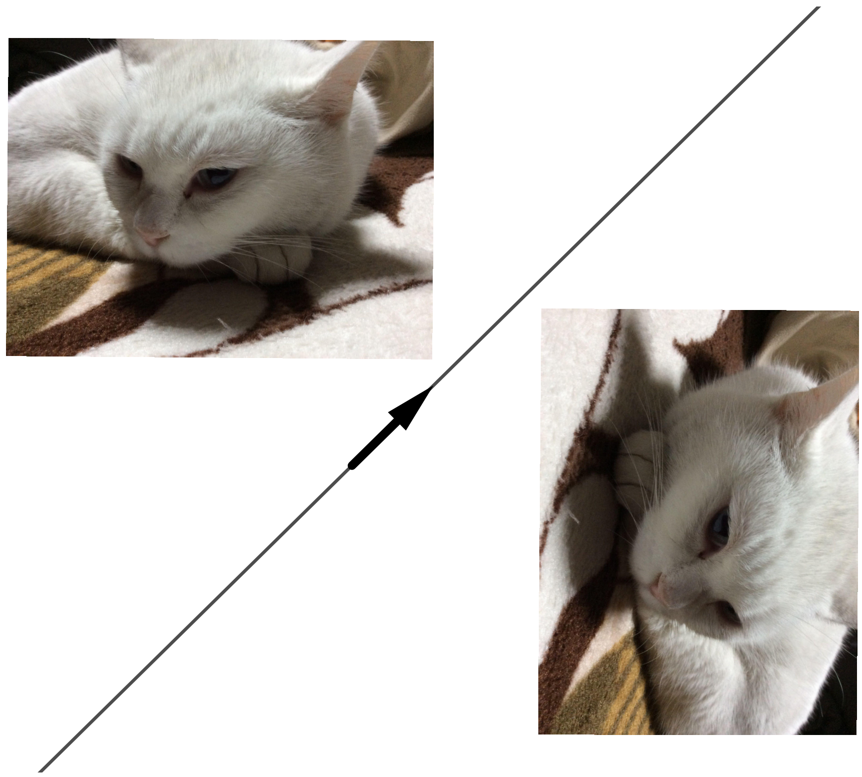
線形代数たっぷり 平面と空間の合同変換

内海 和樹

2023 年 10 月 23 日



はじめに

平面と空間の合同変換を線形代数をふんだんに使って分類してみました．はじめに合同変換を一般次元 $\mathbb{R}^n$ において定義しますが，過度の抽象化を避けるために，一般次元の話は $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$（ついでに $\mathbb{R}$）の後に展開しています．そのため，平面と空間に関しては別々に読めるようになっているはずです．

$\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離のもとでの合同変換を分類することは，結局の所 n 次直交行列を分類することに尽きるのだなあ，と感じました．

$\mathbb{R}^4$ の合同変換の分類についてもいずれまとめたいと思ってます．やる気が湧いたら加筆します．

記号・記法

- $\mathbb{R}^n$ の標準内積を $(\ ,\ )$ で表す．つまり，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ である．
- $\mathbb{R}^n$ の標準内積から定まるノルムを $\|\ \|$ で表す．つまり，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ である．
- 線形空間の基底は順序付きの組として $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ のように書く．例えば，$\mathbb{R}^3$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$ は別の基底として扱う．
- E を単位行列とし，次数 n を明示したいときは E_n と書く．
- 行列 A に対応する線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ を T_A で表す．
- 正方行列 A の固有値 λ の固有空間を $V_A(\lambda)$ で表す．なお，λ が A の固有値でないときも便宜上 $V_A(\lambda) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ と見なして同じ記号を用いる．
- $\mathbb{R}^n$ の部分線形空間 V の直交補空間を $V^\perp$ で表す：

$$V^\perp := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{任意の } \boldsymbol{y} \in V \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \right\}$$

- 対角成分（ブロック）が順に $a_1, \ldots, a_n$ である対角行列を $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ で表す：

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{bmatrix}$$

- 行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す．
- 直交行列 A, B が向きを保って同じ標準形に標準化されることを $A \sim B$ で表す．

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\iff} B = {}^tPAP \text{ かつ } \det(P) = 1 \text{ となる直交行列 } P \text{ が存在する}$$

- $\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積も $(\ ,\ )$ で表す．つまり，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$ である．ここで，$\overline{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の成分を全て複素共役で置き換えたベクトルを表す．
- 行列 X の随伴行列を X^* で表す．つまり，$X^* := {}^t\overline{X}$ である．
- 虚数単位は $\mathbf{i}$ で表す．アルファベットの i は添字等で使いたいので，書体を変えて区別する．
- $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 V とベクトル $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ によって

$$W = \boldsymbol{v}_0 + V := \{\, \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V \,\}$$

  の形に表せる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W を $\mathbb{R}^n$ のアフィン部分空間という．このとき，アフィン部分空間 W の次元を線形空間 V の次元により定義する．つまり，$\dim W := \dim V$ とする．

1　合同変換とは

$\mathbb{R}^n$ を n 次元列ベクトルのなす実線形空間とする．また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ によって内積を定める．さらに，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ によってノルムを定める．

例えば，平面ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のように書き，内積とノルムは

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

である．2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はノルムを用いて

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

と書ける．この距離を保つ変換が合同変換である．つまり，合同変換は次のように定義される．なお，列ベクトルと点を同一視し，$\mathbb{R}^n$ の元は適宜ベクトルと見なしたり点と見なしたりする．

定義. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

を満たすとき，f を $\mathbb{R}^n$ の合同変換という．

定理 1.1. (1) ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．
(2) 直交変換，すなわち，内積を保つ $\mathbb{R}^n$ の線形変換は合同変換である．

証明 (1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$\|t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) - t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{y})\| = \|(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ．よって，$t_{\boldsymbol{b}}$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

(2) f を $\mathbb{R}^n$ の直交変換とする．f は内積を保つので，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 = \|f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|^2 = (f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

が成り立つ．よって，f は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

□

合同変換と合同変換を合成するとやはり合同変換である．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 1.2. $\mathbb{R}^n$ の 2 つの合同変換の合成は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

証明 $\mathbb{R}^n$ の合同変換 f_1, f_2 を任意にとる．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f_1(f_2(\boldsymbol{x})) - f_1(f_2(\boldsymbol{y}))\| = \|f_2(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つので，合成 $f_1 \circ f_2$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．　□

直交変換は線形変換なので原点を保つ合同変換である．この逆，すなわち，次が成り立つ．

定理 1.3. 原点を保つ合同変換は線形変換であり，従って，直交変換である．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ の合同変換とし，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x})\|=\|f(\boldsymbol{x})-\mathbf{0}\|=\|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\|=\|\boldsymbol{x}-\mathbf{0}\|=\|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つので，f はノルムを保つ．これと内積とノルムの関係から任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))&=\frac{1}{2}\left(\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2-\|f(\boldsymbol{x})\|^2-\|f(\boldsymbol{y})\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2\right)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

が成り立つので，f は内積を保つ．以上から，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ と任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2=&\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2+\|f(\boldsymbol{x})\|^2+\|f(\boldsymbol{y})\|^2\\&-2\left(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x})\right)-2\left(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{y})\right)+2\left(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\right)\\=&\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\\&-2\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\right)-2\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\right)+2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\\=&\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=0,\\\|f(k\boldsymbol{x})-kf(\boldsymbol{x})\|^2=&\|f(k\boldsymbol{x})\|^2-2\left(f(k\boldsymbol{x}),kf(\boldsymbol{x})\right)+\|kf(\boldsymbol{x})\|^2\\=&\|k\boldsymbol{x}\|^2-2k\left(f(k\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x})\right)+k^2\|f(\boldsymbol{x})\|^2\\=&\|k\boldsymbol{x}\|^2-2k\left(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)+k^2\|\boldsymbol{x}\|^2=0\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，f は線形変換である．さらに，f は内積を保つので直交変換である．　□

この定理から，任意の合同変換は直交行列とベクトルによって表せる．すなわち，次が成り立つ．

定理 1.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換 f は，n 次直交行列 A と n 次ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ によって

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

と一意的に表せる．逆に，この形で表せる写像は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換とする．$f(\mathbf{0})=\boldsymbol{b}$ とおく．定理 1.1(1) と定理 1.2 よりベクトル $-f(\mathbf{0})$ による平行移動 $t_{-f(\mathbf{0})}$ と f の合成 $g=t_{-\boldsymbol{b}}\circ f$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．$g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ なので，定理 1.3 より g は直交変換である．従って，ある n 次直交行列 A によって $g(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と表せる．よって，$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ である．また，

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

と表せたとすると，$f(\mathbf{0})=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ である．従って，f に対して直交変換 g が一意的に定まるので，対応する直交行列も一意的に定まるから $A=B$ である．後半の主張は明らかである．　□

2　平面の合同変換

f を平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換とする．定理 1.4 から 2 次直交行列 A と平面ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ によって

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

と書ける．f はその固定点集合によって特徴づけられる．

2.1　固定点集合

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を f の固定点という．f の固定点集合

$$\mathrm{Inv}(f) := \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \,\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

が平面上でどのような図形になるかを考えよう．

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

であるから，$\mathrm{Inv}(f)$ は 2 変数連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体のなす集合である．従って，$\mathrm{Inv}(f)$ は空集合，1 点集合，直線，平面全体のいずれかである．特に，f が恒等変換のとき，またそのときに限り，$\mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^2$ となる．すなわち，

$$A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^2$$

である．また，

$$A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \emptyset$$

である．すなわち，$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{b}$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ は固定点を持たない．

A が 1 を固有値に持たないとき，$\det(E - A) \neq 0$ だから $E - A$ は正則である．従って，このとき連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯一つの解 $\boldsymbol{x} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ を持つから，$\mathrm{Inv}(f)$ は 1 点集合である．すなわち，以下が成り立つ．

$$1 \text{ は } A \text{ の固有値でない } \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \left\{\, (E - A)^{-1}\boldsymbol{b} \,\right\}$$

A が 1 を固有値に持つとき，その固有空間 $V_A(1)$ は同次形連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間に等しい．さらに，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つなら，その一般解は特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ $(\boldsymbol{x}_1 \in V_A(1))$ と書ける．すなわち，

$$1 \text{ が } A \text{ の固有値かつ } \mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \{\, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_1 \in V_A(1) \,\}$$

である．特に，$\dim V_A(1) = 1$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{x}_0$ を通り $V_A(1)$ に平行直線である．なお，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たければ，$\mathrm{Inv}(f)$ は空集合である．

2.2　平面の直交変換

よく知られているように，2 次直交行列は以下のどちらか一方の形に書ける．

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

S_θ に対応する直交変換は図 1 のように原点を中心とする角度 θ の回転であり，R_θ に対応する直交変換は図 2 のように原点で x 軸と角度 $\frac{\theta}{2}$ で交わる直線に関する鏡映である．ただし，角度は反時計回りを正の向きとする．

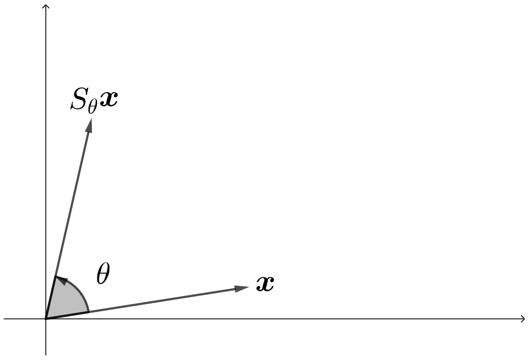


図 1　原点を中心とする θ 回転

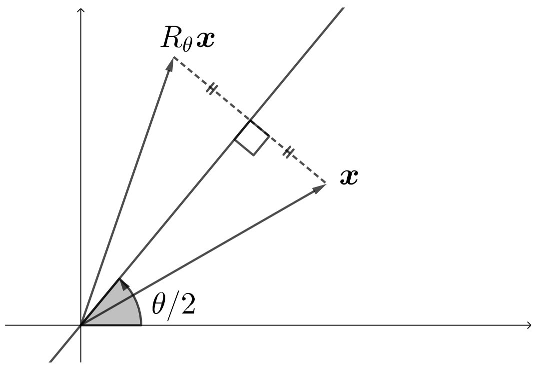


図 2　原点で x 軸と $\theta/2$ で交わる直線に関する鏡映

2 次直交行列全体の集合を $O(2)$ と書く．また，$SO(2) := \{\, A \in O(2) \mid \det A = 1 \,\}$ とする．$\det S_\theta = 1$, $\det R_\theta = -1$ であり，直交行列の行列式は ± 1 だから，

$$SO(2) = \{\, S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \,\}, \quad O(2) \setminus SO(2) = \{\, R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \,\}$$

である．回転同士，鏡映同士の合成は回転であり，回転と鏡映の合成は鏡映である．具体的には

$$S_\theta S_\phi = S_{\theta+\phi}, \quad R_\theta R_\phi = S_{\theta-\phi}, \quad S_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad R_\theta S_\phi = R_{\theta-\phi}$$

である．特に，$S_\theta = R_\theta R_0, R_\theta^2 = E$ である．さらに，

$$S_{\frac{\theta}{2}}^{-1} R_\theta S_{\frac{\theta}{2}} = S_{-\frac{\theta}{2}} R_\theta S_{\frac{\theta}{2}} = R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

より，R_θ は $S_{\frac{\theta}{2}}$ により直交対角化されることがわかる．これより（あるいは直接的な計算により）R_θ の固有値は $1, -1$ で，各々の固有空間 $V_\theta(1), V_\theta(-1)$ は互いに直交し，

$$V_\theta(1) = \left\langle \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_\theta(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right\rangle$$

であることもわかる．なお，$V_\theta(1)$ が鏡映の軸である．また，S_θ は実固有値を持たない．

2.3　平面の合同変換の分類

平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

は直交行列 A と 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ によって表 1 のように 5 種に分類できる．定理 2.1 で示すように，平面の合同変換は 3 個以下の鏡映の合成として表せる．表 1 の 4 列目はその鏡映の最小個数を表しており，この分類は平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換をそれを合成する鏡映の個数と固定点集合によって分類したものとも一致している．

名前	A	$\boldsymbol{b}$	鏡映の最小個数	固定点集合
恒等変換	E	$\boldsymbol{0}$	0	$\mathbb{R}^2$
平行移動	E	$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$	2	空集合
回転	$S_\theta(\neq E)$	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$	2	回転の中心
鏡映	R_θ	$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$	1	鏡映軸
滑り鏡映	R_θ	$\boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1)$	3	空集合

表 1　平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換の分類表

ここでは，実際に平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換 f が表 1 のいずれかに分類され，またそれで全てであることを確かめていこう．恒等変換と平行移動に関しては明らかなので，以下 f は恒等変換でも平行移動でもない，すなわち，$A \neq E$ とする．また，直交行列 S_θ, R_θ に対応する直交変換をそれぞれ s_θ, r_θ と表す．

2.3.1　回転

$A = S_\theta \in SO(2)$ $(S_\theta \neq E)$ とする．このとき f の固定点は 1 点のみであり，f はその固定点を中心とする θ 回転である．このことを実際に確かめてみよう．

