置や初速を指定する初期条件

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

などが加わることで定数 C_1, C_2 が決定し，以下のように $x(t)$ が唯一つに定まる．

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

さらに別の例を紹介する．与えられた 1 変数関数 f, g に対して，変数 x に関する未知の関数 y を含む

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

という形の微分方程式は変数分離形と呼ばれる．$g(y) \neq 0$ のとき，両辺を $g(y)$ で割って

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

と変形できる．この式の両辺を x で積分して

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\ dx = \int f(x)\ dx$$

を得る．ここで，置換積分により

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\ dx = \int \frac{dy}{g(y)}$$

であるから，最終的に以下を得る．

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx$$

これにより，$f, 1/g$ の不定積分が求められればそこから y と x の明示的な関係がわかる．

注意． この一連の操作は，もとの微分方程式を形式的に

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

と変形してから両辺に $\int$ を付け加えることで以下を導くこともできる．

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx$$

微分方程式の書籍等では（置換積分による説明を省いて）このように形式的に説明されることも多い．

変数分離形の最も簡単な例として，$f(x) = x,\ g(y) = y$ の場合を見てみよう．つまり，

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

を解こう．まず，定数関数 $y = 0$ は明らかに上の微分方程式を満たすので，$y = 0$ は解の 1 つである．それ以外の解を求めよう．つまり $y \neq 0$ を仮定しているので，上の微分方程式を

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

と変形できる．この両辺を積分して

$$\log|y| = \int \frac{dy}{y} = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

が得られる．ここで，c は積分定数である．これより

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

なので
$$y = \pm e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$
である．$C = \pm e^c$ とおいて
$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$
を得る．ここで，c が任意の実数を動くとき，C は 0 以外の任意の実数をとり得る．また，上式で $C = 0$ のときは定数関数 $y = 0$ を表している．よって，もとの微分方程式の解は，定数関数 $y = 0$ も含めて以下のように表せる．
$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad (C \in \mathbb{R})$$
これにさらに初期条件として，例えば $y(0) = 1$ などが加わると，
$$1 = y(0) = C$$
から定数 C が決定し，解が以下のようにただ 1 つに定まる．
$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

2　積分とは

関数 f の閉区間 $[a,b]$ 上の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，$F'=f$ となる関数 F を見つけて

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

という計算によって求めることになる．こうして得られる値が何なのかを定義する．

2.1　Riemann 和

f を有界閉区間 $[a,b]$ で定義された関数とする．区間 $[a,b]$ を n 個に分割する．つまり，$[a,b]$ から端点を含めて $(n+1)$ 個の点を選ぶ．

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

この $(n+1)$ 個の実数の組 $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を区間 $[a,b]$ の**分割**と呼ぶ．各小区間から代表点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を選ぶ．このとき，

$$R(\Delta, \{\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\,\}, f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ と代表点集合 $\{\,\xi_1, \ldots, \xi_n\,\}$ に関する関数 f の **Riemann 和**という．

ここで定義した Riemann 和は図 1 のように，横の長さが $x_i - x_{i-1}$ で，縦の長さが $f(\xi_i)$ の細長い長方形たちの面積を足し合わせたものであり，$y=f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x=a$ と $x=b$ で囲まれた図形の面積を近似している．ただし，$f(\xi_i)<0$ なら $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < 0$ なので，x 軸より下にある部分の Riemann 和は負の値である．つまり，Riemann 和は**符号付き面積**を近似している．

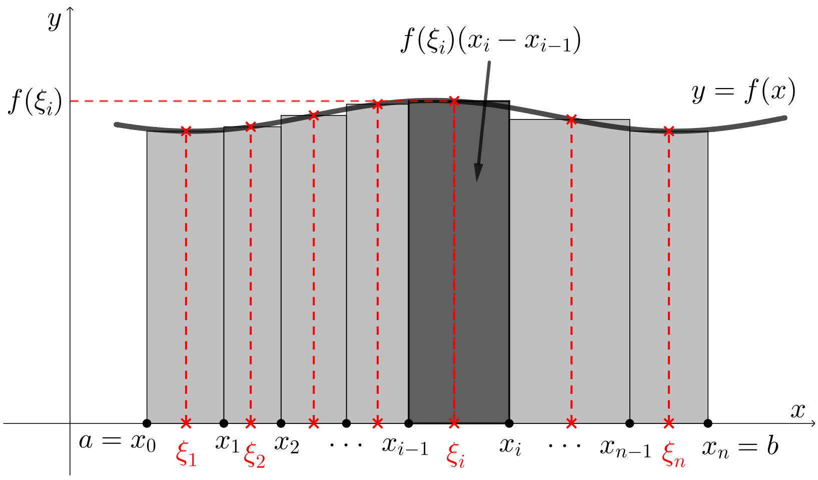


図 1　Riemann 和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ は各長方形の（符号付き）面積の和に相当する．

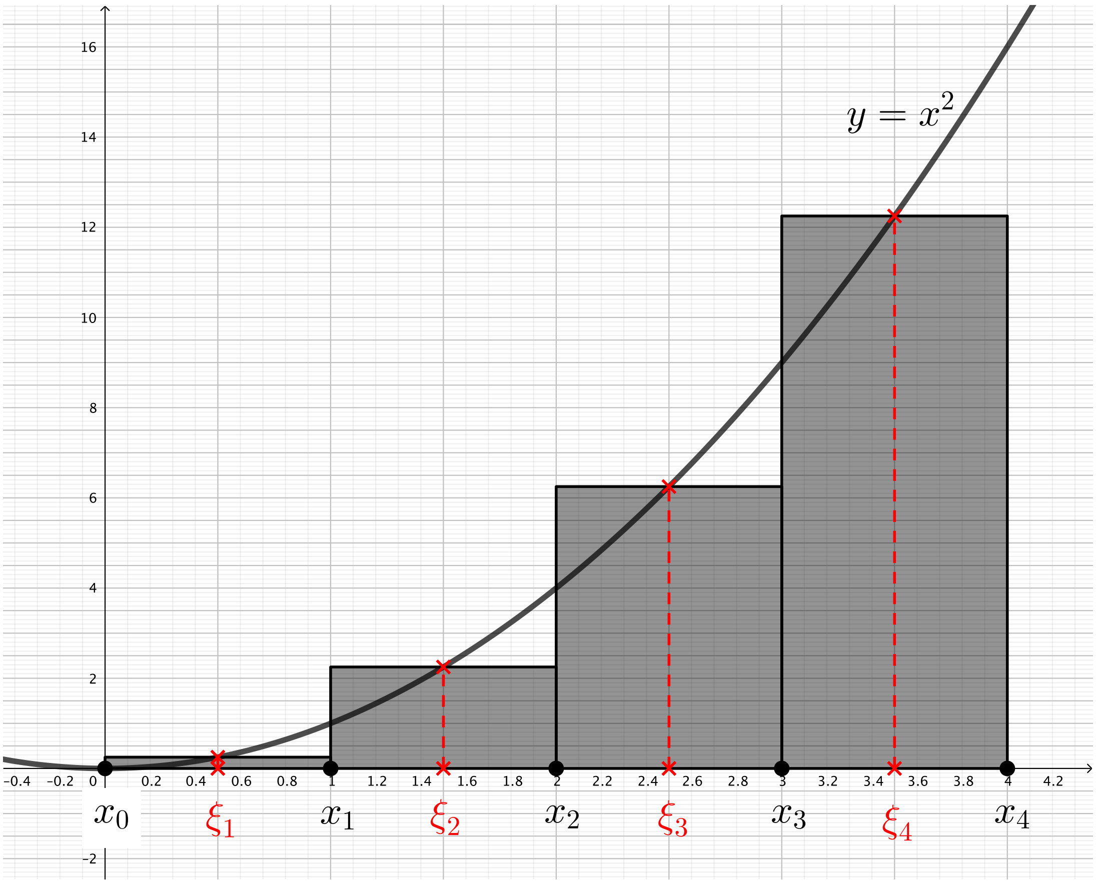
簡単な Riemann 和を実際に計算してみよう．

例 2.1. $f(x) = x^2$ とする．$\Delta = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ を閉区間 $[0, 4]$ の 4 等分割とし，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中点を ξ_i とする．つまり，

$$\Delta = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 3, 4), \quad \xi_1 = \frac{1}{2},\ \xi_2 = \frac{3}{2},\ \xi_3 = \frac{5}{2},\ \xi_4 = \frac{7}{2}$$

とする．これらに関する f の Riemann 和 $R(\Delta, \{\xi_i\}, f)$ を実際に計算してみよう．

$$\begin{aligned}
R(\Delta, \{\xi_i\}, f) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + f(\xi_4)(x_4 - x_3) \\
&= f\left(\frac{1}{2}\right)(1-0) + f\left(\frac{3}{2}\right)(2-1) + f\left(\frac{5}{2}\right)(3-2) + f\left(\frac{7}{2}\right)(4-3) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} = 21
\end{aligned}$$



これは積分 $\int_0^4 x^2\,dx$ を近似している．実際，後で確認するが $\int_0^4 x^2\,dx = \dfrac{64}{3} = 21.333\cdots$ である．

2.2　積分の定義

f を有界閉区間 $[a,b]$ で有界な関数とする．$[a,b]$ の分割 $\Delta=(x_0,\ldots,x_n)$ に対し，

$$|\Delta| := \max_{1\leqq i\leqq n}(x_i-x_{i-1})$$

とする．ここで，max は最大値を意味する．すなわち，$x_1-x_0, x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1}$ の中で最も大きな値が $|\Delta|$ である．$|\Delta|\to 0$ のとき，分割の仕方と代表点集合 $\{\,\xi_i\,\}$ の選び方によらず Riemann 和 $R(\Delta,\{\,\xi_i\,\},f)$ が一定の値に収束するならば，f は $[a,b]$ で **(Riemann) 積分可能**，または **(Riemann) 可積分**であるといい，その極限値を

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

で表し，区間 $[a,b]$ における f の**積分**という．つまり，

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

である．ここまでは $a<b$ の場合しか想定していないが，$a\geqq b$ の場合も含めて以下を約束しておく．

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx, \qquad \int_a^a f(x)\ dx = 0 \tag{2.1}$$

与えられた関数が積分可能であるかどうかを調べるのは容易ではないが，有界閉区間上の連続関数は積分可能であることが知られている．

定理 2.2. 有界閉区間 $[a,b]$ 上連続な関数は $[a,b]$ で積分可能である．

つまり，積分したい区間で f が連続なら積分できるかどうかは心配する必要がなく，「どうやって計算するか」のみ考をえればよい．

積分の定義から，以下の定理が成り立つ．

定理 2.3. f の積分可能な範囲内にある任意の a,b,c に対して以下が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$$

定理 2.4. f,g が区間 $[a,b]$ で積分可能かつ $f(x)\leqq g(x)$ なら $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqq \int_a^b g(x)\ dx$ である．

一般に，$-|f(x)|\leqq f(x)\leqq |f(x)|$ なので定理 2.4 から以下が成り立つ．

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \leqq \int_a^b f(x)\ dx \leqq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

これにより，以下の定理が得られる．

定理 2.5. f が $[a,b]$ で積分可能なら $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\ dx$ である．

2.3　微分積分学の基本定理

積分値を定義に基づいて求めるのは大体困難であり，実際には微分積分学の基本定理を使って計算する．

定理 2.6 (微分積分学の基本定理). 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f に対して次が成り立つ．

(1) 関数 $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ は閉区間 $[a, b]$ で定義され，開区間 (a, b) で以下が成り立つ．

$$G'(x) = f(x)$$

つまり，G は f の原始関数である．

(2) f の任意の原始関数 F に対して（つまり，$F' = f$ となる任意の F に対して）以下が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

注意. この定理の (1) は，微分と積分という操作が互いに逆であることを示している．これがあるから「微分学」と「積分学」がまとめて「微分積分学」と呼ばれている．また，(2) は微分の逆操作によって実際に積分の値が計算できることを示している．この定理は微分積分学においてもっとも重要であり，だからこそ「基本定理」と呼ばれている．

$F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ と書くと便利である．これによって積分の計算は

$$\int_a^b f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(a) - F(b) = \cdots$$

という形で書かれることが多い．

例えば，$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^3$, $(e^x)' = e^x$ なので微分積分学の基本定理 (2) から

$$\int_0^4 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3}, \qquad \int_0^1 e^x\ dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

などと積分の計算が容易に行える．とにかく，$F' = f$ となる F さえ見つかれば積分は容易に計算できる．

また，$F' = f$ となる F はどれを選んでもよい．例えば，$(\log x)' = (\log(2x))' = \dfrac{1}{x}$ なので

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2 \quad \Big(F(x) = \log x\Big)$$

と計算しても

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \Big[\log(2x)\Big]_1^2 = \log 4 - \log 2 = \log \frac{4}{2} = \log 2 \quad \Big(F(x) = \log(2x)\Big)$$

と計算してもよい．ちなみに，$\log(2x) = \log x + \log 2$ なので，$\log x$ と $\log(2x)$ との差は定数 $\log 2$ である．

2.4　定積分における部分積分と置換積分

微分積分学の基本定理により，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ の計算の大部分は実質不定積分 $\displaystyle\int f(x)\ dx$ の計算である．そこに部分積分や置換積分を適用する場合には積分範囲も含めて計算すればよい．

定積分で部分積分を適用する場合は，以下のように計算すればよい．

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

例 2.7. (1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = e - 0 - \Big[e^x\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1$

(2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\ dx = 2\log 2 - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\log 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2\log 2 - \frac{3}{4}$

注意. 先に不定積分を計算しきってもよい．例えば，上の (1) で $\displaystyle\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x$ と不定積分を求めてしまってから以下のように計算してもよい．

$$\int_0^1 xe^x\ dx = \Big[xe^x - e^x\Big]_0^1 = (e-e) - (0-1) = 1$$

これでももちろんよいが，$\displaystyle\int$ が外れたところから代入計算をした方が早く結論に辿りつきやすい．

定積分において，$u = g(x)$ として置換積分を適用する場合には，積分範囲も u の動く範囲に変換する．

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)\frac{du}{dx}\ dx = \int_\alpha^\beta f(u)\ du \qquad \left[\begin{array}{c|ccc} x & a & \to & b \\ \hline u & \alpha & \to & \beta \end{array}\right]$$

例 2.8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\ dx$

$u = 1 + \sin x$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = \cos x$ であり，積分範囲は $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \pi/2 \\ \hline u & 1 & \to & 2 \end{array}$ と変換される．

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\ dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx}\ dx = \int_1^2 \frac{du}{u} = \Big[\log u\Big]_1^2 = \log 2$$

注意. 上の例で，先に不定積分を $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\ dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|1+\sin x|$ と計算しきってから

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\ dx = \Big[\log|1+\sin x|\Big]_0^{\pi/2} = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

と計算してももちろんよいが，積分範囲も変換しながら計算すれば，不定積分を計算しきる必要がなくなる．

具体的な積分計算は以下のリンク先の「積分基本問題集 壱」(1) ～ (26) で練習してください．

`https://github.com/kazutsumi/Integral1/blob/main/integral1.pdf`

2.5　微分積分学の基本定理の証明

微分積分学の基本定理（定理 2.6）は微分積分学において最も重要な定理なのでその証明を書いておく．興味がなければ読み飛ばしてもよい．なお，基本的に教科書と同じ証明である．

微分積分学の基本定理. 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f に対して次が成り立つ．

(1) 関数 $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ は閉区間 $[a,b]$ で定義され，開区間 (a,b) で以下が成り立つ．

$$G'(x) = f(x)$$

(2) f の任意の原始関数 F に対して以下が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

まず，(1) を認めてしまえば以下の補題 2.9 から (2) は容易に示せる．

補題 2.9. F, G を有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f の原始関数とする．このとき，$F(x) = G(x) + C$ となる定数 C が存在する．

証明. $H(x) = F(x) - G(x)$ とする．$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ なので，H は $[a,b]$ 上の定数関数である．実際，平均値の定理から任意の $x_1, x_2 \in [a,b]$ $(x_1 < x_2)$ に対して

$$\frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} = H'(c), \quad x_1 < c < x_2$$

となる実数 c が存在するが，$H'(c) = 0$ なので $H(x_1) = H(x_2)$ より H は定数関数である．よって，$H(x) = F(x) - G(x) = C$ となる定数 C が存在する．これより，$F(x) = G(x) + C$ である．　□

微分積分学の基本定理 (2) の証明. (1) から $G(x)$ は f の原始関数なので，補題 2.9 から $F(x) = G(x) + C$ を満たす定数 C が存在する．また，$\displaystyle\int_a^a f(t)\ dt = 0$ と約束しているので

$$F(b) - F(a) = \Big(G(b) + C\Big) - \Big(G(a) + C\Big) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\ dt - \int_a^a f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$$

である．なお，変数に使う文字によって積分値は変わらないので $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$ である．　□

次に，定理 2.3 と以下の補題 2.10 から微分積分学の基本定理 (1) を証明する．

補題 2.10 (積分の平均値の定理). 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f に対し，以下を満たす実数 c が存在する．

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b$$

証明. f が定数関数なら明らかなので，f は定数関数でないとする．f は閉区間 $[a, b]$ で連続なので最小値 m と最大値 M が存在する．それらを実現する値をそれぞれ $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ とする．つまり，$f(x_{\min}) = m,\ f(x_{\max}) = M$ である．f は定数関数でないので $x_{\min} \neq x_{\max}$ である．定理 2.4 より

$$m(b-a) = \int_a^b m\ dx \leqq \int_a^b f(x)\ dx \leqq \int_a^b M\ dx = M(b-a)$$

が成り立つ．これより

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leqq M$$

である．よって，中間値の定理から

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = f(c), \quad x_{\min} < c < x_{\max} \text{ または } x_{\max} < c < x_{\min}$$

を満たす実数 c が存在する．従って，

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a)$$

である．ここで，$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ なので $a < c < b$ である． □

微分積分学の定理 (1) の証明. $x \in (a, b)$ とする．定理 2.3 と約束 (2.1) から

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right) \underset{(2.1)}{=} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\ dt + \int_x^a f(t)\ dt\right)\\ &\underset{\text{定理 } 2.3}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt\end{aligned}$$

である．さらに，補題 2.10 から

$$\int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(c)h$$

を満たす実数 c が x と $x+h$ の間に存在するので

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(c)$$

である．$h \to 0$ のとき $c \to x$ であり，f は連続なので

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

である．つまり，G は開区間 (a, b) で微分可能で $G'(x) = f(x)$ である． □

2.6 （おまけ）Riemann 和の極限としての積分

有界閉区間上の連続関数の積分の値を Riemann 和の極限としていくつか計算する．

例 2.11. $\displaystyle\int_0^4 x^2\,dx$

$\Delta_n = (x_0, \ldots, x_n)$ を閉区間 $[0,4]$ の n 等分割，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中点を代表点 ξ_i とする．つまり，

$$x_i = \frac{4i}{n}\ (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad \xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{2(2i-1)}{n}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

