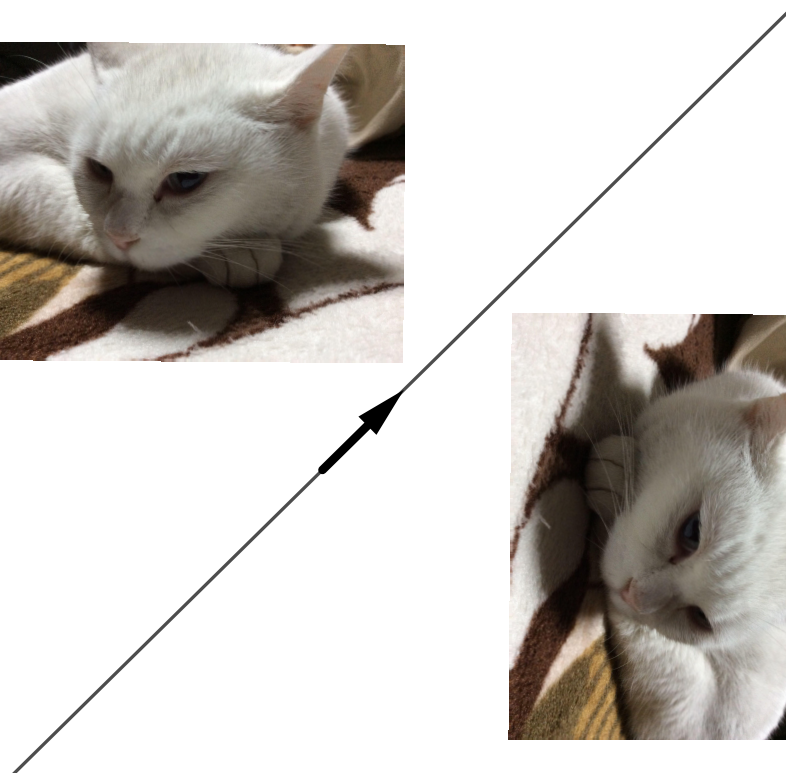


# 線形代数たっぷり 平面と空間の合同変換

内海 和樹

2025 年 2 月 25 日



---

## はじめに

平面と空間の合同変換を線形代数をふんだんに使って分類してみました．はじめに合同変換を一般次元  $\mathbb{R}^n$  において定義しますが，過度に抽象化はせず，平面  $\mathbb{R}^2$  と空間  $\mathbb{R}^3$  (ついでに直線  $\mathbb{R}$ ) の場合それぞれをできるだけ具体的に記述しました．平面  $\mathbb{R}^2$  と空間  $\mathbb{R}^3$  の話は別々に読めるようになっているはずです．

---

## 記号・記法

- $\mathbb{R}^n$  の標準内積を  $\cdot$  で表す. つまり,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$  である.
- $\mathbb{R}^n$  の標準内積から定まるノルムを  $\|\cdot\|$  で表す. つまり,  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  である.
- 線形空間  $\mathbb{R}^n$  のゼロベクトルを  $\mathbf{0}$  と書き, これを  $\mathbb{R}^n$  の原点とも呼ぶ. 次元を明示したいときは  $\mathbf{0}_n$  と書く.
- 線形空間の基底は順序付きの組として  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  のように書く. 例えば,  $\mathbb{R}^3$  の基底  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  と  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$  は別の基底として扱う.
- $E$  を単位行列とし, 次数  $n$  を明示したいときは  $E_n$  と書く.
- 行列  $A$  に対応する線形変換  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  を  $T_A$  で表す.
- 正方行列  $A$  の固有値  $\lambda$  の固有空間を  $V_A(\lambda)$  で表す.
- $\mathbb{R}^n$  の部分線形空間  $V$  の直交補空間を  $V^\perp$  で表す:

$$V^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } \mathbf{y} \in V \text{ に対して } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \}$$

- 対角成分が順に  $a_1, \dots, a_n$  である対角行列を  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  で表す:

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{bmatrix}$$

- 行列  $A$  の転置行列を  ${}^tA$  で表す.
- 直交行列  $A, B$  が向きを保って同じ標準形に標準化されることを  $A \sim B$  で表す.

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} B = {}^tPAP \text{ かつ } \det(P) = 1 \text{ となる直交行列 } P \text{ が存在する}$$

## 1 合同変換とは

本節では  $n$  を任意の自然数とするが、次節以降では  $n$  を  $2, 3, 1$  に固定する。

$\mathbb{R}^n$  を  $n$  次元列ベクトルのなす実線形空間とする。また、 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$  によって内積を定める。さらに、 $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  によってノルムを、 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  によって距離を定める。この距離  $d$  を保つ変換が合同変換である。つまり、合同変換は次のように定義される。

**定義.** 写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \left( \Longleftrightarrow \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \right)$$

を満たすとき、 $f$  を  $\mathbb{R}^n$  の**合同変換**または**等長変換 (isometry)** という。

**注意.** 一般的な距離空間においては、距離を保つ全単射が等長写像（変換）と呼ばれる。合同変換という用語はユークリッド空間などのいくつかの特別な空間に対して使われるようである。また、上の定義では全単射性を仮定していないが、 $\mathbb{R}^n$  上で距離  $d$  を保つ写像は全単射である。この事実は定理 1.4 から容易に導ける。

**定理 1.1.** (1) ベクトル  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  による平行移動  $t_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$  は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。

(2) 直交変換、すなわち、内積を保つ  $\mathbb{R}^n$  の線形変換は合同変換である。

**証明** (1) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に対して

$$\|t_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) - t_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})\| = \|(\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (\mathbf{y} + \mathbf{b})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

が成り立つので、 $t_{\mathbf{b}}$  は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。

(2)  $f$  を  $\mathbb{R}^n$  の直交変換とする。 $f$  は内積を保つので、任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

が成り立つ。よって、 $f$  は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。

□

合同変換と合同変換を合成するとやはり合同変換である。すなわち、次が成り立つ。

**定理 1.2.**  $\mathbb{R}^n$  の 2 つの合同変換の合成は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。

**証明**  $\mathbb{R}^n$  の合同変換  $f_1, f_2$  を任意にとる。任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\|f_1(f_2(\mathbf{x})) - f_1(f_2(\mathbf{y}))\| = \|f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

が成り立つので、合成  $f_1 \circ f_2$  は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。

□

直交変換は線形変換なので原点  $\mathbf{0}$  を保つ合同変換である。この逆、すなわち、次が成り立つ。

**定理 1.3.** 原点  $\mathbf{0}$  を保つ合同変換は線形変換であり、従って、直交変換である。

**証明**  $f$  を  $\mathbb{R}^n$  の合同変換とし、 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  とする。このとき、任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{0}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|$$

が成り立つので、 $f$  はノルムを保つ。これと内積とノルムの関係から任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \left( \|f(\mathbf{x})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

が成り立つので、 $f$  は内積を保つ。以上から、任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  と任意の  $k \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 &= \|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|f(\mathbf{x})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2 \\ &\quad - 2f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x}) - 2f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y}) + 2f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\quad - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{0}\|^2 = 0, \\ \|f(k\mathbf{x}) - kf(\mathbf{x})\|^2 &= \|f(k\mathbf{x})\|^2 - 2f(k\mathbf{x}) \cdot kf(\mathbf{x}) + \|kf(\mathbf{x})\|^2 \\ &= \|k\mathbf{x}\|^2 - 2k(f(k\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})) + k^2\|f(\mathbf{x})\|^2 \\ &= \|k\mathbf{x}\|^2 - 2k(k\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) + k^2\|\mathbf{x}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $f$  は線形変換である。さらに、 $f$  は内積を保つので直交変換である。  $\square$

この定理から、任意の合同変換は直交行列とベクトルによって表せる。すなわち、次が成り立つ。

**定理 1.4.**  $\mathbb{R}^n$  の任意の合同変換  $f$  は、 $n$  次直交行列  $A$  と  $n$  次ベクトル  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  によって

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と一意的に表せる。逆に、この形で表せる写像は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。

**証明**  $f$  を  $\mathbb{R}^n$  の任意の合同変換とする。 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$  とおく。定理 1.1(1) と定理 1.2 よりベクトル  $-\mathbf{b}$  による平行移動  $t_{-\mathbf{b}}$  と  $f$  の合成  $g = t_{-\mathbf{b}} \circ f$  は  $\mathbb{R}^n$  の合同変換である。 $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  なので、定理 1.3 より  $g$  は直交変換である。従って、ある  $n$  次直交行列  $A$  によって  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  と表せる。よって、 $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  である。また、

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

と表せたとすると、 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{b} = \mathbf{c}$  である。従って、 $f$  に対して直交変換  $g$  が一意的に定まるので、対応する直交行列も一意的に定まるから  $A = B$  である。後半の主張は明らかである。  $\square$

## 2 平面の合同変換

平面は  $\mathbb{R}^2$  と同一視し、平面ベクトルを以下のように 2 次列ベクトルとして書く.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

幾何学的にはこれらを平面の点として  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  とみなしつつ、代数的に 2 次列ベクトルとして扱っていく. 平面  $\mathbb{R}^2$  における内積とノルムは具体的に以下のように書ける.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

以下,  $f$  を平面  $\mathbb{R}^2$  の合同変換とする. 定理 1.4 から 2 次直交行列  $A$  と平面ベクトル  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  によって

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と書ける. この表示をもとに,  $f$  を分類していく.

### 2.1 固定点集合

合同変換  $f$  はその固定点集合によって特徴づけられる.  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  を  $f$  の固定点という.  $f$  の固定点集合

$$\text{Fix}(f) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \} \subset \mathbb{R}^2$$

が平面上でどのような図形になるかを考えよう.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x} \Leftrightarrow (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

なので,  $\text{Fix}(f)$  は 2 変数連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の解全体のなす集合である. 従って,  $\text{Fix}(f)$  は空集合, 1 点集合, 直線, 平面全体のいずれかである. 特に,  $f$  が恒等変換のとき, またそのときに限り,  $\text{Fix}(f) = \mathbb{R}^2$  となる. すなわち,

$$A = E \text{ かつ } \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow f = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \text{Fix}(f) = \mathbb{R}^2$$

である. また,

$$A = E \text{ かつ } \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{Fix}(f) = \emptyset$$

である. すなわち,  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{b}$  による平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  は固定点を持たない.

$A$  が 1 を固有値に持たないとき,  $\det(E - A) \neq 0$  だから  $E - A$  は正則である. 従って, このとき連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  は唯一つの解  $\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{b}$  を持つから,  $\text{Fix}(f)$  は 1 点集合である. すなわち, 以下が成り立つ.

$$1 \text{ は } A \text{ の固有値でない} \Rightarrow \text{Fix}(f) = \{ (E - A)^{-1}\mathbf{b} \}$$

$A$  が 1 を固有値に持つとき、その固有空間  $V_A(1)$  は同次形連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解空間に等しい。さらに、連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が解を持つなら、その一般解は特殊解  $\mathbf{x}_0$  を用いて  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$  ( $\mathbf{x}_1 \in V_A(1)$ ) と書ける。すなわち、

$$1 \text{ が } A \text{ の固有値かつ } \text{Fix}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Fix}(f) = \{ \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_1 \in V_A(1) \}$$

である。特に、 $\dim V_A(1) = 1$  なら  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{x}_0$  を通り  $V_A(1)$  に平行な直線である。なお、連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が解を持たなければ、 $\text{Fix}(f)$  は空集合である。

## 2.2 平面の直交変換

よく知られているように、2 次直交行列は以下のどちらか一方の形に書ける。

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$S_\theta$  に対応する直交変換は図 1 のように原点を中心とする角度  $\theta$  の回転であり、 $R_\theta$  に対応する直交変換は図 2 のように原点で  $x$  軸と角度  $\frac{\theta}{2}$  で交わる直線に関する鏡映である。ただし、角度は反時計回りを正の向きとする。