S_θ は 1 を固有値に持たないので，$\det(E - S_\theta) \neq 0$ である．従って，$E - S_\theta$ は正則なので

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow S_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - S_\theta)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = (E - S_\theta)^{-1}\boldsymbol{b}$$

である．従って，f の固定点は $\boldsymbol{c} := (E - S_\theta)^{-1}\boldsymbol{b}$ のみである．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} = S_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$$

である．よって，確かに f は $\boldsymbol{c}$ を中心とする θ 回転であることがわかる（図 3）．また，これより

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ s_\theta \circ t_{-\boldsymbol{c}}$$

とも表せる．すなわち，$\boldsymbol{c}$ を中心とする回転は「一旦 $-\boldsymbol{c}$ 平行移動し，原点を中心に回転させた後に再び $\boldsymbol{c}$ 平行移動する変換」と言い換えることもできる．

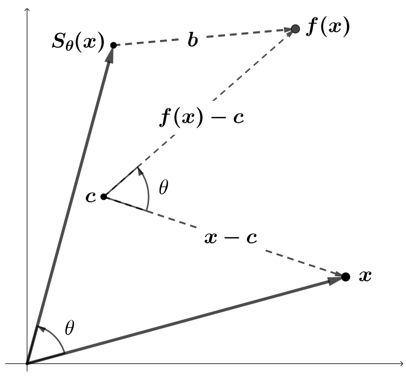


図 3　$\boldsymbol{c}$ を中心とする θ 回転

2.3.2　鏡映と滑り鏡映

$A = R_\theta \in O(2) \setminus SO(2)$ とする．このとき，$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線であり，f はこの直線に関する鏡映である．一方，$\boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1)$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合であり，f は滑り鏡映である．これを実際に確かめていこう．

直交変換 r_θ による平面の固有空間分解 $\mathbb{R}^2 = V_\theta(1) \oplus V_\theta(-1)$ によって $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_\theta(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_\theta(-1) \tag{2.1}$$

と分解する．$R_\theta^2 = E$ であるから，

$$x \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = R_\theta \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{0}$$

である．従って，

$$\mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$$

である．これより，$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ かそうでないかによって合同変換 f を分けることができる．

まず，$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ とする．$\mathrm{Inv}(f)$ が空集合でないので，連立 1 次方程式

$$(E - R_\theta)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は解を持つ．R_θ は 1 を固有値に持つので $\det(E - R_\theta) = 0$ であり，$E - R_\theta \neq O$ だから，$\mathrm{rank}(E - R_\theta) = 1$ である．従って，2.1 節で見たように $\mathrm{Inv}(f)$ は直線である．特に，

$$f\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = R_\theta\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{2}$$

より $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Inv}(f)$ だから $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通る．さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (R_\theta \boldsymbol{x}, R_\theta \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

より $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{b}\|^2/2$ が成り立つから $\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}, \boldsymbol{b}\right) = 0$ となり，$\mathrm{Inv}(f)$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する．つまり，$\mathrm{Inv}(f)$ は $V_\theta(-1)^\perp = V_\theta(1)$ に平行である．

f は直線 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映である．実際，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と任意の $\boldsymbol{p} \in V_\theta(1)$ に対して，

$$(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (R_\theta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (R_\theta \boldsymbol{x}, R_\theta \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = 0,$$

$$f\left(\frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}\right) = R_\theta\left(\frac{R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} + R_\theta \boldsymbol{x}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2} = \frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}$$

であるから，$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ が $V_\theta(1)$ に，従って $\mathrm{Inv}(f)$ に，直交し，$f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点が $\mathrm{Inv}(f)$ 上にあるので，f は直線 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映である（図 4）．

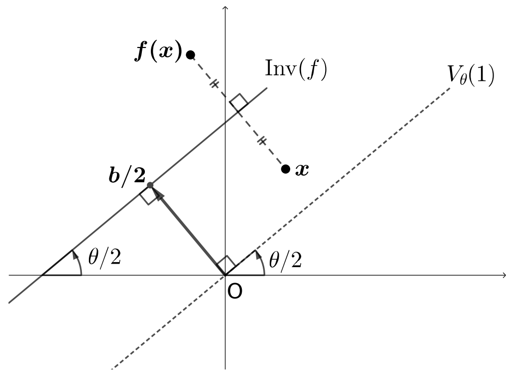


図 4　直線 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映

また，任意の $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = R_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

が成り立つから，

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ r_\theta \circ t_{-\boldsymbol{c}}$$

である．すなわち，$\boldsymbol{c}$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線に関する鏡映は「一旦 $-\boldsymbol{c}$ 平行移動し，$V_\theta(1)$ に関する鏡映移動をした後に再び $\boldsymbol{c}$ 平行移動する変換」と言い換えることもできる（図 5）．

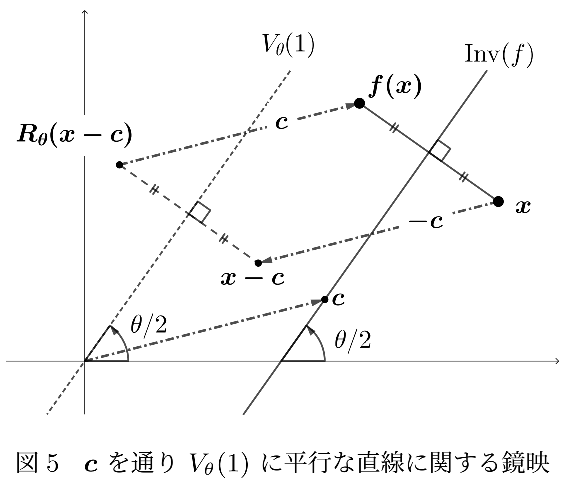


図 5　$\boldsymbol{c}$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線に関する鏡映

次に，$\boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1)$ とする．このとき f は滑り鏡映であることを確かめよう．なお，平面上の滑り鏡映の定義は次の通りである．

定義. 平面上の直線 L に関する鏡映 g と L に平行なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{c}}$ との合成 $t_{\boldsymbol{c}} \circ g$ を L と $\boldsymbol{c}$ に関する（平面上の）滑り鏡映または並進鏡映という．この定義に従えば，滑り鏡映は鏡映（$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のとき）を含むのだが，鏡映でないもののみを滑り鏡映と呼ぶことにする．

$\boldsymbol{b}$ を式 (2.1) のように分解すると，$\boldsymbol{b}^+ \neq \boldsymbol{0}$ である．従って，

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+$$

である．$g(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とおくと，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ である．$\boldsymbol{b}^- \in V_\theta(-1)$ だから g は直線 $\mathrm{Inv}(g)$ に関する鏡映である．また，$\boldsymbol{b}^+ \in V_\theta(1)$ より $\boldsymbol{b}^+$ は $\mathrm{Inv}(g)$ と平行である．よって，f は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な直線とベクトル $\boldsymbol{b}^+$ に関する滑り鏡映である（図 6）．

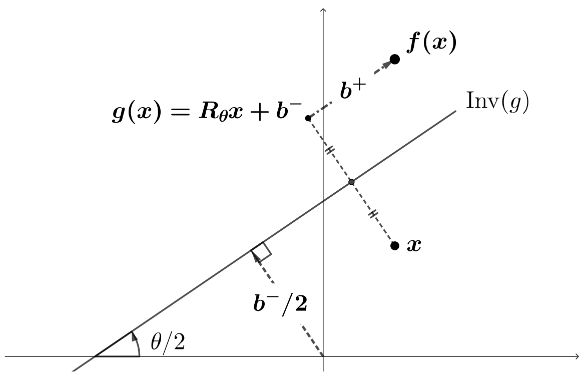


図 6　滑り鏡映

なお，鏡映と平行移動を合成する順番はどちらでもよい．実際，$R_\theta \boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{b}^+$ より

$$g\left(t_{\boldsymbol{b}^+}(\boldsymbol{x})\right) = R_\theta\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+\right) + \boldsymbol{b}^- = \left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = t_{\boldsymbol{b}^+}\left(g(\boldsymbol{x})\right)$$

であるから，$g \circ t_{\boldsymbol{b}^+} = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ である．

最後に，内積による鏡映と滑り鏡映の判別方法をまとめておこう．R_θ の単位固有ベクトルに

$$\boldsymbol{p}_\theta^+ = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \in V_\theta(1), \quad \boldsymbol{p}_\theta^- = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \in V_\theta(-1)$$

と名前を付ける．$\left(\boldsymbol{p}_\theta^+, \boldsymbol{p}_\theta^-\right)$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底だから式 (2.1) における $\boldsymbol{b}^+, \boldsymbol{b}^-$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{b}^+ = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+)\boldsymbol{p}_\theta^+, \quad \boldsymbol{b}^- = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^-)\boldsymbol{p}_\theta^-$$

と表せる．これより，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は以下の 2 つに分けられる．

- $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+\right) = 0$ のとき，f は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線に関する鏡映である．
- $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+\right) \neq 0$ のとき，f は $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^-\right)\boldsymbol{p}_\theta^-/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線とベクトル $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+)\boldsymbol{p}_\theta^+$ に関する滑り鏡映である．

2.4　鏡映の個数

平面の合同変換それぞれに対し，それを合成する鏡映を全て調べ上げ，分類表 1 を完成させよう．

定理 2.1. 平面 $\mathbb{R}^2$ の任意の合同変換は 3 個以下の鏡映の合成として表せる．特に，各合同変換に対してそれを合成する鏡映の最小個数は表 1 にある通りである．

証明 恒等変換は 0 個，鏡映は 1 個の鏡映の合成であり，またそれ以外の合同変換は 1 個以下の鏡映の合成として表せないは明らかである．残りの平行移動，回転，滑り鏡映に関しては以下に続く補題 2.1，補題 2.2，補題 2.3 により証明が完成する．□

補題 2.1. (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ ($\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$) は平行な 2 直線に関する 2 個の鏡映の合成である．このとき，2 つの鏡映軸は共に $\boldsymbol{b}$ に直交し，その距離は $\|\boldsymbol{b}\|/2$ である．

(2) 逆に，平面 $\mathbb{R}^2$ の平行な 2 直線 L_1, L_2 ($L_1 \neq L_2$) に関する鏡映 g_1, g_2 の合成 $g_2 \circ g_1$ は平行移動である．移動方向は L_1 から L_2 の方へ両直線に直交する方向で，移動距離は 2 直線の距離の 2 倍である．

証明 (1) $\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ をとる．このとき，合同変換 $g(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_\theta(1)$ を通る直線 L に関する鏡映である．従って，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g\left(r_\theta(\boldsymbol{x})\right) = R_\theta\left(R_\theta \boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})$$

であるから $t_{\boldsymbol{b}}$ は 2 個の鏡映の合成 $g \circ r_\theta$ である．また，図 7 のように g, r_θ の鏡映軸 $L, V_\theta(1)$ はそれぞれ $\boldsymbol{b}/2, \boldsymbol{0}$ を通り共に $\boldsymbol{b}$ に直交し，2 直線の距離は $\|\boldsymbol{b}\|/2$ である．

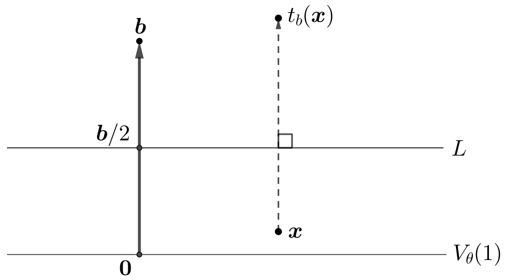


図 7　平行移動は平行な 2 直線に関する鏡映の合成である．

(2) 逆に，平行な 2 直線 L_1, L_2 ($L_1 \neq L_2$) に関する鏡映の合成が平行移動となることを示す．L_1, L_2 が x 軸とのなす角を $\theta/2$ とすると，L_1, L_2 に関する鏡映 g_1, g_2 は

$$g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in V_\theta(-1),\ \boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2)$$

と書ける．ただし，L_1, L_2 はそれぞれ $\boldsymbol{b}_1/2, \boldsymbol{b}_2/2$ を通る．これより任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_2 \circ g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta\left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1\right) + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$$

だから，$g_2 \circ g_1$ は平行移動 $t_{\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1}$ である．また，図 8 のようにその移動方向は L_1 から L_2 の方へ両直線に直交する方向であり，移動距離 $\|\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1\|$ は L_1, L_2 の距離の 2 倍である．　□

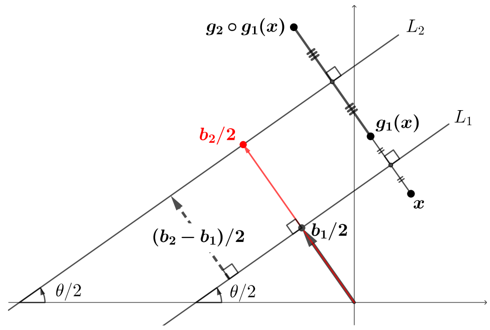


図 8　鏡映軸が平行な 2 つの鏡映の合成は平行移動である．

補題 2.2. (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の θ 回転は回転の中心で交わる 2 直線に関する 2 個の鏡映の合成である．このとき，鏡映軸同士のなす角は $\theta/2$ である．

(2) 逆に，平面 $\mathbb{R}^2$ の平行でない 2 直線 L_1, L_2 に関する鏡映 g_1, g_2 の合成 $g_2 \circ g_1$ は 2 直線の交点を中心とする L_1 から L_2 の方への回転である．回転角は 2 直線のなす角の 2 倍である．

証明 (1) f を $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ を中心とする平面の θ 回転とする．$f(\boldsymbol{x}) = S_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$ と書ける．

$$g_1(\boldsymbol{x}) = R_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = R_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \quad (\theta \neq 0)$$

とすると，g_1 は x 軸に平行で $\boldsymbol{c}$ を通る直線 L_1 に関する鏡映であり，g_2 は $V_\theta(1)$ に平行で $\boldsymbol{c}$ を通る直線 L_2 に関する鏡映である．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_2 \circ g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta\left(R_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\right) + \boldsymbol{c} = S_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = f(\boldsymbol{x})$$

より，f は 2 個の鏡映の合成 $g_2 \circ g_1$ である．図 9 のように鏡映軸 L_1, L_2 のなす角は $\theta/2$ である．

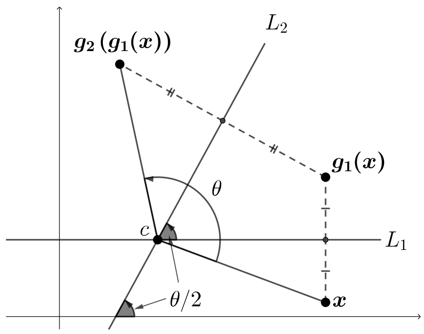


図 9　回転は平行でない 2 直線に関する鏡映の合成である．

(2) 逆に，平行でない 2 直線 L_1, L_2 に関する鏡映の合成が回転となることを示す．L_1, L_2 が x 軸

となす角をそれぞれ $\theta/2, \phi/2$ とすると，L_1, L_2 に関する鏡映 g_1, g_2 は

$$g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = R_\phi \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 \quad (\boldsymbol{b}_1 \in V_\theta(-1),\ \boldsymbol{b}_2 \in V_\phi(-1))$$