とする．これらに関する $f(x) = x^2$ の Riemann 和を S_n とする．これは図 2 の灰色部分の面積に等しい．$n \to \infty$ のとき，$|\Delta_n| \to 0$ だから定理 2.2 より S_n は収束し，その極限値が求める積分値である．

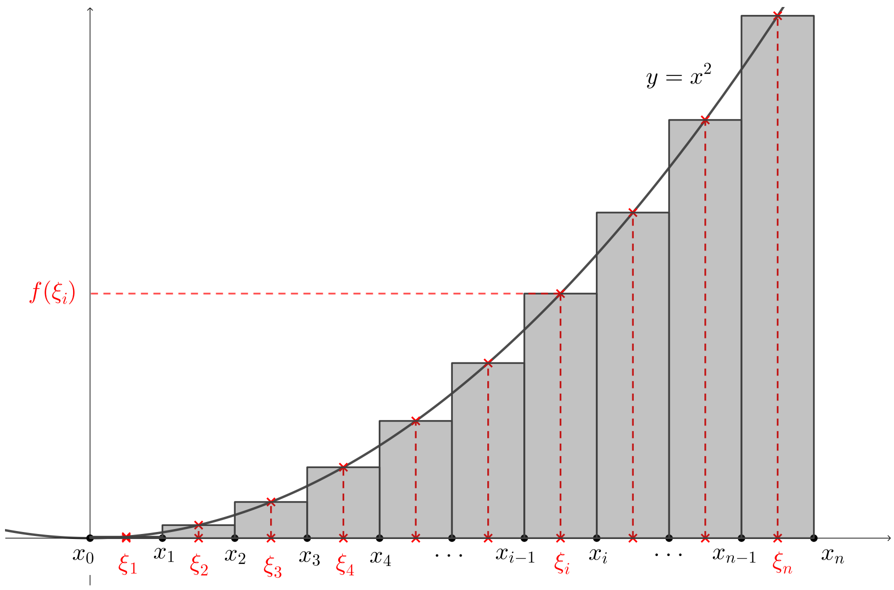


図 2

Riemann 和 S_n を具体的に計算する．Δ_n は区間 $[0,4]$ の n 等分割なので，各 i で $x_i - x_{i-1} = \dfrac{4}{n}$ である．

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2(2i-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(4i^2 - 4i + 1\right) \\
&= \frac{16}{n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{16}{n^3}\left(4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n\right) \\
&= 16\left(\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{64}{3}\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

これより，$\displaystyle\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{64}{3}$ である．

例 2.12. $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

$\Delta_n = (x_0, \ldots, x_n)$ を閉区間 $[0,1]$ の n 等分割，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の右端 x_i を代表点 ξ_i とする．つまり，

$$x_i = \xi_i = \frac{i}{n}$$

とする．これらに関する $f(x) = e^x$ の Riemann 和を S_n とする．これは図 3 の灰色部分の面積に等しい．$n \to \infty$ のとき，$|\Delta_n| \to 0$ だから定理 2.2 より S_n は収束し，その極限値が求める積分値である．

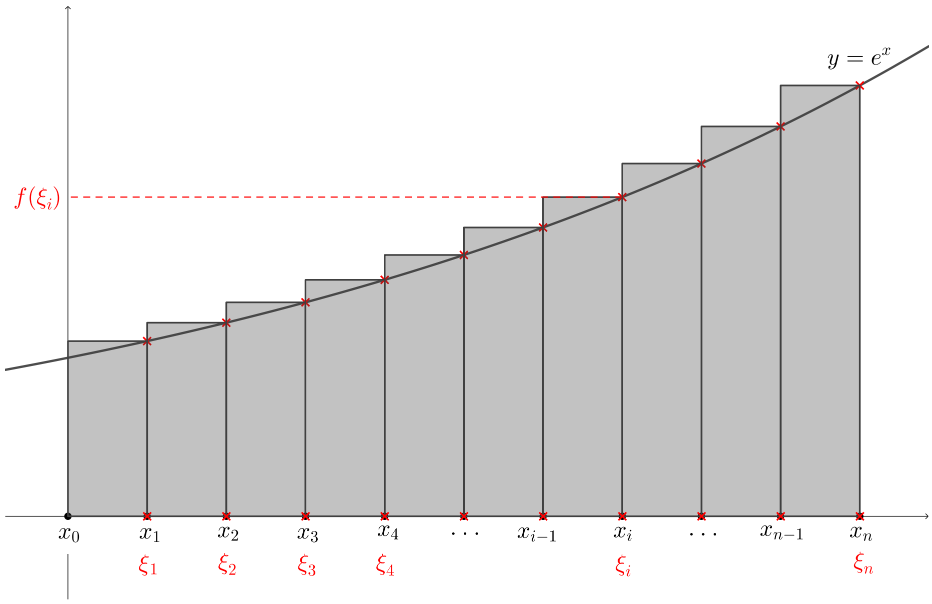


図 3

Riemann 和 S_n を具体的に計算する．Δ_n は区間 $[0,1]$ の n 等分割なので，各 i で $x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$ である．

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) \quad \left(\text{公比 } e^{\frac{1}{n}} \text{ の等比級数}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \cdot \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}
\end{aligned}$$

ここで，$t = e^{\frac{1}{n}} - 1$ とおく．これにより $\dfrac{1}{n} = \log(1+t)$ なので，

$$S_n = \frac{\log(1+t)}{t} \cdot (e-1)(t+1) = (e-1)(t+1)\log(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

と変形できる．$n \to \infty$ のとき $t \to +0$ なので，$\displaystyle\lim_{t \to +0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$ と合わせて以下を得る．

$$\int_0^1 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = (e-1)\lim_{t\to+0}(t+1)\log(1+t)^{\frac{1}{t}} = e - 1$$

定数関数 $f(x) = C$ は連続関数だが，定理 2.2 に頼ることなく直接積分を計算できる．

例 2.13. $\displaystyle\int_a^b C\ dx$

$\Delta = (x_0, \ldots, x_n)$ を閉区間 $[a, b]$ の任意の分割とし，各小区間の $[x_{i-1}, x_i]$ の代表点 ξ_i を任意に選ぶ．これらに関する $f(x) = C$ の Riemann 和は

$$\begin{aligned} R(\Delta, \{\xi_i\}, f) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} C(x_i - x_{i-1}) \\ &= C\Big((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\Big) = C(x_n - x_0) = C(b - a) \end{aligned}$$

である．よって，分割の仕方と代表点の選び方によらず Riemann 和は一定なので，特に $|\Delta| \to 0$ における極限値もその一定の値に等しい．よって，$\displaystyle\int_a^b C\ dx = \lim_{|\Delta| \to 0} R(\Delta, \{\xi_i\}, f) = C(b - a)$ である．

3　分数関数の積分

$\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ という形をした関数は**分数関数**とか**有理関数**と呼ばれる．その積分の計算方法をまとめる．

3.1　多項式の割り算

例えば, 次のような分数関数 $f(x)$ を積分したい．

$$f(x) = \frac{x^5 + 3x^3 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & x^3 & -3x^2 & +10x & -24 & & \\ \hline
x^2+3x+2 & x^5 & & +3x^3 & & -2x & +1 \\
 & x^5 & +3x^4 & +2x^3 & & & \\ \hline
 & & -3x^4 & +x^3 & & -2x & +1 \\
 & & -3x^4 & -9x^3 & -6x^2 & & \\ \hline
 & & & 10x^3 & +6x^2 & -2x & +1 \\
 & & & 10x^3 & +30x^2 & +20x & \\ \hline
 & & & & -24x^2 & -22x & +1 \\
 & & & & -24x^2 & -72x & -48 \\ \hline
 & & & & & 50x & +49
\end{array}$$

この分子と分母の多項式としての次数を比べると

$$\text{分子の次数} \ \geqq\ \text{分母の次数}$$

である．このような場合は，まず右のように分子を分母で割った商と余りを計算しておく．この計算により $f(x)$ の分子が

$$x^5 + 3x^3 - 2x + 1 = (x^3 - 3x^2 + 10x - 24)(x^2 + 3x + 2) + 50x + 49$$

と書けるので

$$f(x) = \frac{(x^3 - 3x^2 + 10x - 24)(x^2 + 3x + 2) + 50x + 49}{x^2 + 3x + 2} = x^3 - 3x^2 + 10x - 24 + \frac{50x + 49}{x^2 + 3x + 2}$$

と変形できる．よって，$f(x)$ の積分は

$$\int f(x)\ dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 - 24x + \int \frac{50x + 49}{x^2 + 3x + 2}\ dx$$

となり，もともとの $\dfrac{5\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}$ の積分が $\dfrac{1\text{ 次式}}{2\text{ 次式}}$ の積分に帰着されている．より一般に，分数関数が

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

と，2 個の多項式 $g(x)$ と $h(x)$ の比で書けるとき，多項式の割り算を実行して

$$g(x) = q(x)h(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg h(x)$$

を満たす多項式 $q(x)$ と $r(x)$ を計算することができる．$q(x)$ が商で，$r(x)$ が余りである．ただし，初めから $\deg g(x) < \deg h(x)$ であれば，$q(x) = 0,\ r(x) = h(x)$ である．これらによって

$$f(x) = \frac{q(x)h(x) + r(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

と，$f(x)$ を「多項式」と「分子の次数 $<$ 分母の次数となる分数関数」の和に分けることができる．つまり，

$$\text{分子の次数}\ <\ \text{分母の次数}$$

となる分数関数の積分が計算できれば，原理的にはどんな分数関数の積分も計算できる．

3.2　部分分数分解

分数関数 $f(x) = \dfrac{x^5+3x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$ の積分を完成させよう．先ほど見たように

$$\int f(x)\ dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 - 24x + \int \frac{50x+49}{x^2+3x+2}\ dx$$

なので，最後に残った積分

$$\int \frac{50x+49}{x^2+3x+2}\ dx$$

を計算してしまえばよい．まず，分母が

$$\frac{50x+49}{x^2+3x+2} = \frac{50x+49}{(x+1)(x+2)}$$

と因数分解できる．これをさらに

$$\frac{50x+49}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

という簡素な分数関数の和に分けることができる．特に，左辺が

$$\text{分子の次数} \ < \ \text{分母の次数}$$

なので，右辺に並ぶ分数関数も全てそうなる．従って，A, B は共に 0 次，つまり定数である．実際，上式の右辺を通分すれば

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

となるので，分子の係数を比較して以下の連立 1 次方程式を解けばよい．

$$\begin{cases} A+B=50 \\ 2A+B=49 \end{cases} \qquad \left(\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 49 \end{bmatrix} \right)$$

これは簡単に解けて，$A=-1,\ B=51$ である．つまり，

$$\frac{50x+49}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{51}{x+2}$$

なのでその積分は

$$\int \frac{50x+49}{(x+1)(x+2)}\ dx = -\int \frac{dx}{x+1} + 51\int \frac{dx}{x+2} = -\log|x+1| + 51\log|x+2|$$

と計算できる．これによって，$f(x)$ の積分が以下の通り完成する．

$$\int \frac{x^5+3x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\ dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 - 24x - \log|x+1| + 51\log|x+2|$$

別の例として，次の分数関数 $g(x)$ を積分してみよう．

$$g(x) = \frac{6x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

これは初めから

$$\text{分子の次数} \;<\; \text{分母の次数}$$

なので，多項式の割り算を実行する必要はない．分母が

$$x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1)+x+1 = (x^2+1)(x+1)$$

と因数分解できるので，$g(x)$ を次の形に分解する．

$$\frac{6x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\bigcirc}{x+1} + \frac{\square}{x^2+1}$$

右辺はどちらも「分子の次数 $<$ 分母の次数」としたいので，$\bigcirc$ は定数（0 次）で，$\square$ は 1 次以下の多項式である．そこで，$\bigcirc = A,\ \square = Bx+C$ とおく．つまり，以下を満たす定数 A, B, C を見つければよい．

$$\frac{6x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

結果的にもしも $B=0$ となれば $\square$ は定数だったことになるが，それは計算してみないとわからないので，とりあえずは $\square$ を 1 次式としておく．上式の右辺を通分すれば

$$\frac{6x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+1)}$$

となるので，分子の係数を比較して以下の連立 1 次方程式を解けばよい．

$$\begin{cases} A+B=6 \\ B+C=1 \\ A+C=1 \end{cases} \qquad \left(\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

これは簡単に解けて，$A=3,\ B=3,\ C=-2$ である．つまり，

$$g(x) = \frac{6x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x+1} + \frac{3x-2}{x^2+1}$$

なので，その積分は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int g(x)\ dx &= 3\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{x}{x^2+1}\ dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= 3\log|x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx - 2\tan^{-1}x \\
&= 3\log|x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\ dx - 2\tan^{-1}x \\
&= 3\log|x+1| + \frac{3}{2}\log(x^2+1) - 2\tan^{-1}x
\end{aligned}$$

より一般に，分数関数 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ の分母が互いに素な r 個の多項式の積として

$$P(x) = P_1(x)P_2(x)\cdots P_r(x)$$

と因数分解されれば，分数関数を多項式 $Q_0(x)$ といくつかの分数関数の和として

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = Q_0(x) + \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} + \cdots + \frac{Q_r(x)}{P_r(x)} \quad (\deg Q_i(x) < \deg P_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, r)$$

となるように分解できる．これを分数関数 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ の**部分分数分解**という．特に，$P(x), Q(x)$ が実数係数の多項式なら，各 $P_i(x), Q_i(x)$ も実数係数の多項式で，各分母 $P_i(x)$ が次のいずれかの形になるまで分解できる．

$$(x-\alpha)^n \quad \text{または} \quad (x^2+bx+c)^n \qquad (n \text{ は自然数 })$$

従って，部分分数分解の多項式以外の各項は以下のいずれかの形をしている．

$$\frac{\bigcirc x^{n-1} + \square x^{n-2} + \cdots + \triangle}{(x-\alpha)^n} \quad \text{または} \quad \frac{\bigcirc x^{2n-1} + \square x^{2n-2} + \cdots + \triangle}{(x^2+bx+c)^n}$$

さらに，例えば

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x-1)^3} &= \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)^3} = \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)+2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$\frac{x^3+2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)+2x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{2x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

のように分解できるので，任意の分数関数は各項が多項式か以下のいずれかの形になるまで分解できる．

$$\frac{\bigcirc}{(x-\alpha)^n} \quad \text{または} \quad \frac{\square x + \triangle}{(x^2+bx+c)^n} \qquad (n \text{ は自然数 }) \tag{3.1}$$

よって，これらの形の分数関数の積分が計算できるようになっておけば，どんな分数関数も積分できる（と言い切りたいが，実際には「どんな分数関数も」は言い過ぎで，分母の次数が高いとその因数分解が難しい）．

3.3 基本形の積分

分数関数の積分は以下の基本形の積分に帰着できるので，これらの計算方法を確立していく．

$$[1] \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} \qquad\qquad [2] \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}\,dx \qquad (\text{ いずれも } n \text{ は自然数 })$$

まず，[1] については，例えば以下のように簡単に計算できる．

$$\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1|, \qquad \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-1}, \qquad \int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2}$$

次に，[2] ではまず分母の括弧の中の 2 次式を以下のように平方完成する．

$$x^2+bx+c = (x-\alpha)^2+\beta \tag{3.2}$$

ここで，$\beta \leqq 0$ となる場合は右辺が因数分解できるので [1] の場合に帰着される．そこで，$\beta > 0$ かつ $n=1$ の場合の例として次の積分を計算する．

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

この場合，分母の 2 次式は

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

と平方完成できるので，$u = x+\dfrac{1}{2}$ とおいて置換積分を適用すれば，積分は次のように計算できる．

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

ここで，次の積分公式を $a=\sqrt{3}/2$ として使った（1.1 節後半で導出した公式の一般化）．

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a>0)$$

さらに，この結果を利用して [2] としてもう少し一般的な形の次の積分を計算する．

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

分母の 2 次式 x^2+x+1 を微分すると 1 次式 $2x+1$ になることを活用して

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

と変形できる．最右辺の第 1 項は $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\log|f(x)|)'$ の形であり，第 2 項は直前に計算したばかりなので，

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

と計算できる．ちなみに，$x^2+x+1>0$ なので，$\left|x^2+x+1\right| = x^2+x+1$ である．

残りの場合を片付けてしまおう．つまり，[2] としてより一般的な以下の形の積分を計算したい．

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} \qquad (n \geqq 2) \tag{3.3}$$

例として，次の積分を計算していく．

$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

まず，先程と同様に，分母に現れる 2 次式 x^2+x+1 を微分すると 1 次式 $2x+1$ になることを活用して

$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

と変形できる．この最右辺の第 1 項の被積分関数は $\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$ という形なので

$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

と計算できる．最後に残った積分は，先程と同様に，$u = x+\dfrac{1}{2}$ とおけば置換積分によって

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}$$

と変換できる．ここで突然だが，この積分を計算するために次のような部分積分の計算を行う．

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} &= \int (u)'\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} - \int u\left(\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\right)'\,du = \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{2u^2}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,du \\ &= \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + 2\int \frac{u^2+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,du = \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + 2\left(\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}\underbrace{\int \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}}\right)\end{aligned} \tag{3.4}$$

波線部に計算したかった積分が現れた．上式の最左辺と最右辺が等しいので，波線部について解いて

$$\int \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}\right)$$

を得る．右辺の最後に現れた積分は先ほど計算したので

$$\int \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)$$

である．以上から，最終的に以下が得られる．

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx &= \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{du}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}u \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}x\end{aligned}$$

より一般に，(3.3) の形の積分は前ページの例と同様に小手先のテクニックを駆使して，最終的には

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} \quad (a>0)$$

という形の積分に帰着される．これを計算してもよいが，もう少しだけ式を簡単にしておこう．

$$\frac{1}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2+1\right)^n}$$

なので，$t=\dfrac{u}{a}$ とおいて置換積分を適用すればこの積分は

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}}\int \frac{a}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

と変換できる．つまり，各 $n=1,2,3,\dots$ に対して

$$I_n := \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

が計算できればよい．そのために，(3.4) と同様に I_n を部分積分して I_{n+1} を生み出す．

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{(t)'}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} - \int t\left(\frac{1}{(t^2+1)^n}\right)'\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} + \int \frac{2nt^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt\right) \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

これの最左辺と最右辺を結ぶ等式から，以下の漸化式が得られる．

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right)$$

これが全ての自然数 n について成り立ち，さらに

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1} t$$

から，以下のように $I_2, I_3, I_4, \dots$ を次々と計算していくことができる．

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + I_1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\tan^{-1} t \\
I_3 &= \frac{1}{4}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2} + 3I_2\right) = \frac{1}{4}\,\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\,\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{8}\tan^{-1} t \\
I_4 &= \frac{1}{6}\left(\frac{t}{(t^2+1)^3} + 5I_3\right) = \frac{1}{6}\,\frac{t}{(t^2+1)^3} + \frac{5}{24}\,\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{5}{16}\,\frac{t}{t^2+1} + \frac{5}{16}\tan^{-1} t
\end{aligned}$$

あるいは，結果として上記のように各 I_n は

$$I_n = a_{n-1}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + a_{n-2}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-2}} + \cdots + a_1\,\frac{t}{t^2+1} + a_0\tan^{-1} t$$

という形に書けるということだけを覚えておけば，これの右辺を微分してそれが $\dfrac{1}{(t^2+1)^n}$ に等しくなるように定数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ を定めることもできる．つまり，n 個の変数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ に関する連立 1 次方程式を解くことでこれらの積分を計算することもできる．

3.4　練習問題

答えは次のページ

1. 次の分数関数を「多項式」と「分子の次数 $<$ 分母の次数となる分数関数」の和に分けよう.