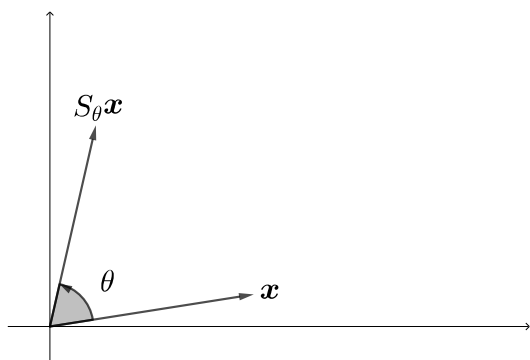


図 1 原点を中心とする  $\theta$  回転

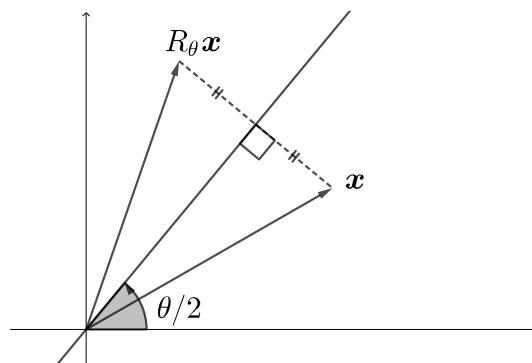


図 2 原点で  $x$  軸と  $\theta/2$  で交わる直線に関する鏡映

2 次直交行列全体の集合を  $O(2)$  と書く。また、 $SO(2) := \{ A \in O(2) \mid \det A = 1 \}$  とする。 $\det S_\theta = 1$ ,  $\det R_\theta = -1$  であり、直交行列の行列式は  $\pm 1$  だから、

$$SO(2) = \{ S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}, \quad O(2) \setminus SO(2) = \{ R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$$

である。回転同士、鏡映同士の合成は回転であり、回転と鏡映の合成は鏡映である。具体的には

$$S_\theta S_\phi = S_{\theta+\phi}, \quad R_\theta R_\phi = S_{\theta-\phi}, \quad S_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad R_\theta S_\phi = R_{\theta-\phi}$$

である。特に、 $S_\theta = R_\theta R_0$ ,  $R_\theta^2 = E$  である。さらに、

$$S_{\frac{\theta}{2}}^{-1} R_\theta S_{\frac{\theta}{2}} = S_{-\frac{\theta}{2}} R_\theta S_{\frac{\theta}{2}} = R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

より,  $R_\theta$  は  $S_{\frac{\theta}{2}}$  により直交対角化されることがわかる. これより (あるいは直接的な計算により)  $R_\theta$  の固有値は  $1, -1$  で, 各々の固有空間  $V_\theta(1), V_\theta(-1)$  は互いに直交し,

$$V_\theta(1) = \left\langle \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_\theta(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right\rangle$$

であることもわかる. なお,  $V_\theta(1)$  が鏡映の軸である. また,  $S_0, S_\pi$  以外の  $S_\theta$  は実固有値を持たない.

## 2.3 平面の合同変換の分類

平面  $\mathbb{R}^2$  の合同変換

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

は直交行列  $A$  と 2 次列ベクトル  $\mathbf{b}$  によって表 1 のように 5 種に分類できる. 定理 2.1 で示すように, 平面の合同変換は 3 個以下の鏡映の合成として表せる. 表 1 の 4 列目はその鏡映の最小個数を表している.

名前	$A$	$\mathbf{b}$	鏡映の最小個数	固定点集合
恒等変換	$E$	$\mathbf{0}$	0	$\mathbb{R}^2$
平行移動	$E$	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	2	空集合
回転	$S_\theta (\neq E)$	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$	2	回転の中心
鏡映	$R_\theta$	$\mathbf{b} \in V_\theta(-1)$	1	鏡映軸
滑り鏡映	$R_\theta$	$\mathbf{b} \notin V_\theta(-1)$	3	空集合

表 1 平面  $\mathbb{R}^2$  の合同変換の分類表

ここでは, 実際に平面  $\mathbb{R}^2$  の合同変換  $f$  が表 1 のいずれかに分類され, またそれで全てであることを確かめていこう. 恒等変換と平行移動に関しては明らかなので, 以下  $f$  は恒等変換でも平行移動でもない, すなわち,  $A \neq E$  とする. また, 直交行列  $S_\theta, R_\theta$  に対応する直交変換をそれぞれ  $s_\theta, r_\theta$  と表す.

### 2.3.1 回転

$A = S_\theta \in SO(2)$  ( $S_\theta \neq E$ ) とする. このとき  $f$  の固定点は 1 点のみであり,  $f$  はその固定点を中心とする  $\theta$  回転である. このことを実際に確かめてみよう.

$S_\theta$  は 1 を固有値に持たないので,  $\det(E - S_\theta) \neq 0$  である. 従って,  $E - S_\theta$  は正則なので

$$\mathbf{x} \in \text{Fix}(f) \Leftrightarrow S_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x} \Leftrightarrow (E - S_\theta) \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = (E - S_\theta)^{-1} \mathbf{b}$$

である. 従って,  $f$  の固定点は  $\mathbf{c} := (E - S_\theta)^{-1} \mathbf{b}$  のみである. このとき, 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  に対して

$$f(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = S_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{c})$$



である。よって、確かに  $f$  は  $c$  を中心とする  $\theta$  回転であることがわかる (図 3)。また、これより

$$f = t_c \circ s_\theta \circ t_{-c}$$

とも表せる。すなわち、 $c$  を中心とする回転は「一旦  $-c$  平行移動し、原点を中心に回転させた後に再び  $c$  平行移動する変換」と言い換えることもできる。

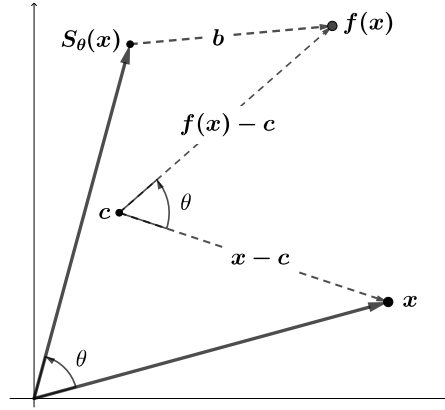


図 3  $c$  を中心とする  $\theta$  回転

### 2.3.2 鏡映と滑り鏡映

$A = R_\theta \in O(2) \setminus SO(2)$  とする。このとき、 $b \in V_\theta(-1)$  なら  $\text{Fix}(f)$  は  $b/2$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線であり、 $f$  はこの直線に関する鏡映である。一方、 $b \notin V_\theta(-1)$  なら  $\text{Fix}(f)$  は空集合であり、 $f$  は滑り鏡映である。これを実際に確かめていこう。

直交変換  $r_\theta$  による平面の固有空間分解  $\mathbb{R}^2 = V_\theta(1) \oplus V_\theta(-1)$  によって  $b$  を

$$b = b^+ + b^-, \quad b^+ \in V_\theta(1), \quad b^- \in V_\theta(-1) \quad (2.1)$$

と分解する。ここで、 $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$  とすると、 $x \in \text{Fix}(f)$  に対して  $f(x) = x$  なので

$$R_\theta x + b^+ + b^- = x \quad (2.2)$$

である。この式 (2.2) の両辺に  $R_\theta$  を左から掛けると、 $R_\theta^2 = E$ ,  $R_\theta b^\pm = \pm b^\pm$  なので

$$x + b^+ - b^- = R_\theta x \quad (2.3)$$

が得られる。これら (2.2) と (2.3) から  $b^+ = 0$  より、 $b \in V_\theta(-1)$  である。逆に、 $b \in V_\theta(-1)$  とすると、 $R_\theta b = -b$  なので

$$f\left(\frac{b}{2}\right) = R_\theta\left(\frac{b}{2}\right) + b = -\frac{b}{2} + b = \frac{b}{2} \quad (2.4)$$

より、 $b/2 \in \text{Fix}(f)$  だから  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$  である。以上から、

$$\text{Fix}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow b \in V_\theta(-1)$$

である。これにより、 $\mathbf{b} \in V_\theta(-1)$  かそうでないかによって合同変換  $f$  を分けることができる。

初めに、 $\mathbf{b} \in V_\theta(-1)$  とする。このとき  $\text{Fix}(f)$  は直線で、 $f$  がこの直線  $\text{Fix}(f)$  に関する鏡映であることを確かめよう。

まず、 $\text{Fix}(f)$  が直線となることを確かめておく。 $\text{Fix}(f)$  が空集合でないので、連立 1 次方程式

$$(E - R_\theta)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

は解を持つ。 $R_\theta$  は 1 を固有値に持つので  $\det(E - R_\theta) = 0$  であり、 $E - R_\theta \neq O$  だから、 $\text{rank}(E - R_\theta) = 1$  である。従って、 $\dim V_\theta(1) = 1$  なので 2.1 節で見たように  $\text{Fix}(f)$  は直線である。特に、(2.4) より  $\mathbf{b}/2 \in \text{Fix}(f)$  だから  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{b}/2$  を通る。さらに、任意の  $\mathbf{x} \in \text{Fix}(f)$  に対して、

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = (R_\theta \mathbf{x}) \cdot (R_\theta \mathbf{b}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{b}) = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$$

より  $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b}\|^2/2$  が成り立つから  $(\mathbf{x} - \mathbf{b}/2) \cdot \mathbf{b} = 0$  となり、 $\text{Fix}(f)$  と  $\mathbf{b}$  は直交する。つまり、 $\text{Fix}(f)$  は  $V_\theta(-1)^\perp = V_\theta(1)$  に平行で  $\mathbf{b}/2$  を通る直線である。

次に、実際に  $f$  が直線  $\text{Fix}(f)$  に関する鏡映であることを確かめる。任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  と任意の  $\mathbf{p} \in V_\theta(1)$  に対して、

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} &= (R_\theta \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = (R_\theta \mathbf{x}) \cdot (R_\theta \mathbf{p}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = 0, \\ f\left(\frac{f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}}{2}\right) &= R_\theta\left(\frac{R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{x}}{2}\right) + \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b} + R_\theta \mathbf{x}}{2} + \mathbf{b} = \frac{R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{x}}{2} = \frac{f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  が  $V_\theta(1)$  に、従って  $\text{Fix}(f)$  に、直交し、 $f(\mathbf{x})$  と  $\mathbf{x}$  の中点が  $\text{Fix}(f)$  上にあるので、 $f$  は確かに直線  $\text{Fix}(f)$  に関する鏡映である (図 4)。

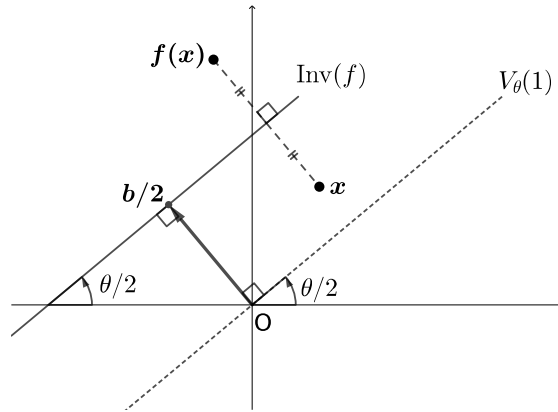


図 4 直線  $\text{Fix}(f)$  に関する鏡映

なお、任意の  $\mathbf{c} \in \text{Fix}(f)$  に対して

$$f(\mathbf{x}) = R_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}$$

が成り立つから、

$$f = t_{\mathbf{c}} \circ r_\theta \circ t_{-\mathbf{c}}$$

である．すなわち， $c$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線に関する鏡映は「一旦  $-c$  平行移動し， $V_\theta(1)$  に関する鏡映移動をした後に再び  $c$  平行移動する変換」と言い換えることもできる（図 5）．

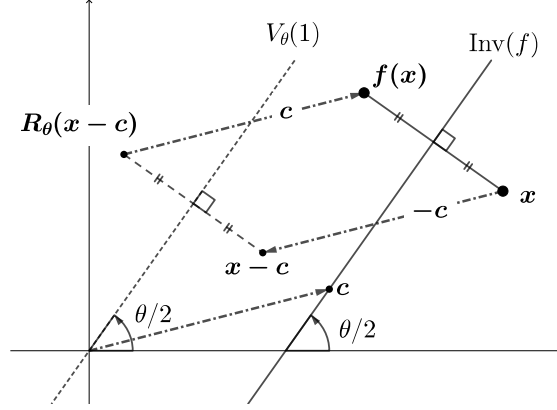


図 5  $c$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線に関する鏡映

続いて， $b \notin V_\theta(-1)$  とする．このとき  $f$  は滑り鏡映であることを確かめよう．なお，平面上の滑り鏡映の定義は次の通りである．

