(1) $\displaystyle\iint_D \left(x^2-y^2\right)\ dxdy,\quad D=\{\,(x,y)\ \mid\ 1\leqq x+y\leqq 2,\ 0\leqq x-y\leqq 1\,\}$

$u=x+y,\ v=x-y$ とおく．つまり，以下の変数変換を考える．

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v \\ y=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v \end{cases}$$

これは uv 平面の閉領域

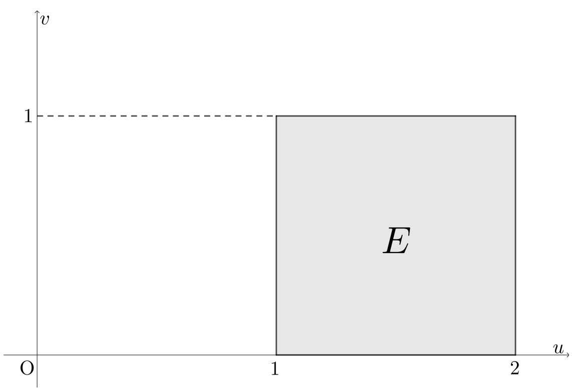
$$E=\{\,(u,v)\ \mid\ 1\leqq u\leqq 2,\ 0\leqq v\leqq 1\,\}$$

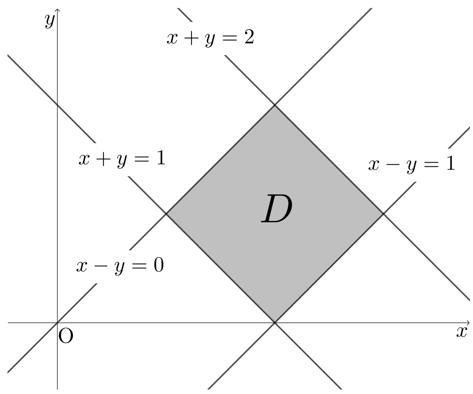
を xy 平面の閉領域 D に変換する．変換の Jacobian は

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

だから，2 重積分は次のように計算できる．

$$\iint_D \left(x^2-y^2\right)\ dxdy=\iint_E uv|J(u,v)|\ dudv=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 u\ du\right)\left(\int_0^1 v\ dv\right)=\frac{3}{8}$$





(2) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy, \quad D = \{\ (x,y)\ \mid\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9\ \}$

極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ によって，$r\theta$ 平面の閉領域

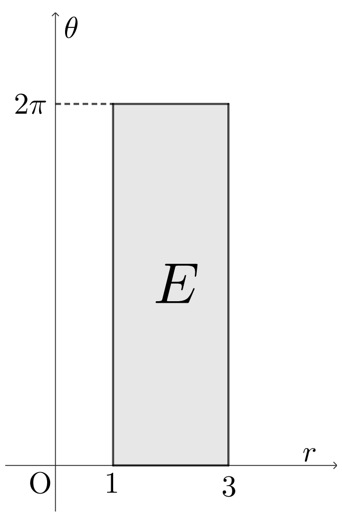
$$E = \{\ (r,\theta)\ \mid\ 1 \leqq r \leqq 3,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\ \}$$

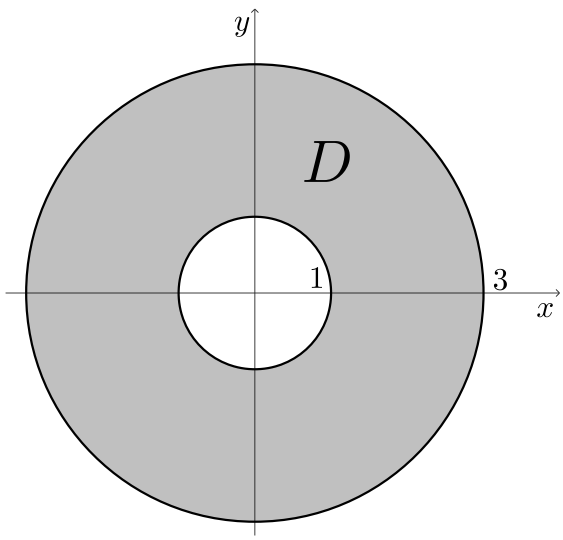
が xy 平面の閉領域 D に変換される．極座標変換の Jacobian は

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = r$$

なので，2 重積分は次のように計算できる．

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy = \iint_E e^{-r^2}\,|J(r,\theta)| = \left(\int_0^{2\pi}\ d\theta\right)\left(\int_1^3 re^{-r^2}\ dr\right) = \pi\left(e^{-1}-e^{-9}\right)$$





(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,\quad D=\left\{\,(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x\,\right\}$