   (1) $\dfrac{x^4+x+4}{x^3+x^2+x+1}$

   (2) $\dfrac{3x^4+x^3+13x^2+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}$

   (3) $\dfrac{8x^5+82x^4+287x^3+259x^2-304x-361}{x^3(x^2+8x+19)^2}$

2. 前問 2. の分数関数を多項式と (3.1) の形の分数関数たちの和に分解しよう.

3. 前問 1. と 前々問 2. を踏まえて，次の積分の値を求めよう.

   (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+x+4}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

   (2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^4+x^3+13x^2+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx$

   (3) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{8x^5+82x^4+287x^3+259x^2-304x-361}{x^3(x^2+8x+19)^2}\,dx$

「積分基本問題集 壱」(27) $\sim$ (35) も参考にしてください.

解答

1. (1) $x-1+\dfrac{x+5}{x^3+x^2+x+1}$

   (2) $3x-8+\dfrac{19x^2+36x+37}{(x+1)(x^2+2x+4)}$

   (3) $(\ 0+\ )\ \dfrac{8x^5+82x^4+287x^3+259x^2-304x-361}{x^3(x^2+8x+19)^2}$

2. (1) $x-1+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{-2x+3}{x^2+1}$

   (2) $3x-8+\dfrac{\frac{20}{3}}{x+1}+\dfrac{\frac{37}{3}x+\frac{31}{3}}{x^2+2x+4}$

   (3) $(\ 0+\ )\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{x^3}+\dfrac{-x}{x^2+8x+19}+\dfrac{-1}{(x^2+8x+19)^2}$

3. (1) $\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{1}{2}+\log 2$

   (2) $\dfrac{77}{6}\log 3-10-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

   (3) $\dfrac{4}{9}+\dfrac{23\sqrt{3}}{108}\pi-\dfrac{3}{2}\log 3$

3.5 （おまけ）特殊な置換積分たち

置換積分によって分数関数の積分に帰着できるものは少なくない．例えば，次の積分を考える．

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 3\cos x}\,dx$$

これを計算するために（非常に突然だが）変数変換 $u = \tan\dfrac{x}{2}$ を考える．このとき，

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+u^2)$$

である．さらに，$\cos x$, $\sin x$ が u の式としてそれぞれ次のように書ける．

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\right) = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,\cos^2\frac{x}{2} = 2\left(\tan\frac{x}{2}\right)\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

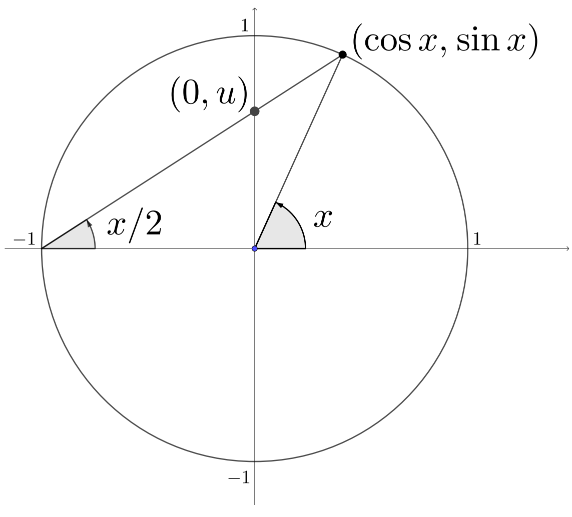
これにより，冒頭の積分が次のように書き換えられる．

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} - 3\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{-2u^2+2}{(u^2+1)(3u^2+2u-3)}\,du$$

このように，三角関数 $\cos x, \sin x$ と定数の四則演算だけで構成される関数の積分は，変数変換

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

によって u の分数関数の積分に帰着できる．なお，この変数変換における u と x の関係には下図のような意味付けができる．中学で学ぶ「円の 1 つの孤に対する中心角は円周角の 2 倍に等しい」という円周角の定理が効いている．



前ページで紹介した「$\cos x$ と $\sin x$ と定数の四則演算だけで構成される関数」の中でもさらに

$$\cos^2 x \text{ と } \sin^2 x \text{ と } (\sin x)(\cos x) \text{ と定数の四則演算だけで構成される関数}$$

に関しては，変数変換 $u = \tan x$ による置換積分で計算することもできる．例として

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx$$

を計算してみよう．さっそく $u = \tan x$ とおく．このとき，

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+u^2} \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2}$$

である．ちなみに，今回は使わないが

$$(\sin x)(\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}\ \cos^2 x = (\tan x)\left(\cos^2 x\right) = \frac{u}{1+u^2}$$

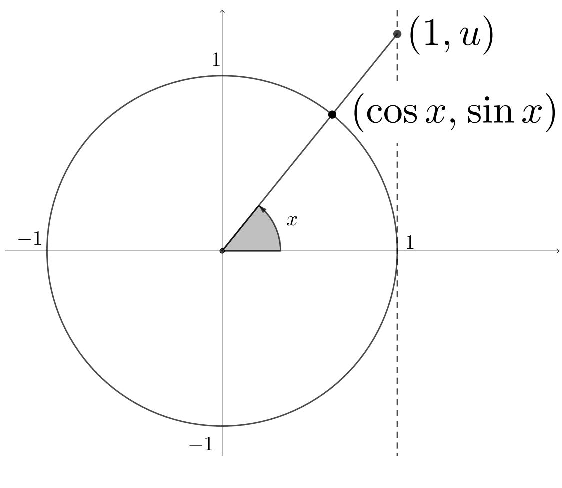
である．さらに，

$$\frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2 \quad \text{より} \quad 1 = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

である．また，積分範囲は $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \pi/4 \\ \hline u & 0 & \to & 1 \end{array}$ と変換されるので，この積分は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{1+\frac{1}{1+u^2}}{\frac{u^2}{1+u^2}+\frac{3}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2}\ \frac{du}{dx}\ dx = \int_0^1 \frac{u^2+2}{(u^2+1)(u^2+3)}\ du \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{u^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{u^2+3} \right)\ dx = \frac{1}{2}\left(\Big[\tan^{-1} u \Big]_0^1 + \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{3}} \right]_0^1 \right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{36}
\end{aligned}$$

なお，この変数変換における u と x の関係には下図のような意味づけができる．



さらに特別な場合として，$(\sin^m x)(\cos^n x)$ の積分を考える．例として，以下の $m=2, n=3$ の場合を計算してみるが，m,n の少なくとも一方が奇数なら同様に計算できる．

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x\right)\left(\cos^3 x\right)\ dx$$

これも $u=\tan\dfrac{x}{2}$ による置換積分で分数関数の積分に帰着できるが，かなり面倒な計算になる．そこで

$$\left(\sin^2 x\right)\left(\cos^3 x\right) = \left(\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x\right)\cos x = \left(\sin^2 x\right)\left(1-\sin^2 x\right)\cos x$$

と変形してみると，$u=\sin x$ による置換積分がうまくいきそうなことに気がつける．実際，$\dfrac{du}{dx}=\cos x$ であり，積分範囲が

x	0	$\to$	$\pi/2$
u	0	$\to$	1

と変換されるので，以下のように割と簡単に計算できてしまう．

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x\right)\left(\cos^3 x\right)\ dx = \int_0^1 u^2\left(1-u^2\right)\ du = \left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

続いて，以下の $m=2, n=4$ の場合を計算してみる．m,n の両方が偶数なら同様に計算できる．

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x\right)\ dx$$

これも $u=\tan\dfrac{x}{2}$ や $u=\tan x$ による置換積分で分数関数の積分に帰着はできるが，まず

$$\left(\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x\right) = \left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x = \cos^4 x - \cos^6 x$$

と変形してみる．ここで半角の公式から

$$\begin{aligned}\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 &= \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} = \frac{1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}}{4}\\ &= \frac{3}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{\cos(4x)}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^6 x = \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^3 &= \frac{1+3\cos(2x)+3\cos^2(2x)+\cos^3(2x)}{8}\\ &= \frac{1+3\cos(2x)+3\frac{1+\cos(4x)}{2}}{8}+\frac{\cos^3(2x)}{8} = \frac{5}{16}+\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{3}{16}\cos(4x)+\frac{\cos^3(2x)}{8}\end{aligned}$$

なので，この積分は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x\right)\ dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{16}+\frac{\cos(2x)}{8}-\frac{\cos(4x)}{16}-\frac{\cos^3(2x)}{8}\right)\ dx\\ &= \left[\frac{x}{16}+\frac{\sin(2x)}{16}-\frac{\sin(4x)}{64}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\cos^3(2x)\ dx\\ &= \frac{\pi}{32}-\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\cos^3(2x)\ dx = \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

最後に残った積分は，$\cos^3(2x) = \left(1-\sin^2(2x)\right)\cos(2x)$ と変形できるので $u=\sin(2x)$ による置換積分で計算できる．

4　広義積分

これまでの積分は有界閉区間上の有界な関数のみを対象にしてきた．その制限を除き，（半）開区間や無限区間上の有界とは限らない関数の積分を定義する．

4.1　広義積分の定義

定義. f を半開区間 $[a,b)$ ($b=\infty$ でもよいが，その場合は半開区間とは呼ばないかも) で定義された 1 変数関数とし，任意の $c\in[a,b)$ 対し有界閉区間 $[a,c]$ で f は有界で積分可能であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)\ dx \quad \left(b=\infty \text{ なら } \int_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\ dx\right)$$

を f の半開区間 $[a,b)$ における**広義積分**という．極限が存在するとき広義積分は**収束する**といい，極限が存在しないときは**発散する**という．

同様にして，半開区間 $(a,b]$ ($a=-\infty$ でもよいが，半開区間とは呼ばないかも) における広義積分を

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)\ dx \quad \left(a=-\infty \text{ なら } \int_{-\infty}^b f(x)\ dx := \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\ dx\right)$$

により定義する．このとき，f は任意の $c\in(a,b]$ に対し有界閉区間 $[a,c]$ で有界で積分可能な関数とし，広義積分の収束・発散も同様に定義する．

また，開区間 (a,b) ($a=-\infty$ や $b=\infty$ でもよい) で定義された関数 f に対して，任意に $c\in(a,b)$ をとり

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

により f の開区間 (a,c) における広義積分を定義する．このとき，右辺の 2 つの広義積分が共に収束するとき，左辺の広義積分は収束すると定義し，右辺のどちらか一方でも発散すれば左辺の広義積分も発散すると定義する．この広義積分が収束するとき，その値は c によらない．

関数が定義されない点が区間の内部に存在する場合は，区間をその点で分けて広義積分を定義する．例えば，関数 f が $x=c\in(a,b)$ で定義されないなら

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

により定義する．先程と同様に右辺の両方の広義積分が収束するときのみ左辺も収束すると定義する．

例 4.1.

$$\int_0^\infty e^{-x}\ dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x}\ dx = \lim_{c\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^c = \lim_{c\to\infty}\big(-e^{-c}+1\big) = 1$$

例 4.2.

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x}\ dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 e^{-x}\ dx = \lim_{c\to-\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_c^0 = \lim_{c\to-\infty}\big(-1+e^{-c}\big) = \infty \ (\text{ 発散 })$$

例 4.3.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to1-0}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to1-0}\Big[\sin^{-1}x\Big]_0^c = \lim_{c\to1-0}\sin^{-1}c = \frac{\pi}{2}$$

4.2　広義積分の収束・発散の判定

広義積分の値はいつでもその値を計算できるとは限らないが，収束・発散の判定だけならできることがある．

定理 4.4. f, g を区間 $[a, b)$ で $|f(x)| \leq g(x)$ を満たす 1 変数関数で，任意の $c \in [a, b)$ に対して $[a, c]$ で積分可能とする．このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$ が収束するなら広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ も収束し，以下が成り立つ．

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

定理 4.5. f, g を区間 $[a, b)$ で $f(x) \leq g(x)$ を満たす 1 変数関数で，任意の $c \in [a, b)$ に対して $[a, c]$ で積分可能とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\ dx = +\infty \text{ ならば } \int_a^b g(x)\ dx = +\infty$$

であり，

$$\int_a^b g(x)\ dx = -\infty \text{ ならば } \int_a^b f(x)\ dx = -\infty$$

である．

注意. 定理 4.4, 4.5 は区間が $(a, b], (a, b)$ の場合（無限区間でもよい）に対しても成り立つ．

例 4.6. 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{(x+1)(x+2)}\ dx$ は収束する．

証明. 区間 $[0, \infty)$ において

$$\left| \frac{\sin x}{(x+1)(x+2)} \right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$$

であり，任意の $c \in [0, \infty)$ に対して $\dfrac{\sin x}{(x+1)(x+2)}, \dfrac{1}{(x+1)^2}$ は $[0, c]$ で連続なので積分可能である．さらに，

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{b+1} + 1 \right) = 1$$

より，定理 4.4 から広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{(x+1)(x+2)}\ dx$ は収束する．　□

例 4.7. 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1 + \log x}$ は $+\infty$ に発散する．

証明. 区間 $[1, \infty)$ において

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1 + \log x}$$

であり，任意の $c \in [1, \infty)$ に対して $\dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{1 + \log x}$ は $[1, c]$ で連続なので積分可能である．さらに，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x} = \lim_{b \to \infty} [\log(1+x)]_1^b = \lim_{b \to \infty} (\log(1+b) - \log 2) = +\infty$$

より，定理 4.5 から広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1 + \log x}$ は $+\infty$ に発散する．　□

例 4.8. 広義積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{\log x}{x}\, dx$ は $-\infty$ に発散する．

証明. 区間 $(0,3]$ において

$$\frac{\log x}{x} \leq \frac{x-1}{x}$$

であり，任意の $c \in (0,3]$ に対して $\dfrac{\log x}{x}, \dfrac{x-1}{x}$ は $[c,3]$ で連続なので積分可能である．さらに，

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x-1}{x}\, dx &= \lim_{a\to+0}\int_a^3 \frac{x-1}{x}\, dx = \lim_{a\to+0}\int_a^3 \left(1-\frac{1}{x}\right)\, dx = \lim_{a\to+0}\left[x-\log x\right]_a^3 \\ &= \lim_{a\to+0}(3-\log 3 - a + \log a) = -\infty\end{aligned}$$

より，定理 4.5 から広義積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{\log x}{x}\, dx$ は $-\infty$ に発散する． □

4.3 積分と広義積分

例えば，以下の積分の計算過程には広義積分が現れている．（$1 = x'$ とみなして部分積分）

$$\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx = \Big[x\sin^{-1} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

普通の積分計算に見えるかもしれないが，実は $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ が広義積分である．

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{c\to1-0}\int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{c\to1-0}\Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^c = \lim_{c\to1-0}\Big(1-\sqrt{1-c^2}\Big) = 1$$

このように，実は広義積分だがそれに気づかずに計算してしまっても結果は正しく得られているが，そうなるように広義積分がうまく定義されている．よかったね．

一方で，例えば以下の左辺はただの積分に見えるかもしれないが，被積分関数が $x=0$ で定義されていないので広義積分である．

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} := \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

右辺のどちらの広義積分も発散するので，この左辺は発散すると広義積分では定義している．これに気づかず

$$\textbf{（間違い）}\quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^1 = \log 1 - \log 1 = 0 \quad \textbf{（間違い）}$$

と計算してしまうと，広義積分の定義とは合わない結論にたどり着いてしまう．気をつけよう．

4.4　練習問題

次の広義積分の収束・発散を明らかにしよう．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$　(5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$　(6) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$　(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2}$　(9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\ dx$　(11) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\ dx$　(12) $\displaystyle\int_0^1 x\log x\ dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\ dx$　(14) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\ dx$　(15) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx$

「積分基本問題集 壱」(36) $\sim$ (48) も参考にしてください．

答え：(1), (6), (7), (9), (12), (14), (15) は収束．残りは発散．

4.5 （おまけ）Beta 関数と Gamma 関数

広義積分によって定義される関数として有名な Beta 関数と Gamma 関数を紹介する．

定理 4.9 (Beta 関数). 以下の 2 変数関数 $B(p,q)$ は $p>0, q>0$ で定義され，**Beta 関数**と呼ばれる．

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ dx$$

証明. $p \geqq 1$ かつ $q \geqq 1$ ではこれはただの連続関数の積分なので，ちゃんと値が定まる．問題は $0<p<1$ や $0<q<1$ で $B(p,q)$ が広義積分となるので，それがちゃんと収束することを証明しておく．

被積分関数を $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ として，次の 3 つの場合に分けて示していく．

(i) $p \geqq 1$ かつ $0<q<1$ のとき：$a:=p-1, b:=1-q$ とおけば，$a \geqq 0$ かつ $0<b<1$ であり，

$$f(x)=\frac{x^a}{(1-x)^b}$$

と書ける．従って，$B(p,q)$ は半開区間 $[0,1)$ 上の広義積分である．$x\in[0,1)$ において

$$|f(x)| = \left|\frac{x^a}{(1-x)^b}\right| \leqq \frac{1}{(1-x)^b}$$

であり，最右辺の $[0,1)$ 上の広義積分が次のように収束するので，定理 4.4 から $B(p,q)$ は収束する．

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^b} = \lim_{c\to 1-0}\int_0^c (1-x)^{-b}\ dx = \lim_{c\to 1-0}\left[\frac{(1-x)^{1-b}}{b-1}\right]_0^c = \lim_{c\to 1-0}\frac{(1-c)^{1-b}-1}{b-1} = \frac{1}{1-b}$$

(ii) $0<p<1$ かつ $q \geqq 1$ のとき：$u=1-x$ とおいて置換積分を適用すれば，

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\ du\ \Big(=B(q,p)\Big)$$

と書き換えられる．これが収束することは (i) で示した．

(iii) $0<p<1$ かつ $0<q<1$ のとき：$a:=1-p, b:=1-q$ とおけば，$0<a<1$ かつ $0<b<1$ であり，

$$f(x)=\frac{1}{x^a(1-x)^b}$$

と書けるので，$B(p,q)$ は開区間 $(0,1)$ 上の広義積分である．従って，$B(p,q)$ を

$$B(p,q) = \int_0^{1/2}\frac{dx}{x^a(1-x)^b} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^a(1-x)^b} \tag{4.1}$$