**定義．** 平面上の直線  $L$  に関する鏡映  $g$  と  $L$  に平行なベクトル  $c \in \mathbb{R}^2$  による平行移動  $t_c$  との合成  $t_c \circ g$  を  $L$  と  $c$  に関する滑り鏡映または並進鏡映という．この定義に従えば滑り鏡映は鏡映 ( $c = \mathbf{0}$  のとき) を含むのだが，本稿では鏡映でないもののみを滑り鏡映と呼ぶことにする．

今  $b \notin V_\theta(-1)$  としているので， $b$  を式 (2.1) のように分解すると  $b^+ \neq \mathbf{0}$  である．従って，

$$f(x) = (R_\theta x + b^-) + b^+$$

である． $g(x) = R_\theta x + b^-$  とおくと， $f = t_{b^+} \circ g$  である． $b^- \in V_\theta(-1)$  だから  $g$  は直線  $\text{Fix}(g)$  に関する鏡映である．また， $b^+ \in V_\theta(1)$  より  $b^+$  は  $\text{Fix}(g)$  と平行である．よって， $f$  は  $b^-/2$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線とベクトル  $b^+$  に関する滑り鏡映である（図 6）．

なお，鏡映と平行移動を合成する順番はどちらでもよい．実際， $R_\theta b^+ = b^+$  より

$$g(t_{b^+}(x)) = R_\theta(x + b^+) + b^- = (R_\theta x + b^-) + b^+ = t_{b^+}(g(x))$$

であるから， $g \circ t_{b^+} = t_{b^+} \circ g$  である．

最後に，内積による鏡映と滑り鏡映の判別方法をまとめておこう． $R_\theta$  の単位固有ベクトルに

$$p_\theta^+ = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \in V_\theta(1), \quad p_\theta^- = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \in V_\theta(-1)$$

と名前を付ける． $(p_\theta^+, p_\theta^-)$  は  $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底だから式 (2.1) における  $b^+, b^-$  はそれぞれ

$$b^+ = (b, p_\theta^+) p_\theta^+, \quad b^- = (b, p_\theta^-) p_\theta^-$$

と表せる．これより，合同変換  $f(x) = R_\theta x + b$  は以下の 2 つに分けられる．

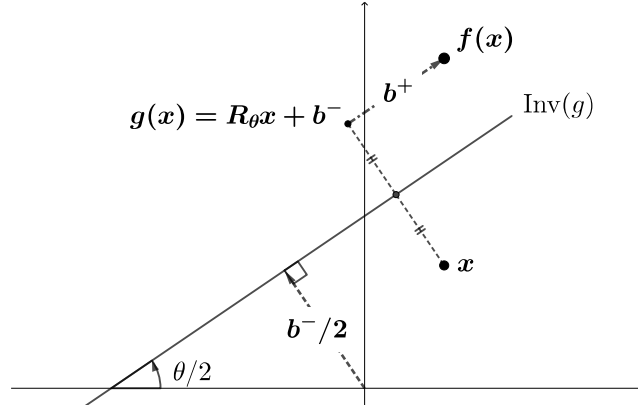


図 6 滑り鏡映

- $\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_\theta^+ = 0$  のとき,  $f$  は  $\mathbf{b}/2$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線に関する鏡映である.
- $\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_\theta^+ \neq 0$  のとき,  $f$  は  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_\theta^-) \mathbf{p}_\theta^- / 2$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線とベクトル  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_\theta^+) \mathbf{p}_\theta^+$  に関する滑り鏡映である.

## 2.4 鏡映の個数

平面の合同変換それぞれに対し, それを合成する鏡映を全て調べ上げ, 分類表 1 を完成させよう.

**定理 2.1.** 平面  $\mathbb{R}^2$  の任意の合同変換は 3 個以下の鏡映の合成として表せる. 特に, 各合同変換に対してそれを合成する鏡映の最小個数は表 1 にある通りである.

**証明** 恒等変換は 0 個, 鏡映は 1 個の鏡映の合成であり, またそれ以外の合同変換は 1 個以下の鏡映の合成として表せないは明らかである. 残りの平行移動, 回転, 滑り鏡映に関しては以下に続く補題 2.1, 補題 2.2, 補題 2.3 により証明が完成する.  $\square$

**補題 2.1.** (1) 平面  $\mathbb{R}^2$  の平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) は平行な 2 直線に関する 2 個の鏡映の合成である.

このとき, 2 つの鏡映軸は共に  $\mathbf{b}$  に直交し, その距離は  $\|\mathbf{b}\|/2$  である.

(2) 逆に, 平面  $\mathbb{R}^2$  の平行な 2 直線  $L_1, L_2$  ( $L_1 \neq L_2$ ) に関する鏡映  $g_1, g_2$  の合成  $g_2 \circ g_1$  は平行移動である. 移動方向は  $L_1$  から  $L_2$  の方へ両直線に直交する方向で, 移動距離は 2 直線の距離の 2 倍である.

**証明** (1)  $\mathbf{b} \in V_\theta(-1)$  となる  $\theta \in \mathbb{R}$  をとる. このとき, 合同変換  $g(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$  は  $\mathbf{b}/2$  を通り  $V_\theta(1)$  を通る直線  $L$  に関する鏡映である. 従って, 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  に対して

$$g(r_\theta(\mathbf{x})) = R_\theta(R_\theta \mathbf{x}) + \mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{b} = t_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$$

であるから  $t_{\mathbf{b}}$  は 2 個の鏡映の合成  $g \circ r_\theta$  である. また, 図 7 のように  $g, r_\theta$  の鏡映軸  $L, V_\theta(1)$  はそれぞれ  $\mathbf{b}/2, \mathbf{0}$  を通り共に  $\mathbf{b}$  に直交し, 2 直線の距離は  $\|\mathbf{b}\|/2$  である.

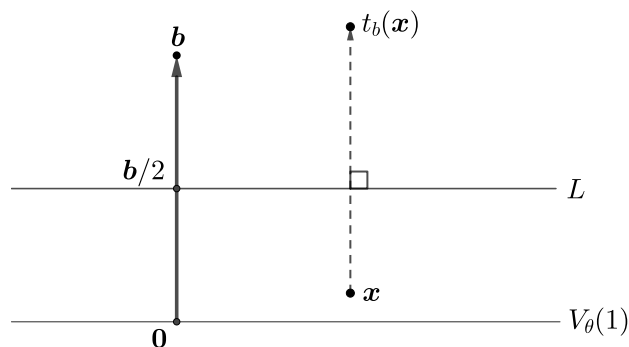


図 7 平行移動は平行な 2 直線に関する鏡映の合成である.

(2) 逆に, 平行な 2 直線  $L_1, L_2$  ( $L_1 \neq L_2$ ) に関する鏡映の合成が平行移動となることを示す.  $L_1, L_2$  が  $x$  軸とのなす角を  $\theta/2$  とすると,  $L_1, L_2$  に関する鏡映  $g_1, g_2$  は

$$g_1(x) = R_\theta x + b_1, \quad g_2(x) = R_\theta x + b_2 \quad (b_1, b_2 \in V_\theta(-1), b_1 \neq b_2)$$

と書ける. ただし,  $L_1, L_2$  はそれぞれ  $b_1/2, b_2/2$  を通る. これより任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して

$$g_2 \circ g_1(x) = R_\theta (R_\theta x + b_1) + b_2 = x + b_2 - b_1$$

だから,  $g_2 \circ g_1$  は平行移動  $t_{b_2-b_1}$  である. また, 図 8 のようにその移動方向は  $L_1$  から  $L_2$  の方へ両直線に直交する方向であり, 移動距離  $\|b_2 - b_1\|$  は  $L_1, L_2$  の距離の 2 倍である.  $\square$

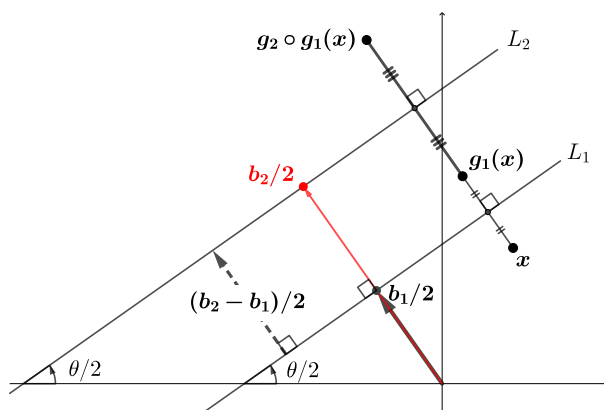


図 8 鏡映軸が平行な 2 つの鏡映の合成は平行移動である.

**補題 2.2.** (1) 平面  $\mathbb{R}^2$  の  $\theta$  回転は回転の中心で交わる 2 直線に関する 2 個の鏡映の合成である. このとき, 鏡映軸同士のなす角は  $\theta/2$  である.

(2) 逆に, 平面  $\mathbb{R}^2$  の平行でない 2 直線  $L_1, L_2$  に関する鏡映  $g_1, g_2$  の合成  $g_2 \circ g_1$  は 2 直線の交点を中心とする  $L_1$  から  $L_2$  の方への回転である. 回転角は 2 直線のなす角の 2 倍である.

**証明** (1)  $f$  を  $c \in \mathbb{R}^2$  を中心とする平面の  $\theta$  回転とする.  $f(x) = S_\theta(x - c) + c$  と書ける.

$$g_1(x) = R_0(x - c) + c, \quad g_2(x) = R_\theta(x - c) + c \quad (\theta \neq 0)$$

とすると,  $g_1$  は  $x$  軸に平行で  $c$  を通る直線  $L_1$  に関する鏡映であり,  $g_2$  は  $V_\theta(1)$  に平行で  $c$  を通る直線  $L_2$  に関する鏡映である. このとき, 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して

$$g_2 \circ g_1(x) = R_\theta(R_0(x - c) + c - c) + c = S_\theta(x - c) + c = f(x)$$

より,  $f$  は 2 個の鏡映の合成  $g_2 \circ g_1$  である. 図 9 のように鏡映軸  $L_1, L_2$  のなす角は  $\theta/2$  である.

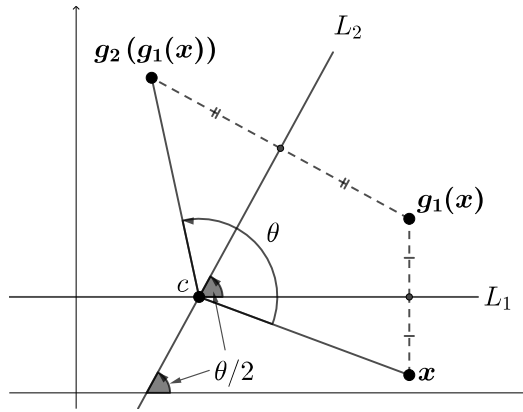


図 9 回転は平行でない 2 直線に関する鏡映の合成である.

(2) 逆に, 平行でない 2 直線  $L_1, L_2$  に関する鏡映の合成が回転となることを示す.  $L_1, L_2$  が  $x$  軸となす角をそれぞれ  $\theta/2, \phi/2$  とすると,  $L_1, L_2$  に関する鏡映  $g_1, g_2$  は

$$g_1(x) = R_\theta x + b_1, \quad g_2(x) = R_\phi x + b_2 \quad (b_1 \in V_\theta(-1), b_2 \in V_\phi(-1))$$

と書ける. ただし,  $L_1, L_2$  はそれぞれ  $b_1/2, b_2/2$  を通る. これより任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して

$$g_2 \circ g_1(x) = R_\phi(R_\theta x + b_1) + b_2 = S_{\phi-\theta} x + R_\phi b_1 + b_2$$

だから,  $g_2 \circ g_1$  は  $c := (E - S_{\phi-\theta})^{-1}(R_\phi b_1 + b_2)$  を中心とする  $\phi - \theta$  回転である. 鏡映軸  $L_1, L_2$  の交点を  $c' \in L_1 \cap L_2$  とすると,  $c' \in \text{Fix}(g_2 \circ g_1)$  である. 回転の固定点は中心点だけなので  $c' = c$  である. また, 図 10 のように回転方向は  $L_1$  から  $L_2$  の方へ, 回転角  $\phi - \theta$  は  $L_1$  と  $L_2$  のなす角の 2 倍である.  $\square$

**補題 2.3.** 平面  $\mathbb{R}^2$  の滑り鏡映は 3 個の鏡映の合成として表せる. また, 滑り鏡映は 2 個以下の鏡映の合成としては表せない.

**証明**  $f$  を平面  $\mathbb{R}^2$  の滑り鏡映とする.  $f(x) = R_\theta x + b$  ( $\theta \neq 0, b \notin V_\theta(-1)$ ) と書ける.

$$b = b^+ + b^-, \quad b^+ \in V_\theta(1), \quad b^- \in V_\theta(-1), \quad b^+ \neq 0$$

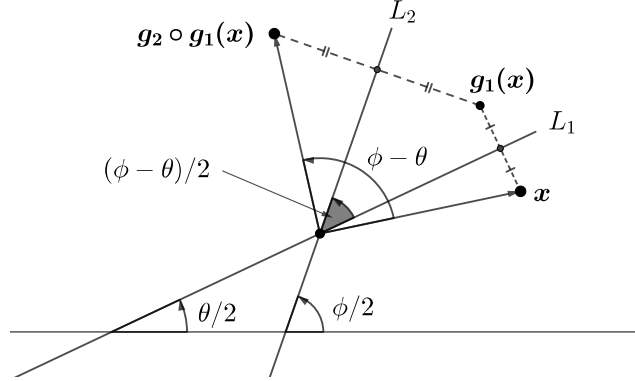


図 10 鏡映軸が平行でない 2 つの鏡映の合成は回転である.

