7　2 重積分とは

2 変数関数の積分を定義する．

7.1　2 変数関数の Riemann 和

f を以下の有界な長方形 K で定義された有界な 2 変数関数とする．

$$K = [a,b] \times [c,d] := \{\, (x,y) \mid a \le x \le b,\, c \le y \le d \,\}$$

区間 $[a,b]$ を m 個に，区間 $[c,d]$ を n 個に分割し，長方形 K を mn 個に分割する．

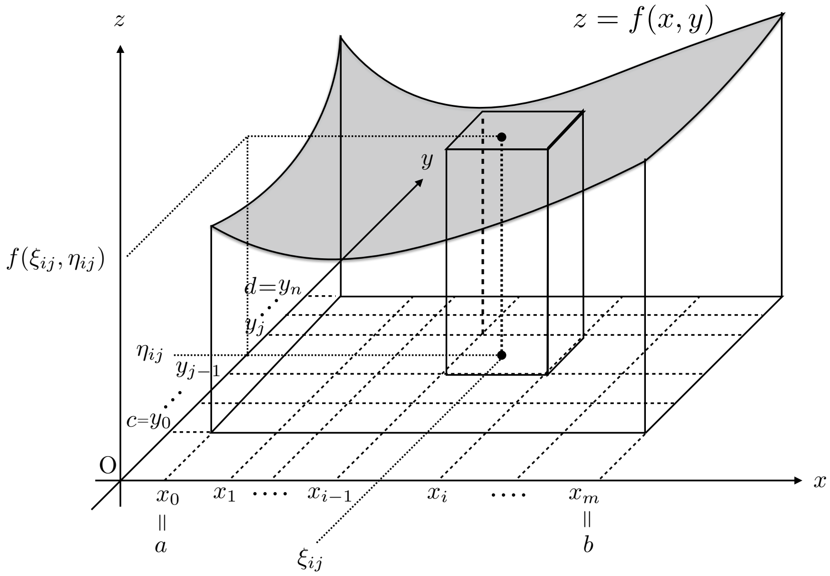
$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{aligned}$$

この $(m+n+2)$ 個の点の組 $\Delta = (x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n)$ を K の**分割**と呼ぶ．各小長方形から代表点 $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ を選ぶ．このとき，

$$R\left(\Delta, \{\, (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \,\}, f\right) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_{ij}, \eta_{ij}\right)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

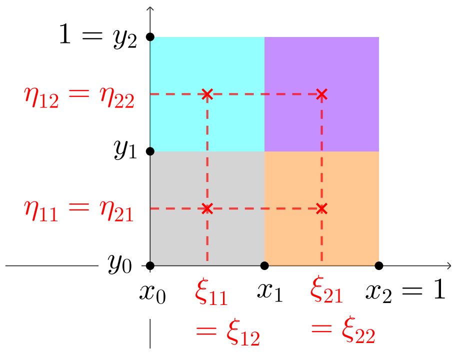
を分割 Δ と代表点集合 $\{\, (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \,\}$ に関する f の **Riemann 和**という．

ここで定義した Riemann 和は下図のように，底面積が $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ で，高さが $f\left(\xi_{ij}, \eta_{ij}\right)$ の細長い直方体たちの体積を足し合わせたものである．これは $z = f(x,y)$ のグラフと xy 平面と平面 $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$ で囲まれた図形の体積を近似している．ただし，グラフが xy 平面より下にある部分の Riemann 和は負の値である．



簡単な Riemann 和を実際に計算してみよう．

例 7.1. $f(x,y)=x^2+y^2$ とする．下図のように，$\Delta=(x_0,x_1,x_2;y_0,y_1,y_2)=\left(0,\frac{1}{2},1;\ 0,\frac{1}{2},1\right)$ を正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の分割とし，各小長方形 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の中心を (ξ_{ij},η_{ij}) とする．



