1. (1) $D = \{ \ (x, y) \ \mid \ x + y \leqq 1, \ 0 \leqq x, \ 0 \leqq y \ \}$ とすれば

$$V = \{ \ (x, y, z) \ \mid \ (x, y) \in D, \ 0 \leqq z \leqq x \ \}$$

と書けるので，以下のように計算できる．

$$\iiint_V y \ dxdydz = \iint_D \left(\int_0^x y \ dz \right) dxdy = \iint_D y \Big[z \Big]_{z=0}^{z=x} dxdy = \iint_D xy \ dxdy$$
$$= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} y \ dy \right) dx = \frac{1}{24}$$

(2) $D = \{ \ (x, y) \ \mid \ 0 \leqq x \leqq y \leqq 1 \ \}$ とすれば

$$V = \{ \ (x, y) \ \mid \ (x, y) \in D, \ 0 \leqq z \leqq x + y \ \}$$

と書けるので，以下のように計算できる．

$$\iiint_V x \ dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{x+y} x \ dz \right) \ dxdy = \iint_D x \Big[z \Big]_{z=0}^{z=x+y} dxdy$$
$$= \iint_D \left(x^2 + xy \right) \ dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(x^2 + xy \right) \ dy \right) dx = \frac{5}{24}$$

(3) V は上に凸で点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする回転放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と xy 平面（つまり $z = 0$）に囲まれた立体なので，$(x, y, z) \in V$ のとき，$x^2 + y^2 \leqq 1$ である．従って，$D = \left\{ \ (x, y) \ \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \ \right\}$ とすれば

$$V = \left\{ \ (x, y, z) \ \mid \ (x, y) \in D, \ 0 \leqq z \leqq 1 - x^2 - y^2 \ \right\}$$

と書けるので，極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を適宜使いながら以下のように計算できる．

$$\iiint_V xz \ dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2} xz \ dz \right) dxdy = \iint_D x \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} dxdy$$
$$= \frac{1}{2} \iint_D x \left(1 - x^2 - y^2 \right)^2 \ dxdy$$
$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \ d\theta \right)}_{=0} \left(\int_0^1 r^2 \left(1 - r^2 \right) \ dr \right) = 0$$

実は，積分範囲を $x \geqq 0$ の部分 V^+ と $x \leqq 0$ の部分 V^- に分ければ被積分関数の対称性から

$$\iiint_{V^-} xz \ dxdydz = - \iiint_{V^+} xz \ dxdydz$$

なので，詳しく計算するまでもなく以下のようにすぐに結果がわかる．

$$\iiint_V xz \ dxdydz = \iiint_{V^+} xz \ dxdydz + \iint_{V^-} xz \ dxdydz = 0$$

(4) V は平面 $x+y+z=1$ で空間を 2 分割したときの原点 O を含む側であって，x 座標，y 座標，z 座標のいずれもが 0 以上の部分である．この平面 $x+y+z=1$ は 3 点 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$ を通る平面なので，V は四面体 OABC の内側である．従って，$D=\{\,(x,y)\ \mid\ x+y\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\,\}$ とすれば

$$V=\{\,(x,y,z)\ \mid\ (x,y)\in D,\ 0\leqq z\leqq 1-x-y\,\}$$

と書けるので，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\iiint_V xy\ dxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xy\ dz\right)\ dxdy = \iint_D xy\Big[z\Big]_{z=0}^{z=1-x-y}\ dxdy\\ &= \iint_D xy(1-x-y)\ dxdy = \int_0^1 x\left(\int_0^{1-x}\left(y-xy-y^2\right)\ dy\right)dx = \frac{1}{120}\end{aligned}$$

(5) $(x,y,z)\in V$ のとき，各座標の符号を反転させた以下の 7 点も V の点である．

$$(-x,y,z),\ (x,-y,z),\ (x,y,-z),\ (-x,-y,z),\ (x,-y,-z),\ (-x,y,-z),\ (-x,-y,-z)$$