とし,  $g_1(x) = R_\theta x + b^-$  とする.  $g_1$  は  $b^-/2$  を通り  $V_\theta(1)$  に平行な直線  $L_1$  に関する鏡映である.

$$f(x) = (R_\theta x + b^-) + b^+ = t_{b^+}(g_1(x))$$

より,  $f = t_{b^+} \circ g_1$  である. さらに, 補題 2.1(1) より平行移動  $t_{b^+}$  は図 11 のように平行な 2 直線  $L_2, L_3$  に関する鏡映  $g_2, g_3$  の合成として表せる. 実際,  $L_2, L_3$  をそれぞれ  $0, b^+/2$  を通り共に  $b^+$  に垂直な直線とすれば  $t_{b^+} = g_2 \circ g_1$  である. よって,

$$f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$$

より  $f$  は 3 個の鏡映の合成である. また, 補題 2.1(2) と補題 2.2(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので, 滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.  $\square$

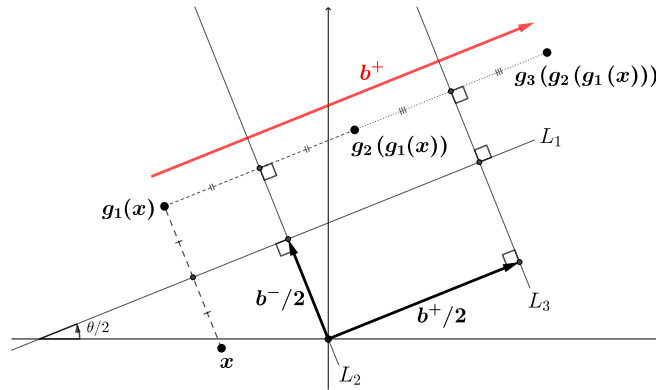


図 11 滑り鏡映は 3 個の鏡映の合成である.

## 2.5 平面の合同変換と 3 次正方行列

平面  $\mathbb{R}^2$  の合同変換  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  は 3 次正方行列と 3 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる。さらに、合同変換  $f_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$  の合成

$$f_1 \circ f_2(\mathbf{x}) = f_1(f_2(\mathbf{x})) = f_1(A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2) = A_1A_2\mathbf{x} + A_1\mathbf{b}_2$$

は 3 次正方行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \mathbf{b}_1 + A_1\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる。これにより平面  $\mathbb{R}^2$  の合同変換を 3 次正方行列の演算で記述できる。

例えば、2 つの合同変換

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の合成  $f_1 \circ f_2$  は

$$f_1(f_2(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるが、これが 3 次正方行列同士の積として

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

と計算できる。この右辺の 3 次正方行列の左上部分と右上部分が、それぞれ合成  $f_1(f_2(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  の直交行列  $A$  と平面ベクトル  $\mathbf{b}$  である。このように全てを行列演算にしてしまうことで計算機で合同変換が扱いやすくなる。なお、これは平面上のアフィン変換や射影平面上の射影変換を 3 次正方行列によって表現する手法の特殊な場合でもある。



## 演習問題 2

- 次の平面の合同変換を  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  の形に書き下そう.
  - 点  $(c_1, c_2)$  を中心とする  $\theta$  回転
  - 直線  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  に関する鏡映
  - 点  $(c_1, c_2)$  を通り  $x$  軸とのなす角が  $\theta$  の直線と,  $x$  軸とのなす角が  $\theta$  で大きさが  $k > 0$  のベクトルに関する滑り鏡映

- 次の平面の合同変換が分類表 1 のどれに当てはまるか判定しよう. また, 回転に対しては中心と回転角を, 鏡映に対しては軸の方程式を, 滑り鏡映に対しては軸の方程式と平行移動ベクトルを明示しよう.

$$(1) f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$(3) f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) f_4 = f_1 \circ f_2$$

$$(5) f_5 = f_2 \circ f_1$$

$$(6) f_6(\mathbf{x}) = f_2 \left( \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$(7) f_7(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x}) - \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(8) f_8 = f_7 \circ f_2$$

- 適当なプログラミング環境のもとで, 2 次直交行列  $A$  と 2 次列ベクトル  $\mathbf{b}$  が与えられたときに平面の合同変換

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

が表 1 のどれに当てはまるか判定するプログラムを作成しよう. また, 回転に対しては中心と回転角, 鏡映に対しては軸の方程式, 滑り鏡映に対しては軸の方程式と平行移動ベクトルなどの情報も出力しよう.

- 平面の合同変換  $f_1, f_2$  の合成  $f_1 \circ f_2$  を分類しよう.

### 3 空間の合同変換

空間は  $\mathbb{R}^3$  と同一視し、空間ベクトルを以下のように 3 次列ベクトルとして書く。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

幾何学的にはこれらを空間の点として  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  とみなしつつ、代数的に 3 次列ベクトルとして扱っていく。空間  $\mathbb{R}^3$  における内積とノルムは以下の通りである。

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^t \mathbf{x} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

以下、 $f$  を空間  $\mathbb{R}^3$  の合同変換とする。定理 1.4 から 3 次直交行列  $A$  と空間ベクトル  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  によって

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と書ける。この表示をもとに、 $f$  を分類していく。なお、以下  $\mathbb{R}^3$  の標準基底  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  は右手系をなすとする。

#### 3.1 固定点集合

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  を  $f$  の固定点という。 $f$  の固定点集合

$$\text{Fix}(f) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \}$$

が空間  $\mathbb{R}^3$  の中でどのような図形になるかを考えよう。

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x} \Leftrightarrow (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

なので、 $\text{Fix}(f)$  は 3 変数連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の解全体のなす集合である。従って、 $\text{Fix}(f)$  は空集合、1 点集合、直線、平面、空間全体のいずれかである。特に、 $f$  が恒等変換のとき、またそのときに限り、 $\text{Fix}(f) = \mathbb{R}^3$  となる。すなわち、

$$A = E \text{ かつ } \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow f = \text{id}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \text{Fix}(f) = \mathbb{R}^3$$

である。また、

$$A = E \text{ かつ } \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{Fix}(f) = \emptyset$$

である。すなわち、 $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{b}$  による平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  は固定点を持たない。

$A$  が 1 を固有値に持たないとき、 $\det(E - A) \neq 0$  だから  $E - A$  は正則である。従って、このとき連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  は唯一つの解  $\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{b}$  を持つので、 $\text{Fix}(f)$  は 1 点集合である。すなわち、以下が成り立つ。

$$1 \text{ は } A \text{ の固有値でない} \Rightarrow \text{Fix}(f) = \{ (E - A)^{-1}\mathbf{b} \}$$

$A$  が 1 を固有値に持つとき、その固有空間  $V_A(1)$  は同次形連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解空間に等しい。さらに、連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が解を持つなら、その一般解は特殊解  $\mathbf{x}_0$  を用いて  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$  ( $\mathbf{x}_1 \in V_A(1)$ ) と書ける。すなわち、

$$1 \text{ が } A \text{ の固有値かつ } \text{Fix}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Fix}(f) = \{ \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_1 \in V_A(1) \}$$

である。特に、 $\dim V_A(1) = 2$  なら  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{x}_0$  を通り  $V_A(1)$  に平行な平面であり、 $\dim V_A(1) = 1$  なら  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{x}_0$  を通り  $V_A(1)$  に平行な直線である。なお、連立 1 次方程式  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が解を持たなければ、 $\text{Fix}(f)$  は空集合である。

## 3.2 空間の直交変換

3 次直交行列全体の集合を  $O(3)$  と書く。また、 $SO(3) := \{ A \in O(3) \mid \det A = 1 \}$  とする。

3 次直交行列は固有値の絶対値が 1 で、以下のどちらか一方の形に標準化できることを示そう。

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

**定理 3.1.** 3 次直交行列  $A$  は  $\det A (= \pm 1)$  を固有値に持つ。

**証明**  $A$  を 3 次直交行列とする。 $A$  の固有方程式  $\det(xE - A) = 0$  は実数係数 3 次方程式なので、中間値の定理から実解を持つ。つまり、 $A$  は実固有値  $\alpha$  を持つ。直交変換  $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  は内積を保つから、固有値  $\alpha$  の固有ベクトル  $\mathbf{x} (\neq \mathbf{0})$  に対して

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (T_A(\mathbf{x}), T_A(\mathbf{x})) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

より  $\alpha^2 = 1$  である。従って、 $\alpha = 1$  または  $\alpha = -1$  である。

$A$  の 3 個の固有値が全て実数の場合、可能な組み合わせは、 $1, 1, 1$  か  $1, -1, -1$  か  $-1, 1, 1$  か  $-1, -1, -1$  であり、全固有値の積は  $\det A$  に等しいので、いずれも  $\det A$  は  $A$  の固有値である。

3 個の固有値が実数  $\alpha (= \pm 1)$  と 2 個の互いに共役な複素数  $\lambda, \bar{\lambda}$  の場合、 $|\det A| = 1$  なので

$$1 = |\det A| = |\alpha\lambda\bar{\lambda}| = |\lambda\bar{\lambda}| = \lambda\bar{\lambda}$$

である。よって、 $\det A = \alpha\lambda\bar{\lambda} = \alpha$  より  $\det A$  は  $A$  の固有値である。 □

**定理 3.2.** 任意の  $A \in O(3)$  に対して、以下を満たす直交行列  $P \in SO(3)$  が存在する。

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{cases} S_\theta & (\det A = 1) \\ R_\theta & (\det A = -1) \end{cases}$$

**証明**  $A \in O(3)$  とし、 $\det A = 1$  とする。定理 3.1 より  $A$  は 1 を固有値に持つ。 $\mathbf{p}_3$  を固有値 1 の単位固有ベクトルとし、 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  を  $\langle \mathbf{p}_3 \rangle$  の直交補空間  $\langle \mathbf{p}_3 \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^3$  の正規直交基底とすると、 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底である。従って、 $P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$  とすると  $P$  は直

交行列である．さらに， $\det P = -1$  なら  $\mathbf{p}_1$  と  $\mathbf{p}_2$  を入れ替えることで  $\det P = 1$  とできるので  $P \in SO(3)$  としてよい． $\mathbb{R}^3$  の直交変換  $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  に対して， $T_A(\mathbf{p}_3) = A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3$  だから，

$$T_A(\mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{p}_3 = T_A(\mathbf{p}_i) \cdot T_A(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_3 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

である．これより，

$$T_A(\mathbf{p}_1) = b_{11}\mathbf{p}_1 + b_{21}\mathbf{p}_2 + b_{31}\mathbf{p}_3, \quad T_A(\mathbf{p}_2) = b_{12}\mathbf{p}_1 + b_{22}\mathbf{p}_2 + b_{32}\mathbf{p}_3 \quad (b_{ij} \in \mathbb{R})$$

とすると，

$$0 = T_A(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{p}_3 = b_{31}, \quad 0 = T_A(\mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{p}_3 = b_{32}$$

であるから，

$$\begin{bmatrix} T_A(\mathbf{p}_1) & T_A(\mathbf{p}_2) & T_A(\mathbf{p}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．すなわち，基底  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  に関する直交変換  $T_A$  の表現行列は

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．正規直交基底に関する直交変換の表現行列は直交行列なので， $P^{-1}AP$  は直交行列である．これより，2 次正方行列  $[b_{ij}]$  は直交行列である．さらに， $\det(P^{-1}AP) = \det A = 1$  より  $\det[b_{ij}] = 1$  である．よって，ある  $\theta \in \mathbb{R}$  によって