と書ける．ただし，L_1, L_2 はそれぞれ $\boldsymbol{b}_1/2, \boldsymbol{b}_2/2$ を通る．これより任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_2 \circ g_1(\boldsymbol{x}) = R_\phi(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1) + \boldsymbol{b}_2 = S_{\phi-\theta}\boldsymbol{x} + R_\phi \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

だから，$g_2 \circ g_1$ は $\boldsymbol{c} := (E - S_{\phi-\theta})^{-1}(R_\phi \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)$ を中心とする $\phi - \theta$ 回転である．鏡映軸 L_1, L_2 の交点を $\boldsymbol{c}' \in L_1 \cap L_2$ とすると，$\boldsymbol{c}' \in \mathrm{Inv}(g_2 \circ g_1)$ である．回転の固定点は中心点だけなので $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c}$ である．また，図 10 のように回転方向は L_1 から L_2 の方へ，回転角 $\phi - \theta$ は L_1 と L_2 のなす角の 2 倍である．□

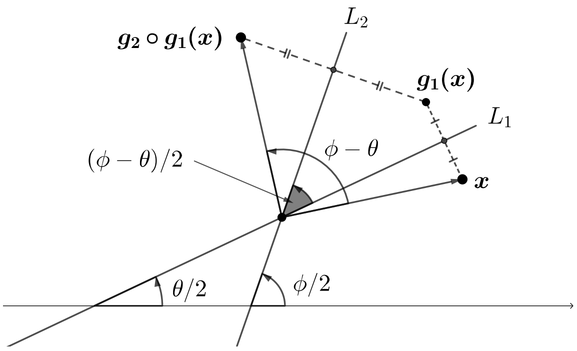


図 10　鏡映軸が平行でない 2 つの鏡映の合成は回転である．

補題 2.3. 平面 $\mathbb{R}^2$ の滑り鏡映は 3 個の鏡映の合成として表せる．また，滑り鏡映は 2 個以下の鏡映の合成としては表せない．

証明 f を平面 $\mathbb{R}^2$ の滑り鏡映とする．$f(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(\theta \neq 0,\ \boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1))$ と書ける．

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_\theta(1), \quad \boldsymbol{b}^- \in V_\theta(-1), \quad \boldsymbol{b}^+ \neq \boldsymbol{0}$$

とし，$g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とする．g_1 は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線 L_1 に関する鏡映である．

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = t_{\boldsymbol{b}^+}(g_1(\boldsymbol{x}))$$

より，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g_1$ である．さらに，補題 2.1(1) より平行移動 $t_{\boldsymbol{b}^+}$ は図 11 のように平行な 2 直線 L_2, L_3 に関する鏡映 g_2, g_3 の合成として表せる．実際，L_2, L_3 をそれぞれ $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}^+/2$ を通り共に $\boldsymbol{b}^+$ に平行な直線とすれば $t_{\boldsymbol{b}^+} = g_2 \circ g_1$ である．よって，

$$f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$$

より f は 3 個の鏡映の合成である．また，補題 2.1(2) と補題 2.2(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので，滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない．□

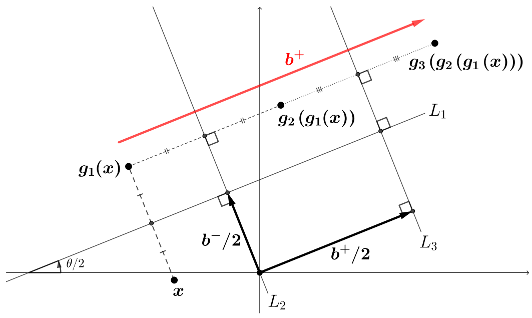


図 11　滑り鏡映は 3 個の鏡映の合成である．

2.5　平面の合同変換と 3 次正方行列

平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は 3 次正方行列と 3 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，合同変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$，$f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成

$$f_1 \circ f_2(\boldsymbol{x}) = f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = f_1(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2) = A_1A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2$$

は 3 次正方行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．これにより平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換を 3 次正方行列の演算で記述できる．

例えば，2 つの合同変換

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の合成 $f_1 \circ f_2$ は

$$f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるが，これが 3 次正方行列同士の積として

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と計算できる．この右辺の 3 次正方行列の左上部分と右上部分が，それぞれ合成 $f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の直交行列 A と平面ベクトル $\boldsymbol{b}$ である．このように全てを行列演算にしてしまうことで計算機で合同変換が扱いやすくなる．なお，これは平面上のアフィン変換や射影平面上の射影変換を 3 次正方行列によって表現する手法の特殊な場合でもある．

演習問題 2

1. 次の平面の合同変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の形に書き下そう．
   (1) 点 (c_1, c_2) を中心とする θ 回転
   (2) 直線 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ に関する鏡映
   (3) 点 (c_1, c_2) を通り x 軸とのなす角が θ の直線と，x 軸とのなす角が θ で大きさが $k > 0$ のベクトルに関する滑り鏡映

2. 次の平面の合同変換が分類表 1 のどれに当てはまるか判定しよう．また，回転に対しては中心と回転角を，鏡映に対しては軸の方程式を，滑り鏡映に対しては軸の方程式と平行移動ベクトルを明示しよう．

   (1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (2) $f_2(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

   (3) $f_3(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (4) $f_4 = f_1 \circ f_2$

   (5) $f_5 = f_2 \circ f_1$

   (6) $f_6(\boldsymbol{x}) = f_2\left(\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

   (7) $f_7(\boldsymbol{x}) = f_3(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (8) $f_8 = f_7 \circ f_2$

3. 適当なプログラミング環境のもとで，2 次直交行列 A と 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたときに平面の合同変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

   が表 1 のどれに当てはまるか判定するプログラムを作成しよう．また，回転に対しては中心と回転角，鏡映に対しては軸の方程式，滑り鏡映に対しては軸の方程式と平行移動ベクトルなどの情報も出力しよう．

4. 平面の合同変換 f_1, f_2 の合成 $f_1 \circ f_2$ を分類しよう．

3　空間の合同変換

f を空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換とする．定理 1.4 から 3 次直交行列と空間ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ によって

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

と書ける．f はその固定点集合によって特徴づけられる．なお，以下 $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は右手系をなすとする．

3.1　固定点集合

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を f の固定点という．f の固定点集合

$$\mathrm{Inv}(f) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \right\}$$

が空間 $\mathbb{R}^3$ の中でどのような図形になるかを考えよう．

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

であるから，$\mathrm{Inv}(f)$ は 3 変数連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体のなす集合である．従って，$\mathrm{Inv}(f)$ は空集合，1 点集合，直線，平面，空間全体のいずれかである．特に，f が恒等変換のとき，またそのときに限り，$\mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^3$ となる．すなわち，

$$A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^3$$

である．また，

$$A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \emptyset$$

である．すなわち，$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{b}$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ は固定点を持たない．

A が 1 を固有値に持たないとき，$\det(E - A) \neq 0$ だから $E - A$ は正則である．従って，このとき連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯一つの解 $\boldsymbol{x} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ を持つので，$\mathrm{Inv}(f)$ は 1 点集合である．すなわち，以下が成り立つ．

$$1 \text{ は } A \text{ の固有値でない } \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \left\{ (E - A)^{-1}\boldsymbol{b} \right\}$$

A が 1 を固有値に持つとき，その固有空間 $V_A(1)$ は同次形連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間に等しい．さらに，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つなら，その一般解は特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ $(\boldsymbol{x}_1 \in V_A(1))$ と書ける．すなわち，

$$1 \text{ が } A \text{ の固有値かつ } \mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \{ \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_1 \in V_A(1) \}$$

である．特に, $\dim V_A(1) = 2$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{x}_0$ を通り $V_A(1)$ に平行な平面であり, $\dim V_A(1) = 1$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{x}_0$ を通り $V_A(1)$ に平行な直線である．なお，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たなければ，$\mathrm{Inv}(f)$ は空集合である．

3.2 空間の直交変換

3 次直交行列全体の集合を $O(3)$ と書く．また，$SO(3) := \{\, A \in O(2) \mid \det A = 1 \,\}$ とする．

3 次直交行列は固有値の絶対値が 1 で，以下のどちらか一方の形に標準化できることを示そう．

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

定理 3.1. 3 次直交行列 A は $\det A\ (= \pm 1)$ を固有値に持つ．

証明 A を 3 次直交行列とする．A の固有方程式 $\det(xE - A) = 0$ は実数係数 3 次方程式なので，中間値の定理から実解を持つ．つまり，A は実固有値 α を持つ．直交変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は内積を保つから，固有値 α の固有ベクトル $\boldsymbol{x}\,(\neq \boldsymbol{0})$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{x})) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

より $\alpha^2 = 1$ である．従って，$\alpha = 1$ または $\alpha = -1$ である．

A の 3 個の固有値が全て実数の場合，可能な組み合わせは，$1, 1, 1$ か $1, -1, -1$ か $-1, 1, 1$ か $-1, -1, -1$ であり，全固有値の積は $\det A$ に等しいので，いずれも $\det A$ は A の固有値である．

3 個の固有値が実数 $\alpha\,(= \pm 1)$ と 2 個の互いに共役な複素数 $\lambda, \overline{\lambda}$ の場合，$|\det A| = 1$ なので

$$1 = |\det A| = |\alpha\lambda\overline{\lambda}| = |\lambda\overline{\lambda}| = \lambda\overline{\lambda}$$

である．よって，$\det A = \alpha\lambda\overline{\lambda} = \alpha$ より $\det A$ は A の固有値である． □

定理 3.2. 任意の $A \in O(3)$ に対して，以下を満たす直交行列 $P \in SO(3)$ が存在する．

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{cases} S_\theta & (\det A = 1) \\ R_\theta & (\det A = -1) \end{cases}$$

証明 $A \in O(3)$ とし，$\det A = 1$ とする．定理 3.1 より A は 1 を固有値に持つ．$\boldsymbol{p}_3$ を固有値 1 の単位固有ベクトルとし，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ を $\langle \boldsymbol{p}_3 \rangle$ の直交補空間 $\langle \boldsymbol{p}_3 \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^3$ の正規直交基底とすると，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．従って，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$ とすると P は直交行列である．さらに，$\det P = -1$ なら $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を入れ替えることで $\det P = 1$ とできるので $P \in SO(3)$ としてよい．$\mathbb{R}^3$ の直交変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に対して，$T_A(\boldsymbol{p}_3) = A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_3$ だから，

$$(T_A(\boldsymbol{p}_i), \boldsymbol{p}_3) = (T_A(\boldsymbol{p}_i), T_A(\boldsymbol{p}_3)) = (\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_3) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

である．これより，

$$T_A(\boldsymbol{p}_1) = b_{11}\boldsymbol{p}_1 + b_{21}\boldsymbol{p}_2 + b_{31}\boldsymbol{p}_3, \quad T_A(\boldsymbol{p}_2) = b_{12}\boldsymbol{p}_1 + b_{22}\boldsymbol{p}_2 + b_{32}\boldsymbol{p}_3 \quad (b_{ij} \in \mathbb{R})$$

とすると，

$$0 = (T_A(\boldsymbol{p}_1), \boldsymbol{p}_3) = b_{31}, \quad 0 = (T_A(\boldsymbol{p}_2), \boldsymbol{p}_3) = b_{32}$$

であるから，

$$(T_A(\boldsymbol{p}_1), T_A(\boldsymbol{p}_2), T_A(\boldsymbol{p}_3)) = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．すなわち，基底 $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ に関する直交変換 T_A の表現行列は

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．正規直交基底に関する直交変換の表現行列は直交行列なので，$P^{-1}AP$ は直交行列である．これより，2 次正方行列 $[b_{ij}]$ は直交行列である．さらに，$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det A = 1$ より $\det\,[b_{ij}] = 1$ である．よって，ある $\theta \in \mathbb{R}$ によって

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と書ける．$\det A = -1$ のときは固有値 -1 の単位固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_3$ として同様に示せる．　□

定義． $A, B \in O(3)$ に対して $B = {}^tPAP$ となる $P \in SO(3)$ が存在するとき，$A \sim B$ と書く．

$A \in O(3)$ が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$ によって S_θ, R_θ に標準化されるとき，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底である．このとき，$\mathbb{R}^3$ の直交変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は以下の 3 つに分けられる．ただし，回転の向きは $\boldsymbol{p}_3$ の方向に進む右ねじの回転方向を正とする．

- $A \sim S_\theta$ のとき，直交変換 T_A は直線 $V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle$ を軸とする θ 回転である（図 12）．
- $A \sim R_0$ のとき，直交変換 T_A は平面 $V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$ に関する鏡映である（図 13）．
- $A \sim R_\theta \neq R_0$ のとき，直交変換 T_A は直線 $V_A(-1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle$ を軸とする θ 回転と平面 $V_A(-1)^\perp = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$ に関する鏡映の合成，すなわち，回転鏡映である．

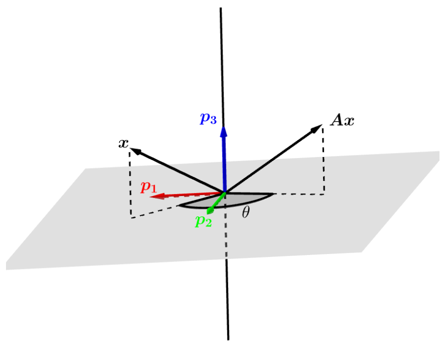


図 12　$\boldsymbol{p}_3$ を軸とする回転角 θ の回転

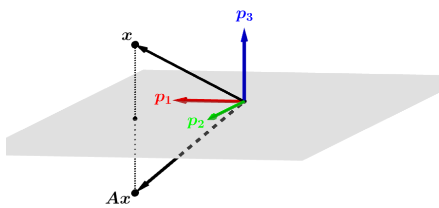


図 13　平面 $\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$ に関する鏡映

また，3 次直交行列の標準形同士は以下の関係式を満たす．特に，$S_\theta = R_\theta R_0$，$R_0^2 = E$ である．

$$S_\theta S_\phi = R_\theta R_\phi = S_{\theta+\phi}, \quad S_\theta R_\phi = R_\phi S_\theta = R_{\theta+\phi}$$

3.3 空間の合同変換の分類

空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

は直交行列 A の標準形と 3 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ によって表 2 のように 7 種に分類できる．定理 3.6 で示すように，$\mathbb{R}^3$ の合同変換は 4 個以下の鏡映の合成として表せる．表 2 の 4 列目はその鏡映の最小個数を表しており，この分類は $\mathbb{R}^3$ の合同変換をそれを合成する鏡映の個数と固定点集合の次元によって分類したものと一致している．

名前	A の標準形	$\boldsymbol{b}$	鏡映の個数	固定点集合
恒等変換	E	$\boldsymbol{0}$	0	$\mathbb{R}^3$
平行移動	E	$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$	2	空集合
回転	$S_\theta(\neq E)$	$\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$	2	回転軸
螺旋運動	$S_\theta(\neq E)$	$\boldsymbol{b} \notin V_A(1)^\perp$	4	空集合
鏡映	R_0	$\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$	1	鏡映面
滑り鏡映	R_0	$\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$	3	空集合
回転鏡映	$R_\theta(\neq R_0)$	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$	3	中心点