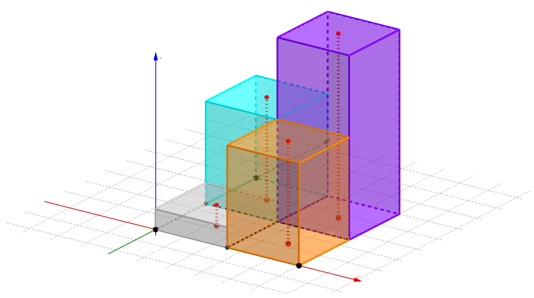
代表点たちの具体的な座標は以下の通りである．

$$(\xi_{11},\eta_{11})=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\quad(\xi_{12},\eta_{12})=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\quad(\xi_{21},\eta_{21})=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),\quad(\xi_{22},\eta_{22})=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$$

この分割 Δ と代表点集合 $\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$ に関する関数 $f(x,y)$ の Riemann 和は

$$\begin{aligned}
R(\Delta,\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\},f)=&\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2}f(\xi_{ij},\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\\
=&f(\xi_{11},\eta_{11})(x_1-x_0)(y_1-y_0)+f(\xi_{12},\eta_{12})(x_1-x_0)(y_2-y_1)\\
&+f(\xi_{21},\eta_{21})(x_2-x_1)(y_1-y_0)+f(\xi_{22},\eta_{22})(x_2-x_1)(y_2-y_1)\\
=&f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+f\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
=&\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{5}{32}+\frac{9}{32}=\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

である．この値は下図の 4 個の直方体の体積の和に等しい．



7.2　2 重積分の定義

f を有界な長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ で有界な 2 変数関数とする．長方形 K の分割

$$\Delta=(x_0,\ldots,x_m;\ y_0,\ldots,y_n)$$

に対し，

$$|\Delta|:=\max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}\{\,(x_i-x_{i-1}),\ (y_j-y_{j-1})\,\}$$

とする．$|\Delta|\to 0$ のとき，分割の仕方と代表点集合 $\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\}$ の取り方によらず Riemann 和 $R(\Delta,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f)$ が一定の値に収束するならば，f は K で **(Riemann) 重積分可能** であるという．このとき，その極限値を以下のように表し，f の K 上の 2 **重積分**という．

$$\iint_K f(x,y)\ dxdy \tag{7.1}$$

2 変数関数が重積分可能であるかどうかを調べるのは 1 変数関数のとき以上に難しいが，1 変数関数のときと同様に，有界な長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の連続関数は重積分可能であることが知られている．

定理 7.2. 有界な長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上連続な 2 変数関数は K で重積分可能である．

2 変数関数 f が有界な長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ で連続であれば，K のいかなる分割 Δ と代表点集合に対しても，$|\Delta|\to 0$ でさえあれば必ず Riemann 和は一定の値に近づき，その値が (7.1) に等しいことをこの定理 7.2 は主張している．

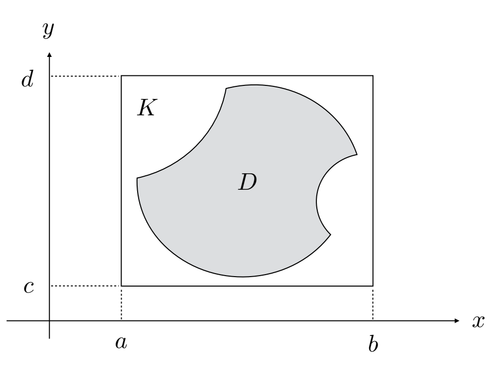
より一般の有界閉領域 D に対しては，下図のように D を含む長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ を 1 つ取り，

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D)\\ 0 & ((x,y)\notin D)\end{cases}$$