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と書ける． $\det A = -1$  のときは固有値  $-1$  の単位固有ベクトルを  $\mathbf{p}_3$  として同様に示せる．  $\square$

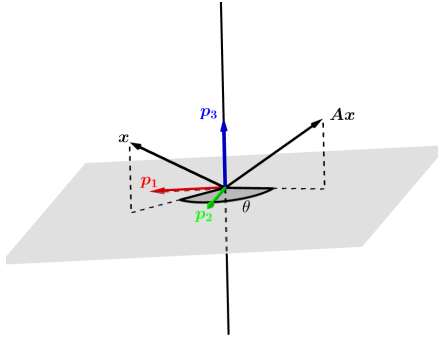
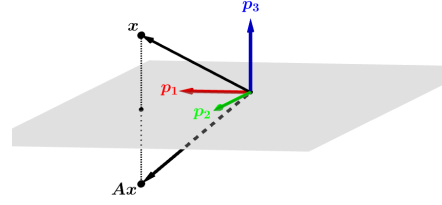
**定義．**  $A, B \in O(3)$  に対して  $B = {}^tPAP$  となる  $P \in SO(3)$  が存在するとき， $A \sim B$  と書く．

$A \in O(3)$  が  $P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$  によって  $S_\theta, R_\theta$  に標準化されるとき， $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底である．このとき， $\mathbb{R}^3$  の直交変換  $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  は以下の 3 つに分けられる．ただし，回転の向きは  $\mathbf{p}_3$  の方向に進む右ねじの回転方向を正とする．

- $A \sim S_\theta$  のとき，直交変換  $T_A$  は直線  $V_A(1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle$  を軸とする  $\theta$  回転である (図 12)．
- $A \sim R_0$  のとき，直交変換  $T_A$  は平面  $V_A(1) = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$  に関する鏡映である (図 13)．
- $A \sim R_\theta \neq R_0$  のとき，直交変換  $T_A$  は直線  $V_A(-1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle$  を軸とする  $\theta$  回転と平面  $V_A(-1)^\perp = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$  に関する鏡映の合成，すなわち，回転鏡映である．

また，3 次直交行列の標準形同士は以下の関係式を満たす．特に， $S_\theta = R_\theta R_0$ ， $R_0^2 = E$  である．

$$S_\theta S_\phi = R_\theta R_\phi = S_{\theta+\phi}, \quad S_\theta R_\phi = R_\phi S_\theta = R_{\theta+\phi}$$


図 12  $p_3$  を軸とする回転角  $\theta$  の回転

図 13 平面  $\langle p_1, p_2 \rangle$  に関する鏡映

### 3.3 空間の合同変換の分類

空間  $\mathbb{R}^3$  の合同変換

$$f(x) = Ax + b$$

は直交行列  $A$  の標準形と 3 次列ベクトル  $b$  によって表 2 のように 7 種に分類できる. 定理 3.6 で示すように,  $\mathbb{R}^3$  の合同変換は 4 個以下の鏡映の合成として表せる. 表 2 の 4 列目はその鏡映の最小個数を表している.

名前	$A$ の標準形	$b$	鏡映の個数	固定点集合
恒等変換	$E$	$\mathbf{0}$	0	$\mathbb{R}^3$
平行移動	$E$	$b \neq \mathbf{0}$	2	空集合
回転	$S_\theta (\neq E)$	$b \in V_A(1)^\perp$	2	回転軸
螺旋運動	$S_\theta (\neq E)$	$b \notin V_A(1)^\perp$	4	空集合
鏡映	$R_0$	$b \in V_A(-1)$	1	鏡映面
滑り鏡映	$R_0$	$b \notin V_A(-1)$	3	空集合
回転鏡映	$R_\theta (\neq R_0)$	$b \in \mathbb{R}^3$	3	中心点

表 2 空間  $\mathbb{R}^3$  の合同変換の分類表

ここでは, 実際に  $\mathbb{R}^3$  の合同変換  $f$  が表 2 のいずれかに分類され, またそれで全てであることを確かめていこう. 恒等変換と平行移動に関しては明らかなので, 以下  $f$  は恒等変換でも平行移動でもない, すなわち,  $A \neq E$  とする.

#### 3.3.1 回転と螺旋運動

$A \sim S_\theta$  かつ  $A \neq E$  とする. このとき,  $f$  は回転か螺旋運動である. これを詳しく見ていこう. なお, 空間における螺旋運動の定義は以下の通りである.

**定義.** 空間内の直線  $L$  を軸とする角  $\theta$  の回転  $g$  と  $L$  に平行なベクトル  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  による平行移動との合成  $t_{\mathbf{c}} \circ g$  を  $L$  と  $\mathbf{c}$  に関する角  $\theta$  の螺旋運動という. この定義に従えば螺旋運動は回転 ( $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  のとき) を含むのだが, 本稿では回転でないもののみを螺旋運動と呼ぶことにする.

直交行列  $A$  が直交行列  $P \in SO(3)$  によって標準化される, すなわち,

$$S_{\theta} = P^{-1}AP = {}^tPAP, \quad P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3] \in SO(3)$$

とする.  $\det P = 1$  なので  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底であり,

$$V_A(1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle, \quad V_A(1)^{\perp} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

である. このとき, 次が成り立つ.

**定理 3.3.**  $A, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  を先の通りとする. このとき, 合同変換  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  は回転か螺旋運動である. 特に, 各々の詳細は次の通りである.

- (1)  $\mathbf{b} \in V_A(1)^{\perp}$  のとき: 固定点集合  $\text{Fix}(f)$  は  $V_A(1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle$  に平行な直線であり,  $f$  はこの直線を軸とする回転角  $\theta$  の回転である.
- (2)  $\mathbf{b} \notin V_A(1)^{\perp}$  のとき:  $f$  は固定点を持たない.  $f$  は回転  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_3$  の軸とベクトル  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_3$  による平行移動に関する角  $\theta$  の螺旋運動である. このとき,  $g$  の回転軸  $\text{Fix}(g)$  は  $V_A(1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle$  に平行である.

ただし, いずれも回転の向きは  $\mathbf{p}_3$  の方向に進む右ねじの回転方向を正とする.

以下, 定理 3.3 を証明していこう.

まず,  $f$  が固定点を持つかどうかは  $\mathbf{b} \in V_A(1)^{\perp}$  か否かで分かれる. つまり, 次が成り立つ.

**補題 3.1.** 上の状況において,  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{b} \in V_A(1)^{\perp}$  のとき, そのときに限り, 空集合でない.

**証明**  $\mathbf{b} \in V_A(1)^{\perp}$  とする.  $\mathbb{R}^3$  の線形変換  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A\mathbf{x}$  を考える. 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  に対して

$$g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 - (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 - (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{p}_3) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 = 0$$

であるから,  $g(\mathbb{R}^3) \subset \langle \mathbf{p}_3 \rangle^{\perp} = V_A(1)^{\perp} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$  である. さらに,  $\ker g = V_A(1)$  なので線形変換の次元定理より

$$\dim g(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker g = 3 - 1 = 2$$

であるから,  $g(\mathbb{R}^3) = V_A(1)^{\perp}$  である. よって,  $\mathbf{b} = g(\mathbf{c}) = \mathbf{c} - A\mathbf{c}$  となる  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  が存在する. すなわち,  $\mathbf{c} \in \text{Fix}(f)$  なので  $\text{Fix}(f)$  は空集合でない.

逆に,  $\text{Fix}(f)$  が空集合でないとする. 任意の  $\mathbf{x} \in \text{Fix}(f)$  に対して,  $\mathbf{b} = \mathbf{x} - A\mathbf{x}$  だから

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 - (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 - (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{p}_3) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_3 = 0$$

である. 従って,  $\mathbf{b} \in V_A(1)^{\perp}$  である. □

**定理 3.3 の証明** (1)  $\mathbf{b} \in V_A(1)^\perp$  とする. 補題 3.1 より  $\text{Fix}(f)$  は空集合でない. さらに,  $\dim V_A(1) = 1$  なので 3.1 節で見たように  $\text{Fix}(f)$  は  $V_A(1)$  と平行な直線である. このとき, 任意の  $\mathbf{c} \in \text{Fix}(f)$  と任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  に対して

$$f(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = A(\mathbf{x} - \mathbf{c})$$

である. よって,  $f$  は  $V_A(1)$  に平行な直線  $\text{Fix}(f)$  を軸とする回転角  $\theta$  の回転である (図 14). ただし, 回転の向きは  $\mathbf{p}_3$  の方向に進む右ねじの回転方向を正とする. また, これより

$$f = t_{\mathbf{c}} \circ T_A \circ t_{-\mathbf{c}}$$

とも表せる. すなわち,  $\mathbf{c}$  を通る直線  $L$  を軸とする回転は「一旦  $-\mathbf{c}$  平行移動し, 原点を通り  $\text{Fix}(f)$  に平行な直線を軸として回転させた後に再び  $\mathbf{c}$  平行移動する変換」とも言い換えられる.

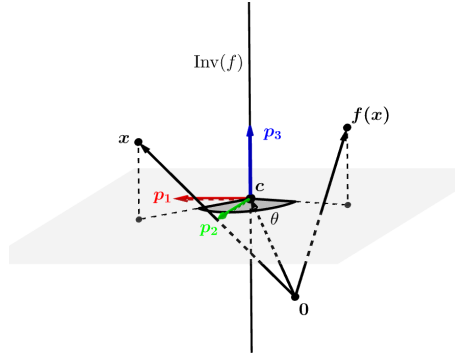


図 14 直線  $\text{Fix}(f)$  を軸とする角度  $\theta$  の回転

(2)  $\mathbf{b} \notin V_A(1)^\perp$  とする. 補題 3.1 より  $f$  は固定点を持たない. このとき  $\mathbf{b}$  を

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{b}_{12} \in V_A(1)^\perp = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle, \quad \mathbf{b}_3 \in V_A(1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle$$

と分解すると,  $\mathbf{b}_{12} \neq \mathbf{0}$  である. 従って,

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}_{12}) + \mathbf{b}_3$$

より  $f$  は合同変換  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_{12}$  と平行移動  $t_{\mathbf{b}_3}$  の合成  $t_{\mathbf{b}_3} \circ g$  である (図 15). (1) より  $g$  は直線  $\text{Fix}(g)$  を軸とする  $\theta$  回転であり,  $\mathbf{b}_3 (\neq \mathbf{0})$  は  $\text{Fix}(g)$  と平行だから,  $f$  は螺旋運動である. また,  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底だから

$$\mathbf{b}_3 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_3, \quad \mathbf{b}_{12} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_3 = \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_3$$

である. なお,

$$g \circ t_{\mathbf{b}_3}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{b}_3) + \mathbf{b}_{12} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_{12} = f(\mathbf{x})$$

より  $t_{\mathbf{b}_3} \circ g = g \circ t_{\mathbf{b}_3} = f$  であるから合成の順番はどちらでもよい.

□

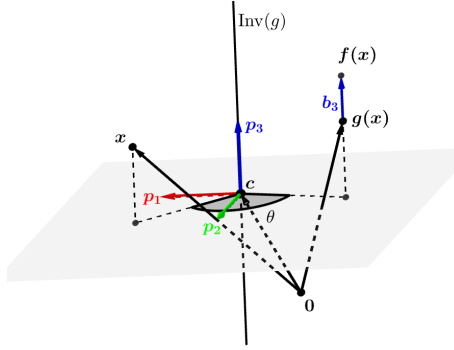


図 15  $\text{Fix}(g)$  と  $b_3$  に関する螺旋運動

### 3.3.2 鏡映と滑り鏡映

$A \sim R_0$  とする. このとき,  $f$  は鏡映か滑り鏡映である. これを詳しく見ていこう. なお, 空間における滑り鏡映の定義は以下の通りである.

**定義.** 空間内の平面  $H$  に関する鏡映  $g$  と  $H$  に平行なベクトル  $c \in \mathbb{R}^3$  による平行移動との合成  $t_c \circ g$  を  $H$  と  $c$  に関する滑り鏡映という. この定義に従えば滑り鏡映は鏡映 ( $c = \mathbf{0}$  のとき) を含むのだが, 本稿では鏡映でないもののみを滑り鏡映と呼ぶことにする.

