6　べき級数

6.1　級数

数列 $\{a_n\}$ によって定まる以下の形の式を**級数**という．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

以下の n 番目までの部分和 S_n が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は**収束する**という．

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ であるとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値は α であるといい，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ と書く．当たり前のことを長々と定義しているように見えるかもしれないが，例えば

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots$$

という数列 $\{(-1)^n\}$ から定まる級数を

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0$$

と見なしたり

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$$

と見なしたりしていては収束先が定まらないので，「前から順番に足す」という約束をしている．この定義に従えば，上の級数は収束しない．

例 6.1. 初項が a で公比が r の等比数列の n 番目までの和は

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r} & (r \neq 1) \\ \\ a(n+1) & (r = 1) \end{cases}$$

なので，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ は $|r| < 1$ のとき収束し，その値は

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad (r < 1)$$

である．$|r| \geqq 1$ のとき，この等比級数は発散する．

注意. 以後，混乱のおそれがないところでは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ を単に $\sum$ と略して書く．

定理 6.2 (**級数の和・定数倍**)**.** 2 つの級数 $\sum a_n$，$\sum b_n$ が収束するとき，任意の定数 $k, l \in \mathbb{R}$ に対して，級数 $\sum (ka_n + lb_n)$ も収束し，以下が成り立つ．

$$\sum (ka_n + lb_n) = k\left(\sum a_n\right) + l\left(\sum b_n\right)$$

定理 6.3. 級数 $\sum a_n$ が収束するなら，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

証明. 級数 $\sum a_n$ が α に収束するとし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ だから

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to \alpha - \alpha = 0 \quad (n \to \infty)$$

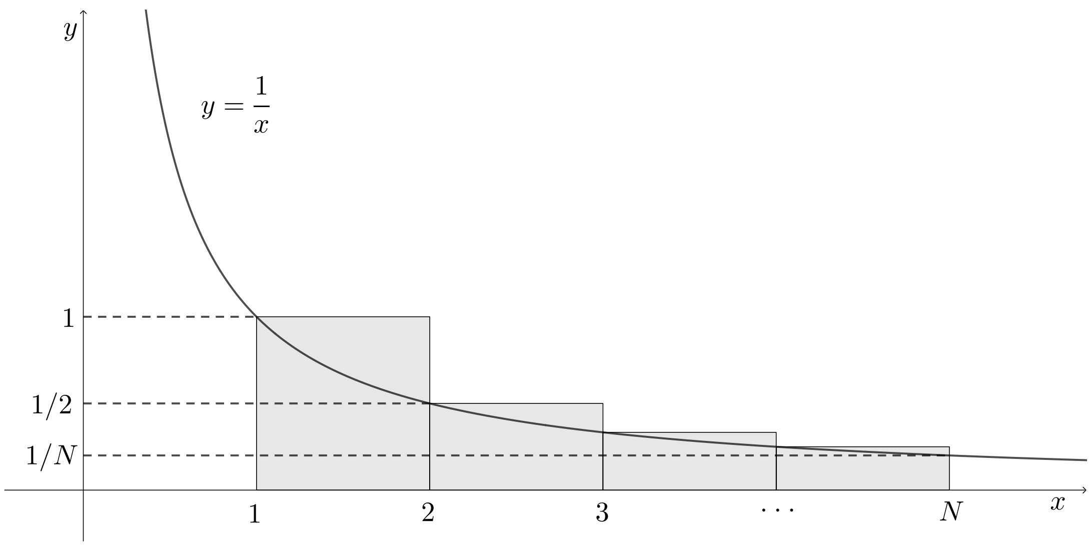
より，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する． □

定理 6.3 の逆は成り立たない．つまり，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しても級数 $\sum a_n$ が収束するとは限らない．

例 6.4. $a_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．一方，任意の自然数 N に対して

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqq \int_1^N \frac{dx}{x} = \log N \to \infty \quad (N \to \infty)$$

より，級数 $\sum a_n$ は発散する．なお，部分和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ は下図の灰色部分の面積に等しい．



6.2　べき級数

数列 $\{a_n\}$ と実数 b と変数 x によって

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + \cdots$$

と表される級数を，$x=b$ を中心とする**べき級数**という．$t = x-b$ とおけば，この級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

と $t=0$ を中心とするべき級数に書き換えられるので，この形のべき級数が重要である．

例 6.5. 多項式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ は，$a_k = 0\ (k > n)$ として，べき級数とみなせる．