と 2 個の広義積分の和に分けて両方が収束することを示せばよい．第 1 項に関しては，$x\in(0,1/2]$ に対して $1/2 \leqq 1-x < 1$ なので

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x^a(1-x)^b}\right| \leqq \frac{2^b}{x^a}$$

であり，この最右辺の半開区間 $(0,1/2]$ 上の広義積分が以下のように収束する．

$$\int_0^{1/2}\frac{2^b}{x^a}\ dx = \lim_{c\to+0} 2^b\int_c^{1/2} x^{-a}\ dx = 2^b\lim_{c\to+0}\left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_c^{1/2} = 2^b\lim_{c\to+0}\frac{2^{a-1}-c^{1-a}}{1-a} = \frac{2^{a+b-1}}{1-a}$$

よって，定理 4.4 から (4.1) の第 1 項は収束する．第 2 項は (ii) と同じ置換積分で第 1 項と同じ形に帰着できる．□

定理 4.10 (Gamma 関数). 以下の関数 $\mathit{\Gamma}(s)$ は $s > 0$ で定義され，**Gamma 関数** と呼ばれる．

$$\mathit{\Gamma}(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx$$

証明. 広義積分 $\mathit{\Gamma}(s)$ を以下のように $x = 1$ で 2 個に分ける．

$$\mathit{\Gamma}(s) = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\ dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx \tag{4.2}$$

まず，右辺第 1 項を考える．$s \geqq 1$ ではこれはただの有界閉区間上の連続関数の積分なので，ちゃんと値が定まる．$0 < s < 1$ ではこれは半開区間 $(0, 1]$ 上の広義積分である．このとき，$x \in (0, 1]$ に対して

$$\left| e^{-x} x^{s-1} \right| \leqq x^{s-1}$$

であり，この右辺の半開区間 $(0, 1]$ 上の広義積分は以下のように収束するから，定理 4.4 により (4.2) の右辺第 1 項は収束する．

$$\int_0^1 x^{s-1}\ dx = \lim_{c \to +0} \int_c^1 x^{s-1}\ dx = \lim_{c \to +0} \left[\frac{x^s}{s} \right]_c^1 = \lim_{c \to +0} \frac{1 - c^s}{s} = \frac{1}{s}$$

次に，(4.2) の第 2 項の広義積分が収束することを示す．$s > 0$ とする．$s + 1 > 1$ なので

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$$

だから，十分大きな x に対して $e^{-x} x^{s+1} < 1$ である．そこで，$x \geqq X$ では $e^{-x} x^{s+1} < 1$ であるとすれば (4.2) の右辺第 2 項は

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx = \int_1^X e^{-x} x^{s-1}\ dx + \int_X^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx \tag{4.3}$$

と分けられ，この右辺第 1 項はただの連続関数の積分なので，右辺第 2 項が収束することを示せばよい．このとき，$x \in [X, \infty)$ に対して

$$\left| e^{-x} x^{s-1} \right| = \frac{e^{-x} x^{s+1}}{x^2} < \frac{1}{x^2}$$

であり，この最右辺の無限区間 $[X, \infty)$ 上の広義積分は以下のように収束する．

$$\int_X^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{c \to \infty} \int_X^c x^{-2}\ dx = \lim_{c \to \infty} \Big[-x^{-1} \Big]_X^c = \lim_{c \to \infty} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{X}$$

よって，定理 4.4 より (4.3) の右辺第 2 項の広義積分は収束する． □

注意. Gamma 関数 $\mathit{\Gamma}(s)$ は自然数の階乗 $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ の拡張と見なせる．実際，部分積分により

$$\mathit{\Gamma}(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s\ dx = \Big[e^{-x} x^s \Big]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\ dx = \lim_{c \to \infty} e^{-c} c^s + s\mathit{\Gamma}(s) = s\mathit{\Gamma}(s)$$

となるので，自然数 n に対しては

$$\begin{aligned} \mathit{\Gamma}(n) &= (n-1)\mathit{\Gamma}(n-1) = (n-1)(n-2)\mathit{\Gamma}(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \mathit{\Gamma}(1) \\ &= (n-1)!\mathit{\Gamma}(1) = (n-1)! \int_0^{-\infty} e^{-x}\ dx = (n-1)! \lim_{c \to \infty} \Big[-e^{-x} \Big]_0^c = (n-1)! \end{aligned}$$

である．番号が 1 つずれるのが少し気持ち悪いが，とにかく $\Gamma(n) = (n-1)!$ となっている．

5　平面図形の面積と曲線の長さ

5.1　平面図形の面積と積分

定理 5.1. f, g を有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とし，$[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする．図 4 のように曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ と x 軸に垂直な 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる有界閉領域

$$D = \{\, (x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ g(x) \leqq y \leqq f(x) \,\}$$

の面積は以下の積分値に等しい．

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

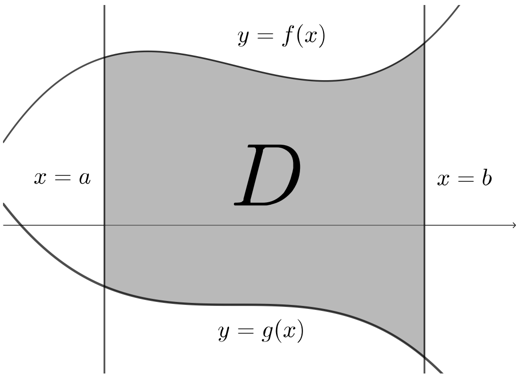


図 4　曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ と直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれる有界閉領域 D

例 5.2. 半径 $R > 0$ の円の面積 $S(R)$ は図 5 のように以下の積分で求められる．

$$S(R) = \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \right) \right) dx = \pi R^2$$

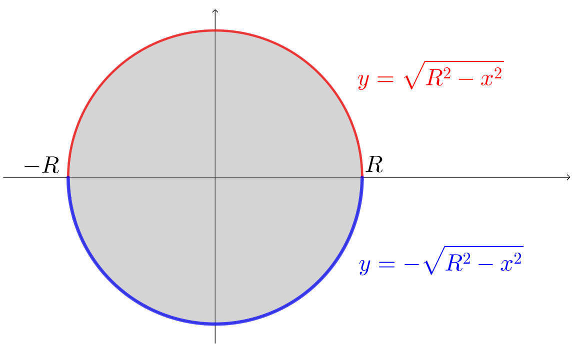


図 5　曲線 $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ と直線 $x = \pm R$ で囲まれる有界閉領域

5.2　平面曲線の長さと積分

積分を用いて曲線の長さを計算する．その前に「曲線の長さ」とは何かを定義する．

$\varphi(t), \psi(t)$ を有界閉区間 $[a, b]$ 上定義された C^1 級関数とする．変数 t が a から b まで動くとき，平面上の点 $(\varphi(t), \psi(t))$ はなめらかな平面曲線 C を描く．これを

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leqq t \leqq b$$

と書き，曲線 C の**媒介変数表示**という．$(\varphi(a), \psi(a))$, $(\varphi(b), \psi(b))$ は C の端点である．

曲線 C を折れ線で近似する．閉区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

をとる．これにより曲線 C 上に $n+1$ 個の点 $P_i\,(\varphi(t_i), \psi(t_i))\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ がとれる．点 P_0 から P_n までを順に結んで図 6 のように曲線 C を近似する折れ線ができる．

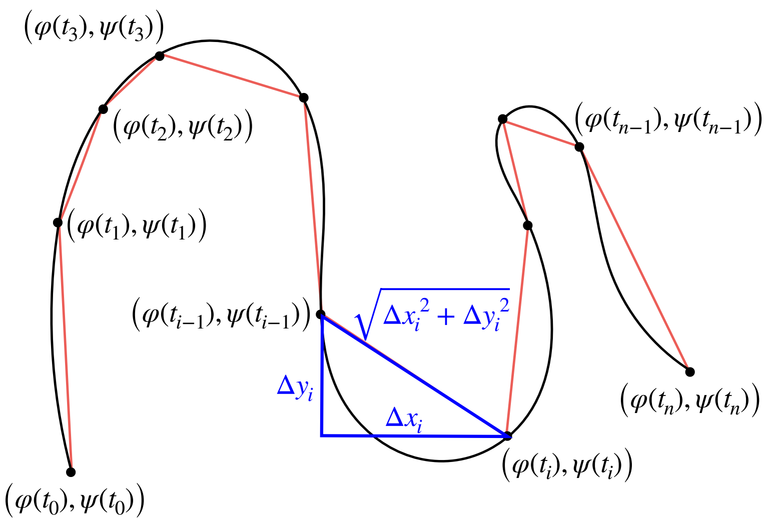


図 6　曲線 $C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ を近似する折れ線

ここで

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}), \quad \Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}), \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

とすれば，各線分 $P_{i-1}P_i$ の長さは三平方の定理から $\sqrt{{\Delta x_i}^2 + {\Delta y_i}^2}$ なので，C を近似する折れ線の長さ l_Δ は次のように書ける．

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{{\Delta x_i}^2 + {\Delta y_i}^2}$$

そこで，$|\Delta| \to 0$ のときの l_Δ の極限値を曲線 C の長さと定義する．

次に，曲線 C の長さ $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0} l_\Delta$ を積分を用いて表す．まず，l_Δ は

$$\sqrt{{\Delta x_i}^2 + {\Delta y_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\ \Delta t_i$$

と書ける．ここで，φ, ψ は C^1 級なので平均値の定理から各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \varphi'(c_i), \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = \frac{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \psi'(d_i)$$

を満たす $c_i, d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ が存在する．ここで，ψ は C^1 級と仮定したから ψ' は連続である．よって，$|\Delta| \to 0$ のとき $d_i \to c_i$ なので $\psi'(d_i) \to \psi'(c_i)$ である．従って，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} l_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'(c_i)^2 + \psi'(c_i)^2}\ \Delta t_i$$

である．これは分割 Δ と代表点集合 $\{\, c_i \,\}$ に関する連続関数 $\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ の Riemann 和の $|\Delta| \to 0$ のときの極限なので，その値は

$$\int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt$$

に等しい．以上を定理としてまとめておこう．

定理 5.3. φ, ψ を閉区間 $[a, b]$ 上定義された C^1 級関数とする．媒介変数表示

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \leqq t \leqq b$$

で与えられる曲線の長さは，以下の積分値に等しい．

$$\int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt$$

平面曲線の中でも，1 変数関数 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ のグラフとして与えられる曲線は

$$x = t,\ y = f(t), a \leqq t \leqq b$$

と媒介変数表示できるので，以下の定理を得る．

定理 5.4. C^1 級関数 $y = f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ の部分の長さは以下の積分値に等しい．

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$$

例 5.5. 半径 $R>0$ の円の周の長さ $L(R)$ は定理 5.3 より以下の積分で求められる．

$$L(R)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left((R\cos t)'\right)^2+\left((R\sin t)'\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}R\,dt=2\pi R$$

あるいは，図 7 のように関数 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ のグラフの $-R\leqq x\leqq R$ の部分の長さを定理 5.4 を用いて計算し，それを 2 倍してもよい．ただし，以下は広義積分である．

$$L(R)=2\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=2R\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=2\pi R$$

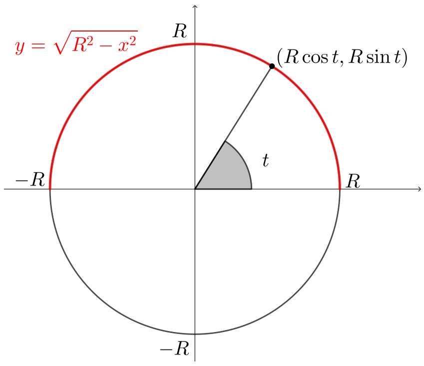


図 7

例 5.6. 放物線 $y=x^2$ の $0\leqq x\leqq 1$ の部分の長さ L は定理 5.4 より以下のように求められる．

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left((x^2)'\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right)$$

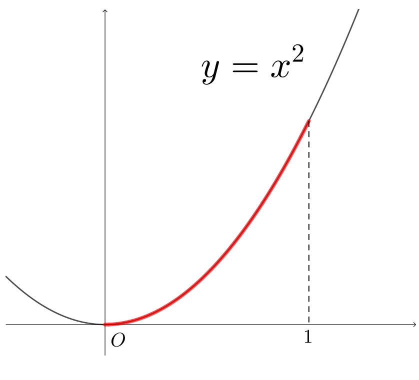


図 8　放物線 $y=x^2$

5.3　空間曲線の長さと積分

φ, ψ, χ を閉区間 $[a,b]$ 上定義された C^1 級関数とする．変数 t が a から b まで動くとき，空間の点 $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ はなめらかな空間曲線 C を描く．これを

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \leqq t \leqq b$$

と書き，空間曲線 C の媒介変数表示という．平面曲線と同様に，空間曲線 C の長さは以下の積分に等しい．

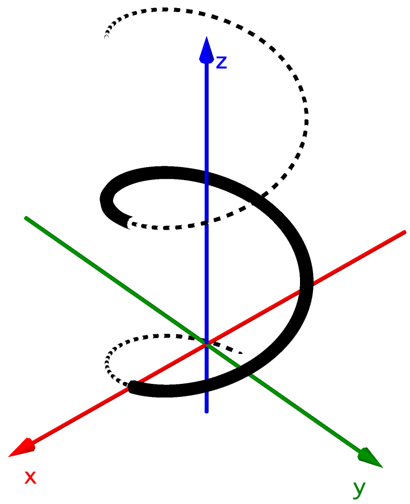
$$\int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\ dt$$

例 5.7. 常螺旋曲線

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$$

の長さは以下の積分で求められる．

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left((\cos t)'\right)^2 + \left((\sin t)'\right)^2 + (t')^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ dt = 2\sqrt{2}\pi$$

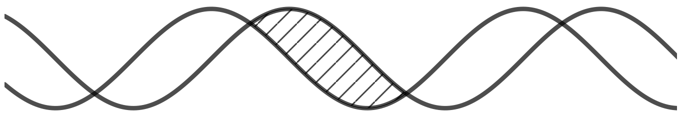


平面曲線は $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ と表せる．また，空間曲線は $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表せる．平面曲線に対して $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ とし，空間曲線に対して $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ とすれば，いずれものその長さは以下のように統一的に表せる．

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\ dt$$

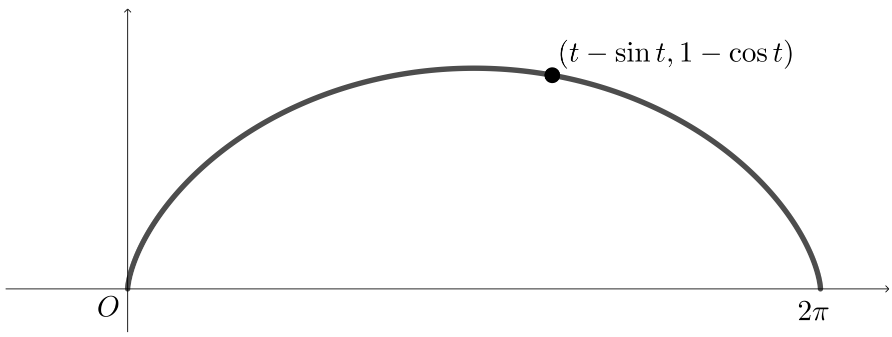
5.4 練習問題

1. 曲線 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ で囲まれる下図斜線部分の図形の面積を求めよう.

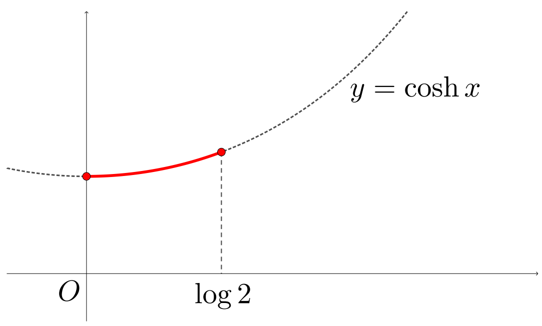


2. 次の曲線の長さを求めよう.