として，f^* が K 上重積分可能なら f は D 上重積分可能であるとし，

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy=\iint_K f^*(x,y)\ dxdy$$

によって f の D 上の 2 重積分を定義する．D 上の重積分の値は D を含む長方形 K の取り方によらない．



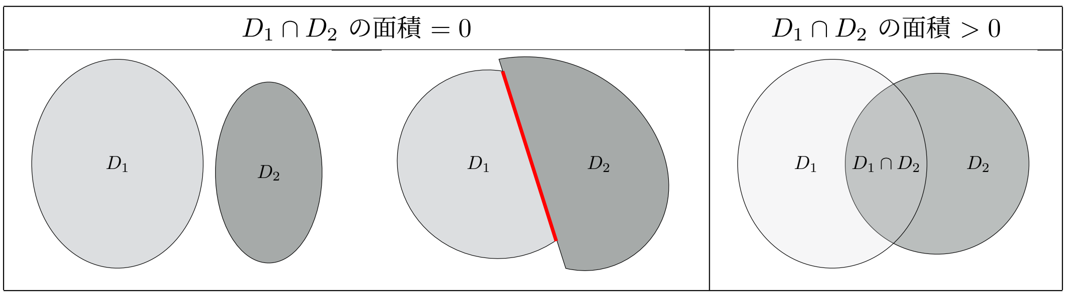
7.3　2 重積分の諸性質

定理 7.3 (2 重積分の線形性)**.** f, g を有界閉領域 D 上重積分可能な 2 変数関数とする．定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ．

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\ dxdy + \beta \iint_D f(x,y)\ dxdy$$

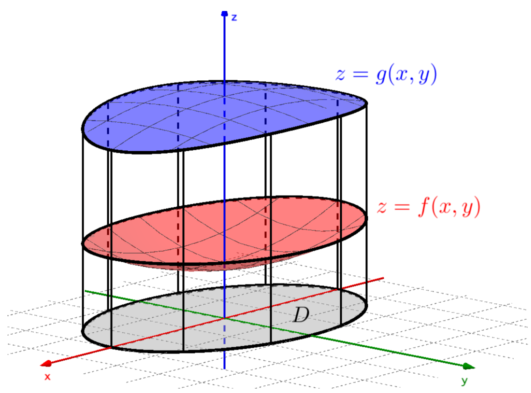
定理 7.4. 2 つの有界閉領域 D_1, D_2 の共通部分 $D_1 \cap D_2$ の面積が 0 のとき，$D_1 \cup D_2$ 上重積分可能な関数 f に対して以下が成り立つ．

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\ dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dxdy$$



定理 7.5. 2 変数関数 f, g が有界閉領域 D 上重積分可能かつ $f(x,y) \leqq g(x,y)$ なら以下が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \leqq \iint_D g(x,y)\ dxdy$$



定理 7.6. 有界閉領域 D 上重積分可能な 2 変数関数 f に対して以下が成り立つ．

$$\left|\iint_D f(x,y)\ dxdy\right| \leqq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

7.4 累次積分による 2 重積分の計算

長方形上の連続関数の 2 重積分は累次積分によって計算できる．

定理 7.7. 長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の連続関数 f に対して以下が成り立つ．

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy$$

次節でこの定理 7.7 を拡張し，より一般的な有界閉領域上の 2 重積分の計算方法を与える．

例 7.8.

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} \left(x^2+y^2\right)\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+y^2)\ dy \right)\ dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2}\ dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right)\ dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x \right]_0^1 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

あるいは，次のようにも計算できる．

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} \left(x^2+y^2\right)\ dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\ dx \right)\ dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=0}^{x=1}\ dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right)\ dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

例 7.9.

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/3]} \sin(x-y)\ dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/3} \sin(x-y)\ dy \right)\ dx = \int_0^\pi \Big[\cos(x-y) \Big]_{y=0}^{y=\pi/3}\ dx \\ &= \int_0^\pi \left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \cos x \right)\ dx = \left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \right]_0^\pi \\ &= \sin\frac{2\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\end{aligned}$$