定義 (Taylor 級数). 実数 a を含む開区間 I で C^∞ 級な関数 f に対し，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

を f の $x=a$ を中心とする **Taylor 級数**という．

関数 f が $x=a$ で Taylor 展開可能なとき，a の近くの x において f の $x=a$ を中心とする Taylor 級数は収束し，その値は $f(x)$ に等しい．しかしながら，一般には f が C^∞ 級であってもその Taylor 級数と $f(x)$ が等しいとは限らない．

例 6.6. 以下の関数 f の $x=0$ を中心とする Taylor 級数を考えてみよう．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

まず，$f'(0)$ を求めよう．以下は途中で $h = \frac{1}{t}$ と変数変換している．

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

次に，$f''(0)$ を求めよう．やはり以下でも途中で $h = \frac{1}{t}$ と変数変換している．

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^{-3}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0$$

以下，同様に計算して $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \cdots = 0$ となることがわかる．従って，f の $x=0$ のまわりでの Taylor 級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$$

であるが，これは明らかに $x=0$ 以外の全ての x に対して $f(x)$ と等しくない．

6.3 収束半径

定理 6.7. べき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = b\ (\neq 0)$ で収束するなら，$|x| < |b|$ を満たす全ての x で収束する．

証明. 級数 $\sum a_n b^n$ が収束するので，数列 $\{a_n b^n\}$ は 0 に収束する．特に，数列 $\{a_n b^n\}$ は上にも下にも有界なので，全ての番号 $n \geq 0$ で $|a_n b^n| < M$ となる正の実数 M が存在する．このとき，各 x に対して $r = |x/b|$ とすると，

$$|a_n x^n| = \left| a_n b^n \cdot \frac{x^n}{b^n} \right| \leq M r^n$$

が成り立つ．従って，$|x| < |b|$ すなわち $r < 1$ ならば，級数 $\sum M r^n$ が収束するので $\sum |a_n x^n|$ も収束する．よって，$\sum a_n x^n$ は収束する． □

注意. 上の証明の終盤では以下の優級数定理と呼ばれる定理を使った．

定理 6.8 (**優級数定理**)**.** 全ての n で $0 \leqq a_n \leqq b_n$ であり，級数 $\sum b_n$ が収束するなら，級数 $\sum a_n$ も収束する．このような級数 $\sum b_n$ は級数 $\sum a_n$ の**優級数**と呼ばれる．

注意. 級数 $\sum |a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum a_n$ は**絶対収束する**という．これは級数 $\sum a_n$ が収束するよりも強い条件である．つまり，級数 $\sum a_n$ が絶対収束するなら，$\sum a_n$ は収束する．

定理 6.7 は級数の発散を判定する以下の定理を導くこともできる．

定理 6.9. べき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = b$ で発散するなら，$|x| > |b|$ を満たす全ての x で発散する．

証明. $|u| > |b|$ となる u でべき級数が収束するなら，定理 6.7 により $x = b$ でべき級数が収束し，$x = b$ で発散することに矛盾する． □

定義 (**収束半径**)**.** べき級数 $\sum a_n x^n$ が $|x| < r$ のとき収束し，$|x| > r$ のとき発散するとき，r をこのべき級数の**収束半径**という．ただし，$x = 0$ でのみ収束するときは $r = 0$ とし，全ての実数 x で収束するときは $r = +\infty$ と定める．

注意. 収束半径 r が $0 < r < +\infty$ のとき，定理 6.7 からべき級数 $\sum a_n x^n$ は $|x| < r$ で収束し，$|x| > r$ で発散する．なお，$x = \pm r$ における収束・発散は個別に調べなければわからない．

例 6.10. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $|x| < 1$ で絶対収束し，$|x| > 1$ で発散するから，その収束半径は 1 である．なお，この場合 $x = \pm 1$ では発散することが容易にわかる．よって，$|x| < 1$ において以下が成り立つ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

全ての n で $a_n > 0$ となる級数 $\sum a_n$ を**正項級数**という．

定理 6.11 (**Cauchy の収束判定法**)**.** 正項級数 $\sum a_n$ に対して，$\rho := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ とする．$\rho < 1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$\rho > 1$ $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty \text{ も含む}\right)$ なら $\sum a_n$ は発散する．

定理 6.12 (**d'Alembert の収束判定法**)**.** 正項級数 $\sum a_n$ に対して，$\rho := \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とする．$\rho < 1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$\rho > 1$ $\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \text{ も含む}\right)$ なら $\sum a_n$ は発散する．

注意. Cauchy の収束判定法も d'lAmbert の収束判定法も $\rho = 1$ となるときには収束・発散に関して何も教えてくれない．その場合は個別に別の方法で調べなければならない．

定理 6.13. べき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を r とする．このとき次が成り立つ．

(1) 極限値 $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するとき，$r = \dfrac{1}{l}$ である．

(2) 極限値 $l = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在するとき，$r = \dfrac{1}{l}$ である．

ただし，$l = 0$ のときは $r = +\infty$ であり，$l = +\infty$ のときは $r = 0$ である．

証明.