直交行列  $A$  が直交行列  $P \in SO(3)$  によって  $R_0$  に標準化される, すなわち,

$$R_0 = P^{-1}AP = {}^tPAP, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

とする.  $A$  の固有値は  $-1$  と  $1$  である.  $\det P = 1$  なので  $(p_1, p_2, p_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底であり,

$$V_A(-1) = \langle p_3 \rangle, \quad V_A(-1)^\perp = V_A(1) = \langle p_1, p_2 \rangle$$

である. このとき, 次が成り立つ.

**定理 3.4.**  $A, p_1, p_2, p_3$  を上の通りとする. このとき, 合同変換  $f(x) = Ax + b$  は鏡映か滑り鏡映である. 特に, 各々の詳細は次の通りである.

- (1)  $b \in V_A(-1)$  のとき: 固定点集合  $\text{Fix}(f)$  は  $b/2$  を通り  $V_A(1)$  に平行な平面であり,  $f$  はこの平面に関する鏡映である.
- (2)  $b \notin V_A(-1)$  のとき:  $f$  は固定点を持たない.  $f$  は鏡映  $g(x) = Ax + (b \cdot p_3)p_3$  とベクトル  $b - (b \cdot p_3)p_3$  に関する滑り鏡映である. このとき,  $g$  は  $(b \cdot p_3)p_3/2$  を通り  $V_A(1)$  に平行な平面に関する鏡映である.

以下, 定理 3.4 を証明していこう.

まず,  $f$  が固定点を持つかどうかは  $b \in V_A(-1)$  か否かで分かれる. つまり, 次が成り立つ.



**補題 3.2.** 上の状況において,  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{b} \in V_A(-1)$  のとき, そのときに限り, 空集合でない.

**証明** 直交変換  $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  による空間の固有空間分解  $\mathbb{R}^3 = V_A(1) \oplus V_A(-1)$  により  $\mathbf{b}$  を

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-, \quad \mathbf{b}^+ \in V_A(1), \mathbf{b}^- \in V_A(-1)$$

と分解する.  $A^2 = PR_0^2P^{-1} = E$  だから,

$$\mathbf{x} \in \text{Fix}(f) \Leftrightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^- = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{b}^+ = \mathbf{0}$$

である. よって,

$$\text{Fix}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{b} \in V_A(-1)$$

である. □

**定理 3.4 の証明** (1)  $\mathbf{b} \in V_A(-1)$  とする. 補題 3.2 より  $\text{Fix}(f)$  は空集合でない.  $\dim V_A(1) = 2$  なので 3.1 節で見たように  $\text{Fix}(f)$  は  $V_A(1)$  と平行な平面である. 特に,

$$f\left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) = A\left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{2}$$

より,  $\mathbf{b}/2 \in \text{Fix}(f)$  だから  $\text{Fix}(f)$  は  $\mathbf{b}/2$  を通る.  $f$  は平面  $\text{Fix}(f)$  に関する鏡映である. 実際, 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  と任意の  $\mathbf{p} \in V_A(1)$  に対して,

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} &= (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{p}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = 0, \\ f\left(\frac{f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}}{2}\right) &= A\left(\frac{A\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{x}}{2}\right) + \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b} + A\mathbf{x}}{2} + \mathbf{b} = \frac{A\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{x}}{2} = \frac{f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}}{2} \end{aligned}$$

であるから,  $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  が  $V_A(1)$  に, 従って  $\text{Fix}(f)$  に, 直交し,  $f(\mathbf{x})$  と  $\mathbf{x}$  の中点が  $\text{Fix}(f)$  上にあるので,  $f$  は平面  $\text{Fix}(f)$  に関する鏡映である.

また, 任意の  $\mathbf{c} \in \text{Fix}(f)$  と任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  に対し

$$f(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}$$

が成り立つから

$$f = t_{\mathbf{c}} \circ T_A \circ t_{-\mathbf{c}}$$

である. すなわち,  $\mathbf{c}$  を通り平面  $V_A(1)$  に平行な平面に関する鏡映は「一旦  $-\mathbf{c}$  平行移動し,  $V_A(1)$  に関する鏡映移動をした後に再び  $\mathbf{c}$  平行移動する変換」と言い換えることもできる.

(2)  $\mathbf{b} \notin V_A(-1)$  とする. 空間  $\mathbb{R}^3$  の固有分解  $\mathbb{R}^3 = V_A(1) \oplus V_A(-1)$  により  $\mathbf{b}$  を

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-, \quad \mathbf{b}^+ \in V_A(1), \mathbf{b}^- \in V_A(-1)$$

と分解する. このとき,  $\mathbf{b}^+ \neq \mathbf{0}$  である.

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}^-) + \mathbf{b}^+$$

であるから,  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}^-$  とおくと,  $f = t_{\mathbf{b}^+} \circ g$  である. (1) より  $g$  は  $\mathbf{b}^-$  を通り  $V_A(1)$  に平行な平面  $\text{Fix}(g)$  に関する鏡映である. さらに,  $\mathbf{b}^+ \in V_A(1)$  であるから  $\mathbf{b}^+$  は  $\text{Fix}(g)$  に平行である. よって,  $f$  は滑り鏡映である. また,  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底だから

$$\mathbf{b}^- = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_3, \quad \mathbf{b}^+ = \mathbf{b} - \mathbf{b}^- = \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_3)\mathbf{p}_3$$

である. なお, 鏡映と平行移動を合成する順番はどちらでもよい. 実際,  $A\mathbf{b}^+ = \mathbf{b}^+$  より

$$g(t_{\mathbf{b}^+}(\mathbf{x})) = A(\mathbf{x} + \mathbf{b}^+) + \mathbf{b}^- = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}^-) + \mathbf{b}^+ = t_{\mathbf{b}^+}(g(\mathbf{x}))$$

であるから  $g \circ t_{\mathbf{b}^+} = t_{\mathbf{b}^+} \circ g = f$  である.

□

### 3.3.3 回転鏡映

$A \sim R_\theta \neq R_0$  とする. このとき  $f$  は回転鏡映である. これを詳しく見ていこう. 直交行列  $A$  が直交行列  $P \in SO(3)$  によって  $R_\theta$  に標準化される, すなわち,

$$R_\theta = P^{-1}AP = {}^tPAP, \quad P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] \in SO(3)$$

とする.  $\det P = 1$  なので  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底であり,

$$V_A(-1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle, \quad V_A(-1)^\perp = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$$

である. このとき, 次が成り立つ.

**定理 3.5.**  $A, P, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  を上の通りとする. このとき, 合同変換  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  は回転鏡映である. 特に, 固定点は 1 点  $\mathbf{c} := (E - A)^{-1}\mathbf{b}$  のみであり,  $f$  は  $V_A(-1)$  に平行で  $\mathbf{c}$  を通る直線に関する  $\theta$  回転  $g$  と  $\mathbf{c}$  を通り  $V_A(-1)^\perp$  に平行な平面に関する鏡映  $h$  の合成  $g \circ h$  に等しい. ただし, 回転の向きは  $\mathbf{p}_3$  の向きに進む右ねじの回転方向を正とする.

**注意.** この定理は幾何学的には明らかだが, ここでは (線形) 代数的にきっちり証明していこう.

**証明**  $R_\theta = S_\theta R_0$  であるから,  $B = PS_\theta P^{-1}$ ,  $C = PR_0 P^{-1}$  とおくと

$$BC = (PS_\theta P^{-1})(PR_0 P^{-1}) = P(S_\theta R_0)P^{-1} = PR_\theta P^{-1} = A$$

である.  $\mathbb{R}^3$  の直交分解  $\mathbb{R}^3 = V_B(1) \oplus V_B(1)^\perp$  によって  $\mathbf{b}$  を

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_1 \in V_B(1), \quad \mathbf{b}_2 \in V_B(1)^\perp$$

と分解する.  $B\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1$  だから,  $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ ,  $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$  とおくと

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} = BC\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = B(C\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = g(h(\mathbf{x}))$$

より,  $f = g \circ h$  である.  $B, C$  はいずれも  $P$  によってそれぞれ  $S_\theta, R_0$  に標準化されるので

$$V_A(-1) = \langle \mathbf{p}_3 \rangle = V_B(1) = V_C(-1), \quad V_A(-1)^\perp = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = V_B(1)^\perp = V_C(-1)^\perp = V_C(1)$$

である. これより  $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$  が回転で,  $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$  が鏡映であることを示せばよい.

まず,  $B \sim S_\theta \neq E$  かつ  $\mathbf{b}_2 \in V_B(1)^\perp$  だから, 定理 3.3 より  $\text{Fix}(g)$  は  $V_B(1) = V_A(-1)$  に平行な直線で,  $g$  はこの直線に関する  $\theta$  回転である. ただし, 回転の向きは  $\mathbf{p}_3$  の向きに進む右ねじの回転方向を正とする.

次に,  $C \sim R_0$  かつ  $\mathbf{b}_1 \in V_B(1) = V_C(-1)$  だから, 定理 3.4 より  $\text{Fix}(h)$  は  $V_C(1) = V_A(-1)^\perp$  に平行な平面で,  $h$  はこの平面に関する鏡映である.

最後に,  $A$  は 1 を固有値に持たないので 3.1 節で見たように  $f$  の固定点は  $\mathbf{c} := (E - A)^{-1}\mathbf{b}$  のみであるが, これは  $\text{Fix}(g)$  と  $\text{Fix}(h)$  の交点である. 実際, 空間  $\mathbb{R}^3$  の中で直線  $\text{Fix}(g)$  と平面  $\text{Fix}(h)$  は直交するので 1 点で交わるが, その交点は  $g, h$  の固定点なので  $f$  の固定点でもあり, 従って,  $\mathbf{c}$  に等しい. よって,  $\text{Fix}(g)$  も  $\text{Fix}(h)$  も  $\mathbf{c}$  を通る.  $\square$

### 3.4 鏡映の個数

空間の合同変換それぞれに対し, それを合成する鏡映を全て調べ上げ, 分類表 2 を完成させよう.

**定理 3.6.** 空間  $\mathbb{R}^3$  の合同変換は 4 個以下の鏡映の合成として表せる. 特に, 各合同変換に対してそれを合成する鏡映の最小個数は表 2 にある通りである.

定理の証明の前に, 合同変換の合成と固定点集合に関する補題を与えておく.

**補題 3.3.** 空間  $\mathbb{R}^3$  の任意の合同変換  $f_1, f_2$  に対し,  $\text{Fix}(f_1) \cap \text{Fix}(f_2) \subset \text{Fix}(f_1 \circ f_2)$  が成り立つ. 特に,  $\text{Fix}(f_1 \circ f_2)$  が空集合なら  $\text{Fix}(f_1) \cap \text{Fix}(f_2)$  は空集合である.

**証明** 任意の  $\mathbf{c} \in \text{Fix}(f_1) \cap \text{Fix}(f_2)$  に対して, 以下が成り立つので  $\mathbf{c} \in \text{Fix}(f_1 \circ f_2)$  である.

$$f_1 \circ f_2(\mathbf{c}) = f_1(f_2(\mathbf{c})) = f_1(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$$

よって,  $\text{Fix}(f_1) \cap \text{Fix}(f_2) \subset \text{Fix}(f_1 \circ f_2)$  である. 後半の主張は明らかである.  $\square$

**定理 3.6 の証明** 恒等変換は 0 個, 鏡映は 1 個の鏡映の合成であり, またそれ以外の合同変換が 1 個以下の鏡映の合成として表せないことは明らかである. 残りの平行移動, 回転, 滑り鏡映, 回転鏡映, 螺旋運動に関しては以下に続く 4 つの補題 3.4 から 3.8 により証明が完成する.  $\square$

**補題 3.4.** (1) 空間  $\mathbb{R}^3$  の平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) は鏡映面が平行な 2 個の鏡映の合成である. このとき, 2 つの鏡映面は共に  $\mathbf{b}$  に直交し, その距離は  $\|\mathbf{b}\|/2$  である.

(2) 逆に, 空間  $\mathbb{R}^3$  の平行な 2 平面  $H_1, H_2$  ( $H_1 \neq H_2$ ) に関する鏡映  $r_1, r_2$  の合成  $r_2 \circ r_1$  は平行移動である. 移動方向は  $H_1$  から  $H_2$  の方へ両平面に直交する方向で, 移動距離は 2 平面の距離の 2 倍である.