(1) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$



(2) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(= \cosh x)$ $\quad (0 \leqq x \leqq \log 2)$



答え：1. $2\sqrt{2}$ 　　2. (1) 4 　(2) $\frac{3}{4}$

5.5　（おまけ）平方根を含む関数の積分と双曲線関数

例えば

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad や \quad \int \sqrt{a^2+x^2}\ dx$$

ような平方根を含む関数の積分には，$u = x + \sqrt{a^2+x^2}$ とおいて置換積分を使うという自力で見出すのはやや困難な方法がある．それを紹介してもよいが，どうせならより自力で見出しにくい方法を紹介しておく．

以下の 3 個の関数は**双曲線関数**と呼ばれる．

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

それぞれ，hyperbolic sine, hyperbolic cosine, hyperbolic tangent と読む．三角関数の記号 $\sin, \cos, \tan$ とよく似ているが全く別の関数である．それでいて三角関数に非常によく似た性質を持っている．例えば

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

という関係式が成り立つことが定義から容易に確かめられる．さらには，三角関数の加法定理によく似た公式

$$\sinh(x \pm y) = (\sinh x)(\cosh y) \pm (\cosh x)(\sinh y), \quad \cosh(x \pm y) = (\cosh x)(\cosh y) \pm (\sinh x)(\sinh y)$$

を定義から容易に導ける．符号の反転が起こらないので，三角関数の公式よりも覚えやすい．三角関数の加法定理が倍角・半角の公式を導くのと全く同様に，これらは双曲線関数に関する類似の公式

$$\sinh(2x) = 2(\sinh x)(\cosh x), \qquad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

などを導く．さらには，各々の導関数に関しても

$$(\sinh x) = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

となることもやはり定義から容易に確認できる．これらから積分の公式

$$\int \sinh x\ dx = \cosh x, \quad \int \cosh x\ dx = \sinh x, \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$$

も導かれる．いずれも三角関数間の関係式とよく似ているが，符号の反転が起きないので覚えやすい．

また，逆三角関数が $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ と書かれるように，双曲線関数においても $\sinh^{-1}, \cosh^{-1}, \tanh^{-1}$ は逆数ではなく，各々の逆関数を表す．その導関数は逆関数の微分公式を使って逆三角関数と同様に計算できる．例えば $y = \sinh^{-1} x$ の導関数であれば，$x = \sinh y$ なので

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

と計算できる．これは以下の積分の公式を導く．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x \quad \left(= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)$$

長々と語った双曲線関数の一連の性質を使って，例として以下の積分公式を導出する．

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + x\sqrt{a^2+x^2}\right) \quad (a>0) \tag{5.1}$$

突然だが $x = a\sinh u$ $\left(\Leftrightarrow u = \sinh^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ とおく．$\dfrac{dx}{du} = a\cosh u$ なので

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\ dx &= \int a\sqrt{1+\sinh^2 u}\ \frac{dx}{du}\ du = \int a\sqrt{\cosh^2 u}\ (a\cosh u)\ du = a^2\int \cosh^2 u\ du \\ &= a^2 \int \frac{1+\cosh(2u)}{2}\ du = a^2\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sinh(2u)\right) = a^2\left(\frac{u}{2}+\frac{(\sinh u)(\cosh u)}{2}\right) \\ &= \frac{a^2}{2}\left(u+(\sinh u)\sqrt{1+\sinh^2 u}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\sinh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2+x^2}\right)\end{aligned} \tag{5.2}$$

である．前ページで紹介した諸々の公式を随所で使いまくっている．ここで，$y = \sinh^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおけば

$$y = \sinh^{-1}\frac{x}{a} \iff \frac{x}{a} = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff a\left(e^y\right)^2 - 2xe^y - a = 0$$

である．最後の等式を e^y に関する 2 次方程式として解けば，$e^y > 0$ と合わせて

$$e^y = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} \qquad \text{より} \qquad y = \log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \log a$$

である．(5.2) の最後の $\sinh^{-1}\dfrac{x}{a}$ をこの y に置き換えて，定数 $-\dfrac{a^2}{2}\log a$ を積分定数に吸収させれば (5.1) が得られる．

例 5.6 で以下の積分公式をさりげなく使った．

$$\int \sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)+x\sqrt{1+4x^2}\right)$$

これは (5.1) で $a = \dfrac{1}{2}$ とすれば得られる．実際,

$$\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2}\ dx = \int \sqrt{\frac{1+4x^2}{4}}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+4x^2}\ dx$$

なので，$a = \dfrac{1}{2}$ のときの (5.1) を 2 倍すればよい．なお，定数の差は積分定数が吸収してくれる．

この他にも双曲線関数によって計算しやすくなる積分がいくつかある．双曲線関数やそれにまつわる積分についてより詳しく知りたければ以下の記事を読んでみてください．

双曲線関数について：`https://github.com/kazutsumi/hyperbolic/blob/main/hyperbolic.pdf`

6　べき級数

6.1　級数

数列 $\{a_n\}$ によって定まる以下の形の式を**級数**という．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

以下の n 番目までの部分和 S_n が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は**収束する**という．

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ であるとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値は α であるといい，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ と書く．当たり前のことを長々と定義しているように見えるかもしれないが，例えば

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots$$

という数列 $\{(-1)^n\}$ から定まる級数を

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0$$

と見なしたり

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$$

と見なしたりしていては収束先が定まらないので，「前から順番に足す」という約束をしている．この定義に従えば，上の級数は収束しない．

例 6.1. 初項が a で公比が r の等比数列の n 番目までの和は

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \begin{cases} \dfrac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} & (r \neq 1) \\ a(n+1) & (r = 1) \end{cases}$$

なので，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ は $|r| < 1$ のとき収束し，その値は

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r} \quad (r < 1)$$

である．$|r| \geqq 1$ のとき，この等比級数は発散する．

注意. 以後，混乱のおそれがないところでは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ を単に $\sum$ と略して書く．

定理 6.2 (**級数の和・定数倍**)**.** 2 つの級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ が収束するとき，任意の定数 $k, l \in \mathbb{R}$ に対して，級数 $\sum(ka_n + lb_n)$ も収束し，以下が成り立つ．

$$\sum(ka_n + lb_n) = k\left(\sum a_n\right) + l\left(\sum b_n\right)$$

定理 6.3. 級数 $\sum a_n$ が収束するなら，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

証明. 級数 $\sum a_n$ が α に収束するとし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ だから

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to \alpha - \alpha = 0 \quad (n \to \infty)$$

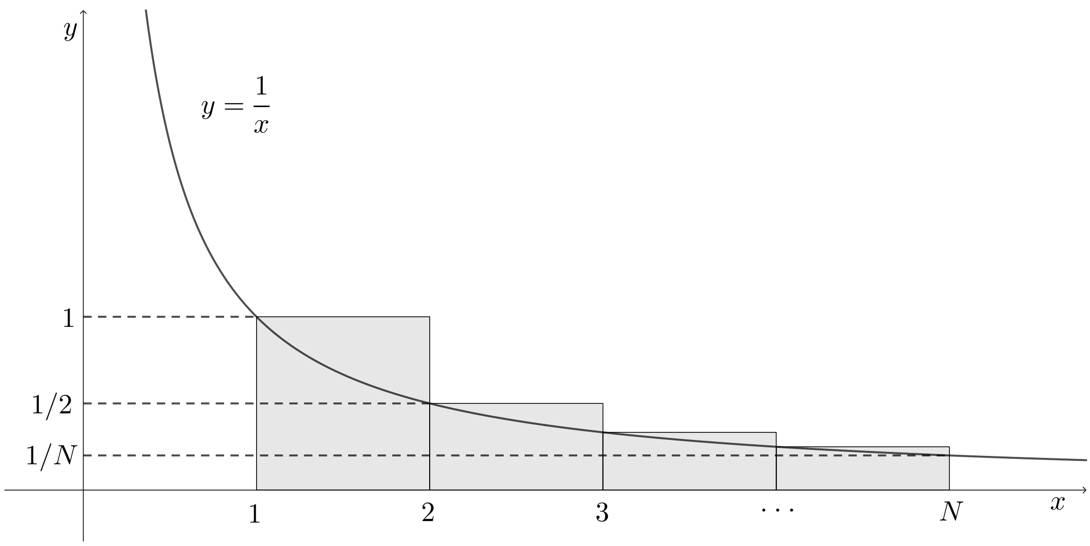
より，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する． □

定理 6.3 の逆は成り立たない．つまり，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しても級数 $\sum a_n$ が収束するとは限らない．

例 6.4. $a_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．一方，任意の自然数 N に対して

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqq \int_1^N \frac{dx}{x} = \log N \to \infty \quad (N \to \infty)$$

より，級数 $\sum a_n$ は発散する．なお，部分和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ は下図の灰色部分の面積に等しい．



6.2　べき級数

数列 $\{a_n\}$ と実数 b と変数 x によって

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + \cdots$$

と表される級数を，$x=b$ を中心とする**べき級数**という．$t = x-b$ とおけば，この級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

と $t=0$ を中心とするべき級数に書き換えられるので，この形のべき級数が重要である．

例 6.5. 多項式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ は，$a_k = 0$ $(k > n)$ として，べき級数とみなせる．

定義 (Taylor 級数). 実数 a を含む開区間 I で C^∞ 級な関数 f に対し，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

を f の $x=a$ を中心とする **Taylor 級数**という．

関数 f が $x=a$ で Taylor 展開可能なとき，a の近くの x において f の $x=a$ を中心とする Taylor 級数は収束し，その値は $f(x)$ に等しい．しかしながら，一般には f が C^∞ 級であってもその Taylor 級数と $f(x)$ が等しいとは限らない．

例 6.6. 以下の関数 f の $x=0$ を中心とする Taylor 級数を考えてみよう．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

まず，$f'(0)$ を求めよう．以下は途中で $h = \frac{1}{t}$ と変数変換している．

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

次に，$f''(0)$ を求めよう．やはり以下でも途中で $h = \frac{1}{t}$ と変数変換している．

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^{-3}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0$$

以下，同様に計算して $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \cdots = 0$ となることがわかる．従って，f の $x=0$ のまわりでの Taylor 級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$$

であるが，これは明らかに $x=0$ 以外の全ての x に対して $f(x)$ と等しくない．

6.3　収束半径

定理 6.7. べき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = b\ (\neq 0)$ で収束するなら，$|x| < |b|$ を満たす全ての x で収束する．

証明. 級数 $\sum a_n b^n$ が収束するので，数列 $\{a_n b^n\}$ は 0 に収束する．特に，数列 $\{a_n b^n\}$ は上にも下にも有界なので，全ての番号 $n \geq 0$ で $|a_n b^n| < M$ となる正の実数 M が存在する．このとき，各 x に対して $r = |x/b|$ とすると，

$$|a_n x^n| = \left| a_n b^n \cdot \frac{x^n}{b^n} \right| \leq M r^n$$

が成り立つ．従って，$|x| < |b|$ すなわち $r < 1$ ならば，級数 $\sum M r^n$ が収束するので $\sum |a_n x^n|$ も収束する．よって，$\sum a_n x^n$ は収束する．　□

注意. 上の証明の終盤では以下の優級数定理と呼ばれる定理を使った．

定理 6.8 (**優級数定理**)**.** 全ての n で $0 \leqq a_n \leqq b_n$ であり，級数 $\sum b_n$ が収束するなら，級数 $\sum a_n$ も収束する．このような級数 $\sum b_n$ は級数 $\sum a_n$ の**優級数**と呼ばれる．

注意. 級数 $\sum |a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum a_n$ は**絶対収束する**という．これは級数 $\sum a_n$ が収束するよりも強い条件である．つまり，級数 $\sum a_n$ が絶対収束するなら，$\sum a_n$ は収束する．

定理 6.7 は級数の発散を判定する以下の定理を導くこともできる．

定理 6.9. べき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = b$ で発散するなら，$|x| > |b|$ を満たす全ての x で発散する．

証明. $|u| > |b|$ となる u でべき級数が収束するなら，定理 6.7 により $x = b$ でべき級数が収束し，$x = b$ で発散することに矛盾する．　□

定義 (**収束半径**)**.** べき級数 $\sum a_n x^n$ が $|x| < r$ のとき収束し，$|x| > r$ のとき発散するとき，r をこのべき級数の**収束半径**という．ただし，$x = 0$ でのみ収束するときは $r = 0$ とし，全ての実数 x で収束するときは $r = +\infty$ と定める．

注意. 収束半径 r が $0 < r < +\infty$ のとき，定理 6.7 からべき級数 $\sum a_n x^n$ は $|x| < r$ で収束し，$|x| > r$ で発散する．なお，$x = \pm r$ における収束・発散は個別に調べなければわからない．

例 6.10. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $|x| < 1$ で絶対収束し，$|x| > 1$ で発散するから，その収束半径は 1 である．なお，この場合 $x = \pm 1$ では発散することが容易にわかる．よって，$|x| < 1$ において以下が成り立つ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

全ての n で $a_n > 0$ となる級数 $\sum a_n$ を**正項級数**という．

定理 6.11 (**Cauchy の収束判定法**)**.** 正項級数 $\sum a_n$ に対して，$\rho := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ とする．$\rho < 1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$\rho > 1$ $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty \text{ も含む}\right)$ なら $\sum a_n$ は発散する．

定理 6.12 (**d'Alembert の収束判定法**)**.** 正項級数 $\sum a_n$ に対して，$\rho := \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とする．$\rho < 1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$\rho > 1$ $\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \text{ も含む}\right)$ なら $\sum a_n$ は発散する．

注意. Cauchy の収束判定法も d'lAmbert の収束判定法も $\rho = 1$ となるときには収束・発散に関して何も教えてくれない．その場合は個別に別の方法で調べなければならない．

定理 6.13. べき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を r とする．このとき次が成り立つ．

(1) 極限値 $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するとき，$r = \dfrac{1}{l}$ である．

(2) 極限値 $l = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するとき，$r = \dfrac{1}{l}$ である．

ただし，$l = 0$ のときは $r = +\infty$ であり，$l = +\infty$ のときは $r = 0$ である．

証明.

(1) 実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = l|x|$ である．従って，Cauchy の収束判定法から
- $l|x| < 1$ すなわち $|x| < \dfrac{1}{l}$ ならば，べき級数は絶対収束する．
- $l|x| > 1$ すなわち $|x| > \dfrac{1}{l}$ ならば，級数 $\sum |a_n x^n|$ は発散する．

よって，収束半径は $r = \dfrac{1}{l}$ である．

(2) 実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = l|x|$ である．従って，d'Alembert の収束判定法から
- $l|x| < 1$ すなわち $|x| < \dfrac{1}{l}$ ならば，べき級数は絶対収束する．
- $l|x| > 1$ すなわち $|x| > \dfrac{1}{l}$ ならば，級数 $\sum |a_n x^n|$ は発散する．

よって，収束半径は $r = \dfrac{1}{l}$ である．

□

例 6.14. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は $+\infty$ である．すなわち，全ての実数 x で収束する．

実際，$a_n = \dfrac{1}{n!}$ とおけばこのべき級数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書けるので，

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

より定理 6.13 から収束半径は $+\infty$ である．

6.4　項別積分・項別微分

べき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径が $r > 0$ なら，これは開区間 $(-r, r)$ 上の関数

$$f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

を定義する．このとき，f は $(-r, r)$ で連続である．

定理 6.15 (項別積分). べき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とする．このとき，開区間 $(-r, r)$ 上で以下が成り立つ．すなわち，右辺の収束半径は r である．

$$\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

定理 6.16 (項別微分). べき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ と $g(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ に次が成り立つ．

(1) $g(x)$ の収束半径は $f(x)$ の収束半径に等しい．
(2) $f(x)$ の収束半径が $r > 0$ のとき，f は $(-r, r)$ で微分可能で，$f'(x) = g(x)$ である．

定理 6.17. 正の収束半径 r を持つべき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ は $(-r, r)$ で C^∞ 級である．

証明. 定理 6.16 より $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ であり，その収束半径も r である．よって，定理 6.16 を繰り返し適用して，f は何回でも微分できることが示せる．　$\square$

定理 6.18. べき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ が正の収束半径 r を持つとき，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して以下が成り立つ．

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

証明. f に定理 6.16 を繰り返し適用して

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + ((n+1)n \cdots 2)\, a_{n+1} x + ((n+2)(n+1) \cdots 3)\, a_{n+2} x^2 + \cdots$$

だから，これに $x = 0$ を代入して $f^{(n)}(0) = n! a_n$ を得る．　$\square$

定理 6.19 (べき級数展開の一意性). C^∞ 級関数 f が，正の収束半径を持つべき級数として

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$$

と 2 通りに表せたとき，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $a_n = b_n$ である．

証明. 定理 6.18 より，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ である．　$\square$

6.5　Taylor 展開

実数 a の近くで C^∞ 級な関数 f の n 次剰余項

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{n-1}$$

が $n \to \infty$ のときに 0 に収束するとき，f は $x = a$ で **Taylor 展開可能**であるといい，その Taylor 級数を f の $x = a$ での **Taylor 展開**という．このとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

である．特に，$a = 0$ での Taylor 展開を f の **Maclaurin 展開**という．

例 6.20. 代表的な Maclaurin 展開をいくつか挙げておく．

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \\
\sin x &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \\
\cos x &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \\
(1+x)^a &= \sum \binom{a}{n} x^n = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

ただし，最後の級数の係数は一般化二項係数である．

$$\binom{a}{k} := \frac{\overbrace{a(a-1)\cdots(a-k+1)}^{k\ \text{個}}}{n!}, \qquad \binom{a}{0} := 1$$

例 6.21. 例 6.10 のべき級数 $\sum x^n$ の収束半径は 1 である．従って，$|x| < 1$ において

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である．べき級数展開の一意性（定理 6.19）からこれは関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の Maclaurin 展開でもある．また，$|x| < 1$ のとき，$|-x| < 1$ だから

$$f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

であり，最右辺の収束半径は 1 である．よって，項別積分ができて（定理 6.15）

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

が $|x| < 1$ で成り立つ．これは関数 $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開である．ちなみに，この Maclaurin 展開は $x = 1$ でも成り立つので，

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

である．なお，$x = -1$ のとき級数は発散する．

例 6.22. $\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開とその収束半径を項別積分を使って求める．

例 6.21 で見たように，$|x| < 1$ で

$$\frac{1}{1+x} = \sum(-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

である．$|x| < 1$ のとき，$|x^2| < 1$ なので x に x^2 を代入して

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum(-x^2)^n = \sum(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

を得る．この収束半径は 1 である．よって，項別積分ができて（定理 6.15）

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

が開区間 $(-1, 1)$ で成り立つ．べき級数展開の一意性（定理 6.19）からこれは $\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開であり，定理 6.15 からその収束半径は 1 である．

例 6.23. 以下の関数 $G(x)$ の Maclaulin 展開を項別積分を使って求める．

$$G(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

例 6.20 で挙げた指数関数 e^x の Maclaulin 展開の x に $-t^2$ を代入して以下が得られる．

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} + \cdots \quad (-\infty < t < \infty)$$

右辺は項別積分ができる（定理 6.15）ので両辺を 0 から x まで積分して以下を得る．

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \tag{6.1}$$

べき級数の一意性（定理 6.19）から，これは $G(x)$ の Maclaulin 展開である．

ちなみに，この関数 $G(x)$ の $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ 倍は**誤差関数 (error function)** と呼ばれ，$\mathrm{erf}(x)$ と書かれる．

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

わざわざ $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ 倍する理由はいずれ説明するつもりだが，これは初等関数（多項式，三角関数，逆三角関数，指数関数，対数関数，無理関数たちのある種の組み合わせとして表せる関数）でないことが知られている．そのため，各 x での関数値を知るのも困難だが，上記の級数表示 (6.1) によって原理上は任意精度の近似値を計算することができる．

6.6 （おまけ）Taylor の定理と積分

定理 6.24. f を実数 a を含む開区間 I で C^n 級な関数とする．このとき，任意の $x \in I$ に対して以下が成り立つ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt$$

証明. 微分積分学の基本定理から，任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ dt$$

である．右辺の積分に部分積分を繰り返し適用して，以下を得る．

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x (-(x-t))' f'(t)\ dt \\
&= f(a) + \Big[(-(x-t))\, f'(t) \Big]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \left(-\frac{(x-t)^2}{2} \right)' f''(t)\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^4}{4!} f^{(3)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(5)}(t)}{4!}(x-t)^4\ dt \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt
\end{aligned}$$

□

上の定理において

$$R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt$$

を積分形の剰余項という．これは Taylor の定理における剰余項の別の表現方法である．この定理 6.24 から Taylor の定理を導くこともできる．

定理 6.25 (Taylor の定理). 定理 6.24 と同じ仮定のもとで，任意の $x \in I$ に対して，以下を満たす実数 c が存在する．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad a < c < x \text{ または } x < c < a$$

証明. $a > x$ のときも同様に示せるので，$a < x$ とする．定理 6.24 から

$$R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad a < c < x$$

を満たす実数 c が存在することを示せばよい．f は開区間 I で C^n 級なので，$f^{(n)}$ は閉区間 $[a,x]$ で連続である．従って，最大値・最小値の定理から，区間 $[a,x]$ における $f^{(n)}$ の最小値 m と最大値 M が存在するので

$$\int_a^x \frac{m}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt \leq R_n(x) \leq \int_a^x \frac{M}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{m}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt &= \frac{m}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{m}{n!}(x-a)^n \\
\int_a^x \frac{M}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt &= \frac{M}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{M}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