あるいは，次のようにも計算できる．

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/3]} \sin(x-y)\ dxdy &= \int_0^{\pi/3} \left(\int_0^\pi \sin(x-y)\ dx \right)\ dy = \int_0^{\pi/3} \Big[-\cos(x-y) \Big]_{x=0}^{x=\pi}\ dy \\ &= \int_0^{\pi/3} \left(-\cos\left(\pi-y\right) + \cos\left(-y\right) \right)\ dy = \Big[\sin(\pi-y) + \sin y \Big]_0^{\pi/3} \\ &= \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

7.5　練習問題

次の長方形上の 2 重積分を計算しよう．

(1) $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[1.2]} \left(x^3 - y^2\right)\ dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[-1,0]} e^{2x-3y}\ dxdy$

(3) $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[0,1]} xe^{xy}\ dxdy$

(4) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[1,e]} (\cos x)\log y\ dxdy$

答え：(1) $-\dfrac{14}{3}$　(2) $\dfrac{1-e^2-e^3+e^5}{6}$　(3) e^2-3　(4) 1

7.6 （おまけ）Riemann 和の極限としての 2 重積分

長方形上の 2 重積分の値を Riemann 和の極限として計算する例を挙げておく．

例 7.10. $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left(x^2+y^2\right)\,dxdy$

正方形 $[0,1]\times[0,1]$ を x 方向と y 方向それぞれ n 等分して得られる分割を

$$\Delta_n=(x_0,x_1,\ldots,x_n\ ;\ y_0,y_1,\ldots,y_n)$$

とし，各小正方形 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の中心（対角線の交点）を代表点 (ξ_{ij},η_{ij}) とする．つまり，

$$x_i=\frac{i}{n},\quad y_j=\frac{j}{n},\quad \xi_{ij}=\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\quad \eta_{ij}=\frac{y_{j-1}+y_j}{2}$$

である．この分割 Δ_n と代表点集合 $\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\}$ に関する $f(x,y)=x^2+y^2$ の Riemann 和を S_n とする．

$$S_n:=R\left(\Delta_n,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(\xi_{ij},\eta_{ij}\right)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

f は $[0,1]\times[0,1]$ で連続なので，定理 7.2 からこの S_n は $n\to\infty$ のとき収束し，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x^2+y^2)\,dxdy$$

である．各 x_i-x_{i-1},y_j-y_{j-1} はいずれも $\dfrac{1}{n}$ であり，$\xi_{ij}=\dfrac{2i-1}{2n}$, $\eta_{ij}=\dfrac{2j-1}{2n}$ なので

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2+\left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2i-1)^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(2j-1)^2\right)\\
&=\frac{1}{4n^4}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2i-1)^2=\frac{1}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}n(2i-1)^2=\frac{1}{4n^4}\sum_{i=1}^{n}\left(4i^2-4i+1\right)\\
&=\frac{1}{2n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n}i^2-4\sum_{i=1}^{n}+\sum_{i=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2n^3}\left(4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}\to\frac{2}{3}\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

である．以上から，$\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x^2+y^2)\,dxdy=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{3}$ である．

定数関数 $f(x,y)=C$ は連続関数だが，定理 7.2 に頼ることなく直接 2 重積分を計算できる．

例 7.11. $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} C\ dxdy$

$\Delta=(x_0,\ldots,x_m\ ;\ y_0,\ldots,y_n)$ を長方形 $[a,b]\times[c,d]$ の分割とし，各小長方形 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の代表点 (ξ_{ij},η_{ij}) を任意に選ぶ．これらに関する $f(x,y)=C$ の Riemann 和は

$$\begin{aligned}
R(\Delta,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij},\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) \\
&= C\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j-1})\right) = C\,(x_m-x_0)\,(y_n-y_0) \\
&= C(b-a)(d-c)
\end{aligned}$$

である．よって，分割の仕方と代表点の選び方によらず Riemann 和は一定なので，特に，$|\Delta|\to 0$ における極限値もその一定の値に等しい．よって，以下を得る．

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} C\ dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0} R\,(\Delta,\{\,(\xi_{ij},\eta_{ij})\,\},f) = C(b-a)(d-c)$$