極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ によって，$r\theta$ 平面の閉領域

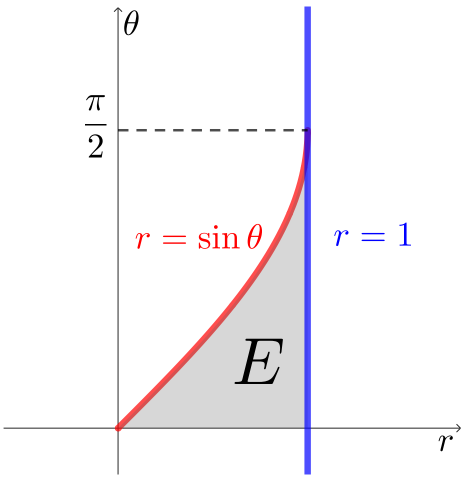
$$E=\left\{\,(r,\theta)\ \middle|\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \sin\theta \leqq r \leqq 1\,\right\}$$

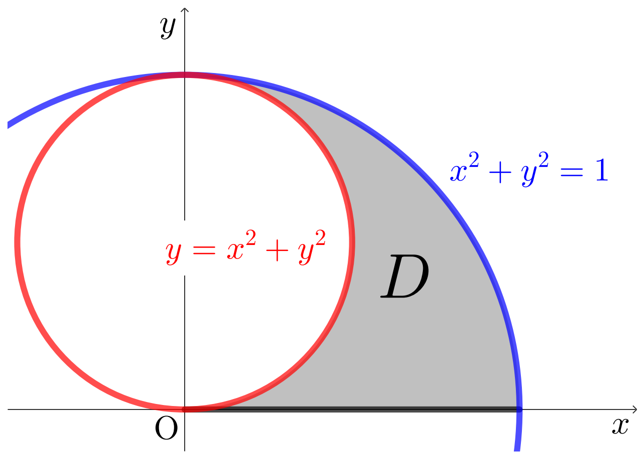
が xy 平面の閉領域 D に変換される．極座標変換の Jacobian は前問と同じく

$$J(r,\theta)=r$$

なので，2 重積分は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy &= \iint_E \sqrt{r^2}\,|J(r,\theta)|\ drd\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\int_{\sin\theta}^1 r^2\ dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=\sin\theta}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^3\theta\right)\ d\theta = \frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\end{aligned}$$





(4) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\ dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \ \middle|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqq 1 \right\}$

変数変換 $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$ によって，$r\theta$ 平面の閉領域

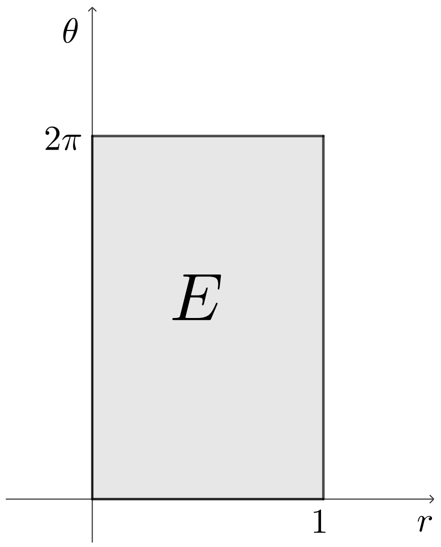
$$E = \{ (r,\theta) \ |\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ 0 \leqq r \leqq 1 \}$$

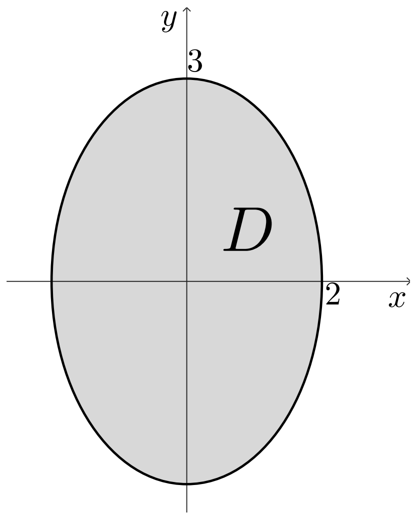
が xy 平面の閉領域 D に変換される．この変換の Jacobian は

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3r\cos\theta \end{vmatrix} = 6r$$

なので，2 重積分は次のように計算できる．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)\ dxdy = \iint_E r^2\,|J(r,\theta)|\ drd\theta = 6\iint_E \left(4\cos^2\theta + 9\sin^2\theta\right) r^3\ drd\theta$$
$$= 6\left(\int_0^{2\pi} \left(9 - 5\cos^2\theta\right)\ d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\ dr\right) = \frac{39\pi}{2}$$





(5) $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy, \quad D = \{\,(x,y)\ \mid\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1\,\}$

変数変換 $\begin{cases} x = u^2 \\ y = v^2 \end{cases}$ によって，uv 平面の閉領域

$$E = \{\,(u,v)\ \mid\ u+v \leqq 1,\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1\,\}$$

が xy 平面の閉領域 D に変換される．この変換の Jacobian は

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4uv$$

なので，2 重積分は

$$\iint_D xy\ dxdy = \iint_E u^2v^2|J(u,v)|\ dudv = \iint_E 4u^3v^3\ dudv$$

と書き換えられる．ここで，E は縦線集合として

$$E = \{\,(u,v)\ \mid\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1-u\,\}$$

と書けるので，最終的に 2 重積分は次のように計算できる．

$$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^1 u^3 \left(\int_0^{1-u} 4v^3\ dv\right) du = \int_0^1 u^3\,(1-u)^4\ du = \frac{1}{280}$$