11　Gauss 積分と誤差関数

11.1　Gauss 積分

以下の広義積分は **Gauss 積分**と呼ばれる．この値を広義 2 重積分を使って求める．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

まず，この広義積分 I が収束することを確認しておく．開区間上の広義積分の定義に従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \tag{11.1}$$

と分けて，右辺の 2 個の広義積分がいずれも収束することを示す．ここで，$u = -x$ としての置換積分により

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\ dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} e^{-x^2}\ dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{-c}^{0} -e^{-u^2}\ du = \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{-c} e^{-x^2}\ dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \tag{11.2}$$

なので，(11.1) の右辺第 2 項が収束することを示せばよい．さらに，

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\ dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\ dx \tag{11.3}$$

と分ければ，この右辺第 1 項は通常の積分なので第 2 項が収束することを示せばよい．$x \in [1,\infty)$ に対して

$$\left|e^{-x^2}\right| = e^{-x^2} \leqq xe^{-x^2}$$

である．さらに，この最右辺の $[1,\infty)$ 上の広義積分は以下のように収束する．

$$\int_{1}^{\infty} xe^{-x^2}\ dx = \lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c} xe^{-x^2}\ dx = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\frac{e^{-1}-e^{-c^2}}{2} = \frac{e^{-1}}{2}$$

よって，(11.3) の右辺第 2 項の広義積分は収束するので，Gauss 積分は収束する．

上記の通り Gauss 積分は収束するので，以下が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx$$

なお，一般には

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \ \text{と}\ \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)\ dx$$

は別物だが，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ が収束するなら，両者は等しい．従って，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2 &= \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\ dx\right)\left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\ dy\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\ dx\right)dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\iint_{[-n,n]\times[-n,n]} e^{-x^2-y^2}\ dxdy\end{aligned} \tag{11.4}$$

ここで，$D_n = [-n, n] \times [-n, n]$ とおけば，$\{ D_n \}$ は $\mathbb{R}^2$ の増加近似列である．任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $e^{-x^2-y^2} > 0$ なので，(11.4) から以下が成り立つ．

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx \right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \ dxdy \tag{11.5}$$

この右辺の広義 2 重積分の値を求める．これが収束することは既にわかっているので，$\mathbb{R}^2$ の増加近似列として計算しやすいものを選べばよい．

$$E_n = \{ (x, y) \ | \ x^2 + y^2 \leqq n^2 \}$$

とすれば，$\{ E_n \}$ は $\mathbb{R}^2$ の増加近似列なので

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \ dxdy = \lim_{n \to \infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} \ dxdy$$

である．極座標変換 $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ によって，$r\theta$ 平面の閉領域

$$F_n = \{ (r, \theta) \ | \ 0 \leqq r \leqq n, \ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \}$$

が xy 平面の E_n に変換される．極座標変換の Jacobian は $J(r, \theta) = r$ なので，

$$\begin{aligned}
\iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} \ dxdy &= \iint_{F_n} e^{-r^2} |J(r, \theta)| \ drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n re^{-r^2} \ dr \right) d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^n re^{-r^2} \ dr \right) = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^n = \pi \left(1 - e^{-n^2} \right)
\end{aligned}$$

である．よって，以下を得る．

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \ dxdy = \lim_{n \to \infty} \pi \left(1 - e^{-n^2} \right) = \pi$$

これと (11.4) から $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx \right)^2 = \pi$ であり，明らかに $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx > 0$ なので，Gauss 積分の値は

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx = \sqrt{\pi}} \tag{11.6}$$

である．さらに，(11.1) と (11.2) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \ dx$$

なので，(11.6) と合わせて以下も得られる．

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} \ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \tag{11.7}$$

次に紹介する誤差関数 $\operatorname{erf} x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \ dt$ に $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ という定数が含まれているのはこの (11.7) が理由である．つまり，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \operatorname{erf} x = 1$ となって欲しいからである．

11.2　誤差関数

$\mathbb{R}$ 上定義された次の関数は**誤差関数 (error function)** と呼ばれる．

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\ dt$$

定義とガウス積分に関する結果 (11.7) から以下が直ちにわかる．

$$\operatorname{erf} 0 = 0, \quad \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{erf} x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{erf} x = -1 \tag{11.8}$$