**証明** (1) 原点  $\mathbf{0}$  と  $t_{\mathbf{b}}(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$  の垂直二等分面  $H$  に関する鏡映を  $g$  とする.  $g(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$  だから,  $g$  は  $A \sim R_0$ ,  $\mathbf{b} \in V_A(-1)$  を満たす 3 次直交行列  $A$  によって  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  と書ける. このとき,

$$g(t_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})) = A(\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{b} = A\mathbf{x} + A\mathbf{b} + \mathbf{b} = A\mathbf{x} - \mathbf{b} + \mathbf{b} = A\mathbf{x} = T_A(\mathbf{x})$$

より  $g \circ t_b = T_A$  である.  $A \sim R_0$  だから直交変換  $T_A$  は平面  $H_0 := V_A(1)$  に関する鏡映である. さらに,  $g \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  より

$$t_b = (g \circ g) \circ t_b = g \circ (g \circ t_b) = g \circ T_A$$

だから平行移動  $t_b$  は 2 個の鏡映  $g$  と  $T_A$  の合成である. また,  $g$  の鏡映面  $H$  は  $T_A$  の鏡映面  $H_0$  に平行であり, 図 16 のように  $H, H_0$  はそれぞれ  $\mathbf{b}/2, \mathbf{0}$  を通り  $\mathbf{b}$  に直交する平面なので, 2 平面間の距離は  $\|\mathbf{b}\|/2$  である.

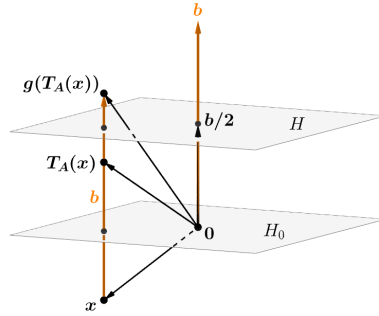


図 16 平行移動は平行な 2 平面に関する 2 個の鏡映の合成である.

(2) 逆に, 平行な 2 平面  $H_1, H_2$  ( $H_1 \neq H_2$ ) に関する鏡映  $r_1, r_2$  に対して, その合成  $r_2 \circ r_1$  が平行移動であることを示す.  $r_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $r_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$  とすると,

$$A_1 \sim R_0 \sim A_2, \quad \mathbf{b}_1 \in V_{A_1}(-1), \quad \mathbf{b}_2 \in V_{A_2}(-1)$$

である.  $H_1$  と  $H_2$  が平行なので  $V_{A_1}(1) = V_{A_2}(1)$  である.  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  を  $V_{A_1}(1)$  の正規直交基底とし,  $(\mathbf{p}_3)$  を  $V_{A_1}(-1) = V_{A_1}(1)^\perp = V_{A_2}(1)^\perp = V_{A_2}(-1)$  の正規直交基底とする. 必要なら  $\mathbf{p}_1$  と  $\mathbf{p}_2$  を入れ替えて,  $P := \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$  とすると,  $P^{-1}A_1P = R_0 = P^{-1}A_2P$  より  $A_1 = PR_0P^{-1} = A_2$  である. 従って,  $A = A_1 = A_2$  とおくと,  $A^2 = E$ ,  $\mathbf{b}_1 \in V_A(-1)$  より

$$r_2(r_1(\mathbf{x})) = A(A\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \mathbf{x} + A\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$$

だから  $r_2 \circ r_1 = t_{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}$  である. すなわち,  $r_2 \circ r_1$  は平行移動である. なお,  $r_1 \neq r_2$  だから  $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$  より  $t_{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}$  は恒等変換ではない. このとき,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in V_A(-1)^\perp$  だから,  $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$  の向きは  $H_1$  から  $H_2$  の方へ両平面に直交する方向である. さらに, 図 17 のように  $H_1, H_2$  はそれぞれ  $\mathbf{b}_1/2, \mathbf{b}_2/2$  を通り  $V_A(1)$  に平行な平面だから, その距離は  $\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|/2$  である.  $\square$

**補題 3.5.** (1) 空間  $\mathbb{R}^3$  の  $\theta$  回転  $f$  は鏡映面が平行でない 2 個の鏡映の合成である. このとき, 2 つの鏡映面の交線が  $f$  の回転軸であり, 2 つの鏡映面のなす角は  $\theta/2$  である.

(2) 逆に, 平行でない 2 平面  $H_1, H_2$  に関する鏡映を  $g_1, g_2$  とすると, 合成  $g_2 \circ g_1$  は 2 平面の交線を軸とする回転であり, 回転方向は  $H_1$  から  $H_2$  へ, 回転角は 2 平面の交わる角の 2 倍である.

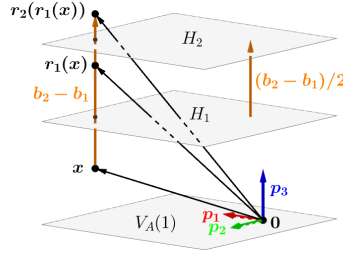


図 17 平行な 2 平面に関する 2 個の鏡映の合成は平行移動である。

**証明** (1) 任意に  $c \in \text{Fix}(f)$  をとる.  $f$  は  $A \sim S_\theta$  となる直交行列  $A \in SO(3)$  によって

$$f(x) = A(x - c) + c$$

と書ける.  $f$  の回転軸  $\text{Fix}(f)$  は直線  $V_A(1)$  に平行である. そこで,  $f$  の回転の正の方向に回転する右ねじの進む方向の単位ベクトルを  $p_3$  とすと,  $p_3 \in V_A(1)$  である.  $p_1, p_2 \in V_A(1)^\perp$  を  $(p_1, p_2, p_3)$  が空間  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底となるように選ぶ. このとき,

$$S_\theta = {}^t P A P, \quad P := \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

である.  $g_2$  を  $c + p_1$  と  $f(c + p_1)$  の垂直二等分面  $H_2$  に関する鏡映とし,  $g_1 = g_2 \circ f$  とする.  $\text{Fix}(f) \subset H_2 = \text{Fix}(g_2)$  だから補題 3.3 より

$$\text{Fix}(f) = \text{Fix}(g_2) \cap \text{Fix}(f) \subset \text{Fix}(g_2 \circ f) = \text{Fix}(g_1)$$

である. さらに,  $p_1$  は  $\text{Fix}(f)$  に直交し,

$$g_1(c + p_1) = g_2(f(c + p_1)) = c + p_1$$

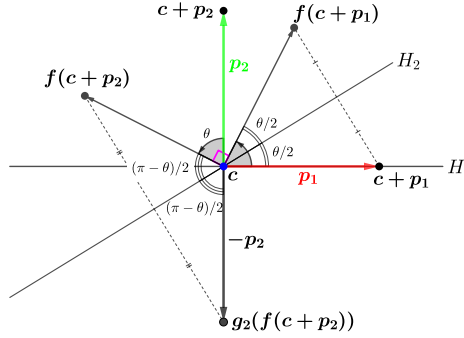
より  $c + p_1 \in \text{Fix}(g_1)$  であるから,  $\text{Fix}(g_1)$  は  $\text{Fix}(f)$  を含み  $p_1$  に平行な平面, すなわち,  $c$  を通り  $p_2$  に直交する平面  $H_1$  を含む. 一方, 図 18 から

$$g_1(c + p_2) = g_2(f(c + p_2)) = c - p_2 \neq c + p_2$$

より  $c + p_2 \notin \text{Fix}(g_1)$  である. 従って,  $\text{Fix}(g_1) \neq \mathbb{R}^3$  であるから 3.1 節で見たように  $\text{Fix}(g_1)$  は平面  $H_1$  である. 分類表 2 から, 固定点集合が平面となるのは鏡映であるから  $g_1$  は鏡映である. よって,

$$f = (g_2 \circ g_1) \circ f = g_2 \circ (g_1 \circ f) = g_2 \circ g_1$$

より,  $f$  は 2 個の鏡映  $g_1, g_2$  の合成である. また, 空間  $\mathbb{R}^3$  の中で 2 平面  $H_1, H_2$  が共に直線  $\text{Fix}(f)$  を含むので,  $H_1 \cap H_2 = \text{Fix}(f)$  である. すなわち, 2 平面の交線が  $f$  の回転軸である. さらに, 図 18 のように  $H_1, H_2$  のなす角は  $\theta/2$  である.


 図 18  $g_1(c + p_2) = g_2(f(c + p_2)) = c - p_2$ 

(2) 逆に, 平行でない任意の 2 平面  $H_1, H_2$  に関する鏡映  $g_1, g_2$  に対して, その合成  $g_2 \circ g_1$  が回転であることを示す. (1) で定義した記号は一旦全てリセットする. (1) では  $A$  から  $B_1, B_2$  を構成したが, 今度は逆に  $B_1, B_2$  から  $A$  を構成していく.

2 平面  $H_1, H_2$  の交線を  $L$  とする. すなわち,  $L = H_1 \cap H_2$  である. 任意に  $c \in L$  をとる.  $g_1, g_2$  はそれぞれ  $H_1, H_2$  に関する鏡映なので,  $B_1 \sim R_0 \sim B_2$  となる  $B_1, B_2 \in O(3)$  によって

$$g_1(x) = B_1(x - c) + c, \quad g_2(x) = B_2(x - c) + c$$

と書ける. 2 平面  $H_1, H_2$  の交わる角を  $\theta/2$  とする. すなわち, 交わる角の 2 倍を  $\theta$  とする.

$$g_2(g_1(x)) = B_2(B_1(x - c) + c - c) + c = B_2B_1(x - c) + c$$

であるから,  $A := B_2B_1 \sim S_\theta$  となることを示せばよい.

直線  $L$  の単位方向ベクトルを  $p_3$  とする. すなわち,  $\|p_3\| = 1$  かつ  $L = \{c + tp_3 \mid t \in \mathbb{R}\}$  である. ただし,  $p_3$  の向きは  $H_1$  から  $H_2$  の方向へ回転する右ねじの進む方向と同じとする. 図 19 のように  $p_2$  を  $H_1$  に直交する単位ベクトルとし,  $(p_3, p_1, p_2)$  が  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底となるように  $p_1 \in V_{B_1}(1)$  をとる. 具体的には  $\mathbb{R}^3$  の外積を用いて  $p_1 = p_2 \times p_3$  とすればよい.

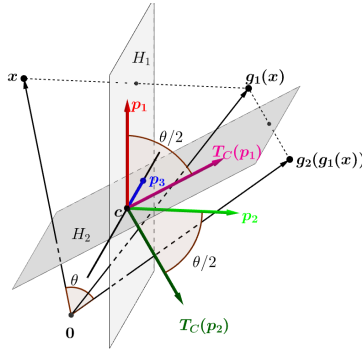


図 19 平行でない 2 平面に関する 2 個の鏡映の合成は回転である.