さらに，被積分関数 x^2 は $(x,y,z)\in V$ と上記 7 点のいずれにおいても同じ値をとるので，V の $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ の部分に V^+ と名前をつければ以下が成り立つ．

$$\iiint_V x^2\ dxdydz = 8\iiint_{V^+} x^2\ dxdydz$$

V^+ は前問 (4) の V と同じ集合なので，$D=\{\,(x,y)\ \mid\ x+y\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\,\}$ によって

$$V^+=\{\,(x,y,z)\ \mid\ (x,y)\in D,\ 0\leqq z\leqq 1-x-y\,\}$$

と書ける．よって，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\iiint_V x^2\ dxdydz &= 8\iint_D \left(\int_0^{1-x-y} x^2\ dz\right)\ dxdy = 8\iint_D x^2\Big[z\Big]_{z=0}^{z=1-x-y}\ dxdy\\ &= 8\iint_D x^2\left(1-x-y\right)\ dxdy = 8\int_0^1 x^2\left(\int_0^{1-x-y}(1-x-y)\,dy\right)dx = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

2. (1) 以下の変数変換で $W=\{\,(u,v,w)\ \mid\ 0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq 2,\ 0\leqq w\leqq 1\,\}$ が V に変換される．

$$\begin{cases}u=x+2y\\ v=y+z\\ w=z-3x\end{cases}\quad\left[\Leftrightarrow\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-3&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}\right]$$

この変換の Jacobian は

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}x_u&x_v&x_w\\y_u&y_v&y_w\\z_u&z_v&z_w\end{vmatrix}=\left|\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-3&0&1\end{bmatrix}^{-1}\right|=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-3&0&1\end{vmatrix}^{-1}=(-5)^{-1}=-\frac{1}{5}$$

なので，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\iiint_V (x+y)(y+z)(z-3x)\ dxdydz &= \iiint_W uvw\,|J(u,v,w)|\ dudvdw\\ &= \frac{1}{5}\left(\int_0^1 u\ du\right)\left(\int_0^2 v\ dv\right)\left(\int_0^1 w\ dw\right)=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

(2) 3 次元の極座標変換 $x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi$ によって

$$W = \left\{ (r,\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$$

が V に変換される．変換の Jacobian は

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi$$

なので，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz &= \iiint_W r\ |J(r,\theta,\varphi)|\ drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^3\ dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) = \pi\end{aligned}$$

(3) 前問 (2) と同じ極座標変換を使う．W も $J(r,\theta,\varphi)$ も前問と同じものである．

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\ dxdydz &= \iiint_W \sqrt{1-r^2}\ |J(r,\theta,\varphi)|\ drd\theta d\varphi \\ &= \left(\underline{\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\ dr}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

波線部は $r = \sin\theta\ \left(\Leftrightarrow \theta = \sin^{-1} r\right)$ とおいて置換積分を適用すればよい．

(4) 前々問 (2) と同じ極座標変換を使う．$W = \left\{ (r,\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$ が V に変換される．Jacobian は (2) と同じなので，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\iiint_V x\ dxdydz &= \iiint_W r\cos\theta\cos\varphi |J(r,\theta,\varphi)|\ drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^3\ dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\ d\varphi\right) = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

(5) 円柱座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$ によって，$r\theta z$ 空間の

$$W = \left\{ (r, \theta, z) \ \middle|\ 0 \leqq r \leqq \cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{1 - r^2} \right\}$$

が V に変換される．この変換の Jacobian は

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

なので，3 重積分は以下のように変換できる．

$$\iiint_V z\ dxdydz = \iiint_W z|J(r, \theta, z)|\ drd\theta dz = \iiint_W rz\ drd\theta dz$$