表 2 空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換の分類表

ここでは，実際に $\mathbb{R}^3$ の合同変換 f が表 2 のいずれかに分類され，またそれで全てであることを確かめていこう．恒等変換と平行移動に関しては明らかなので，以下 f は恒等変換でも平行移動でもない，すなわち，$A \neq E$ とする．

3.3.1 回転と螺旋運動

$A \sim S_\theta$ かつ $A \neq E$ とする．このとき，f は回転か螺旋運動である．これを詳しく見ていこう．なお，空間における螺旋運動の定義は以下の通りである．

定義. 空間内の直線 L を軸とする角 θ の回転 g と L に平行なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ による平行移動との合成 $t_{\boldsymbol{c}} \circ g$ を L と $\boldsymbol{c}$ に関する角 θ の螺旋運動という．螺旋運動は回転（$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のとき）を含むのだが，以降は回転でないもののみを螺旋運動と呼ぶことにする．

直交行列 A が直交行列 $P \in SO(3)$ によって標準化される，すなわち，

$$S_\theta = P^{-1}AP = {}^tPAP, \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

とする．$\det P = 1$ なので $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底であり，

$$V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle, \quad V_A(1)^\perp = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$$

である．このとき，次が成り立つ．

定理 3.3. A, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を先の通りとする．このとき，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は回転か螺旋運動である．特に，各々の詳細は次の通りである．

(1) $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ のとき：固定点集合 $\mathrm{Inv}(f)$ は $V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle$ に平行な直線であり，f はこの直線を軸とする回転角 θ の回転である．

(2) $\boldsymbol{b} \notin V_A(1)^\perp$ のとき： f は固定点を持たない．f は回転 $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3$ の軸とベクトル $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}$ による平行移動に関する角 θ の螺旋運動である．このとき，g の回転軸 $\mathrm{Inv}(g)$ は $V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle$ に平行である．

ただし，いずれも回転の向きは $\boldsymbol{p}_3$ の方向に進む右ねじの回転方向を正とする．

以下，定理 3.3 を証明していこう．

まず，f が固定点を持つかどうかは $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ か否かで分かれる．つまり，次が成り立つ．

補題 3.1. 上の状況において，$\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ のとき，そのときに限り，空集合でない．

証明 $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ とする．$\mathbb{R}^3$ の線形変換 $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}$ を考える．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) - (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) - (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) = 0$$

であるから，$g(\mathbb{R}^3) \subset \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle^\perp = V_A(1)^\perp = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$ である．さらに，$\ker g = V_A(1)$ なので線形変換の次元定理より

$$\dim g(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker g = 3 - 1 = 2$$

であるから，$g(\mathbb{R}^3) = V_A(1)^\perp$ である．よって，$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} - A\boldsymbol{c}$ となる $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が存在する．すなわち，$\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f)$ なので $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合でない．

逆に，$\mathrm{Inv}(f)$ が空集合でないとする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して， $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}$ だから

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) - (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) - (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3) = 0$$

である．従って，$\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ である． □

定理 3.3 の証明 (1) $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ とする．補題 3.1 より $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合でない．さらに，$\dim V_A(1) = 1$ なので 3.1 節で見たように $\mathrm{Inv}(f)$ は $V_A(1)$ と平行な直線である．このとき，任意の $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f)$ と任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$$

である．よって，f は $V_A(1)$ に平行な直線 $\mathrm{Inv}(f)$ を軸とする回転角 θ の回転である（図 14）．ただし，回転の向きは $\boldsymbol{p}_3$ の方向に進む右ねじの回転方向を正とする．また，これより

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ T_A \circ t_{-\boldsymbol{c}}$$

とも表せる．すなわち，$\boldsymbol{c}$ を通る直線 L を軸とする回転は「一旦 $-\boldsymbol{c}$ 平行移動し，原点を通り $\mathrm{Inv}(f)$ に平行な直線を軸として回転させた後に再び $\boldsymbol{c}$ 平行移動する変換」とも言い換えるられる．

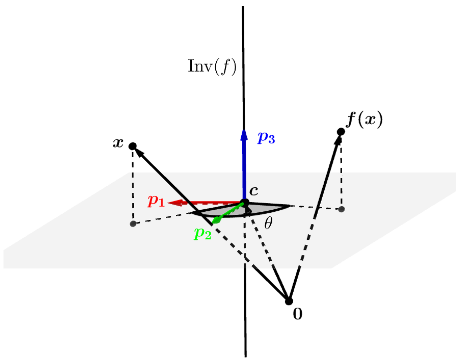


図 14　直線 Inv(f) を軸とする角度 θ の回転

(2) $\boldsymbol{b} \notin V_A(1)^{\perp}$ とする．補題 3.1 より f は固定点を持たない．このとき $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{12} + \boldsymbol{b}_3, \quad \boldsymbol{b}_{12} \in V_A(1)^{\perp} = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle,\ \boldsymbol{b}_3 \in V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle$$

と分解すると，$\boldsymbol{b}_{12} \neq \boldsymbol{0}$ である．従って，

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_{12}) + \boldsymbol{b}_3$$

より f は合同変換 $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_{12}$ と平行移動 $t_{\boldsymbol{b}_3}$ の合成 $t_{\boldsymbol{b}_3} \circ g$ である（図 15）．(1) より g は直線 Inv(g) を軸とする θ 回転であり，$\boldsymbol{b}_3(\neq \boldsymbol{0})$ は Inv(g) と平行だから，f は螺旋運動である．また，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底だから

$$\boldsymbol{b}_3 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3, \quad \boldsymbol{b}_{12} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3$$

である．なお，

$$g \circ t_{\boldsymbol{b}_3}(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_3) + \boldsymbol{b}_{12} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_{12} = f(\boldsymbol{x})$$

より $t_{\boldsymbol{b}_3} \circ g = g \circ t_{\boldsymbol{b}_3} = f$ であるから合成の順番はどちらでもよい．

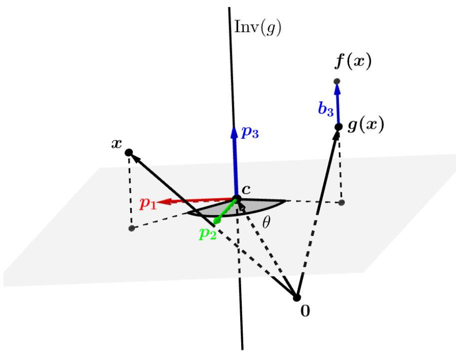


図 15　Inv(g) と $\boldsymbol{b}_3$ に関する螺旋運動

□

3.3.2　鏡映と滑り鏡映

$A \sim R_0$ とする．このとき，f は鏡映か滑り鏡映である．これを詳しく見ていこう．なお，空間における滑り鏡映の定義は以下の通りである．

定義. 空間内の平面 H に関する鏡映 g と H に平行なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ による平行移動との合成 $t_{\boldsymbol{c}} \circ g$ を H と $\boldsymbol{c}$ に関する（空間の）滑り鏡映という．この定義に従えば，滑り鏡映は鏡映（$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のとき）を含むのだが，鏡映でないもののみを滑り鏡映と呼ぶことにする．

直交行列 A が直交行列 $P \in SO(3)$ によって R_0 に標準化される，すなわち，

$$R_0 = P^{-1}AP = {}^tPAP, \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

とする．A の固有値は -1 と 1 である．$\det P = 1$ なので $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底であり，

$$V_A(-1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle, \quad V_A(-1)^{\perp} = V_A(1) = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$$

である．このとき，次が成り立つ．

定理 3.4. $A, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を上の通りとする．このとき，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は鏡映か滑り鏡映である．特に，各々の詳細は次の通りである．

(1) $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ のとき：固定点集合 $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な平面であり，f はこの平面に関する鏡映である．

(2) $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ のとき：f は固定点を持たない．f は鏡映 $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3$ とベクトル $\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3$ に関する滑り鏡映である．このとき，g は $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な平面に関する鏡映である．

以下，定理 3.4 を証明していこう．

まず，f が固定点を持つかどうかは $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ か否かで分かれる．つまり，次が成り立つ．

補題 3.2. 上の状況において，$\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ のとき，そのときに限り，空集合でない．

証明　直交変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ による空間の固有空間分解 $\mathbb{R}^3 = V_A(1) \oplus V_A(-1)$ により $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ =\in V_A(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1)$$

と分解する．$A^2 = PR_0^2P^{-1} = E$ だから，

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = A\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{0}$$

である．よって，

$$\mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in V_A(-1)$$

である．$\square$

定理 3.4 の証明 (1) $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ とする．補題 3.2 より $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合でない．$\dim V_A(1) = 2$ なので 3.1 節で見たように $\mathrm{Inv}(f)$ は $V_A(1)$ と平行な平面である．特に，

$$f\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = A\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{2}$$

より，$\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Inv}(f)$ だから $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通る．f は平面 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映である．実際，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ と任意の $\boldsymbol{p} \in V_A(1)$ に対して，

$$(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = 0,$$
$$f\left(\frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}\right) = A\left(\frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2} = \frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}$$

であるから，$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ が $V_A(1)$ に，従って $\mathrm{Inv}(f)$ に，直交し，$f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点が $\mathrm{Inv}(f)$ 上にあるので，f は平面 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映である．

また，任意の $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f)$ と任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

が成り立つから

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ T_A \circ t_{-\boldsymbol{c}}$$

である．すなわち，$\boldsymbol{c}$ を通り平面 $V_A(1)$ に平行な平面に関する鏡映は「一旦 $-\boldsymbol{c}$ 平行移動し，$V_A(1)$ に関する鏡映移動をした後に再び $\boldsymbol{c}$ 平行移動する変換」と言い換えることもできる．

(2) $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ とする．空間 $\mathbb{R}^3$ の固有分解 $\mathbb{R}^3 = V_A(1) \oplus V_A(-1)$ により $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_A(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1)$$

と分解する．このとき，$\boldsymbol{b}^+ \neq \boldsymbol{0}$ である．

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+$$

であるから，$g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とおくと，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ である．(1) より g は $\boldsymbol{b}^-$ を通り $V_A(1)$ に平行な平面 $\mathrm{Inv}(g)$ に関する鏡映である．さらに，$\boldsymbol{b}^+ \in V_A(1)$ であるから $\boldsymbol{b}^+$ は $\mathrm{Inv}(g)$ に平行である．よって，f は滑り鏡映である．また，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底だから

$$\boldsymbol{b}^- = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3, \quad \boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3$$

である．なお，鏡映と平行移動を合成する順番はどちらでもよい．実際，$A\boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{b}^+$ より

$$g\left(t_{\boldsymbol{b}^+}(\boldsymbol{x})\right) = A\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+\right) + \boldsymbol{b}^- = \left(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = t_{\boldsymbol{b}^+}\left(g(\boldsymbol{x})\right)$$

であるから $g \circ t_{\boldsymbol{b}^+} = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g = f$ である．

□

3.3.3　回転鏡映

$A \sim R_\theta \neq R_0$ とする．このとき f は回転鏡映である．これを詳しく見ていこう．

直交行列 A が直交行列 $P \in SO(3)$ によって R_θ に標準化される，すなわち，

$$R_\theta = P^{-1}AP = {}^tPAP, \quad P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

とする．$\det P = 1$ なので $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底であり，

$$V_A(-1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle, \quad V_A(-1)^\perp = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle$$

である．このとき，次が成り立つ．

定理 3.5. $A, P, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を上の通りとする．このとき，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は回転鏡映である．特に，固定点は 1 点 $\boldsymbol{c} := (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ のみであり，f は $V_A(-1)$ に平行で $\boldsymbol{c}$ を通る直線に関する θ 回転 g と $\boldsymbol{c}$ を通り $V_A(-1)^\perp$ に平行な平面に関する鏡映 h の合成 $g \circ h$ に等しい．ただし，回転の向きは $\boldsymbol{p}_3$ の向きに進む右ねじの回転方向を正とする．

注意. この定理は幾何学的には明らかだが，ここでは（線形）代数的にきっちり証明していこう．

証明 $R_\theta = S_\theta R_0$ であるから，$B = PS_\theta P^{-1}$, $C = PR_0P^{-1}$ とおくと

$$BC = \left(PS_\theta P^{-1}\right)\left(PR_0P^{-1}\right) = P\left(S_\theta R_0\right)P^{-1} = PR_\theta P^{-1} = A$$

である．$\mathbb{R}^3$ の直交分解 $\mathbb{R}^3 = V_B(1) \oplus V_B(1)^\perp$ によって $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_1 \in V_B(1),\ \boldsymbol{b}_2 \in V_B(1)^\perp$$

と分解する．$B\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1$ だから，$g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$, $h(x) = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$ とおくと

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = BC\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = B\left(C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1\right) + \boldsymbol{b}_2 = g(h(\boldsymbol{x}))$$

より，$f = g \circ h$ である．B, C はいずれも P によってそれぞれ S_θ, R_0 に標準化されるので

$$V_A(-1) = \langle \boldsymbol{p}_3 \rangle = V_B(1) = V_C(-1), \quad V_A(-1)^\perp = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \rangle = V_B(1)^\perp = V_C(-1)^\perp = V_C(1)$$

である．これより $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ が回転で，$h(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$ が鏡映であることを示せばよい．

まず，$B \sim S_\theta \neq E$ かつ $\boldsymbol{b}_2 \in V_B(1)^\perp$ だから，定理 3.3 より $\mathrm{Inv}(g)$ は $V_B(1) = V_A(-1)$ に平行な直線で，g はこの直線に関する θ 回転である．ただし，回転の向きは $\boldsymbol{p}_3$ の向きに進む右ねじの回転方向を正とする．

次に，$C \sim R_0$ かつ $\boldsymbol{b}_1 \in V_B(1) = V_C(-1)$ だから，定理 3.4 より $\mathrm{Inv}(h)$ は $V_C(1) = V_A(-1)^\perp$ に平行な平面で，h はこの平面に関する鏡映である．

最後に，A は 1 を固有値に持たないので 3.1 節で見たように f の固定点は $\boldsymbol{c} := (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ のみであるが，これは $\mathrm{Inv}(g)$ と $\mathrm{Inv}(h)$ の交点である．実際，空間 $\mathbb{R}^3$ の中で直線 $\mathrm{Inv}(g)$ と平面 $\mathrm{Inv}(h)$ は直交するので 1 点で交わるが，その交点は g, h の固定点なので f の固定点でもあり，従って，$\boldsymbol{c}$ に等しい．よって，$\mathrm{Inv}(g)$ も $\mathrm{Inv}(h)$ も $\boldsymbol{c}$ を通る．　□

3.4　鏡映の個数

空間の合同変換それぞれに対し，それを合成する鏡映を全て調べ上げ，分類表 2 を完成させよう．

定理 3.6. 空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換は 4 個以下の鏡映の合成として表せる．特に，各合同変換に対してそれを合成する鏡映の最小個数は表 2 にある通りである．

