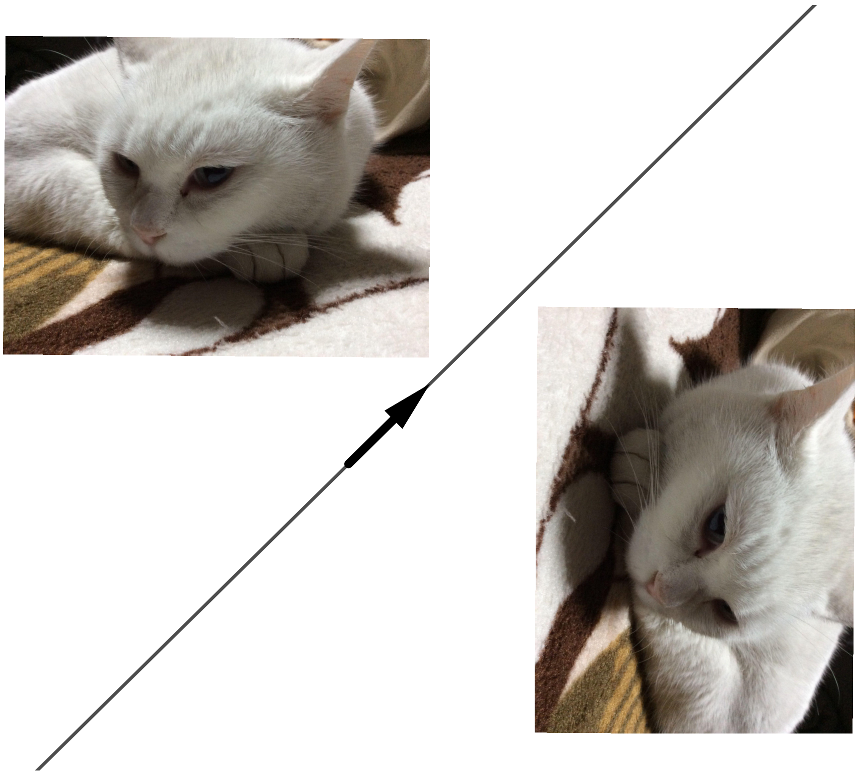
線形代数たっぷり 平面と空間の合同変換

【平面】合同変換を分類してみたら線形代数が役に立ちすぎた【空間】

2020 年 4 月 27 日



記号・記法

- E を単位行列とし，次数 n を明示したいときは E_n と書く．
- 行列 A に対応する線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ を T_A で表す．
- 正方行列 A の固有値 λ の固有空間を $V_A(\lambda)$ で表す．

1　合同変換とは

$\mathbb{R}^n$ を実数成分の n 次列ベクトルのなす実線形空間とする．また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ によって内積を定める．さらに，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ によってノルムを定める．

例えば，平面ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のように書き，内積とノルムは

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

である．2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離はノルムを用いて

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

と書ける．この距離を保つ変換が合同変換である．つまり，合同変換は次のように定義される．

定義. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

を満たすとき，f を $\mathbb{R}^n$ の合同変換という．

定理 1.1. (1) ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．
(2) 直交変換，すなわち，内積を保つ $\mathbb{R}^n$ の線形変換は合同変換である．

証明 (1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$\|t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) - t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{y})\| = \|(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ．よって，$t_{\boldsymbol{b}}$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．
(2) f を $\mathbb{R}^n$ の直交変換とする．f は内積を保つので，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 = \|f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|^2 = (f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

が成り立つ．よって，f は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

□

合同変換と合同変換を合成するとやはり合同変換である．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 1.2. $\mathbb{R}^n$ の 2 つの合同変換の合成は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

証明 $\mathbb{R}^n$ の合同変換 f_1, f_2 を任意にとる．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f_1(f_2(\boldsymbol{x})) - f_1(f_2(\boldsymbol{y}))\| = \|f_2(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つので，合成 $f_1 \circ f_2$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．　□

直交変換は線形変換なので原点を保つ合同変換である．この逆，すなわち，次が成り立つ．

定理 1.3. 原点を保つ合同変換は線形変換であり，従って，直交変換である．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ 合同変換とし，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|f(\boldsymbol{x})-\mathbf{0}\| = \|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\| = \|\boldsymbol{x}-\mathbf{0}\| = \|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つので，f はノルムを保つ．これと内積とノルムの関係から任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})) &= \frac{1}{2}\left(\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2-\|f(\boldsymbol{x})\|^2-\|f(\boldsymbol{y})\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2\right)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

が成り立つので，f は内積を保つ．以上から，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ と任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2 =&\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2+\|f(\boldsymbol{x})\|^2+\|f(\boldsymbol{y})\|^2\\ &-2\left(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x})\right)-2\left(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{y})\right)+2\left(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\right)\\ =&\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &-2\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\right)-2\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\right)+2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\\ =&\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=0,\\ \|f(k\boldsymbol{x})-kf(\boldsymbol{x})\|^2 =&\|f(k\boldsymbol{x})\|^2-2\left(f(k\boldsymbol{x}),kf(\boldsymbol{x})\right)+\|kf(\boldsymbol{x})\|^2\\ =&\|k\boldsymbol{x}\|^2-2k\left(f(k\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x})\right)+k^2\|f(\boldsymbol{x})\|^2\\ =&\|k\boldsymbol{x}\|^2-2k\left(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)+k^2\|\boldsymbol{x}\|^2=0\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，f は線形変換である．さらに，f は内積を保つので直交変換である． □