$H_1$  は  $V_{B_1}(1)$  に平行だから,  $V_{B_1}(1) = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle$ ,  $V_{B_1}(-1) = V_{B_1}(1)^\perp = \langle \mathbf{p}_2 \rangle$  より

$${}^tQ_1 B_1 Q_1 = R_0, \quad Q_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

である. また,  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  は  $\mathbb{R}^3$  の右手系正規直交基底なので

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}, \quad C = PS_{\theta/2} {}^tP$$

とすると,  $P \in SO(3)$  であり, 直交変換  $T_C(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$  は  $\mathbf{p}_3$  を軸とする  $\theta/2$  回転である. ただし, 回転の方向は  $\mathbf{p}_3$  の向きに進む右ねじの回転方向, すなわち,  $H_1$  から  $H_2$  へ方向である. 平面  $H_1, H_2$  はそれぞれ  $V_{B_1}(1), V_{B_2}(1)$  に平行で,  $H_2$  は  $L$  を軸に  $H_1$  を  $\theta/2$  回転させた平面なので,  $V_{B_2}(1) = \langle T_C(\mathbf{p}_3), T_C(\mathbf{p}_1) \rangle$ ,  $V_{B_2}(-1) = V_{B_2}(1)^\perp = \langle T_C(\mathbf{p}_2) \rangle$  である. これより

$${}^tQ_2 B_2 Q_2 = R_0, \quad Q_2 := \begin{bmatrix} T_C(\mathbf{p}_3) & T_C(\mathbf{p}_1) & T_C(\mathbf{p}_2) \end{bmatrix} \in SO(3)$$

である. ここで,  $P$  は直交行列だから

$$Q_1 = PT, \quad T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} C\mathbf{p}_3 & C\mathbf{p}_1 & C\mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = CQ_1 = CPT = PS_{\theta/2} {}^tPPT = PS_{\theta/2}T$$

と書ける. これと  $R_0, P, T \in O(3)$  から

$$\begin{aligned} B_2 B_1 &= Q_2 R_0 {}^tQ_2 Q_1 R_0 {}^tQ_1 = PS_{\theta/2} T R_0 {}^t (PS_{\theta/2} T) P T R_0 {}^t (PT) \\ &= PS_{\theta/2} (T R_0 {}^t T) {}^t S_{\theta/2} ({}^t P P) (T R_0 {}^t T) {}^t P \\ &= PS_{\theta/2} (T R_0 {}^t T) ({}^t S_{\theta/2} T R_0 {}^t T) {}^t P \\ &= PS_{\theta/2} (T R_0 {}^t T) {}^t (T {}^t R_0 {}^t T S_{\theta/2}) {}^t P \\ &= PS_{\theta/2} {}^t (({}^t S_{\theta/2} T R_0 {}^t T) (T {}^t R_0 {}^t T)) {}^t P \\ &= PS_{\theta/2} S_{\theta/2} {}^t P = PS_{\theta} {}^t P = A \end{aligned}$$

である. 従って,

$$g_2(g_1(\mathbf{x})) = B_2(B_1(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = B_2 B_1(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = f(\mathbf{x})$$

より,  $f = g_2 \circ g_1$  である. よって,  $g_2 \circ g_1$  は  $H_1$  と  $H_2$  の交線  $L$  を軸とする  $\theta$  回転であり, 回転方向は  $T_C$  と同じ, すなわち,  $H_1$  から  $H_2$  へ方向である.  $\square$

**補題 3.6.** 空間  $\mathbb{R}^3$  の滑り鏡映は 3 平面に関する 3 個の鏡映の合成として表すことができる. このとき, 3 平面の内 2 つは互いに平行で, 共に残りの 1 つと直交するものを選ぶ. また,  $\mathbb{R}^3$  の滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.

**証明**  $f$  を空間  $\mathbb{R}^3$  の滑り鏡映とする.  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  ( $A \sim R_0$ ,  $\mathbf{b} \notin V_A(-1)$ ) と書ける.

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-, \quad \mathbf{b}^+ \in V_A(1), \quad \mathbf{b}^- \in V_A(-1), \quad \mathbf{b}^+ \neq \mathbf{0}$$

とし,  $r(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}^-$  とする.  $r$  は  $\mathbf{b}^-/2$  を通り  $\mathbf{b}^-$  に直交する平面  $H$  に関する鏡映である.

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}^-) + \mathbf{b}^+ = t_{\mathbf{b}^+}(r(\mathbf{x}))$$

より,  $f = t_{\mathbf{b}^+} \circ r$  である. 補題 3.4 より平行移動  $t_{\mathbf{b}^+}$  は  $\mathbf{b}^+$  に直交する 2 平面  $H_1, H_2$  に関する鏡映  $r_1, r_2$  の合成として  $t_{\mathbf{b}^+} = r_2 \circ r_1$  と表せるので,

$$f = t_{\mathbf{b}^+} \circ r = r_2 \circ r_1 \circ r$$

より  $f$  は 3 個の鏡映の合成として表せる. このとき,  $H_1, H_2$  はいずれも  $\mathbf{b}^+$  に直交するので, 互いに平行で, 共に  $H$  に直交する.

また, 補題 3.4(2) 補題 3.5(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので, 滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.  $\square$

**補題 3.7.** 空間  $\mathbb{R}^3$  の回転鏡映は 1 点で交わる 3 平面に関する 3 個の鏡映の合成として表すことができる. また,  $\mathbb{R}^3$  の回転鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.

**証明**  $f$  を空間  $\mathbb{R}^3$  の回転鏡映とする.  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  ( $A \sim R_\theta \neq R_0$ ) と書ける. 直交行列  $A$  が  $P \in SO(3)$  によって  $R_\theta = P^{-1}AP$  と標準化される とする. 定理 3.5 の証明と同様に,

$$B = PS_\theta P^{-1}, \quad C = PR_0 P^{-1}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_1 \in V_A(-1), \mathbf{b}_2 \in V_A(-1)^\perp$$

$$g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{b}_2, \quad h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$$

とすると  $f = g \circ h$  である. このとき,  $g$  は  $f$  の固定点  $\mathbf{c}$  を通り  $V_A(-1)$  に平行な直線  $\text{Fix}(g)$  を軸とする  $\theta$  回転で,  $h$  は  $\mathbf{c}$  を通り  $V_A(-1)^\perp$  に平行な平面  $H := \text{Fix}(h)$  に関する鏡映である. 補題 3.5 より回転  $g$  は  $\text{Fix}(g)$  を交線とする平面  $H_1, H_2$  に関する鏡映  $r_1, r_2$  により  $g = r_2 \circ r_1$  と書ける. よって,

$$f = g \circ h = r_2 \circ r_1 \circ h$$

より  $f$  は 3 個の鏡映の合成として表せる. また, 補題 3.3 から  $H_1 \cap H_2 \cap H = \text{Fix}(f) = \{\mathbf{c}\}$  より 3 つの鏡映面は 1 点  $\mathbf{c}$  で交わる.

また, 補題 3.4(2) 補題 3.5(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので, 回転鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.  $\square$

**補題 3.8.** 空間  $\mathbb{R}^3$  の螺旋運動は 4 個の鏡映の合成として表せる. また,  $\mathbb{R}^3$  の螺旋運動を 3 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.

**証明** 螺旋運動は平行移動と回転の合成である. 補題 3.4 と補題 3.5 より平行移動と回転はそれぞれ 2 個の鏡映の合成として表せるので, 螺旋運動は 4 個の鏡映の合成として表せる.

また, 補題 3.4 と補題 3.5 から螺旋運動を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない. 最後に, 螺旋運動が 3 個の鏡映の合成として表すことができないことを示す.  $r_1, r_2, r_3$  を空間  $\mathbb{R}^3$  の鏡映とし,

$$r_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \quad r_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2, \quad r_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} + \mathbf{b}_3$$



とする. 各  $i = 1, 2, 3$  に対して  $A_i \sim R_0$ ,  $\mathbf{b}_i \in V_{A_i}(-1)$  である.

$$r_1(r_2(r_3(\mathbf{x}))) = A_1(A_2(A_3\mathbf{x} + \mathbf{b}_3) + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1 = (A_1A_2A_3)\mathbf{x} + (A_1A_2\mathbf{b}_3 + A_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1)$$

である. ここで,  $\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = -1$  であるから,  $\det(A_1A_2A_3) = -1$  である, 従って,  $A_1A_2A_3 \notin SO(3)$  なので分類表 2 から  $r_1 \circ r_2 \circ r_3$  は螺旋運動ではない. すなわち, 螺旋運動を 3 個の鏡映の合成として表すことはできない. よって, 螺旋運動を 3 個以下の鏡映の合成として表すことはできない.  $\square$

以上から, 定理 3.6 の証明が完成する.

### 3.5 空間の合同変換と 4 次正方行列

空間  $\mathbb{R}^3$  の合同変換  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  は 4 次正方行列と 4 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる。さらに、合同変換  $f_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$  の合成

$$f_1 \circ f_2(\mathbf{x}) = f_1(f_2(\mathbf{x})) = A_1(A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1 = A_1A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 + A_1\mathbf{b}_2$$

は 4 次正方行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \mathbf{b}_1 + A_1\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる。これにより空間  $\mathbb{R}^3$  の合同変換を 4 次正方行列の演算で記述できる。

例えば、2 つの合同変換

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の合成  $f_1 \circ f_2$  は

$$\begin{aligned} f_1(f_2(\mathbf{x})) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるが、これが 4 次正方行列同士の積として

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

と計算できる。この右辺の 4 次正方行列の左上部分と右上部分が、それぞれ合成  $f_1(f_2(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  の直交行列  $A$  と空間ベクトル  $\mathbf{b}$  である。このように全てを行列演算にしてしまうことで計算機で合同変換が扱いやすくなる。なお、これは空間のアフィン変換や 3 次元射影空間上の射影変換を 4 次正方行列によって表現する手法の特殊な場合でもある。

### 演習問題 3

- 次の空間の合同変換を  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  の形に書き下そう.
  - 平面  $ax + by + cz = d$  に関する鏡映.
  - 原点  $O$  と点  $P(1, 1, 1)$  を通る直線を軸とする  $\theta$  回転. ただし回転の向きは  $\overrightarrow{OP}$  の方向に進む右ねじの回転方向を正とする.
- 次の空間の合同変換が分類表 2 のどれに当てはまるか判定しよう. また, 回転軸, 回転角, 回転方向, 鏡映面, 平行移動ベクトルなどの情報も決定しよう.

$$(1) f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 14 & 23 & 2 \\ -22 & 14 & -7 \\ -7 & 2 & 26 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(4) f_4 = f_3 \circ f_2$$

$$(5) f_5 = f_1 \circ f_2 \circ f_1$$

- $H_1, H_2, H_3$  を空間  $\mathbb{R}^3$  内の平面とし, それぞれに関する鏡映を  $r_1, r_2, r_3$  とする. 次の状況で合成  $r_1 \circ r_2 \circ r_3$  がどんな合同変換か判定しよう.
  - $H_1 = H_3 \neq H_2$  で  $H_1$  と  $H_2$  が交わる.
  - $H_1, H_3$  が平行で,  $H_1$  と  $H_2$  が交わる.
  - $H_1, H_2$  が平行で,  $H_1$  と  $H_3$  が交わる.
  - $H_1, H_2, H_3$  が 1 点で交わる.

- 適当なプログラミング環境のもとで, 3 次直交行列  $A$  と 3 次列ベクトル  $\mathbf{b}$  が与えられたときに空間の合同変換

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

が表 2 のどれに当てはまるか判定するプログラムを作成しよう. また, 回転軸, 回転角, 回転方向, 鏡映面, 平行移動ベクトルなどの情報も出力しよう.

- 空間の合同変換  $f_1, f_2$  の合成  $f_1 \circ f_2$  を分類しよう.

## 4 直線 $\mathbb{R}$ の合同変換

平面や空間ほど面白みはないが、直線  $\mathbb{R}$  の合同変換についてもまとめておく。 $\mathbb{R}$  の合同変換

$$f(x) = ax + b$$

は以下の表 3 のように 3 種に分類できることを確かめていこう。なお、恒等変換と平行移動は分類上異なるクラスとして扱う。

名前	$A$	$b$	鏡映の個数	固定点集合
恒等変換	1	0	0	$\mathbb{R}$
平行移動	1	$b \neq 0$	2	空集合
鏡映	-1	$b \in \mathbb{R}$	1	$\{b/2\}$

表 3 直線  $\mathbb{R}$  の合同変換

まず、明らかに  $a = \pm 1$  である。

$a = 1$  のとき、 $b = 0$  なら  $f$  は恒等変換で  $\text{Fix}(f) = \mathbb{R}$  であり、 $b \neq 0$  なら  $f$  は平行移動で  $\text{Fix}(f)$  は空集合である。

$a = -1$  のとき、 $\text{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -x + b = x\} = \{b/2\}$  である。このとき、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $f(x) - b/2 = -(x - b/2)$  であるから  $f$  は  $b/2$  に関する鏡映である。

恒等変換と鏡映がそれぞれ 0, 1 個の鏡映の合成であることは明らかで、平行移動  $f(x) = x + b$  ( $b \neq 0$ ) は 2 個の鏡映  $g_1(x) = -x$ ,  $g_2(x) = -x + b$  の合成として  $f = g_2 \circ g_1$  と表せる。以上から  $\mathbb{R}$  の合同変換は 2 個以下の鏡映の合成として表せることが分かり、表 3 が完成する。

### 演習問題 4

1.  $a, b \in \mathbb{R}$  とする。

(1) 2 次正方行列  $F = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  と自然数  $k$  に対し、 $F^k$  を求めよう。

(2)  $\mathbb{R}$  上の 1 次関数  $f(x) = ax + b$  に対し、その  $k$  回合成  $f^k$  を  $x \mapsto \alpha x + \beta$  の形に表そう。

(3) 初項が  $b$  で公比が  $a \neq 1$  の等比数列に関する以下の和の公式を証明しよう。

$$\sum_{k=0}^{m-1} ba^k = \frac{b(1-a^m)}{1-a}$$

2.  $\mathbb{R}$  の合同変換  $f_1, f_2$  の合成  $f_1 \circ f_2$  を分類しよう。