定理の証明の前に，合同変換の合成と固定点集合に関する補題を与えておく．

補題 3.3. 空間 $\mathbb{R}^3$ の任意の合同変換 f_1, f_2 に対し，$\mathrm{Inv}(f_1) \cap \mathrm{Inv}(f_2) \subset \mathrm{Inv}(f_1 \circ f_2)$ が成り立つ．特に，$\mathrm{Inv}(f_1 \circ f_2)$ が空集合なら $\mathrm{Inv}(f_1) \cap \mathrm{Inv}(f_2)$ は空集合である．

証明 任意の $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f_1) \cap \mathrm{Inv}(f_2)$ に対して，以下が成り立つので $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f_1 \circ f_2)$ である．

$$f_1 \circ f_2(\boldsymbol{c}) = f_1(f_2(\boldsymbol{c})) = f_1(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}$$

よって，$\mathrm{Inv}(f_1) \cap \mathrm{Inv}(f_2) \subset \mathrm{Inv}(f_1 \circ f_2)$ である．後半の主張は明らかである．□

定理 3.6 の証明 恒等変換は 0 個，鏡映は 1 個の鏡映の合成であり，またそれ以外の合同変換が 1 個以下の鏡映の合成として表せないことは明らかである．残りの平行移動，回転，滑り鏡映，回転鏡映，螺旋運動に関しては以下に続く 4 つの補題 3.4 から 3.8 により証明が完成する．□

補題 3.4. (1) 空間 $\mathbb{R}^3$ の平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ $(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ は鏡映面が平行な 2 個の鏡映の合成である．このとき，2 つの鏡映面は共に $\boldsymbol{b}$ に直交し，その距離は $\|\boldsymbol{b}\|/2$ である．

(2) 逆に，空間 $\mathbb{R}^3$ の平行な 2 平面 H_1, H_2 $(H_1 \neq H_2)$ に関する鏡映 r_1, r_2 の合成 $r_2 \circ r_1$ は平行移動である．移動方向は H_1 から H_2 の方へ両平面に直交する方向で，移動距離は 2 平面の距離の 2 倍である．

証明 (1) 原点 $\boldsymbol{0}$ と $t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{b}$ の垂直二等分面 H に関する鏡映を g とする．$g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{b}$ だから，g は $A \sim R_0$, $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ を満たす 3 次直交行列 A によって $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と書ける．このとき，

$$g(t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})) = A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} = T_A(\boldsymbol{x})$$

より $g \circ t_{\boldsymbol{b}} = T_A$ である．$A \sim R_0$ だから直交変換 T_A は平面 $H_0 := V_A(1)$ に関する鏡映である．さらに，$g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ より

$$t_{\boldsymbol{b}} = (g \circ g) \circ t_{\boldsymbol{b}} = g \circ (g \circ t_{\boldsymbol{b}}) = g \circ T_A$$

だから平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ は 2 個の鏡映 g と T_A の合成である．また，g の鏡映面 H は T_A の鏡映面 H_0 に平行であり，図 16 のように H, H_0 はそれぞれ $\boldsymbol{b}/2, \boldsymbol{0}$ を通り $\boldsymbol{b}$ に直交する平面なので，2 平面間の距離は $\|\boldsymbol{b}\|/2$ である．

(2) 逆に，平行な 2 平面 H_1, H_2 $(H_1 \neq H_2)$ に関する鏡映 r_1, r_2 に対して，その合成 $r_2 \circ r_1$ が平行移動であることを示す．$r_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$, $r_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ とすると，

$$A_1 \sim R_0 \sim A_2, \quad \boldsymbol{b}_1 \in V_{A_1}(-1),\ \boldsymbol{b}_2 \in V_{A_2}(-1)$$

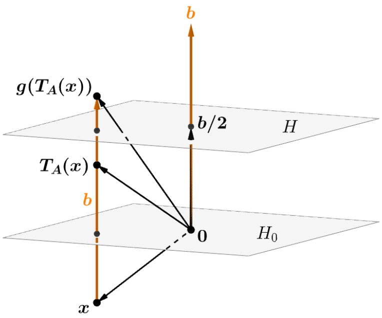


図 16　平行移動は平行な 2 平面に関する 2 個の鏡映の合成である．

である．H_1 と H_2 が平行なので $V_{A_1}(1) = V_{A_2}(1)$ である．$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ を $V_{A_1}(1)$ の正規直交基底とし，$(\boldsymbol{p}_3)$ を $V_{A_1}(-1) = V_{A_1}(1)^{\perp} = V_{A_2}(1)^{\perp} = V_{A_2}(-1)$ の正規直交基底とする．必要なら $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を入れ替えて，$P := \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$ とすると，$P^{-1}A_1P = R_0 = P^{-1}A_2P$ より $A_1 = PR_0P^{-1} = A_2$ である．従って，$A = A_1 = A_2$ とおくと，$A^2 = E$, $\boldsymbol{b}_1 \in V_A(-1)$ より

$$r_2(r_1(\boldsymbol{x})) = A(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1) + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{x} + A\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$$

だから $r_2 \circ r_1 = t_{\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1}$ である．すなわち，$r_2 \circ r_1$ は平行移動である．なお，$r_1 \neq r_2$ だから $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2$ より $t_{\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1}$ は恒等変換ではない．このとき，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in V_A(-1)^{\perp}$ だから，$\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$ の向きは H_1 から H_2 の方へ両平面に直交する方向である．さらに，図 17 のように H_1, H_2 はそれぞれ $\boldsymbol{b}_1/2$, $\boldsymbol{b}_2/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な平面だから，その距離は $\|\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1\|/2$ である．　□

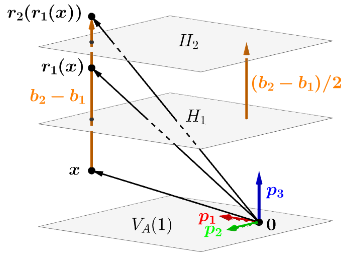


図 17　平行な 2 平面に関する 2 個の鏡映の合成は平行移動である．

補題 3.5. (1) 空間 $\mathbb{R}^3$ の θ 回転 f は鏡映面が平行でない 2 個の鏡映の合成である．このとき，2 つの鏡映面の交線が f の回転軸であり，2 つの鏡映面のなす角は $\theta/2$ である．

(2) 逆に，平行でない 2 平面 H_1, H_2 に関する鏡映を g_1, g_2 とすると，合成 $g_2 \circ g_1$ は 2 平面の交線を軸とする回転であり，回転方向は H_1 から H_2 へ，回転角は 2 平面の交わる角の 2 倍である．

証明 (1) 任意に $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f)$ をとる．f は $A \sim S_\theta$ となる直交行列 $A \in SO(3)$ によって

$$f(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

と書ける．f の回転軸 $\mathrm{Inv}(f)$ は直線 $V_A(1)$ に平行である．そこで，f の回転の正の方向に回転する右ねじの進む方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{p}_3$ とすと，$\boldsymbol{p}_3 \in V_A(1)$ である．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in V_A(1)^\perp$ を $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ が空間 $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底となるように選ぶ．このとき，

$$S_\theta = {}^tPAP, \quad P := \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

である．g_2 を $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_1$ と $f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_1)$ の垂直二等分面 H_2 に関する鏡映とし，$g_1 = g_2 \circ f$ とする．$\mathrm{Inv}(f) \subset H_2 = \mathrm{Inv}(g_2)$ だから補題 3.3 より

$$\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Inv}(g_2) \cap \mathrm{Inv}(f) \subset \mathrm{Inv}(g_2 \circ f) = \mathrm{Inv}(g_1)$$

である．さらに，$\boldsymbol{p}_1$ は $\mathrm{Inv}(f)$ に直交し，

$$g_1(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_1) = g_2\left(f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_1)\right) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_1$$

より $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_1 \in \mathrm{Inv}(g_1)$ であるから，$\mathrm{Inv}(g_1)$ は $\mathrm{Inv}(f)$ を含み $\boldsymbol{p}_1$ に平行な平面，すなわち，$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{p}_2$ に直交する平面 H_1 を含む．一方，図 18 から

$$g_1(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_2) = g_2\left(f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_2)\right) = c - \boldsymbol{p}_2 \neq c + \boldsymbol{p}_2$$

より $c + \boldsymbol{p}_2 \notin \mathrm{Inv}(g_1)$ である．従って，$\mathrm{Inv}(g_1) \neq \mathbb{R}^3$ であるから 3.1 節で見たように $\mathrm{Inv}(g_1)$ は平面 H_1 である．分類表 2 から，固定点集合が平面となるのは鏡映であるから g_1 は鏡映である．よって，

$$f = (g_2 \circ g_2) \circ f = g_2 \circ (g_2 \circ f) = g_2 \circ g_1$$

より，f は 2 個の鏡映 g_1, g_2 の合成である．また，空間 $\mathbb{R}^3$ の中で 2 平面 H_1, H_2 が共に直線 $\mathrm{Inv}(f)$ を含むので，$H_1 \cap H_2 = \mathrm{Inv}(f)$ である．すなわち，2 平面の交線が f の回転軸である．さらに，図 18 のように H_1, H_2 のなす角は $\theta/2$ である．

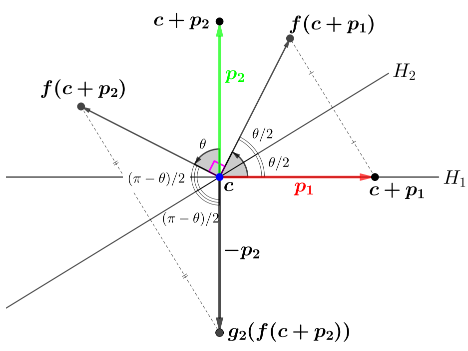


図 18　$g_1(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_2) = g_2\left(f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{p}_2)\right) = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{p}_2$

(2) 逆に，平行でない任意の 2 平面 H_1, H_2 に関する鏡映 g_1, g_2 に対して，その合成 $g_2 \circ g_1$ が回転であることを示す．(1) で定義した記号は一旦全てリセットする．(1) では A から B_1, B_2 を構成したが，今度は逆に B_1, B_2 から A を構成していく．

2 平面 H_1, H_2 の交線を L とする．すなわち，$L = H_1 \cap H_2$ である．任意に $\boldsymbol{c} \in L$ をとる．g_1, g_2 はそれぞれ H_1, H_2 に関する鏡映なので，$B_1 \sim R_0 \sim B_2$ となる $B_1, B_2 \in O(3)$ によって

$$g_1(\boldsymbol{x}) = B_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = B_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

と書ける．2 平面 H_1, H_2 の交わる角を $\theta/2$ とする．すなわち，交わる角の 2 倍を θ とする．

$$g_2(g_1(\boldsymbol{x})) = B_2\left(B_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\right) + \boldsymbol{c} = B_2B_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

であるから，$A := B_2B_1 \sim S_\theta$ となることを示せばよい．

直線 L の単位方向ベクトルを $\boldsymbol{p}_3$ とする．すなわち，$\|\boldsymbol{p}_3\| = 1$ かつ $L = \{\, \boldsymbol{c} + t\boldsymbol{p}_3 \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ である．ただし，$\boldsymbol{p}_3$ の向きは H_1 から H_2 の方向へ回転する右ねじの進む方向と同じとする．図 19 のように $\boldsymbol{p}_2$ を H_1 に直交する単位ベクトルとし，$(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ が $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底となるように $\boldsymbol{p}_1 \in V_{B_1}(1)$ をとる．具体的には $\mathbb{R}^3$ の外積を用いて $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{p}_3$ とすればよい．

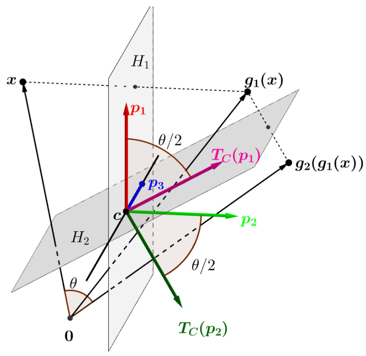


図 19　平行でない 2 平面に関する 2 個の鏡映の合成は回転である．

H_1 は $V_{B_1}(1)$ に平行だから，$V_{B_1}(1) = \langle \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_1 \rangle$, $V_{B_1}(-1) = V_{B_1}(1)^\perp = \langle \boldsymbol{p}_2 \rangle$ より

$${}^tQ_1B_1Q_1 = R_0, \quad Q_1 := \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

である．また，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の右手系正規直交基底なので

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}, \quad C = PS_{\theta/2}{}^tP$$

とすると，$P \in SO(3)$ であり，直交変換 $T_C(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{p}_3$ を軸とする $\theta/2$ 回転である．ただし，回転の方向は $\boldsymbol{p}_3$ の向きに進む右ねじの回転方向，すなわち，H_1 から H_2 への方向である．平面 H_1, H_2 はそれぞれ $V_{B_1}(1), V_{B_2}(1)$ に平行で，H_2 は L を軸に H_1 を $\theta/2$ 回転させた平面なので，$V_{B_2}(1) = \langle T_C(\boldsymbol{p}_3), T_C(\boldsymbol{p}_1) \rangle$, $V_{B_2}(-1) = V_{B_2}(1)^\perp = \langle T_C(\boldsymbol{p}_2) \rangle$ である．これより

$${}^tQ_2B_2Q_2 = R_0, \quad Q_2 := \begin{bmatrix} T_C(\boldsymbol{p}_3) & T_C(\boldsymbol{p}_1) & T_C(\boldsymbol{p}_2) \end{bmatrix} \in SO(3)$$

である．ここで，P は直交行列だから

$$Q_1 = PT, \quad T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$Q_2 = \begin{bmatrix} C\boldsymbol{p}_3 & C\boldsymbol{p}_1 & C\boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = CQ_1 = CPT = PS_{\theta/2}{}^tPPT = PS_{\theta/2}T$$

と書ける．これと $R_0, P, T \in O(3)$ から

$$\begin{aligned} B_2B_1 &= Q_2R_0{}^tQ_2Q_1R_0{}^tQ_1 = PS_{\theta/2}TR_0\ {}^t\left(PS_{\theta/2}T\right)PTR_0\ {}^t(PT) \\ &= PS_{\theta/2}\left(TR_0{}^tT\right){}^tS_{\theta/2}\left({}^tPP\right)\left(TR_0{}^tT\right){}^tP \\ &= PS_{\theta/2}\left(TR_0{}^tT\right)\left({}^tS_{\theta/2}TR_0{}^tT\right){}^tP \\ &= PS_{\theta/2}\left(TR_0{}^tT\right)\ {}^t\left(T\ {}^tR_0{}^tTS_{\theta/2}\right){}^tP \\ &= PS_{\theta/2}{}^t\left(\left({}^tS_{\theta/2}TR_0{}^tT\right)\left(T\ {}^tR_0{}^tT\right)\right){}^tP \\ &= PS_{\theta/2}S_{\theta/2}\ {}^tP = PS_\theta{}^tP = A \end{aligned}$$

である．従って，

$$g_2\left(g_1(\boldsymbol{x})\right) = B_2\left(B_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\right) + \boldsymbol{c} = B_2B_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = f(\boldsymbol{x})$$

より，$f = g_2 \circ g_1$ である．よって，$g_2 \circ g_1$ は H_1 と H_2 の交線 L を軸とする θ 回転であり，回転方向は T_C と同じ，すなわち，H_1 から H_2 への方向である．□

