(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D = \{\, (x,y) \mid x^2+y^2<1 \,\}$

D 上で $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0$ なので，D の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい．

$$D_n = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \right\} \quad (n \geqq 2)$$

とすれば $\{\, D_n \,\}$ は D の増加近似列なので，以下の極限を調べればよい．

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \tag{$\heartsuit$}$$

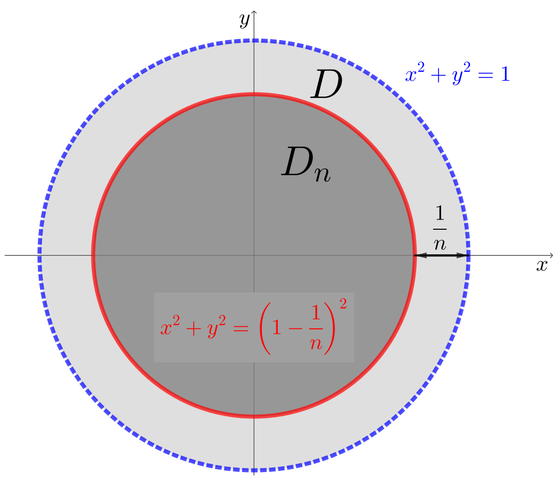
極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって $r\theta$ 平面の閉領域

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq 1-\frac{1}{n},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \right\}$$

が xy 平面の D_n に変換される．極座標変換の Jacobian は $J(r,\theta) = r$ なので

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \iint_{E_n} \frac{|J(r,\theta)|}{\sqrt{1-r^2}}\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr \right) d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right) = 2\pi \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_{r=0}^{r=1-\frac{1}{n}} \\
&= 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \right) \to 2\pi \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

である．よって，極限 ($\heartsuit$) が存在したので $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$ である．



(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D = \{\,(x,y)\ \mid\ 0 < x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\,\}$

D 上で $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$ なので D の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい．

$$D_n = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\,\right\} \quad (n \geqq 2)$$

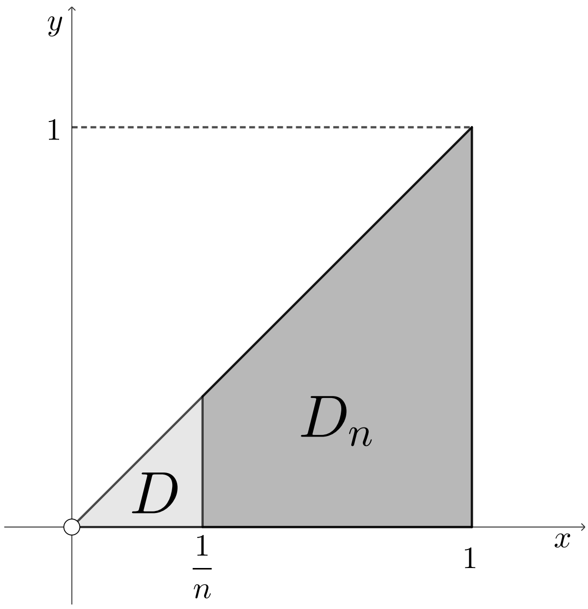
とすれば $\{\,D_n\,\}$ は D の増加近似列なので，以下の極限を調べればよい．

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{$\diamondsuit$}$$

D_n 上の 2 重積分は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\Big[\log\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big]_{y=0}^{y=x}\ dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\log\left(x+\sqrt{2x^2}\right) - \log\left(\sqrt{x^2}\right)\right)\ dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\ dx \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\sqrt{2}\right) \to \log\left(1+\sqrt{2}\right)\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

よって，極限 $(\diamondsuit)$ が存在したので $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log\left(1+\sqrt{2}\right)$ である．



(3) $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\ dxdy, \quad D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2,\ 0<x,\ 0\leqq y\,\right\}$

D 上で $\tan^{-1} yx \geqq 0$ なので，D の 1 個の増加近似列について極限を調べればよい．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって

$$E_n = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{n} \leqq r \leqq \sqrt{2},\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\,\right\}$$

が変換される xy 平面の閉領域を D_n とすれば，$\{\,D_n\,\}$ は D の増加近似列なので，極限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \tan^{-1}\frac{y}{x}\ dxdy \tag{$\clubsuit$}$$

を調べればよい．$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ であり，極座標変換の Jacobian は $J(r,\theta) = r$ なので，

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} \tan^{-1}\frac{y}{x}\ dxdy &= \iint_{E_n} \tan^{-1}(\tan\theta)\,|J(r,\theta)|\ drd\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \theta\ d\theta\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{2}} r\ dr\right)\\ &= \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2\left(2-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \to \frac{\pi^2}{8}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

である．よって，極限 $(\clubsuit)$ が存在したので $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\ dxdy = \frac{\pi^2}{8}$ である．