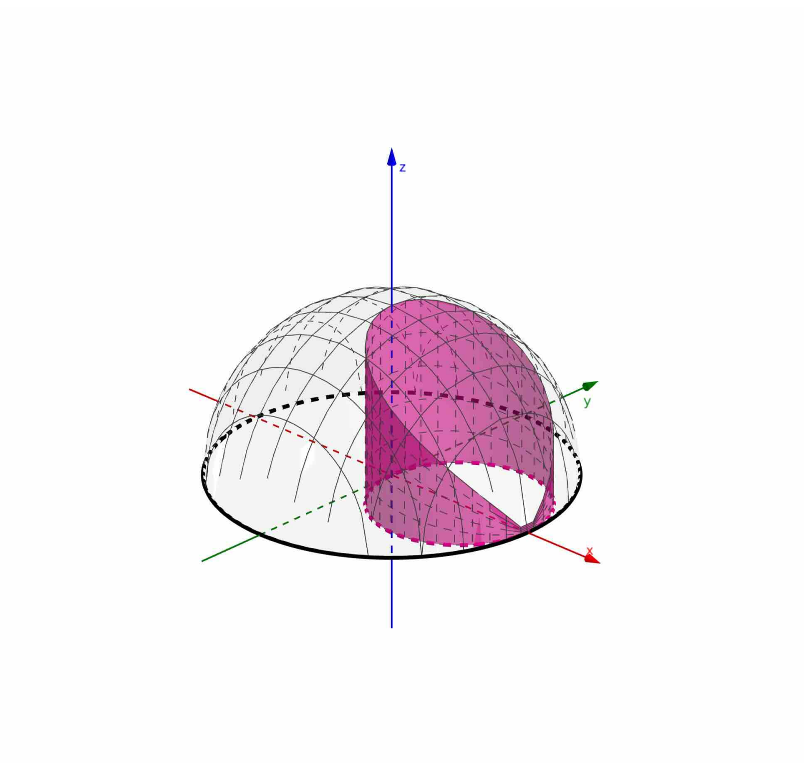
ここで，$D = \left\{ (r, \theta) \ \middle|\ 0 \leqq r \leqq \cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$ とすれば

$$W = \left\{ (r, \theta, z) \ \middle|\ (r, \theta) \in D,\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{1 - r^2} \right\}$$

と書けるので，続きは以下のように計算できる．

$$\iiint_V z\ dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}} rz\ dz \right) drd\theta = \iint_D r \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-r^2}} drd\theta$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D r\left(1 - r^2\right)\ drd\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} \left(r - r^3\right)\ dr \right) d\theta = \frac{5\pi}{64}$$



3. 3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ を計算すればよい．計算を楽にするために V の対称性を利用する．

$$V^+ = \{\ (x,y,z) \in V \ \mid\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\ \}$$

とすれば以下が成り立つ．

$$\iiint_V = 8 \iiint_{V^+} dxdydz$$

さらに，xy 平面の第 1 象限にある

$$D = \left\{\ (x,y)\ \mid\ x^2+y^2 \leqq R^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\ \right\}$$

を $x \geqq y$ の部分と $x \leqq y$ の部分に分けて

$$D_1 = \{\ (x,y) \in D\ \mid\ x \geqq y\ \},\quad D_2 = \{\ (x,y) \in D\ \mid\ x \leqq y\ \}$$

と名前をつけて

$$V_1^+ = \left\{\ (x,y,z) \in V^+\ \mid\ (x,y) \in D_1\ \right\},\quad V_2^+ = \left\{\ (x,y,z) \in V^+\ \mid\ (x,y) \in D_2\ \right\}$$

とすれば，やはり V^+ の対称性から $\displaystyle\iiint_{V_1^+} dxdydz = \iiint_{V_2^+} dxdydz$ なので

$$\iiint_{V^+} dxdydz = \iiint_{V_1^+} dxdydz + \iiint_{V_2^+} dxdydz = 2\iiint_{V_1^+} dxdydz$$

である．$(x,y) \in D_1$ のとき，つまり $x \geqq y$ のとき，$\sqrt{R^2-x^2} \leqq \sqrt{R^2-y^2}$ なので

$$V_1^+ = \left\{\ (x,y,z)\ \mid\ (x,y) \in D_1,\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{R^2-x^2}\ \right\}$$

と書けるので，求めたい体積 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\iiint_V dxdydz = 16\iiint_{V_1^+} dxdydz &= 16\iint_{D_1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\right) dxdy = 16\iint_{D_1} \sqrt{R^2-x^2}\ dxdy \\
&= \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\left(\int_0^x \sqrt{R^2-x^2}\ dy\right)dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2}\ dy\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} x\sqrt{R^2-x^2}\ dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \left(R^2-x^2\right)\ dx = \left(16-8\sqrt{2}\right)R^3
\end{aligned}$$