補題 3.6. 空間 $\mathbb{R}^3$ の滑り鏡映は 3 平面に関する 3 個の鏡映の合成として表すことができる．このとき，3 平面の内 2 つは互いに平行で，共に残りの 1 つと直交するものを選べる．また，$\mathbb{R}^3$ の滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない．

証明 f を空間 $\mathbb{R}^3$ の滑り鏡映とする．$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(A \sim R_0,\ \boldsymbol{b} \notin V_A(-1))$ と書ける．

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_A(1), \quad \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1), \quad \boldsymbol{b}^+ \neq \boldsymbol{0}$$

とし，$r(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とする．r は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $\boldsymbol{b}^-$ に直交する平面 H に関する鏡映である．

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = t_{\boldsymbol{b}^+}\left(r(\boldsymbol{x})\right)$$

より，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ r$ である．補題 3.4 より平行移動 $t_{\boldsymbol{b}^+}$ は $\boldsymbol{b}^+$ に直交する 2 平面 H_1, H_2 に関する鏡映 r_1, r_2 の合成として $t_{\boldsymbol{b}^+} = r_2 \circ r_1$ と表せるので，

$$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ r = r_2 \circ r_1 \circ r$$

より f は 3 個の鏡映の合成として表せる．このとき，H_1, H_2 はいずれも $\boldsymbol{b}^+$ に直交するので，互いに平行で，共に H に直交する．

また，補題 3.4(2) 補題 3.5(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので，滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない．□

補題 3.7. 空間 $\mathbb{R}^3$ の回転鏡映は 1 点で交わる 3 平面に関する 3 個の鏡映の合成として表すことができる．また，$\mathbb{R}^3$ の回転鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない．

証明 f を空間 $\mathbb{R}^3$ の回転鏡映とする．$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(A \sim R_\theta \neq R_0)$ と書ける．直交行列 A が $P \in SO(3)$ によって $R_\theta = P^{-1}AP$ と標準化される とする．定理 3.5 の証明と同様に，

$$\begin{aligned}&B = PS_\theta P^{-1}, \quad C = PR_0P^{-1}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_1 \in V_A(-1),\ \boldsymbol{b}_2 \in V_A(-1)^\perp \\ &g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2, \quad h(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1\end{aligned}$$

とすると $f = g \circ h$ である．このとき，g は f の固定点 $\boldsymbol{c}$ を通り $V_A(-1)$ に平行な直線 $\mathrm{Inv}(g)$ を軸とする θ 回転で，h は $\boldsymbol{c}$ を通り $V_A(-1)^\perp$ に平行な平面 $H := \mathrm{Inv}(h)$ に関する鏡映である．補題 3.5 より回転 g は $\mathrm{Inv}(g)$ を交線とする平面 H_1, H_2 に関する鏡映 r_1, r_2 により $g = r_2 \circ r_1$ と書ける．よって，

$$f = g \circ h = r_2 \circ r_1 \circ h$$

より f は 3 個の鏡映の合成として表せる．また，補題 3.3 から $H_1 \cap H_2 \cap H = \mathrm{Inv}(f) = \{\boldsymbol{c}\}$ より 3 つの鏡映面は 1 点 $\boldsymbol{c}$ で交わる．

　また，補題 3.4(2) 補題 3.5(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので，回転鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない． □

補題 3.8. 空間 $\mathbb{R}^3$ の螺旋運動は 4 個の鏡映の合成として表せる．また，$\mathbb{R}^3$ の螺旋運動を 3 個以下の鏡映の合成として表すことはできない．

証明 螺旋運動は平行移動と回転の合成である．補題 3.4 と補題 3.5 より平行移動と回転はそれぞれ 2 個の鏡映の合成として表せるので，螺旋運動は 4 個の鏡映の合成として表せる．

　また，補題 3.4 と補題 3.5 から螺旋運動を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない．最後に，螺旋運動が 3 個の鏡映の合成として表すことができないことを示す．r_1, r_2, r_3 を空間 $\mathbb{R}^3$ の鏡映とし，

$$r_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1, \quad r_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2, \quad r_3(\boldsymbol{x}) = A_3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_3$$

とする．各 $i = 1, 2, 3$ に対して $A_i \sim R_0$, $\boldsymbol{b}_i \in V_{A_i}(-1)$ である．

$$r_1\left(r_2\left(r_3\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right) = A_1\left(A_2\left(A_3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_3\right) + \boldsymbol{b}_2\right) + \boldsymbol{b}_1 = \left(A_1A_2A_3\right)\boldsymbol{x} + \left(A_1A_2\boldsymbol{b}_3 + A_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1\right)$$

である．ここで，$\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = -1$ であるから，$\det\left(A_1A_2A_3\right) = -1$ である，従って，$A_1A_2A_3 \notin SO(3)$ なので分類表 2 から $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ は螺旋運動ではない．すなわち，螺旋運動を 3 個の鏡映の合成として表すことはできない．よって，螺旋運動を 3 個以下の鏡映の合成として表すことはできない． □

　以上から，定理 3.6 の証明が完成する．

3.5　空間の合同変換と 4 次正方行列

空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は 4 次正方行列と 4 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，合同変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$, $f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成

$$f_1 \circ f_2(\boldsymbol{x}) = f_1\left(f_2\left(\boldsymbol{x}\right)\right) = A_1\left(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2\right) + \boldsymbol{b}_1 = A_1A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2$$

は 4 次正方行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．これにより空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換を 4 次正方行列の演算で記述できる．

例えば，2 つの合同変換

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の合成 $f_1 \circ f_2$ は

$$\begin{aligned} f_1(f_2(\boldsymbol{x})) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるが，これが 4 次正方行列同士の積として

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と計算できる．この右辺の 4 次正方行列の左上部分と右上部分が，それぞれ合成 $f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の直交行列 A と空間ベクトル $\boldsymbol{b}$ である．このように全てを行列演算にしてしまうことで計算機で合同変換が扱いやすくなる．なお，これは空間のアフィン変換や 3 次元射影空間上の射影変換を 4 次正方行列によって表現する手法の特殊な場合でもある．

演習問題 3

1. 次の空間の合同変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の形に書き下そう．
   (1) 平面 $ax + by + cz = d$ に関する鏡映．
   (2) 原点 O と点 $\mathrm{P}(1,1,1)$ を通る直線を軸とする θ 回転．ただし回転の向きは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向に進む右ねじの回転方向を正とする．

2. 次の空間の合同変換が分類表 2 のどれに当てはまるか判定しよう．また，回転軸，回転角，回転方向，鏡映面，平行移動ベクトルなどの情報も決定しよう．

   (1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (2) $f_2(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (3) $f_3(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{27}\begin{bmatrix} 14 & 23 & 2 \\ -22 & 14 & -7 \\ -7 & 2 & 26 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (4) $f_4 = f_3 \circ f_2$

   (5) $f_5 = f_1 \circ f_2 \circ f_1$

3. H_1, H_2, H_3 を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面とし，それぞれに関する鏡映を r_1, r_2, r_3 とする．次の状況で合成 $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ がどんな合同変換か判定しよう．
   (1) $H_1 = H_3 \neq H_2$ で H_1 と H_2 が交わる．
   (2) H_1, H_3 が平行で，H_1 と H_2 が交わる．
   (3) H_1, H_2 が平行で，H_1 と H_3 が交わる．
   (4) H_1, H_2, H_3 が 1 点で交わる．

4. 適当なプログラミング環境のもとで，3 次直交行列 A と 3 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたときに空間の合同変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

   が表 2 のどれに当てはまるか判定するプログラムを作成しよう．また，回転軸，回転角，回転方向，鏡映面，平行移動ベクトルなどの情報も出力しよう．

5. 空間の合同変換 f_1, f_2 の合成 $f_1 \circ f_2$ を分類しよう．

4　直線 $\mathbb{R}$ の合同変換

平面や空間ほど面白みはないが，直線 $\mathbb{R}$ の合同変換についてもまとめておく．$\mathbb{R}$ の合同変換

$$f(x) = ax + b$$

は以下の表 3 のように 3 種に分類できることを確かめていこう．なお，恒等変換と平行移動は分類上異なるクラスとして扱う．

名前	A	b	鏡映の個数	固定点集合
恒等変換	1	0	0	$\mathbb{R}$
平行移動	1	$b \neq 0$	2	空集合
鏡映	-1	$b \in \mathbb{R}$	1	$\{\, b/2 \,\}$

表 3　直線 $\mathbb{R}$ の合同変換

まず，明らかに $a = \pm 1$ である．

$a = 1$ のとき， $b = 0$ なら f は恒等変換で $\mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}$ であり，$b \neq 0$ なら f は平行移動で $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合である．

$a = -1$ のとき，$\mathrm{Inv}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -x + b = x \,\} = \{\, b/2 \,\}$ である．このとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) - b/2 = -(x - b/2)$ であるから f は $b/2$ に関する鏡映である．

恒等変換と鏡映がそれぞれ $0, 1$ 個の鏡映の合成であることは明らかで，平行移動 $f(x) = x + b\ (b \neq 0)$ は 2 個の鏡映 $g_1(x) = -x,\ g_2(x) = -x + b$ の合成として $f = g_2 \circ g_1$ と表せる．以上から $\mathbb{R}$ の合同変換は 2 個以下の鏡映の合成として表せることが分かり，表 3 が完成する．

演習問題 4

1. $a, b \in \mathbb{R}$ とする．
   (1) 2 次正方行列 $F = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と自然数 k に対し，F^k を求めよう．
   (2) $\mathbb{R}$ 上の 1 次関数 $f(x) = ax + b$ に対し，その k 回合成 f^k を $x \mapsto \alpha x + \beta$ の形に表そう．
   (3) 初項が b で公比が $a \neq 1$ の等比数列に関する以下の和の公式を証明しよう．

$$\sum_{k=0}^{m-1} ba^k = \frac{b\,(1 - a^m)}{1 - a}$$

2. $\mathbb{R}$ の合同変換 f_1, f_2 の合成 $f_1 \circ f_2$ を分類しよう．

5　$\mathbb{R}^n$ の合同変換

一般次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の合同変換についても考えておこう．引き続き，列ベクトルと点を同一視し，$\mathbb{R}^n$ の元は適宜ベクトルと見なしたり点と見なしたりする．

5.1　$\mathbb{R}^n$ の直交変換群

n 次直交行列全体
$$O(n) := \left\{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^tAA = E \,\right\}$$
を n 次直交群という．名前の通りこれは群である．また，
$$SO(n) := \{\, A \in O(n) \mid \det A = 1 \,\}$$
を n 次特殊直交群という．直交行列の行列式は ± 1 なので
$$\det : O(n) \to \{\, \pm 1 \,\} \ ; \ A \mapsto \det A$$
は全射群準同型である．明らかに $\ker(\det) = SO(n)$ なので，$SO(n)$ は $O(n)$ の正規部分群である．従って，群準同型定理から
$$O(n)/SO(n) \simeq \{\, \pm 1 \,\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
である．特に，$R_0 := \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1) \in O(n) \setminus SO(n)$ に対して，$R_0^2 = E$ より
$$O(n) = SO(n) \rtimes \{\, E, R_0 \,\} \simeq SO(n) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
である．なお，上式では直交行列とそれに対応する直交変換を同一視している．

5.2　$\mathbb{R}^n$ の合同変換群

定義． $\mathbb{R}^n$ の合同変換全体は写像の合成により群をなす．この群を $\mathbb{R}^n$ の合同変換群といい，$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ で表す．

定義． $\mathbb{R}^n$ の平行移動全体
$$\mathbb{T}(n) = \{\, t_{\boldsymbol{b}} \mid \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \,\}$$
は $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ の部分群をなす．明らかに $\mathbb{T}(n)$ は加法群 $\mathbb{R}^n$ に群として同型である．

定理 1.4 から写像
$$\varphi : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to O(n) \ ; \ f \mapsto t_{-f(\mathbf{0})} \circ f$$
は全射群準同型である．明らかに $\ker\varphi = \mathbb{T}(n)$ なので，$\mathbb{T}(n)$ は $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})^n$ の正規部分群である．従って，群準同型定理から
$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{T}(n) \simeq O(n)$$

である．これより合同変換群の以下のように半直積表示に分解できる．

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{T}(n) \rtimes O(n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$$

5.3　直交行列の標準形

今節では，$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とし，直交行列の標準化に関する以下の定理を証明する．

定理 5.1. 任意の n 次直交行列 A は，ある $P \in SO(n)$ によって

$$ {}^tPAP = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & S_{\theta_s} & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & \pm 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

と標準化される．ここで，$e^{\mathbf{i}\theta_1}, \ldots, e^{\mathbf{i}\theta_s}$ は A の固有値である．A が実固有値を持たなければ右下の ± 1 たちは現れず，A が実固有値のみを持つなら左上の S_{θ_j} たちは現れない．

ここから，一旦話を実内積空間 $\mathbb{R}^n$ からエルミート空間 $\mathbb{C}^n$ に広げるが，最終的にはまた実内積空間 $\mathbb{R}^n$ に戻ってくる．$\mathbb{C}^n$ を複素数成分の n 次列ベクトルのなす複素線形空間とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対してエルミート内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$ によって定める．ここで，$\overline{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の複素共役を表す．

まずは，直交行列の固有値と固有ベクトルに関して次が成り立つ．

定理 5.2. 直交行列の固有値の絶対値は 1 である．特に実固有値は ± 1 のみである．

証明 $A \in O(n)$ とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をその固有ベクトルとする．つまり，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ である．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ なので，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = |\lambda|^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

から $|\lambda| = 1$ である．特に $\lambda \in \mathbb{R}$ ならば $\lambda = \pm 1$ である．　□

定理 5.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ が直交行列 A の固有値で $\boldsymbol{x}$ がその固有ベクトルなら，$\overline{\lambda}$ は A の固有値で $\overline{\boldsymbol{x}}$ は $\overline{\lambda}$ の固有ベクトルである．特に，A の実数でない固有値の個数は偶数である．

証明 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ なので，$\overline{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$ であり，

$$A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{A\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$$

より，$\overline{\lambda}$ は A の固有値で，$\overline{\boldsymbol{x}}$ はその固有ベクトルである．後半の主張は明らかである．　□

定理 5.4. 直交行列の異なる固有値に属する固有ベクトル同士は直交する．

証明 $A \in O(n)$ とする．$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ を A の相異なる固有値，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ をそれぞれの固有ベクトルとする．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることを示す．定理 5.2 から $\overline{\mu}\mu = |\mu|^2 = 1$ なので

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \overline{\mu}\mu\boldsymbol{y}) = \mu(A\boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}) = \mu(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

より，$(\lambda - \mu)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である．$\lambda \neq \mu$ なので，これより $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である． □

定理 5.2 と 5.3 から，直交行列の固有値は全て $e^{\pm \mathbf{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の形に表せる．また，直交行列は実ユニタリ行列であり，ユニタリ行列は正規行列の一種である．その正規行列はユニタリ行列によって対角化可能なので，複素数の範囲での直交行列の標準形は対角行列

$$\begin{bmatrix} e^{\mathbf{i}\theta_1} & & & & & & & O \\ & e^{-\mathbf{i}\theta_1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & e^{\mathbf{i}\theta_s} & & & & \\ & & & & e^{-\mathbf{i}\theta_s} & & & \\ & & & & & \pm 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & & \pm 1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