より

$$m \leq \frac{n!}{(x-a)^n}R_n(x) \leq M$$

である．よって，中間値の定理から

$$\frac{n!}{(x-a)^n}R_n(x) = f^{(n)}(c)$$

を満たす実数 $c \in (a,x)$ が存在する．これから以下を得る．

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

□

Taylor の定理における剰余項

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

は Lagrange の剰余項と呼ばれる．

7　2 重積分とは

2 変数関数の積分を定義する．

7.1　2 変数関数の Riemann 和

f を以下の有界な長方形 K で定義された有界な 2 変数関数とする．

$$K = [a,b] \times [c,d] := \{\, (x,y) \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d \,\}$$

区間 $[a,b]$ を m 個に，区間 $[c,d]$ を n 個に分割し，長方形 K を mn 個に分割する．

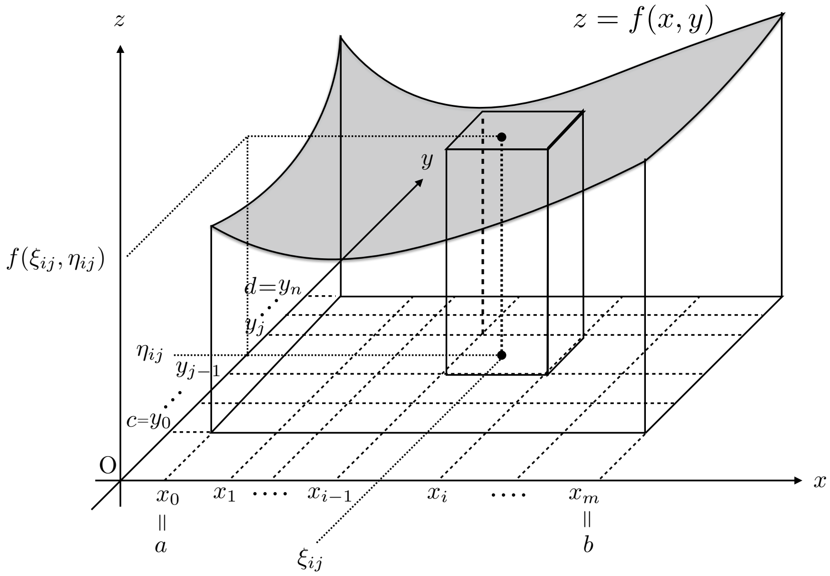
$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{aligned}$$

この $(m+n+2)$ 個の点の組 $\Delta = (x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n)$ を K の**分割**と呼ぶ．各小長方形から代表点 $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ を選ぶ．このとき，

$$R\,(\Delta, \{\, (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \,\}, f) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\,(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

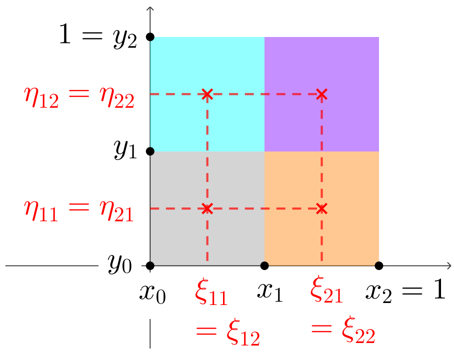
を分割 Δ と代表点集合 $\{\, (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \,\}$ に関する f の **Riemann 和**という．

ここで定義した Riemann 和は下図のように，底面積が $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ で，高さが $f\,(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ の細長い直方体たちの体積を足し合わせたものである．これは $z = f(x,y)$ のグラフと xy 平面と平面 $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$ で囲まれた図形の体積を近似している．ただし，グラフが xy 平面より下にある部分の Riemann 和は負の値である．



簡単な Riemann 和を実際に計算してみよう．

例 7.1. $f(x,y)=x^2+y^2$ とする．下図のように，$\Delta=(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2)=\left(0,\frac{1}{2},1;\ 0,\frac{1}{2},1\right)$ を正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の分割とし，各小長方形 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の中心を (ξ_{ij},η_{ij}) とする．



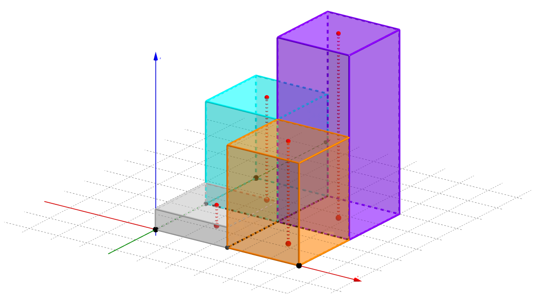
代表点たちの具体的な座標は以下の通りである．

$$(\xi_{11},\eta_{11})=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\quad (\xi_{12},\eta_{12})=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\quad (\xi_{21},\eta_{21})=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),\quad (\xi_{22},\eta_{22})=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$$

この分割 Δ と代表点集合 $\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\}$ に関する関数 $f(x,y)$ の Riemann 和は

$$\begin{aligned}
R\left(\Delta,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f\right)=&\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2}f(\xi_{ij},\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\\
=&f(\xi_{11},\eta_{11})(x_1-x_0)(y_1-y_0)+f(\xi_{12},\eta_{12})(x_1-x_0)(y_2-y_1)\\
&+f(\xi_{21},\eta_{21})(x_2-x_1)(y_1-y_0)+f(\xi_{22},\eta_{22})(x_2-x_1)(y_2-y_1)\\
=&f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+f\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
=&\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{5}{32}+\frac{9}{32}=\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

である．この値は下図の 4 個の直方体の体積の和に等しい．



7.2　2 重積分の定義

f を有界な長方形 $K = [a, b] \times [c, d]$ で有界な 2 変数関数とする．長方形 K の分割

$$\Delta = (x_0, \ldots, x_m;\ y_0, \ldots, y_n)$$

に対し，

$$|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n} \{\, (x_i - x_{i-1}),\ (y_j - y_{j-1}) \,\}$$

とする．$|\Delta| \to 0$ のとき，分割の仕方と代表点集合 $\{\, (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \,\}$ の取り方によらず Riemann 和 $R(\Delta, \{\, (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \,\}, f)$ が一定の値に収束するならば，f は K で **(Riemann) 重積分可能** であるという．このとき，その極限値を以下のように表し，f の K 上の 2 **重積分**という．

$$\iint_K f(x, y)\ dxdy \tag{7.1}$$

2 変数関数が重積分可能であるかどうかを調べるのは 1 変数関数のとき以上に難しいが，1 変数関数のときと同様に，有界な長方形 $[a, b] \times [c, d]$ 上の連続関数は重積分可能であることが知られている．

定理 7.2. 有界な長方形 $K = [a, b] \times [c, d]$ 上連続な 2 変数関数は K で重積分可能である．

2 変数関数 f が有界な長方形 $K = [a, b] \times [c, d]$ で連続であれば，K のいかなる分割 Δ と代表点集合に対しても，$|\Delta| \to 0$ でさえあれば必ず Riemann 和は一定の値に近づき，その値が (7.1) に等しいことをこの定理 7.2 は主張している．

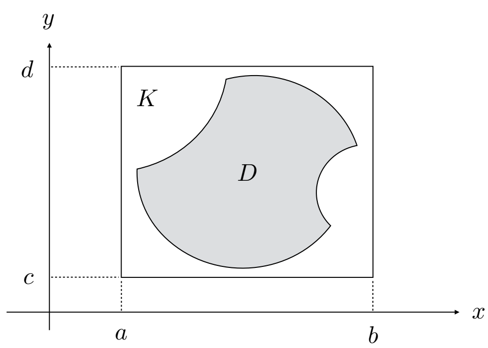
より一般の有界閉領域 D に対しては，下図のように D を含む長方形 $K = [a, b] \times [c, d]$ を 1 つ取り，

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}$$

として，f^* が K 上重積分可能なら f は D 上重積分可能であるとし，

$$\iint_D f(x, y)\ dxdy = \iint_K f^*(x, y)\ dxdy$$

によって f の D 上の 2 重積分を定義する．D 上の重積分の値は D を含む長方形 K の取り方によらない．



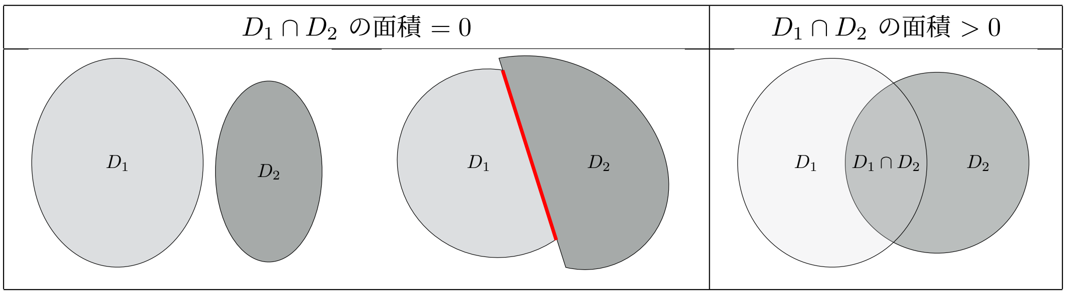
7.3　2 重積分の諸性質

定理 7.3 (2 重積分の線形性)．f, g を有界閉領域 D 上重積分可能な 2 変数関数とする．定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ．

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\ dxdy + \beta \iint_D f(x,y)\ dxdy$$

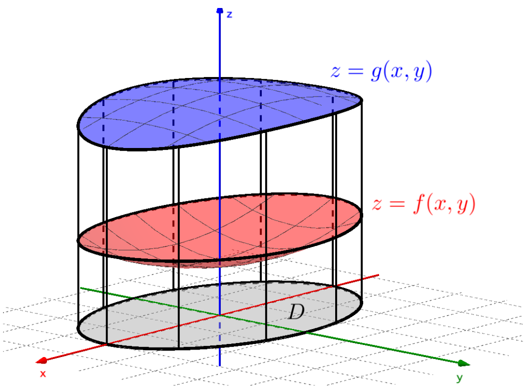
定理 7.4． 2 つの有界閉領域 D_1, D_2 の共通部分 $D_1 \cap D_2$ の面積が 0 のとき，$D_1 \cup D_2$ 上重積分可能な関数 f に対して以下が成り立つ．

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\ dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dxdy$$



定理 7.5． 2 変数関数 f, g が有界閉領域 D 上重積分可能かつ $f(x,y) \leqq g(x,y)$ なら以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \leqq \iint_D g(x,y)\ dxdy$$



定理 7.6． 有界閉領域 D 上重積分可能な 2 変数関数 f に対して以下が成り立つ．

$$\left| \iint_D f(x,y)\ dxdy \right| \leqq \iint_D |f(x,y)|\, dxdy$$

7.4　累次積分による 2 重積分の計算

長方形上の連続関数の 2 重積分は累次積分によって計算できる．

定理 7.7. 長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の連続関数 f に対して以下が成り立つ．

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right)\ dy$$

次節でこの定理 7.7 を拡張し，より一般的な有界閉領域上の 2 重積分の計算方法を与える．

例 7.8.

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} \left(x^2+y^2\right)\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+y^2)\ dy\right)\ dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2}\ dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^2+\frac{8}{3}\right)\ dx = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x\right]_0^1 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

あるいは，次のようにも計算できる．

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} \left(x^2+y^2\right)\ dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\ dx\right)\ dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=0}^{x=1}\ dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+y^2\right)\ dy = \left[\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

例 7.9.

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/3]} \sin(x-y)\ dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/3} \sin(x-y)\ dy\right)\ dx = \int_0^\pi \Big[\cos(x-y)\Big]_{y=0}^{y=\pi/3}\ dx \\ &= \int_0^\pi \left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos x\right)\ dx = \left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x\right]_0^\pi \\ &= \sin\frac{2\pi}{3}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\end{aligned}$$

あるいは，次のようにも計算できる．

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/3]} \sin(x-y)\ dxdy &= \int_0^{\pi/3} \left(\int_0^{\pi} \sin(x-y)\ dx\right)\ dy = \int_0^{\pi/3} \Big[-\cos(x-y)\Big]_{x=0}^{x=\pi}\ dy \\ &= \int_0^{\pi/3} \left(-\cos\left(\pi-y\right)+\cos\left(-y\right)\right)\ dy = \Big[\sin(\pi-y)+\sin y\Big]_0^{\pi/3} \\ &= \sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

7.5　練習問題

次の長方形上の 2 重積分を計算しよう．

(1) $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[1.2]} \left(x^3 - y^2\right)\ dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[-1,0]} e^{2x-3y}\ dxdy$

(3) $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[0,1]} xe^{xy}\ dxdy$

(4) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[1,e]} (\cos x)\log y\ dxdy$

答え：(1) $-\dfrac{14}{3}$　(2) $\dfrac{1-e^2-e^3+e^5}{6}$　(3) e^2-3　(4) 1

7.6　（おまけ）Riemann 和の極限としての 2 重積分

長方形上の 2 重積分の値を Riemann 和の極限として計算する例を挙げておく．

例 7.10. $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \left(x^2+y^2\right)\ dxdy$

正方形 $[0,1]\times[0,1]$ を x 方向と y 方向それぞれ n 等分して得られる分割を

$$\Delta_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n\ ;\ y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

とし，各小正方形 $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$ の中心（対角線の交点）を代表点 (ξ_{ij}, η_{ij}) とする．つまり，

$$x_i = \frac{i}{n},\quad y_j = \frac{j}{n},\quad \xi_{ij} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2},\quad \eta_{ij} = \frac{y_{j-1}+y_j}{2}$$

である．この分割 Δ_n と代表点集合 $\{\,(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\}$ に関する $f(x,y) = x^2+y^2$ の Riemann 和を S_n とする．

$$S_n := R\left(\Delta_n, \{\,(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\}, f\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_{ij}, \eta_{ij}\right)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

f は $[0,1]\times[0,1]$ で連続なので，定理 7.2 からこの S_n は $n\to\infty$ のとき収束し，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y^2)\ dxdy$$

である．各 $x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}$ はいずれも $\dfrac{1}{n}$ であり，$\xi_{ij} = \dfrac{2i-1}{2n}$, $\eta_{ij} = \dfrac{2j-1}{2n}$ なので

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{4n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2i-1)^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(2j-1)^2\right)\\
&= \frac{1}{4n^4}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{1}{2n^4}\sum_{i=1}^{n} n(2i-1)^2 = \frac{1}{4n^4}\sum_{i=1}^{n}\left(4i^2-4i+1\right)\\
&= \frac{1}{2n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2n^3}\left(4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \to \frac{2}{3}\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

である．以上から，$\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y^2)\ dxdy = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$ である．

定数関数 $f(x,y)=C$ は連続関数だが，定理 7.2 に頼ることなく直接 2 重積分を計算できる．

例 7.11. $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} C\ dxdy$

$\Delta=(x_0,\dots,x_m\ ;\ y_0,\dots,y_n)$ を長方形 $[a,b]\times[c,d]$ の分割とし，各小長方形 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の代表点 (ξ_{ij},η_{ij}) を任意に選ぶ．これらに関する $f(x,y)=C$ の Riemann 和は

$$\begin{aligned}
R(\Delta,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_{ij},\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\\
&=C\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j-1})\right)=C\,(x_m-x_0)\,(y_n-y_0)\\
&=C(b-a)(d-c)
\end{aligned}$$

である．よって，分割の仕方と代表点の選び方によらず Riemann 和は一定なので，特に，$|\Delta|\to 0$ における極限値もその一定の値に等しい．よって，以下を得る．

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} C\ dxdy=\lim_{|\Delta|\to 0}R\,(\Delta,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f)=C(b-a)(d-c)$$

8　2 重積分の計算（累次積分）

8.1　縦線集合・横線集合上の 2 重積分

2 重積分の計算は次の定理を使うのが一般的である．この定理の証明はおまけとして 8.4 節で述べる．

定理 8.1. $f(x,y)$ を有界閉領域 D 上連続な 2 変数関数とする．

(1) 実数 a,b と閉区間 $[a,b]$ 上 $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ かつ連続な関数 φ_1, φ_2 によって D が

$$D = \{\, (x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \,\}$$

と表せるとき，$f(x,y)$ は D 上重積分可能で以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx$$

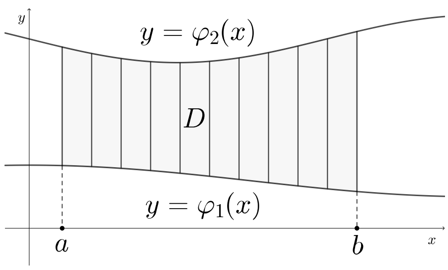
(2) 実数 c,d と閉区間 $[c,d]$ 上 $\psi_1(y) \leqq \psi_2(y)$ かつ連続な関数 ψ_1, ψ_2 によって D が

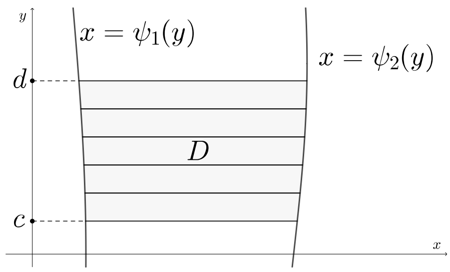
$$D = \{\, (x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y) \,\}$$

と表せるとき，$f(x,y)$ は D 上重積分可能で以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx \right) dy$$

定理 8.1(1) の D を**縦線集合**（左下図）といい，(2) の D を**横線集合**（右下図）という．





例 8.2. $D = \{\, (x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x \,\}$ に対して，$\displaystyle\iint_D (x+y)\ dxdy$ は次のように計算できる．

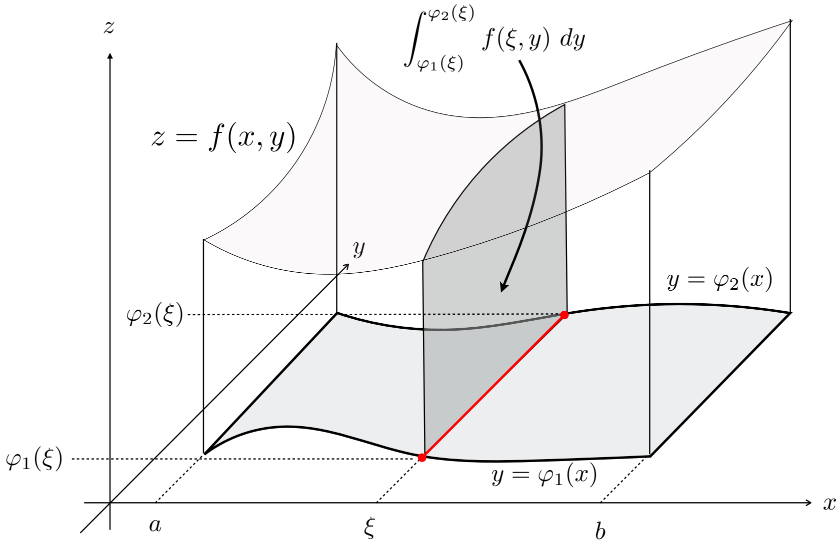
$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\ dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^x (x+y)\ dy \right) dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{3}{2}x^2\ dx = \frac{1}{2}\Big[x^3\Big]_1^2 = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

8.2　定理 8.1 の幾何学的意味

2 変数関数 $f(x,y)$ の有界閉領域 D 上の 2 重積分は，D の境界に沿って伸びる xy 平面に垂直な曲面と xy 平面と $z=f(x,y)$ で囲まれる立体の体積に等しい．ただし，xy 平面よりも下側にある部分の体積は負の値として扱う．定理 8.1 の累次積分の内側に

$$F(x)=\int_{\phi_1(x}^{\phi_2(x)} f(x,y)\ dy,\quad G(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx$$

と名前を付ける．$F(\xi)$ の値は下図のように平面 $x=\xi$ によって立体を切ったときの断面積に等しい．同様に $G(\eta)$ の値は平面 $y=\eta$ で立体を切ったときの断面積に等しい．従って，定理 8.1 は**立体の断面積を積分したものが体積である**ことを主張している．



8.3 練習問題

次の 2 重積分を求めよう.

