

11 Gauss 積分と誤差関数

11.1 Gauss 積分

以下の広義積分は **Gauss 積分** と呼ばれる。この値を広義 2 重積分を使って求める。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

まず、この広義積分 I が収束することを確認しておく。開区間上の広義積分の定義に従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (11.1)$$

と分けて、右辺の 2 個の広義積分がいずれも収束することを示す。ここで、 $u = -x$ としての置換積分により

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_{-c}^0 -e^{-u^2} du = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^{-c} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (11.2)$$

なので、(11.1) の右辺第 2 項が収束することを示せばよい。さらに、

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (11.3)$$

と分ければ、この右辺第 1 項は通常の積分なので第 2 項が収束することを示せばよい。 $x \in [1, \infty)$ に対して

$$|e^{-x^2}| = e^{-x^2} \leq xe^{-x^2}$$

である。さらに、この最右辺の $[1, \infty)$ 上の広義積分は以下のように収束する。

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c xe^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_1^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-1} - e^{-c^2}}{2} = \frac{e^{-1}}{2}$$

よって、(11.3) の右辺第 2 項の広義積分は収束するので、Gauss 積分は収束する。

上記の通り Gauss 積分は収束するので、以下が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-x^2} dx$$

なお、一般には

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ と } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx$$

は別物だが、広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ が収束するなら、両者は等しい。従って、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left(\int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy \quad (11.4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{[-n,n] \times [-n,n]} e^{-x^2-y^2} dxdy \end{aligned}$$

ここで, $D_n = [-n, n] \times [-n, n]$ とおけば, $\{D_n\}$ は \mathbb{R}^2 の増加近似列である. 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $e^{-x^2-y^2} > 0$ なので, (11.4) から以下が成り立つ.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy \quad (11.5)$$

この右辺の広義 2 重積分の値を求める. これが収束することは既にわかっているので, \mathbb{R}^2 の増加近似列として計算しやすいものを選べばよい.

$$E_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

とすれば, $\{E_n\}$ は \mathbb{R}^2 の増加近似列なので

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

である. 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって, $r\theta$ 平面の閉領域

$$F_n = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

が xy 平面の E_n に変換される. 極座標変換の Jacobian は $J(r, \theta) = r$ なので,

$$\begin{aligned} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \iint_{F_n} e^{-r^2} |J(r, \theta)| drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n r e^{-r^2} dr \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^n r e^{-r^2} dr \right) = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^n = \pi (1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

である. よって, 以下を得る.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-n^2}) = \pi$$

これと (11.4) から $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$ であり, 明らかに $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx > 0$ なので, Gauss 積分の値は

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} \quad (11.6)$$

である. さらに, (11.1) と (11.2) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

なので, (11.6) と合わせて以下も得られる.

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad (11.7)$$

次に紹介する誤差関数 $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ に $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ という定数が含まれているのはこの (11.7) が理由である. つまり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf} x = 1$ となって欲しいからである.

11.2 誤差関数