である．よく知られた事実ではあるが，ユニタリ行列の場合（従って，直交行列の場合も含む）に限定してこれを証明しておく．

以下，行列 X の随伴行列を X^* で表す．つまり，$X^* := {}^t\overline{X}$ とする．

定理 5.5. ユニタリ行列はユニタリ行列によって対角化可能である． 従って，直交行列もユニタリ行列によって対角化可能である．

証明 A を n 次ユニタリ行列とし，n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らかなので，$n \geq 2$ とする．λ を A の固有値，$\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ をその単位固有ベクトルとし，$(\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ を $\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle^\perp$ の正規直交基底とすると，$U_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$ はユニタリ行列である．$j = 2, \ldots, n$ に対して

$$(\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_j) = \lambda^{-1}(\lambda\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_j) = \lambda^{-1}(A\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_j) = \lambda^{-1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_j) = 0$$

なので，

$$\begin{aligned} U_1^* A U_1 &= U_1^* \begin{bmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & \cdots & A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = U_1^* \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda {}^t\overline{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_1}A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_1}A\boldsymbol{u}_n \\ \lambda {}^t\overline{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_1 & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_2}A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_2}A\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda {}^t\overline{\boldsymbol{u}_n}\boldsymbol{u}_1 & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_n}A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_n}A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) & (\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2) & \cdots & (\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_n) \\ \lambda(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) & (\boldsymbol{u}_2, A\boldsymbol{u}_2) & \cdots & (\boldsymbol{u}_2, A\boldsymbol{u}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_n) & (\boldsymbol{u}_n, A\boldsymbol{u}_2) & \cdots & (\boldsymbol{u}_n, A\boldsymbol{u}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & A_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける．ここで，$(U_1^*AU_1)^*(U_1^*AU_1) = U_1^*A^*(U_1U_1^*)AU_1 = U_1^*({}^tAA)U_1 = U_1^*U_1 = E_n$ より，$U_1^*AU_1$ はユニタリ行列である．従って，

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^*A_1 \end{bmatrix}$$

から，$A_1^*A_1 = E_{n-1}$ より A_1 は $n-1$ 次ユニタリ行列である．よって，帰納法の仮定から ${U_2'}^*A_1U_2'$ が対角行列となるような $n-1$ 次ユニタリ行列 U_2' が存在するので，

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2' \end{bmatrix}, \quad U = U_1U_2$$

とおけば，U は n 次ユニタリ行列で，この U によって A は

$$U^*AU = U_2^*(U_1^*AU_1)U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {U_2'}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {U_2'}^*A_1U_2' \end{bmatrix}$$

と対角化される．直交行列は実ユニタリ行列なので，後半の主張は明らかである． □

複素数の範囲まで広げた話を実数の範囲に戻し，定理 5.1 の証明を完成させる．

定理 5.1 の証明 $A \in O(n)$ とする．A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は

$$\varphi_A(t) = (t - e^{\mathbf{i}\theta_1})^{m_1}(t - e^{-\mathbf{i}\theta_1})^{m_1} \cdots (t - e^{\mathbf{i}\theta_s})^{m_s}(t - e^{-\mathbf{i}\theta_s})^{m_s}(t-1)^{m^+}(t+1)^{m^-}$$

と因数分解される．ただし，$s = 0$ や $m^\pm = 0$ の場合も含む．定理 5.5 より A は対角化可能なので，$\dim V_A(e^{\pm\mathbf{i}\theta_i}) = m_i$, $\dim V_A(\pm 1) = m^\pm$ であり，$\mathbb{C}^n$ は各固有空間によって

$$\mathbb{C}^n = V_A(e^{\mathbf{i}\theta_1}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_1}) \oplus \cdots \oplus V_A(e^{\mathbf{i}\theta_s}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_s}) \oplus V_A(1) \oplus V_A(-1)$$

と直和分解され，定理 5.4 よりこれは直交直和分解でもある．従って，各固有空間の正規直交基底を並べたユニタリ行列 U によって A は (5.2) のように対角化される．特に，$V_A(1), V_A(-1)$ の正規直交基底としては実ベクトルのみからなるものを選べるので，それらをそれぞれ

$$\left(\boldsymbol{p}_1^+, \ldots, \boldsymbol{p}_{m^+}^+\right), \quad \left(\boldsymbol{p}_1^-, \ldots, \boldsymbol{p}_{m^-}^-\right)$$

とする．また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) = {}^t\boldsymbol{y}\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

なので，$e^{-\mathbf{i}\theta_j} = \overline{e^{\mathbf{i}\theta_j}}$ であることと定理 5.3 から，$(\boldsymbol{u}_1^j, \ldots, \boldsymbol{u}_{m_j}^j)$ が $V_A(e^{\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底なら $(\overline{\boldsymbol{u}_1^j}, \ldots, \overline{\boldsymbol{u}_{m_j}^j})$ は $V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底である．従って，$j = 1, \ldots, s$ に対して

$$(\boldsymbol{u}_1^j, \overline{\boldsymbol{u}_1^j}, \ldots, \boldsymbol{u}_{m_j}^j, \overline{\boldsymbol{u}_{m_j}^j})$$

は $V_A(e^{\mathbf{i}\theta_j}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底である．ここで，各 $i = 1, \ldots, m_j$ に対して

$$\boldsymbol{q}_i^j := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{u}_i^j + \overline{\boldsymbol{u}_i^j}\right), \quad \boldsymbol{r}_i^j := \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{u}_i^j - \overline{\boldsymbol{u}_i^j}\right)$$

とすれば，$\boldsymbol{q}_i^j, \boldsymbol{r}_i^j \in \mathbb{R}^n$ であり，これらの間の内積はクロネッカーのデルタを用いて

$$(\boldsymbol{q}_k^j, \boldsymbol{q}_l^j) = (\boldsymbol{r}_k^j, \boldsymbol{r}_l^j) = \delta_{kl}, \quad (\boldsymbol{q}_k^j, \boldsymbol{r}_l^j) = 0$$

と書けるので，$(\boldsymbol{q}_1^j, \boldsymbol{r}_1^j, \ldots, \boldsymbol{q}_{m_j}^j, \boldsymbol{r}_{m_j}^j)$ は $V_A(e^{\mathbf{i}\theta_j}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底である．よって，

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^1 & \boldsymbol{r}_1^1 & \cdots & \boldsymbol{q}_{m_s}^s & \boldsymbol{r}_{m_s}^s & \boldsymbol{p}_1^+ & \cdots & \boldsymbol{p}_{m^+}^+ & \boldsymbol{p}_1^- & \cdots & \boldsymbol{p}_{m^-}^- \end{bmatrix}$$

とすれば，P は実ユニタリ行列，すなわち，直交行列である．さらに，$e^{\mathbf{i}\theta_j} = \cos\theta_j + \mathbf{i}\sin\theta_j$ より

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{q}_i^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}A\boldsymbol{u}_i^j + \frac{1}{\sqrt{2}}A\overline{\boldsymbol{u}_i^j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathbf{i}\theta_j}\boldsymbol{u}_i^j + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e^{\mathbf{i}\theta_j}}\ \overline{\boldsymbol{u}_i^j} = (\cos\theta_j)\,\boldsymbol{q}_i^j + (\sin\theta_j)\,\boldsymbol{r}_i^j \\ A\boldsymbol{r}_i^j &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}A\boldsymbol{u}_i^j - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}A\overline{\boldsymbol{u}_i^j} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}e^{\mathbf{i}\theta_j}\boldsymbol{u}_i^j - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\overline{e^{\mathbf{i}\theta_j}}\ \overline{\boldsymbol{u}_i^j} = (-\sin\theta_j)\,\boldsymbol{q}_i^j + (\cos\theta_j)\,\boldsymbol{r}_i^j \end{aligned}$$

なので，$A\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_i^j & \boldsymbol{r}_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_i^j & \boldsymbol{r}_i^j \end{bmatrix} S_{\theta_j}$ である．以上から，直交行列 A は直交行列 P によって

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & S_{\theta_s} & & \\ & & & E_{m^+} & \\ O & & & & -E_{m^-} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

と標準化される．ただし，各 S_{θ_j} は m_j 個並ぶ．このとき，$\det P = -1$ なら P のどこか 1 列を -1 倍したものに置き換えることで，$P \in SO(n)$ となるものを選び直せる．□

注意． この証明の最後の $P \in SO(n)$ となるように P を取り替えるところで，A が実固有値を持てば $\boldsymbol{p}_j^\pm$ のどれか 1 個を $-\boldsymbol{p}_j^\pm$ に置き換えることで標準形を変化させず $\det P = 1$ とできるが，A に実固有値がなければ標準形が変化する．例えば，P の 1 列目 $\boldsymbol{q}_1^1$ を $-\boldsymbol{q}_1^1$ に置き換えれば，

$$\begin{aligned} A\left(-\boldsymbol{q}_1^1\right) &= -(\cos\theta_1)\,\boldsymbol{q}_1^1 - (\sin\theta_1)\,\boldsymbol{r}_1^1 = (\cos(-\theta_1))\left(-\boldsymbol{q}_1^1\right) + (\sin(-\theta_1))\,\boldsymbol{r}_1^1 \\ A\boldsymbol{r}_1^1 &= (-\sin\theta_1)\,\boldsymbol{q}_1^1 + (\cos\theta_1)\,\boldsymbol{r}_1^1 = (-\sin(-\theta_1))\left(-\boldsymbol{q}_1^1\right) + (\cos(-\theta_1))\,\boldsymbol{r}_1^1 \end{aligned}$$

なので，標準形 (5.3) の左上の S_{θ_1} が $S_{-\theta_1}$ に置き換わる．

定理 5.1 を A の次数の偶奇によって分ける．$A \in O(n)$ の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は

$$\varphi_A(t) = (t - e^{\mathbf{i}\theta_1})(t - e^{-\mathbf{i}\theta_1})\cdots(t - e^{\mathbf{i}\theta_s})(t - e^{-\mathbf{i}\theta_s})(t-1)^{m^+}(t+1)^{m^-} \tag{5.4}$$

と因数分解される．ただし，$s = 0$ や $m^\pm = 0$ の場合も含み，$e^{\pm\mathbf{i}\theta_j}$ たちに重複を許す．このとき，

$$2s + m^+ + m^- = n \tag{5.5}$$

である．また，$\det A = (-1)^{m^-}$ なので，$\det A$ の符号によって m^- の偶奇が定まり，n の偶奇と合わせて m^+ の偶奇も定まる．以下，k を正の整数とし，定理 5.1 を $n = 2k$ のときと $n = 2k+1$ のときに分離する．

定理 5.6. 任意の $A \in O(2k)$ はある $P \in SO(2k)$ によって次のいずれかの形に標準化される．

$$
{}^tPAP = \begin{cases} S_{\theta_1,\ldots,\theta_k} := \begin{bmatrix} S_{\theta_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & S_{\theta_k} \end{bmatrix} & (\det A = 1) \\ \\ R_{\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}} := \begin{bmatrix} S_{\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}} & & O \\ & 1 & \\ O & & -1 \end{bmatrix} & (\det A = -1) \end{cases}
$$

ここで，$e^{\pm \mathbf{i}\theta_1}, \ldots, e^{\pm \mathbf{i}\theta_k}$ は A の固有値である．なお，$S_0 = E_2$，$S_\pi = -E_2$ である．ただし，$A \in O(2)$ かつ $\det A = -1$ のときは ${}^tPAP = R_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と標準化される．

証明 $A \in O(2k)$ の固有多項式を (5.4) の通りとする．

まず，$\det A = 1$ とする．$1 = \det A = (-1)^{m^-}$ より m^- は偶数である．さらに，(5.5) と $n = 2k$ から m^+ も偶数である．$S_0 = E_2$，$S_\pi = -E_2$ なので，

$$
\theta_j = \begin{cases} 0 & (s+1 \leq j \leq s + m^+/2) \\ \pi & (s + m^+/2 \leq j \leq s + (m^+ + m^-)/2 = k) \end{cases}
$$

とすれば，A の標準形 (5.1) は $\mathrm{diag}(S_{\theta_1}, \ldots, S_{\theta_s}, E_{m^+}, -E_{m^-}) = S_{\theta_1,\ldots,\theta_k}$ である．

次に，$\det A = -1$ とする．$-1 = \det A = (-1)^{m^-}$ より m^- は奇数で，(5.5) と $n = 2k$ から m^+ も奇数である．よって，θ_j $(j > s)$ を上と同様に適切に定めれば，A の標準形 (5.1) は

$$
\mathrm{diag}(S_{\theta_1}, \ldots, S_{\theta_s}, E_{m^+-1}, -E_{m^--1}, 1, -1) = \mathrm{diag}(S_{\theta_1}, \ldots, S_{\theta_{k-1}}, 1, -1) = R_{\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}}
$$

とできる．なお，$A \in O(2)$ の標準形に関しては既に示している．　□

定理 5.7. 任意の $A \in O(2k+1)$ はある $P \in SO(2k+1)$ によって次の形に標準化される．

$$
{}^tPAP = \begin{bmatrix} S_{\theta_1,\ldots,\theta_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \det A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta_1,\ldots,\theta_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \pm 1 \end{bmatrix}
$$

ここで，$e^{\pm \mathbf{i}\theta_1}, \ldots, e^{\pm \mathbf{i}\theta_k}, \det A (= \pm 1)$ は A の固有値である．

証明 $A \in O(2k+1)$ の固有多項式を (5.4) の通りとする．(5.5) と $n = 2k+1$ から m^+ と m^- の偶奇は異なる．$\det A = (-1)^{m^-}$ なので，$\det A = 1$ なら m^- は偶数で m^+ は奇数となり，特に $m^+ \geq 1$ だから 1 は A の固有値である．一方で，$\det A = -1$ なら m^- が奇数で m^+ が偶数なので，$m^- \geq 1$ より -1 は A の固有値である．いずれの場合も，$\det A$ は A の固有値であり，A の標準形 (5.1) の対角成分に $\det A$ は奇数個，$-\det A$ は偶数個並ぶので，A の標準形の左上 $(n-1) \times (n-1)$ ブロックは $S_{\theta_1,\ldots,\theta_k}$ で，(n, n) 成分が $\det A$ となるようにできる．　□

定義. $A, B \in O(n)$ に対して $B = {}^tPAP$ となる $P \in SO(n)$ が存在するとき，$A \sim B$ と書く．

例えば，A が $S_{\theta_1,\ldots,\theta_k}$ に標準化されることを $A \sim S_{\theta_1,\ldots,\theta_k}$ と書くための記号である．

5.4　合同変換の固定点集合

定義. 合同変換 $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\mathrm{Inv}(f) := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \,\}$$

を f の固定点集合という.

$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

より, $\mathrm{Inv}(f)$ は n 変数連立 1 次方程式の解空間, すなわち, アフィン部分空間である. 特に,

$$\mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

である. また, $\boldsymbol{0}$ でない任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathrm{Inv}\,(t_{\boldsymbol{b}})$ は空集合である.