(1) 実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = l|x|$ である．従って，Cauchy の収束判定法から
- $l|x| < 1$ すなわち $|x| < \dfrac{1}{l}$ ならば，べき級数は絶対収束する．
- $l|x| > 1$ すなわち $|x| > \dfrac{1}{l}$ ならば，級数 $\sum |a_n x^n|$ は発散する．

よって，収束半径は $r = \dfrac{1}{l}$ である．

(2) 実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = l|x|$ である．従って，d'Alembert の収束判定法から
- $l|x| < 1$ すなわち $|x| < \dfrac{1}{l}$ ならば，べき級数は絶対収束する．
- $l|x| > 1$ すなわち $|x| > \dfrac{1}{l}$ ならば，級数 $\sum |a_n x^n|$ は発散する．

よって，収束半径は $r = \dfrac{1}{l}$ である．

□

例 6.14. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は $+\infty$ である．すなわち，全ての実数 x で収束する．

実際，$a_n = \dfrac{1}{n!}$ とおけばこのべき級数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書けるので，

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

より定理 6.13 から収束半径は $+\infty$ である．

6.4　項別積分・項別微分

べき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径が $r > 0$ なら，これは開区間 $(-r, r)$ 上の関数

$$f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

を定義する．このとき，f は $(-r, r)$ で連続である．

定理 6.15 (**項別積分**)**.** べき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とする．このとき，開区間 $(-r, r)$ 上で以下が成り立つ．すなわち，右辺の収束半径は r である．

$$\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

定理 6.16 (**項別微分**)**.** べき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ と $g(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ に次が成り立つ．

(1) $g(x)$ の収束半径は $f(x)$ の収束半径に等しい．
(2) $f(x)$ の収束半径が $r > 0$ のとき，f は $(-r, r)$ で微分可能で，$f'(x) = g(x)$ である．

定理 6.17. 正の収束半径 r を持つべき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ は $(-r, r)$ で C^∞ 級である．

証明. 定理 6.16 より $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ であり，その収束半径も r である．よって，定理 6.16 を繰り返し適用して，f は何回でも微分できることが示せる．　□

定理 6.18. べき級数 $f(x) = \sum a_n x^n$ が正の収束半径 r を持つとき，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して以下が成り立つ．

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

証明. f に定理 6.16 を繰り返し適用して

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + ((n+1)n \cdots 2)\, a_{n+1} x + ((n+2)(n+1) \cdots 3)\, a_{n+2} x^2 + \cdots$$

だから，これに $x = 0$ を代入して $f^{(n)}(0) = n! a_n$ を得る．　□

定理 6.19 (**べき級数展開の一意性**)**.** C^∞ 級関数 f が，正の収束半径を持つべき級数として

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$$

と 2 通りに表せたとき，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $a_n = b_n$ である．

証明. 定理 6.18 より，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ である．　□

6.5 Taylor 展開

実数 a の近くで C^∞ 級な関数 f の n 次剰余項

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{n-1}$$

が $n \to \infty$ のときに 0 に収束するとき，f は $x = a$ で **Taylor 展開可能**であるといい，その Taylor 級数を f の $x = a$ での **Taylor 展開**という．このとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

である．特に，$a = 0$ での Taylor 展開を f の **Maclaurin 展開**という．

例 6.20. 代表的な Maclaurin 展開をいくつか挙げておく．

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \\
\sin x &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \\
\cos x &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \\
(1+x)^a &= \sum \binom{a}{n} x^n = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

ただし，最後の級数の係数は一般化二項係数である．

$$\binom{a}{k} := \frac{\overbrace{a(a-1)\cdots(a-k+1)}^{k\text{ 個}}}{n!}, \qquad \binom{a}{0} := 1$$