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\ dxdy, \quad D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq x \leqq y\ \right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy, \quad D=\{\ (x,y) \mid y \leqq x \leqq \sqrt{y}\ \}$

(3) $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy, \quad D=\{\ (x,y) \mid x+y \leqq 2,\ y^2 \leqq x,\ 0 \leqq y\ \}$

(4) $\displaystyle\iint_D \sin\left(\pi x^2\right)\ dxdy, \quad D=\{\ (x,y) \mid y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\ \}$

(5) $\displaystyle\iint_D y\ dxdy, \quad D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ \frac{y}{2} \leqq x \leqq 2y,\ x+y \leqq 1\ \right\}$

(6) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy, \quad D=\{\ (x,y) \mid -2 \leqq x \leqq 1,\ x^2+4x+1 \leqq y \leqq -x^2+2x+1\ \}$

「積分基本問題集 式」(1) ∼ (4), (11), (14), (15) も参考にしてください.

`https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf`

答え：(1) 1　(2) $\dfrac{1}{12}$　(3) $\dfrac{3}{8}$　(4) $\dfrac{1}{\pi}$　(5) $\dfrac{1}{18}$　(6) $-\dfrac{1}{6}$

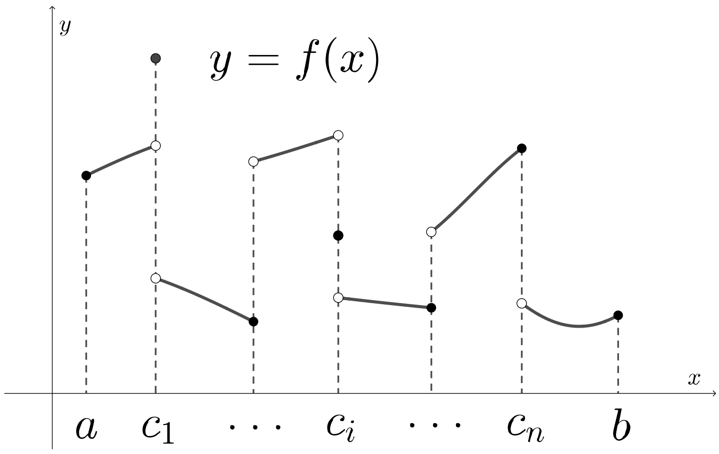
8.4 （おまけ）定理 8.1 の証明

定理 8.1 の (1) を証明する．ただし，f が D 上で重積分可能であることの証明は省略する．

1 変数関数の積分に関する以下の定理 8.3 を使う．

定理 8.3. 有界閉区間で区分的に連続な 1 変数関数はこの区間で積分可能である．

有界閉区間 $[a,b]$ で定義された 1 変数関数 f が有限個の点 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a,b]$ を除いて連続で，各 c_i における左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to c_i-0} f(x)$ と右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to c_i+0} f(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は $[a,b]$ で**区分的に連続**であるという．ただし，両端 a, b では区間の内側からの片側極限のみ存在すればよい．すなわち，a では右側極限が，b では左側極限のみが存在すればよい．区分的に連続な関数は有界である．また，連続関数は区分的に連続である．



有界閉区間 $[a,b]$ で区分的に連続な関数 f の積分は，区分ごとの積分値を足し合わせればよい．つまり，不連続な点 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a,b]$ $(c_1 < c_2 < \cdots < c_n)$ と $c_0 = a,\ c_{n+1} = b$ に対し

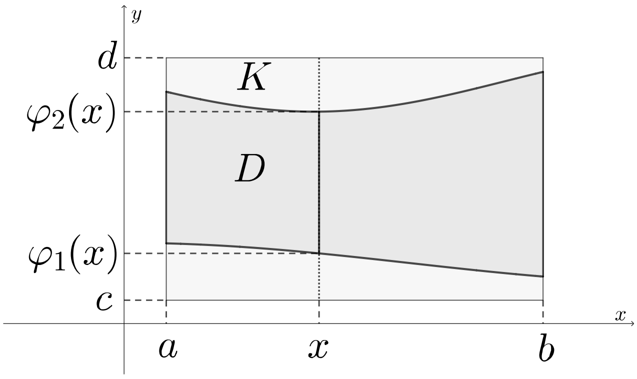
$$f_i(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to c_{i-1}+0} f(x) & (x = c_{i-1}) \\ f(x) & (c_{i-1} < x < c_i) \\ \displaystyle\lim_{x\to c_i-0} f(x) & (x = c_i) \end{cases},\ i =, 1, \ldots, n+1$$

とすれば，各 f_i は $[c_{i-1}, c_i]$ で連続なので以下が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x)\ dx$$

定理 8.1(1) の証明.

下図のように D を含む長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ をとる.



ここで K 上の関数 f^* を

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D) \\ 0 & ((x,y)\notin D) \end{cases}$$

により定める. f は D 上重積分可能（証明略）だから, 有界閉領域上の 2 重積分の定義から f^* は K 上重積分可能で,

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy=\iint_K f^*(x,y)\ dxdy \tag{8.1}$$

である. 任意の $\xi\in[a,b]$ に対して, y の 1 変数関数 $f^*(\xi,y)$ は $[c,d]$ において $\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi)$ を不連続点とする区分的に連続な関数である. 従って, 定理 8.3 より $f^*(\xi,y)$ は $[c,d]$ で積分可能で,

$$\begin{aligned}\int_c^d f^*(\xi,y)\ dy&=\int_c^{\varphi_1(\xi)} f^*(\xi,y)\ dy+\int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f^*(\xi,y)\ dy+\int_{\varphi_2(\xi)}^{d} f^*(\xi,y)\ dy\\&=0+\int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f^*(\xi,y)\ dy+0=\int_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} f(\xi,y)\ dy\end{aligned}$$

である. 従って, 1 変数関数 $F(x)=\displaystyle\int_c^d f^*(x,y)\ dy$ が $[a,b]$ で積分可能で, かつ以下が成り立つことを証明すればよい.

$$\iint_K f^*(x,y)\ dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f^*(x,y)\ dy\right)dx$$

$\Delta=(x_0,\ldots,x_m;\ y_0,\ldots,y_n)$ を長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ の任意の分割とする. x 方向の各小区間 $[x_{i-1},x_i]$ から代表点 ξ_i を任意に選ぶ. y 方向の各小区間 $[y_{j-1},y_j]$ での $f^*(\xi_i,y)$ の最小値を $m_{ij}=f^*(\xi_i,s_{ij})$ とし, 最大値を $M_{ij}=f^*(\xi_i,S_{ij})$ とすると, 各小区間 $[y_{j-1},y_j]$ で $m_{ij}\leqq f^*(\xi_i,y)\leqq M_{ij}$ であるから, 定理 7.5 より

$$m_{ij}(y_j-y_{j-1})\leqq\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i,y)\ dy\leqq M_{ij}(y_j-y_{j-1})$$

である．これが各 i, j で成り立つので以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leqq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y)\ dy\right)(x_i - x_{i-1})\\ &\leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\end{aligned}$$

この不等式の左辺は Δ と $\{\,(\xi_i, s_{ij})\,\}$ に関する f^* の Riemann 和であり，右辺は Δ と $\{\,(\xi_i, S_{ij})\,\}$ に関する f^* の Riemann 和である．また，不等式の中辺は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y)\ dy\right)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{c}^{d} f^*(\xi_i, y)\ dy\right)(x_i - x_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

である．これは区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta_X = (x_0, \ldots, x_m)$ と代表点集合 $\{\,\xi_i\,\}$ に関する 1 変数関数 F の Riemann 和である．よって，以下の不等式が成り立つ．

$$R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, s_{ij})\,\}, f^*\right) \leqq R\left(\Delta_X, \{\,\xi_i\,\}, F\right) \leqq R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, S_{ij})\,\}, f^*\right)$$

f^* は K 上重積分可能なので，$|\Delta| \to 0$ のときこの不等式の左辺と右辺，従って中辺も，(8.1) に収束する．また，$|\Delta| \to 0$ のとき $|\Delta_X| \to 0$ であるから，F は $[a, b]$ で積分可能であり，以下を得る．

$$\begin{aligned}\iint_K f^*(x, y)\ dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0} R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, s_{ij})\,\}, f^*\right) = \lim_{|\Delta|\to 0} R\left(\Delta, \{\,(\xi_i, S_{ij})\,\}, f^*\right)\\ &= \lim_{|\Delta_X|\to 0} R\left(\Delta_X, \{\,\xi_i\,\}, F\right) = \int_a^b F(x)\ dx\\ &= \int_a^b\left(\int_c^d f^*(x, y)\ dy\right)dx\end{aligned}$$

□

9　2 重積分の計算（変数変換）

偏微分可能な 2 変数関数 φ, ψ による変数変換 $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ に対して，u, v に関する 2 変数関数

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \ \Big(= \varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u \Big)$$

をこの変換の Jacobian という．Jacobian は以下のように書かれることもある．

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

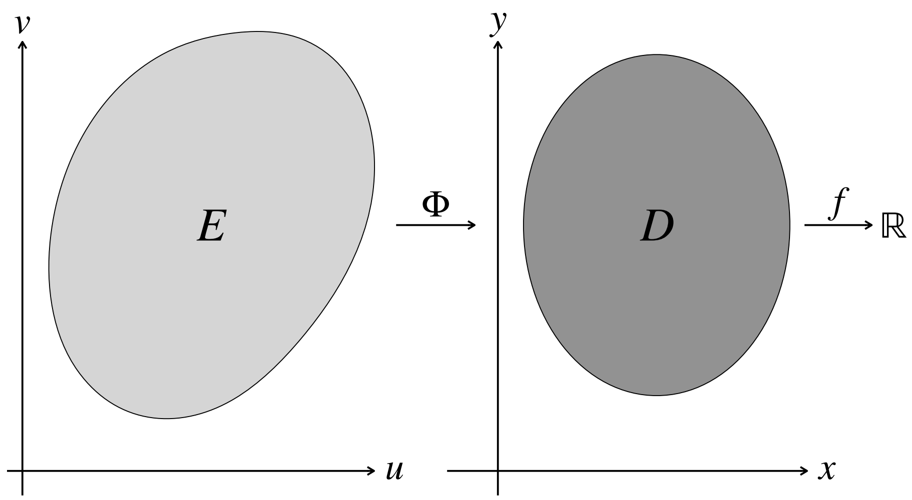
9.1　変数変換の公式

定理 9.1. uv 平面の閉領域 E から xy 平面の閉領域 D への 1 対 1 の変数変換（全単射）

$$\Phi : \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \qquad \big(\varphi, \psi \text{ は } C^1 \text{ 級} \big)$$

の Jacobian を $J(u,v)$ とし，全ての $(u,v) \in E$ に対して $J(u,v) \neq 0$ とする．このとき D 上積分可能な連続関数 $f(x,y)$ に対して以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_E f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) |J(u,v)|\, dudv \tag{9.1}$$



例 9.2. 次の重積分の計算に定理 9.1 を適用してみよう．

$$\iint_D x^2\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y) \mid \ |x+2y| \leqq 1,\ |x-y| \leqq 1\ \}$$

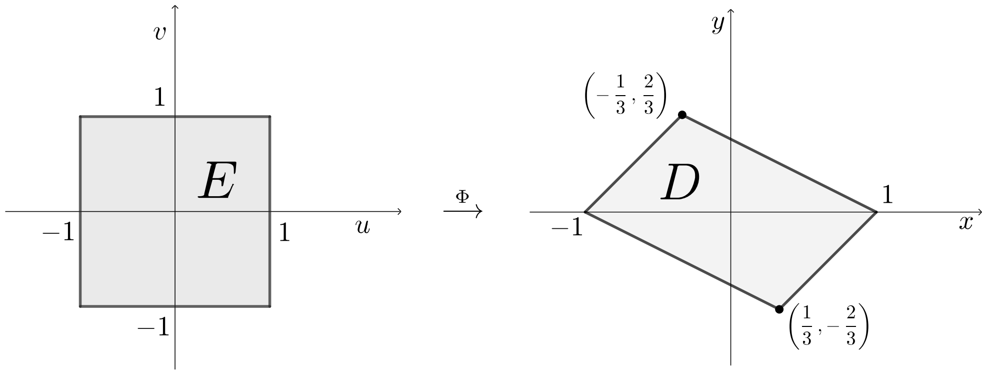
$u = x + 2y,\ v = x - y$ とおく．すなわち，変数変換

$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v \end{cases}$$

を考える．Φ は下図のように uv 平面の閉領域

$$E = \{\ (u,v) \mid -1 \leqq u \leqq 1,\ -1 \leqq v \leqq 1\ \}$$

から xy 平面の閉領域 D への 1 対 1 の写像である．



変数変換 Φ の Jacobian は

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

であるから，$(u,v) \in E$ に対して $J(u,v) \neq 0$ である．よって，定理 9.1 より以下を得る．

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2\ dxdy &= \iint_E \left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\right)^2 |J(u,v)|\ dudv = \iint_E \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\right)^2 dudv \\
&= \frac{1}{27}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(u+2v)^2\,du\right)dv = \frac{1}{27}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(u+2v)^3\right]_{u=-1}^{u=1} dv \\
&= \frac{1}{81}\int_{-1}^{1}\left((2v+1)^3 - (2v-1)^3\right)dv = \frac{1}{81}\left[\frac{(2v+1)^4}{8} - \frac{(2v-1)^4}{8}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{20}{81}
\end{aligned}$$

注意. 定理 9.1 の最後の等式 (9.1) は, 変数変換 Φ が E の面積 0 の部分集合 N を除いて 1 対 1 で, $(u,v) \notin N$ に対して $J(u,v) \neq 0$ であれば成立する.

例えば, 正の実数 R に対し極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

は下図のように $r\theta$ 平面の閉領域

$$E = \{\, (r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq R,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$$

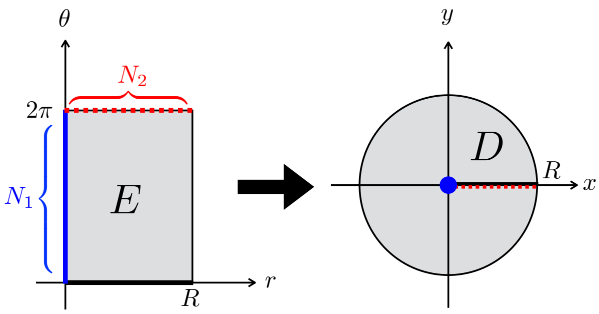
から xy 平面の閉領域

$$D = \left\{\, (x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq R^2 \,\right\}$$

への変換を与えるが, これは 1 対 1 の対応ではない. しかしながら,

$$N = \{\, (r,\theta) \in E \mid r = 0 \,\} \cup \{\, (r,\theta) \mid \theta = 2\pi \,\}$$

とおけば, N は E の面積 0 の部分集合であり, 極座標変換は $E - N$ から $D - \{\, (0,0) \,\}$ への 1 対 1 の対応（全単射）を与える.



$N = N_1 \cup N_2$

このとき, 極座標変換の Jacobian は

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であるから, $(r,\theta) \notin N$ ならば $J(r,\theta) \neq 0$ である. 従って, D 上重積分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_E f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r\ drd\theta$$

9.2 練習問題

次の 2 重積分を求めよう．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\ dxdy, \quad D = \{\,(x, y) \mid 1 \leqq x + y \leqq 2,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\,\}$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy, \quad D = \left\{\,(x, y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9\,\right\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy, \quad D = \left\{\,(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq y \leqq x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x\,\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\ dxdy, \quad D = \left\{\,(x, y) \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 1\,\right\}$

(5) $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy, \quad D = \left\{\,(x, y) \;\middle|\; \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\,\right\}$

「積分基本問題集 弐」(5) ∼ (10), (12), (13) も参考にしてください．

`https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf`

答え：(1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\pi\left(e^{-1} - e^{-9}\right)$ (3) $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2}{9}$ (4) $\dfrac{39\pi}{2}$ (5) $\dfrac{1}{280}$

10　広義 2 重積分

有界閉領域とは限らない集合上の有界とは限らない関数の 2 重積分を定義する.

10.1　増加近似列

有界閉領域でない集合 D 上の 2 重積分は，D に近づく有界閉領域上の 2 重積分の極限として定義する．そこで，まず「集合 D に近づく」ということを正確に定義する.

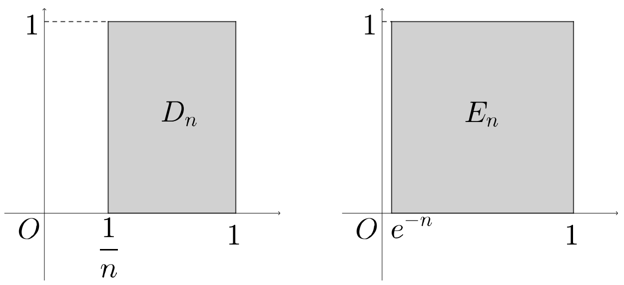
定義. $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し，以下を満たす有界閉領域の列 $\{ D_n \}$ を D の**増加近似列**という.

(1) $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \subset D$
(2) 任意の有界閉領域 $K \subset D$ に対して，十分大きな自然数 n を選べば $K \subset D_n$ となる.

例 10.1. 自然数 n に対して（D_n に関しては $n \geqq 2$ とする）

$$D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times [0,1], \quad E_n = \left[e^{-n}, 1\right] \times [0,1]$$

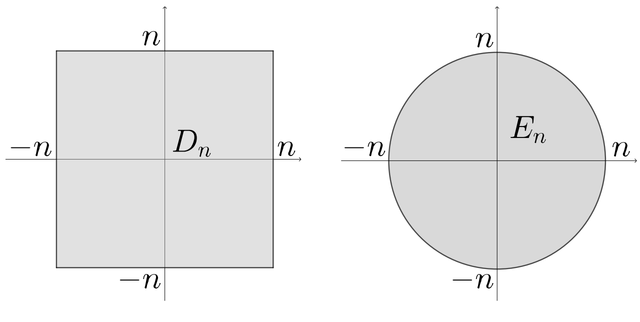
とすると，$\{ D_n \}$ と $\{ E_n \}$ はいずれも $D = (0,1] \times [0,1]$ の増加近似列である.