定義. $\mathbb{R}^n$ の空でないアフィン部分空間 V_1, V_2 $(\dim V_1 \geq \dim V_2)$ に対し,

$$V_2 \subset \boldsymbol{x}_0 + V_1 := \{\, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V_1 \,\}$$

を満たす $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき, V_1 と V_2 は平行であるという. 特に, $\dim V_1 = \dim V_2$ なら $V_2 = \boldsymbol{x}_0 + V_1$ である.

定理 5.8. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の固定点集合 $\mathrm{Inv}(f)$ が空集合でないとき, $\mathrm{Inv}(f)$ は $\dim V_A(1)$ に平行で $\dim \mathrm{Inv}(f) = \dim V_A(1)$ である.

証明 連立 1 次方程式の理論から

$$\dim \mathrm{Inv}(f) = \dim \mathbb{R}^n - \mathrm{rank}(E - A) = n - (n - \dim V_A(1)) = \dim V_A(1)$$

である. 任意に $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{Inv}(f)$ をとる. 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ だから $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \in V_A(1)$ より $\mathrm{Inv}(f) \subset \boldsymbol{x}_0 + V_A(1)$ である. 従って, $\mathrm{Inv}(f)$ と $V_A(1)$ は平行である. □

5.5　鏡映と超平面

$R_0 := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ とする. 合同変換群の生成元である鏡映に関する事項をまとめておく.

定義. $\mathbb{R}^n$ の超平面を固定点集合に持つ合同変換, すなわち, $\dim \mathrm{Inv}(f) = n - 1$ となる $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ を鏡映という. 定理 5.12 で示すように, $\mathbb{R}^n$ の鏡映全体と $\mathbb{R}^n$ の超平面全体とは 1 対 1 に対応するから, 超平面 H を固定点集合とする鏡映のことを H に関する鏡映と呼ぶ.

定理 5.9. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $A \sim R_0$ かつ $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ であるとき, またそのときに限り, 鏡映である. このとき $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な超平面である.

証明 $A \sim R_0$ かつ $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ であるとする．合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に対し

$$f\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{1}{2}A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{2}$$

より $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Inv}(f)$ であるから， $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合でない．よって，定理 5.8 から $\dim \mathrm{Inv}(f) = \dim V_A(1) = n-1$ より f は $\mathbb{R}^n$ の鏡映である．

逆に，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を鏡映とする．まず $A \sim R_0$ を示す．定理 5.8 より $\dim V_A(1) = \dim \mathrm{Inv}(f) = n-1$ だから A は 1 を固有値に持ち，その重複度は $n-1$ 以上である．定理 5.3 より残りの固有値は実数なので 1 か -1 であり，定理 5.1 から $A \sim E$ または $A \sim R_0$ である．$A \sim E$ なら $A = E$ だが，これは f が鏡映であることに反するので $A \sim R_0$ である．次に $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ を示す．A に対応する直交変換によって $\mathbb{R}^n = V_A(1) \oplus V_A(-1)$ と固有空間分解できる．そこで，

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_A(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1)$$

とする．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{x}$$

であるが，$A \sim R_0$ より $A^2 = E$ であるからこの式の両辺に左から A を掛けて

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = A\boldsymbol{x}$$

を得る．さらにこの 2 式を連立して $\boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{0}$ を得る．従って，$\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ である．

後半の主張は $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Inv}(f)$ であることと定理 5.8 から従う． □

鏡映はその名が示すように，超平面を鏡とする対称な変換である．つまり，次の定理が成り立つ．

定理 5.10. $\mathbb{R}^n$ の鏡映 f に対して以下が成り立つ．ただし，$H = \mathrm{Inv}(f)$ とする．

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点は H 上にある．
(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ は H と直交する．

証明 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を $\mathbb{R}^n$ の鏡映とする．

(1) 定理 5.9 から $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$，$A^2 = E$ なので，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f\left(\frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}\right) = A\left(\frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = \frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2} = \frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}$$

より $\left(f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\right)/2 \in \mathrm{Inv}(f)$ である．

(2) 定理 5.4 から，$\boldsymbol{p} \in V_A(1)$ に対して $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) = 0$ である．従って，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}) - (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}) = 0$$

より $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ は $V_A(1)$ と直交する．よって，定理 5.8 より $\mathrm{Inv}(f)$ とも直交する．

□

逆に，超平面を鏡とする対称な変換は鏡映である．つまり，定理 5.10 の (1),(2) を満たす $\mathbb{R}^n$ の変換 f は超平面 H を固定点集合とする鏡映である．これを実際に確かめよう．

H を $\mathbb{R}^n$ の超平面とする．H の方程式を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d$ とする．すなわち，

$$H = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d \,\} \quad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R})$$

とする．このとき，$\boldsymbol{a}$ は H の法線ベクトルである．実際，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ に対し

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = d - d = 0$$

より $\boldsymbol{a}$ は H に直交する．この $\boldsymbol{a}$ と d を用いて定理 5.10 の (1),(2) を満たす $\mathbb{R}^n$ の変換 f を具体的に記述しよう．

定理 5.11. $\mathbb{R}^n$ の超平面 $H = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d \,\}$ に対し，上の (1),(2) を満たす変換 f は

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) - 2d}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

で与えられ，これは H を固定点集合とする鏡映である．

証明 任意に $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる．(2) より $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ は平行なのである実数 k によって

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + k\boldsymbol{a}$$

と書ける．さらに，(1) からこれを $(\boldsymbol{a}, (f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x})/2) = d$ に代入して

$$k = -\frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) - 2d}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

を得る．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))^2 = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 = \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \frac{2\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \right\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$$

より f は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．また，任意の $\boldsymbol{x} \in H$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ であるから $H \subset \mathrm{Inv}(f)$ より $\dim \mathrm{Inv}(f) \geq \dim H = n - 1$ である．さらに，$(d+1)\boldsymbol{a}/(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \notin \mathrm{Inv}(f)$ より $\mathrm{Inv}(f) \neq \mathbb{R}^n$ であるから $\dim \mathrm{Inv}(f) \leq n - 1$ である．従って，$\dim \mathrm{Inv}(f) = n - 1$ より $\mathrm{Inv}(f) = H$ であるから f は H を固定点集合とする鏡映である．□

$\mathbb{R}^n$ の鏡映 f から超平面 $\mathrm{Inv}(f)$ が定まり，逆に超平面 H から $H = \mathrm{Inv}(f)$ となる鏡映 f が定まることが分かった．この対応は 1 対 1 である．すなわち，次が成り立つ．

定理 5.12. $\mathbb{R}^n$ の任意の超平面に対し，それを固定点集合とする鏡映が唯一つ存在する．

証明 存在性は定理 5.11 で示したので，一意性を示す．$f_1, f_2 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ を 超平面 H を固定点集合とする鏡映とし，

$$f_1(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \quad f_2(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

とする．定理 5.8 より $V_A(1), V_B(1)$ は共に原点を通り H に平行な超平面であるから

$$V_A(1) = V_B(1)$$

である．従って，定理 5.4 より

$$V_A(-1) = V_A(1)^{\perp} = V_B(1)^{\perp} = V_B(-1)$$

である．定理 5.9 から $\boldsymbol{b} \in V_A(-1) = V_B(-1)$ かつ $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Inv}(f_1) = H = \mathrm{Inv}(f_2)$ であるから

$$\frac{\boldsymbol{b}}{2} = f_2\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{1}{2}B\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{c}$$

より $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ である．さらに，再び定理 5.9 から $A \sim R_0 \sim B$ より正則行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$ を $(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1})$ が $V_A(1) = V_B(1)$ の基底で，$\boldsymbol{p}_n \in V_A(-1) = V_B(-1)$ となるようにとると

$$A = PR_0P^{-1} = PR_0P^{-1} = B$$

である．よって，$f_1 = f_2$ である． □

5.6 滑り鏡映

引き続き $R_0 := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ とする．

定義. $\mathbb{R}^n$ の超平面 H に関する鏡映 g と H に平行なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{c}}$ との合成 $t_{\boldsymbol{c}} \circ g$ を H と $\boldsymbol{c}$ に関する滑り鏡映または並進鏡映という．ただし，ここで $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が超平面 H に平行であるとは，H と 直線 $\langle \boldsymbol{c} \rangle$ が平行であることをいう．滑り鏡映は鏡映 $(\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0})$ を含むが，これ以後鏡映でない滑り鏡映を単に滑り鏡映と呼ぶことにする．

定理 5.13. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $A \sim R_0$ かつ $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ のとき，またそのときに限り，滑り鏡映である．このとき，固有空間分解 $\mathbb{R}^n = V_A(1) \oplus V_A(-1)$ による $\boldsymbol{b}$ の分解を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_A(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1) \tag{5.6}$$

とすると，f は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な超平面と $\boldsymbol{b}^+$ に関する滑り鏡映である．

証明 $A \sim R_0$ とする．$g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とすると，定理 5.9 から g は鏡映である．よって，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ より f は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な超平面と $\boldsymbol{b}^+$ に関する滑り鏡映である．

逆に，f を超平面 H と $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に関す滑り鏡映とする．H に関する鏡映を $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}) = t_{\boldsymbol{c}} \circ g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$$

より定理 1.4 から $A = B$ である．従って，定理 5.9 より $A = B \sim R_0$ である． □

注意. 滑り鏡映は鏡映と平行移動の合成であるが，合成の順序はどちらでも良い．実際，滑り鏡映 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を式 (5.6) により鏡映 $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ と平行移動 $t_{\boldsymbol{b}^+}$ に分解すると，

$$f(\boldsymbol{x}) = t_{\boldsymbol{b}^+}(g(\boldsymbol{x})) = \left(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = A\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+\right) + \boldsymbol{b}^- = g\left(t_{\boldsymbol{b}^+}(\boldsymbol{x})\right)$$

であるから $t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g = g \circ t_{\boldsymbol{b}^+}$ である．

定理 5.14. 滑り鏡映の固定点集合は空集合である．

証明 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を滑り鏡映とする．定理 5.13 より $A \sim R_0$ かつ $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ である．$\mathrm{Inv}(f)$ が空集合でないとすると，定理 5.9 の証明後半と同様にして $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ となることが示せるが，これは $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ に矛盾する． □

5.7 鏡映の個数

以下，$(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．

補題 5.1. $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ を固定する $\mathbb{R}^n$ の合同変換は恒等変換に限る．

証明 $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ が $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_n$ を固定するとする．f は原点を固定するので定理 1.3 から，ある $A \in O(n)$ によって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける．さらに，$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \dots, f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{e}_n$ だから

$$A = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 & \cdots & A\boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = E$$

より，f は恒等変換である． □

定理 5.15. $\mathbb{R}^n$ の合同変換は $n+1$ 個以下の鏡映の合成に分解できる．

証明 $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ とする．$\mathbb{R}^n$ の恒等変換または鏡映であって，次を満たす $\sigma_0, \sigma_1 \dots, \sigma_n$ が存在することを示せばよい．

$$f = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$$

まず，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ならば σ_0 を恒等変換とし，$f(\boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{0}$ と $f(\boldsymbol{0})$ の垂直二等分超平面 H_0 に関する鏡映を σ_0 として，$f_0 = \sigma_0 \circ f$ とする．このとき，

$$f_0(\boldsymbol{0}) = \sigma_0\left(f(\boldsymbol{0})\right) = \boldsymbol{0}$$

より，f_0 は $\boldsymbol{0}$ を固定する合同変換である．

次に，$f_0(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1$ ならば σ_1 を恒等変換とし，$f_0(\boldsymbol{e}_1) \neq \boldsymbol{e}_1$ ならば $\boldsymbol{e}_1$ と $f_0(\boldsymbol{e}_1)$ の垂直二等分超平面 H_1 に関する鏡映を σ_1 として，$f_1 = \sigma_1 \circ f_0$ とすると

$$f_1(\boldsymbol{e}_1) = \sigma_1(f_0(\boldsymbol{e}_1)) = \boldsymbol{e}_1$$

である．さらに，$f_1(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．実際，σ_1 が恒等変換なら明らかで，H_1 に関する鏡映なら

$$d(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{0}) = d\left(f_0(\boldsymbol{e}_1), f_0(\boldsymbol{0})\right) = d\left(f_0(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{0}\right)$$

より，$\mathbf{0} \in H_1$ だから $f_1(\mathbf{0}) = \sigma_1\left(f_0(\mathbf{0})\right) = \sigma_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．従って，σ_1 がいずれの場合も f_1 は $\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1$ を固定する合同変換である．

以下，これを繰り返して f_i $(i = 1, \ldots, n)$ を構成する．すなわち，$f_{i-1}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ ならば σ_i を恒等変換とし，$f_{i-1}(\boldsymbol{e}_i) \neq \boldsymbol{e}_i$ ならば $\boldsymbol{e}_i$ と $f_{i-1}(\boldsymbol{e}_i)$ の垂直二等分超平面 H_i に関する鏡映を σ_i として，$f_i =: \sigma_i \circ f_{i-1}$ とする．このとき，各 f_i は $\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i$ を固定する合同変換である．特に，f_n は $\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を固定するので，補題 5.1 から f_n は恒等変換である．よって，

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_n = \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1 \circ \sigma_0 \circ f$$

より f は以下のように $n+1$ 個の鏡映または恒等変換の合成に分解できる．

$$f = \left(\sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1 \circ \sigma_0\right)^{-1} = \sigma_0^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ \cdots \circ \sigma_n^{-1} = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$$

□

5.8　$\mathbb{R}^n$ の合同変換と $n+1$ 次正方行列

$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $n+1$ 次正方行列と $n+1$ 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，合同変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$, $f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成

$$f_1 \circ f_2(\boldsymbol{x}) = f_1\left(f_2\left(\boldsymbol{x}\right)\right) = f_1\left(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2\right) = A_1A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2$$

は $n+1$ 次行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \boldsymbol{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．これにより $\mathbb{R}^n$ の合同変換を $n+1$ 次正方行列の演算で記述できる．これはアフィン変換群を射影変換群に埋め込む方法でもある．

演習問題 5

1. $\mathbb{R}^n$ の一般の位置にある $n+1$ 個の点，すなわち $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ が 1 次独立となる点 $P_0, P_1, \ldots, P_n$ を固定する合同変換は恒等変換に限ることを証明しよう．

2. $\mathbb{R}^n$ の内積が正定値対称行列 G によって $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}G\boldsymbol{y}$ と与えられるとき，これまでの議論はどこがどう変わるか考えよう．

3. 内積に正定値性を仮定しない場合，これまでの議論はどこがどう変わるか考えよう．

4. $\mathbb{R}^n$ 上の距離が通常とは異なるとき，これまでの議論はどこがどう変わるか考えよう．

参考文献

[1] 岩堀長慶,『初学者のための合同変換群の話 幾何学の形での群論演習』, 現代数学社 (2020).

[2] 川崎徹郎,『文様の幾何学』, 牧野書店 (2014).

[3] 河野俊丈,『結晶群』, 共立出版 (2015).

[4] 藤岡敦,「手を動かしてまなぶ 続・線形代数」, 裳華房 (2021).