また，微分積分学の基本定理から

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

である．つまり，以下の積分の公式が得られる．なお，積分定数は省略している．

$$\int e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} x \tag{11.9}$$

初等関数の組み合わせでは表せない e^{-x^2} の原始関数が誤差関数を用いて表せているが，実際には e^{-x^2} の原始関数（の定数倍）に誤差関数という名前を付けただけである．

例 11.1. これまで扱いづらかった不定積分を erf を使って表すこともできる．

$$\int x^2 e^{-x^2}\ dx = \int x \cdot x e^{-x^2}\ dx = x\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) + \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf} x$$

11.3　正規分布の累積分布関数と誤差関数

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 f_{μ,σ^2} は次の式で与えられる．なお，$\exp(X) = e^X$ である．

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X が $a \leqq X \leqq b$ である確率 $P_{\mu,\sigma^2}(a \leqq X \leqq b)$ は

$$P_{\mu,\sigma^2}(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx$$

である．特に，正規分布の累積分布関数，つまり $X \leqq x$ である確率 $P_{\mu,\sigma^2}(X \leqq x)$ は広義積分として

$$P_{\mu,\sigma^2}(X \leqq x) = \int_{-\infty}^x f_{\mu,\sigma^2}(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dt$$

と書ける．これを誤差関数 erf で表してみる．変数変換

$$u = \frac{t-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \ \left(\Leftrightarrow t = \mu + \sqrt{2\sigma^2}\ u\right)$$

による置換積分によって，$P_{\mu,\sigma^2}(X \leqq x)$ は次のように書き換えられる．

$$P_{\mu,\sigma^2}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}} e^{-u^2}\ du = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{erf} u\Big]_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \tag{11.10}$$

特に $\mu=0,\ \sigma=1$ のとき，つまり標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数は次のように書ける．

$$P_{0,1}(X \leqq x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{\sqrt{2}}$$

確率・統計の書籍では標準正規分布表として，この $P_{0,1}(X \leqq x)$ の値，あるいは $P_{0,1}(0 \leqq X \leqq x)$ の値の表が巻末に載っていることが多い．ここで，

$$P_{0,1}(x_1 \leqq X \leqq x_2)=P_{0,1}(X \leqq x_2)-P_{0,1}(X \leqq x_1),\quad P_{0,1}(X \leqq 0)=\frac{1}{2}$$

より，$x \geqq 0$ のときはこれらの間に

$$P_{0,1}(X \leqq x)=P_{0,1}(0 \leqq X \leqq x)+\frac{1}{2}$$

という関係があるので，$P_{0,1}(X \leqq x)$ と $P_{0,1}(0 \leqq X \leqq x)$ の一方から他方の値は分かる．さらに，(11.10) から

$$\operatorname{erf} x=2P_{0,1}\left(X \leqq \sqrt{2}x\right)-1=2P_{0,1}\left(0 \leqq X \leqq \sqrt{2}x\right)$$

なので，erf の値は標準正規分布表から読み取れるし，逆に erf から標準正規分布表を自作することもできる．

例 11.2 (**正規分布の平均**)．正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の平均（期待値）は以下の広義積分で定義される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx$$

これが μ に等しいことは，変数変換

$$u=\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\ \left(\Leftrightarrow x=\mu+\sqrt{2\sigma^2}\ u\right) \tag{11.11}$$

での置換積分とガウス積分 (11.6) から以下のように確かめられる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mu+\sqrt{2\sigma^2}\ u\right)e^{-u^2}du=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du+\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u^2}du}_{=0}=\mu$$

例 11.3 (**正規分布の分散**)．正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の分散は以下の広義積分で定義される．

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma^2}(x)\ dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx$$

これが σ^2 に等しいことは，変数変換 (11.11) での置換積分と例 11.1 の結果および (11.8) から以下のように確かめられる．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma^2}(x)dx&=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-u^2}\ du=\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}u^2e^{-u^2}\ du\\&=\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{2}ue^{-u^2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf}u\right]_0^c=\sigma^2\lim_{c\to\infty}\operatorname{erf}c=\sigma^2\end{aligned}$$