例 10.2. 自然数 n に対して

$$D_n = [-n, n] \times [-n, n], \quad E_n = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq n^2 \right\}$$

とすると，$\{ D_n \}$ と $\{ E_n \}$ はいずれも $\mathbb{R}^2$ の増加近似列である.



10.2　広義 2 重積分の定義

定義. f を $D \subset \mathbb{R}^2$ 上定義された 2 変数関数とし，D に含まれる任意の有界閉領域上有界とする．このとき，D のどんな増加近似列 $\{ D_n \}$ に対しても f が各 D_n 上重積分可能で，増加近似列 $\{ D_n \}$ によらず極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\ dxdy$$

が一定の値に収束するとき，f は D 上**広義重積分可能**であるといい，その極限値を

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy$$

と書き，f の D 上の**広義 2 重積分**という．上の極限が存在するとき広義 2 重積分は**収束する**といい，極限が存在しなかったり増加近似列によって値が変わるときは**発散する**という．

定理 10.3. f を集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数とする．任意の $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) \geqq 0$ であるとき，D のどれか 1 つの増加近似列 $\{ D_n \}$ に対して極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\ dxdy$$

が収束するなら，f の D 上の広義 2 重積分はこの極限値に収束する．

証明. $\{ E_n \}$ を D の任意の増加近似列とし，数列 $\{ I_n \}$, $\{ J_n \}$ を以下のように定める．

$$I_n := \iint_{D_n} f(x,y)\ dxdy, \qquad J_n := \iint_{E_n} f(x,y)\ dxdy$$

仮定から数列 $\{ I_n \}$ は収束するので，その極限値を I とする．D 上で $f(x,y) \geqq 0$ なので，いずれの数列も単調増加である．また，増加近似列の定義から各 E_n に対して十分大きな自然数 N で $E_n \subset D_N$ となるので $J_n \leqq I_N \leqq I$ である．従って，$\{ J_n \}$ は上に有界で単調増加なので収束し，その極限値を J とすれば $J \leqq I$ である．$\{ I_n \}, \{ J_n \}$ の役割を入れ替えて，同様の議論から $I \leqq J$ が得られる．よって，$I = J$ である．　□

注意. 任意の $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) \leq 0$ であるときも上と同様の定理が成り立つ．

例 10.4. 次の広義 2 重積分を計算しよう．

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}}\ dxdy, \qquad D = (0,1] \times [0,1]$$

D において $\dfrac{y}{\sqrt{x}} > 0$ だから，定理 10.3 より D の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい．例 10.1 で見たように，自然数 $n \geqq 2$ に対して $D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times [0,1]$ とすれば $\{ D_n \}$ は D の増加近似列であり，

$$\iint_{D_n} \frac{y}{(x+y)^2}\ dxdy = \int_0^1 \left(y \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) dy = \int_0^1 y \Big[2\sqrt{x} \Big]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} dy = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \int_0^1 2y\ dy$$
$$= 1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \to 1\ (n \to \infty)$$

なので，定理 10.3 から $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}}\ dxdy = 1$ である．

10.3　練習問題

(1) $\displaystyle \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2<1 \right\}$

(2) $\displaystyle \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad D = \{ (x,y) \mid 0<x \leqq 1,\, 0 \leqq y \leqq x \}$

(3) $\displaystyle \iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\, dxdy,\quad D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 2,\, 0<x,\, 0 \leqq y \right\}$

「積分基本問題集 弐」(16) ∼ (24) も参考にしてください.

https://github.com/kazutsumi/Integral2/blob/main/integral2.pdf

答え：(1) 2π　(2) $\log\left(1+\sqrt{2}\right)$　(3) $\dfrac{\pi^2}{8}$

10.4 （おまけ）広義 2 重積分の収束・発散

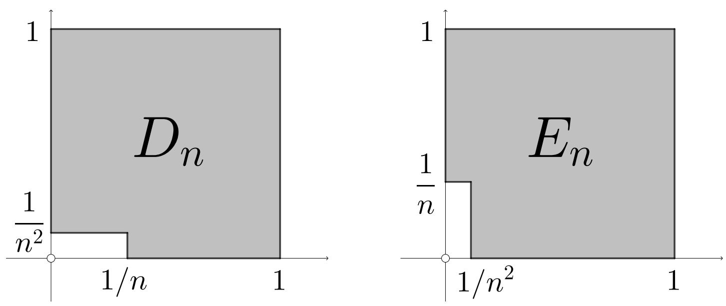
増加近似列の選び方によって極限値が異なるとき広義積分は発散すると定義した．例として

$$D = [0,1] \times [0,1] - \{(0,0)\} = \{\, (x,y) \ \mid\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0) \,\}$$

に対し，以下の広義 2 重積分を考えてみる．

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy$$

D_n, E_n $(n \geqq 2)$ を下図のような閉領域とすると，$\{\, D_n \,\}$ と $\{\, E_n \,\}$ はいずれも D の増加近似列である．



$D_n = D - \left(\left[0, \frac{1}{n}\right) \times \left[0, \frac{1}{n^2}\right)\right)$　　　$E_n = D - \left(\left[0, \frac{1}{n^2}\right) \times \left[0, \frac{1}{n}\right)\right)$

このとき，以下のように増加近似列の選び方によって極限値が異なる．

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} \left[\frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=\frac{1}{n^2}}^{y=1} dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1/n^2}{(x+1/n^2)^2} \right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+1/n} \to -\frac{1}{2}\ (n \to \infty) \\
\iint_{E_n} \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \right) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left[\frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=\frac{1}{n}}^{1} dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \left[\frac{y}{(x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1/n}{(x+1/n)^2} \right) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{dx}{(x+1)^2}\ dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{2}\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

これより広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy$ は発散する．

先程の例のように，広義 2 重積分

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \tag{10.1}$$

において，D で $f(x,y)>0$ となることも $f(x,y)<0$ となることもある場合は定理 10.3 は使えず，1 個の増加近似列に関する極限を調べるだけでは不十分であり，あらゆる増加近似列に対して同じ極限値に収束するかどうかを調べる必要がある．このような場合は，まず被積分関数 f に対して

$$f_+(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & (f(x,y) \geqq 0) \\ 0 & (f(x,y) \leqq 0) \end{cases} \qquad f_-(x,y) := \begin{cases} 0 & (f(x,y) \geqq 0) \\ -f(x,y) & (f(x,y) \leqq 0) \end{cases} \tag{10.2}$$

として，$f(x,y)$ を

$$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$$

と分ける．D 上で $f_+(x,y) \geqq 0$, $f_-(x,y) \geqq 0$ なので，定理 10.3 から広義 2 重積分

$$\iint_D f_+(x,y)\ dxdy, \qquad \iint_D f_-(x,y)\ dxdy \tag{10.3}$$

の収束・発散はそれぞれ D の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい．これらのいずれもが収束するとき，広義 2 重積分 (10.1) は収束し，以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_D f_+(x,y)\ dxdy - \iint_D f_-(x,y)\ dx$$

一方，(10.3) のどちらか一方でも発散すれば広義積分 (10.1) は発散する．以上を定理としてまとめる．

定理 10.5. 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dxdy$ の収束に関して次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \text{ は収束する} \quad\Longleftrightarrow\quad \iint_D f_+(x,y)\ dxdy,\ \iint_D f_-(x,y)\ dxdy \text{ が共に収束する}$$

さらに，広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dxdy$ が収束するとき，以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_D f_+(x,y)\ dxdy - \iint_D f_-(x,y)\ dxdy$$

なお，広義 2 重積分の収束・発散を判定するのみであれば，次の定理を根拠として $|f(x,y)|$ の広義 2 重積分の収束・発散を定理 10.3 を使って判定してもよい．

定理 10.6. 広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dxdy$ の収束に関して次が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \text{ は収束する} \quad\Longleftrightarrow\quad \iint_D |f(x,y)|\ dxdy \text{ は収束する}$$

特に，広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\ dxdy$ が収束するとき，以下が成り立つ．

$$\iint_D |f(x,y)|\ dxdy = \iint_D f_+(x,y)\ dxdy + \iint_D f_-(x,y)\ dxdy$$

前々ページで例として挙げた，以下の広義 2 重積分の収束・発散を定理 10.5 を使って判定してみる．

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy \qquad D = \{\,(x,y)\ \mid\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0)\,\}$$

被積分関数に $f(x,y)$ と名前をつければ，(10.2) の f_+, f_- はそれぞれ

$$f_+(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & (x \geqq y) \\ 0 & (x \leqq y) \end{cases} \qquad f_-(x,y) = \begin{cases} 0 & (x \geqq y) \\ -\dfrac{x-y}{(x+y)^3} & (x \leqq y) \end{cases}$$

である．そこで，

$$D^+ := D \cap \{\,(x,y)\ \mid\ x \geqq y\,\} \qquad D^- := D \cap \{\,(x,y)\ \mid\ x \leqq y\,\}$$

とすれば，$D = D^+ \cup D^-$ であり，$D^+ \cap D^-$ の面積は 0 なので

$$\iint_D f^+(x,y)\,dxdy = \iint_{D^+} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy + \iint_{D^-} 0\,dxdy = \iint_{D^+} f(x,y)\,dxdy$$
$$\iint_D f^-(x,y)\,dxdy = \iint_{D^+} 0\,dxdy + \iint_{D^-} -\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy = -\iint_{D^-} f(x,y)\,dxdy$$

である．従って，D^+, D^- 上での $f(x,y)$ の広義 2 重積分の収束・発散を調べればよい．

まず，D^+ 上での $f(x,y)$ の広義 2 重積分の収束・発散を調べる．D^+ 上で $f(x,y) \geqq 0$ であり，

$$D_n^+ := \left\{\,(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\,\right\}\ (n \geqq 2)$$

とすれば $\{\,D_n^+\,\}$ は D^+ の増加近似列なので，定理 10.3 から極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n^+} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$$

が収束するか $+\infty$ に発散するかを判定すればよい．

$$\begin{aligned}\iint_{D_n^+} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{4x} \\ &= \frac{\log n}{4} \to +\infty\ (n \to \infty)\end{aligned}$$

なので，広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D^+} f(x,y)\,dxdy$ は発散する．よって，D^- 上の広義 2 重積分を調べるまでもなく，定理 10.5 から広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$ は発散することがわかる．

ちなみに，D^- 上の広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D^-} f(x,y)\,dxdy$ も $+\infty$ に発散することが同様の計算で確かめられる．

11　Gauss 積分と誤差関数

11.1　Gauss 積分

以下の広義積分は **Gauss 積分**と呼ばれる．この値を広義 2 重積分を使って求める．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

まず，この広義積分 I が収束することを確認しておく．開区間上の広義積分の定義に従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \tag{11.1}$$

と分けて，右辺の 2 個の広義積分がいずれも収束することを示す．ここで，$u = -x$ としての置換積分により

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\ dx = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} e^{-x^2}\ dx = \lim_{c \to -\infty} \int_{-c}^{0} -e^{-u^2}\ du = \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{-c} e^{-x^2}\ dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \tag{11.2}$$

なので，(11.1) の右辺第 2 項が収束することを示せばよい．さらに，

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\ dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \tag{11.3}$$

と分ければ，この右辺第 1 項は通常の積分なので第 2 項が収束することを示せばよい．$x \in [1, \infty)$ に対して

$$\left| e^{-x^2} \right| = e^{-x^2} \leqq x e^{-x^2}$$

である．さらに，この最右辺の $[1, \infty)$ 上の広義積分は以下のように収束する．

$$\int_{1}^{\infty} x e^{-x^2}\ dx = \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} x e^{-x^2}\ dx = \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{1}^{c} = \lim_{c \to \infty} \frac{e^{-1} - e^{-c^2}}{2} = \frac{e^{-1}}{2}$$

よって，(11.3) の右辺第 2 項の広義積分は収束するので，Gauss 積分は収束する．

上記の通り Gauss 積分は収束するので，以下が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx$$

なお，一般には

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \text{ と } \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f(x)\ dx$$

は別物だが，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ が収束するなら，両者は等しい．従って，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \right)^2 &= \left(\lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx \right)^2 = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx \right)^2 \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx \right) \left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\ dy \right) = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\ dx \right) dy \qquad (11.4) \\
&= \lim_{n \to \infty} \iint_{[-n,n]\times[-n,n]} e^{-x^2-y^2}\ dxdy
\end{aligned}$$

ここで，$D_n = [-n,n] \times [-n,n]$ とおけば，$\{\, D_n \,\}$ は $\mathbb{R}^2$ の増加近似列である．任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $e^{-x^2-y^2} > 0$ なので，(11.4) から以下が成り立つ．

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dxdy \tag{11.5}$$

この右辺の広義 2 重積分の値を求める．これが収束することは既にわかっているので，$\mathbb{R}^2$ の増加近似列として計算しやすいものを選べばよい．

$$E_n = \{\, (x,y) \;\mid\; x^2 + y^2 \leqq n^2 \,\}$$

とすれば，$\{\, E_n \,\}$ は $\mathbb{R}^2$ の増加近似列なので

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} \, dxdy$$

である．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって，$r\theta$ 平面の閉領域

$$F_n = \{\, (r,\theta) \;\mid\; 0 \leqq r \leqq n,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \,\}$$

が xy 平面の E_n に変換される．極座標変換の Jacobian は $J(r,\theta) = r$ なので，

$$\begin{aligned}\iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} \, dxdy &= \iint_{F_n} e^{-r^2} |J(r,\theta)| \, drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n re^{-r^2} \, dr \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^n re^{-r^2} \, dr \right) = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^n = \pi \left(1 - e^{-n^2} \right)\end{aligned}$$

である．よって，以下を得る．

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dxdy = \lim_{n\to\infty} \pi \left(1 - e^{-n^2} \right) = \pi$$

これと (11.4) から $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \pi$ であり，明らかに $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx > 0$ なので，Gauss 積分の値は

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}} \tag{11.6}$$

である．さらに，(11.1) と (11.2) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

なので，(11.6) と合わせて以下も得られる．

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \tag{11.7}$$

次に紹介する誤差関数 $\displaystyle \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ に $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ という定数が含まれているのはこの (11.7) が理由である．つまり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf} x = 1$ となって欲しいからである．

11.2　誤差関数

$\mathbb{R}$ 上定義された次の関数は**誤差関数 (error function)** と呼ばれる．

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\ dt$$

定義とガウス積分に関する結果 (11.7) から以下が直ちにわかる．

$$\operatorname{erf} 0 = 0, \quad \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{erf} x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{erf} x = -1 \tag{11.8}$$

また，微分積分学の基本定理から

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

である．つまり，以下の積分の公式が得られる．なお，積分定数は省略している．

$$\int e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} x \tag{11.9}$$

初等関数の組み合わせでは表せない e^{-x^2} の原始関数が誤差関数を用いて表せているが，実際には e^{-x^2} の原始関数（の定数倍）に誤差関数という名前を付けただけである．

例 11.1. これまで扱いづらかった不定積分を erf を使って表すこともできる．

$$\int x^2 e^{-x^2}\ dx = \int x \cdot x e^{-x^2}\ dx = x\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) + \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2} x e^{-x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf} x$$

11.3　正規分布の累積分布関数と誤差関数

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 f_{μ,σ^2} は次の式で与えられる．なお，$\exp(X) = e^X$ である．

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X が $a \leqq X \leqq b$ である確率 $P_{\mu,\sigma^2}(a \leqq X \leqq b)$ は

$$P_{\mu,\sigma^2}(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx$$

である．特に，正規分布の累積分布関数，つまり $X \leqq x$ である確率 $P_{\mu,\sigma^2}(X \leqq x)$ は広義積分として

$$P_{\mu,\sigma^2}(X \leqq x) = \int_{-\infty}^x f_{\mu,\sigma^2}(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dt$$

と書ける．これを誤差関数 erf で表してみる．変数変換

$$u = \frac{t-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \ \left(\Leftrightarrow t = \mu + \sqrt{2\sigma^2}\ u\right)$$

による置換積分によって，$P_{\mu,\sigma^2}(X \leqq x)$ は次のように書き換えられる．

$$P_{\mu,\sigma^2}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}} e^{-u^2}\ du = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{erf} u\Big]_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \tag{11.10}$$

特に $\mu = 0,\ \sigma = 1$ のとき，つまり標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数は次のように書ける．

$$P_{0,1}(X \leqq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

確率・統計の書籍では標準正規分布表として，この $P_{0,1}(X \leqq x)$ の値，あるいは $P_{0,1}(0 \leqq X \leqq x)$ の値の表が巻末に載っていることが多い．ここで，

$$P_{0,1}(x_1 \leqq X \leqq x_2) = P_{0,1}(X \leqq x_2) - P_{0,1}(X \leqq x_1), \quad P_{0,1}(X \leqq 0) = \frac{1}{2}$$

より，$x \geqq 0$ のときはこれらの間に

$$P_{0,1}(X \leqq x) = P_{0,1}(0 \leqq X \leqq x) + \frac{1}{2}$$

という関係があるので，$P_{0,1}(X \leqq x)$ と $P_{0,1}(0 \leqq X \leqq x)$ の一方から他方の値は分かる．さらに，(11.10) から

$$\operatorname{erf} x = 2P_{0,1}\left(X \leqq \sqrt{2}x\right) - 1 = 2P_{0,1}\left(0 \leqq X \leqq \sqrt{2}x\right)$$

なので，erf の値は標準正規分布表から読み取れるし，逆に erf から標準正規分布表を自作することもできる．

例 11.2 (**正規分布の平均**)．正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の平均（期待値）は以下の広義積分で定義される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx$$

これが μ に等しいことは，変数変換

$$u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \ \left(\Leftrightarrow x = \mu + \sqrt{2\sigma^2}\ u\right) \tag{11.11}$$

での置換積分とガウス積分 (11.6) から以下のように確かめられる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mu + \sqrt{2\sigma^2}\ u\right) e^{-u^2} du = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2} du}_{=0} = \mu$$

例 11.3 (**正規分布の分散**)．正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の分散は以下の広義積分で定義される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx$$

これが σ^2 に等しいことは，変数変換 (11.11) での置換積分と例 11.1 の結果および (11.8) から以下のように確かめられる．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma^2}(x) dx &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2}\ du = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} u^2 e^{-u^2}\ du \\ &= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2} u e^{-u^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf} u\right]_0^c = \sigma^2 \lim_{c\to\infty} \operatorname{erf} c = \sigma^2\end{aligned}$$