例 6.21. 例 6.10 のべき級数 $\sum x^n$ の収束半径は 1 である．従って，$|x| < 1$ において

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である．べき級数展開の一意性（定理 6.19）からこれは関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の Maclaurin 展開でもある．また，$|x| < 1$ のとき，$|-x| < 1$ だから

$$f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

であり，最右辺の収束半径は 1 である．よって，項別積分ができて（定理 6.15）

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

が $|x| < 1$ で成り立つ．これは関数 $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開である．ちなみに，この Maclaurin 展開は $x = 1$ でも成り立つので，

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

である．なお，$x = -1$ のとき級数は発散する．

例 6.22. $\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開とその収束半径を項別積分を使って求める．

例 6.21 で見たように，$|x| < 1$ で

$$\frac{1}{1+x} = \sum (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

である．$|x| < 1$ のとき，$|x^2| < 1$ なので x に x^2 を代入して

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum (-x^2)^n = \sum (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

を得る．この収束半径は 1 である．よって，項別積分ができて（定理 6.15）

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

が開区間 $(-1, 1)$ で成り立つ．べき級数展開の一意性（定理 6.19）からこれは $\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開であり，定理 6.15 からその収束半径は 1 である．

例 6.23. 以下の関数 $G(x)$ の Maclaulin 展開を項別積分を使って求める．

$$G(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

例 6.20 で挙げた指数関数 e^x の Maclaulin 展開の x に $-t^2$ を代入して以下が得られる．

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} + \cdots \quad (-\infty < t < \infty)$$

右辺は項別積分ができる（定理 6.15）ので両辺を 0 から x まで積分して以下を得る．

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \tag{6.1}$$

べき級数の一意性（定理 6.19）から，これは $G(x)$ の Maclaulin 展開である．

ちなみに，この関数 $G(x)$ の $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ 倍は**誤差関数 (error function)** と呼ばれ，$\mathrm{erf}(x)$ と書かれる．

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

わざわざ $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ 倍する理由はいずれ説明するつもりだが，これは初等関数（多項式，三角関数，逆三角関数，指数関数，対数関数，無理関数たちのある種の組み合わせとして表せる関数）でないことが知られている．そのため，各 x での関数値を知るのも困難だが，上記の級数表示 (6.1) によって原理上は任意精度の近似値を計算することができる．

6.6 （おまけ）Taylor の定理と積分

定理 6.24. f を実数 a を含む開区間 I で C^n 級な関数とする．このとき，任意の $x \in I$ に対して以下が成り立つ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt$$

証明. 微分積分学の基本定理から，任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ dt$$

である．右辺の積分に部分積分を繰り返し適用して，以下を得る．

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x (-(x-t))' f'(t)\ dt \\
&= f(a) + \Big[\left(-(x-t)\right) f'(t) \Big]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \left(-\frac{(x-t)^2}{2} \right)' f''(t)\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^4}{4!} f^{(3)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{f^{(5)}(t)}{4!}(x-t)^4\ dt \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt
\end{aligned}$$

□

上の定理において

$$R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt$$

を積分形の剰余項という．これは Taylor の定理における剰余項の別の表現方法である．この定理 6.24 から Taylor の定理を導くこともできる．

定理 6.25 (Taylor の定理). 定理 6.24 と同じ仮定のもとで，任意の $x \in I$ に対して，以下を満たす実数 c が存在する．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad a < c < x \text{ または } x < c < a$$

証明. $a > x$ のときも同様に示せるので，$a < x$ とする．定理 6.24 から

$$R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad a < c < x$$

を満たす実数 c が存在することを示せばよい．f は開区間 I で C^n 級なので，$f^{(n)}$ は閉区間 $[a,x]$ で連続である．従って，最大値・最小値の定理から，区間 $[a,x]$ における $f^{(n)}$ の最小値 m と最大値 M が存在するので

$$\int_a^x \frac{m}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt \le R_n(x) \le \int_a^x \frac{M}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{m}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt &= \frac{m}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{m}{n!}(x-a)^n \\
\int_a^x \frac{M}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt &= \frac{M}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{M}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

より

$$m \le \frac{n!}{(x-a)^n} R_n(x) \le M$$

である．よって，中間値の定理から

$$\frac{n!}{(x-a)^n} R_n(x) = f^{(n)}(c)$$

を満たす実数 $c \in (a,x)$ が存在する．これから以下を得る．

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$\square$

Taylor の定理における剰余項

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

は Lagrange の剰余項と呼ばれる．