この定理から，任意の合同変換は直交行列とベクトルによって表せる．すなわち，次が成り立つ．

定理 1.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換 f は，n 次直交行列 A と n 次ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ によって

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

と一意的に表せる．逆に，この形で表せる写像は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換とする．$f(\mathbf{0})=\boldsymbol{b}$ とおく．定理 1.1(1) と定理 1.2 よりベクトル $-f(\mathbf{0})$ による平行移動 $t_{-f(\mathbf{0})}$ と f の合成 $g=t_{-\boldsymbol{b}}\circ f$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．$g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ なので，定理 1.3 より g は直交変換である．従って，ある n 次直交行列 A によって $g(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と表せる．よって，$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ である．また，

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

と表せたとすると，$f(\mathbf{0})=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ である．従って，f に対して直交変換 g が一意的に定まるので，対応する直交行列も一意的に定まるから $A=B$ である．後半の主張は明らかである． □

2　平面の合同変換

f を平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換とする．定理 1.4 から 2 次直交行列 A と平面ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ によって

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

と書ける．f はその固定点集合によって特徴づけられる．

2.1　固定点集合

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を f の固定点という．f の固定点集合

$$\mathrm{Inv}(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

が平面上でどのような図形になるかを考えよう．

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

であるから，$\mathrm{Inv}(f)$ は 2 変数連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体のなす集合である．従って，$\mathrm{Inv}(f)$ は空集合，1 点集合，直線，平面全体のいずれかである．特に，f が恒等変換のとき，またそのときに限り，$\mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^2$ となる．すなわち，

$$A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \mathrm{Inv}(f) = \mathbb{R}^2$$

である．また，

$$A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \emptyset$$

である．すなわち，$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{b}$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ は固定点を持たない．

A が 1 を固有値に持たないとき，$\det(E - A) \neq 0$ だから $E - A$ は正則である．従って，このとき連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯一つの解 $\boldsymbol{x} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ を持つから，$\mathrm{Inv}(f)$ は 1 点集合である．すなわち，以下が成り立つ．

$$1 \text{ は } A \text{ の固有値でない } \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \left\{ (E - A)^{-1}\boldsymbol{b} \right\}$$

A が 1 を固有値に持つとき，その固有空間 $V_A(1)$ は同次形連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間に等しい．さらに，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つなら，その一般解は特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ $(\boldsymbol{x}_1 \in V_A(1))$ と書ける．すなわち，

$$1 \text{ が } A \text{ の固有値かつ } \mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Inv}(f) = \{ \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_1 \in V_A(1) \}$$

である．特に，$\dim V_A(1) = 1$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{x}_0$ を通り $V_A(1)$ に平行直線である．なお，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たければ，$\mathrm{Inv}(f)$ は空集合である．

2.2　平面の直交変換

よく知られているように，2 次直交行列は以下のどちらか一方の形に書ける．

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

S_θ に対応する直交変換は図 1 のように原点を中心とする角度 θ の回転であり，R_θ に対応する直交変換は図 2 のように原点で x 軸と角度 $\frac{\theta}{2}$ で交わる直線に関する鏡映である．ただし，角度は反時計回りを正の向きとする．

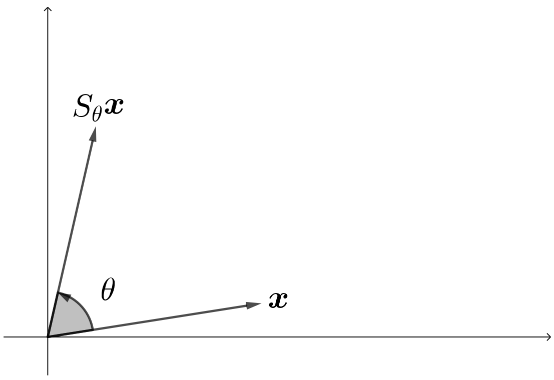


図 1　原点を中心とする θ 回転

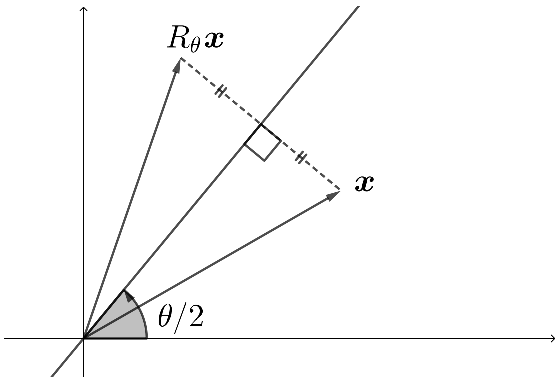


図 2　原点で x 軸と $\theta/2$ で交わる直線に関する鏡映

2 次直交行列全体の集合を $O(2)$ と書く．また，$SO(2) := \{\, A \in O(2) \mid \det A = 1 \,\}$ とする．$\det S_\theta = 1,\ \det R_\theta = -1$ であり，直交行列の行列式は ± 1 だから，

$$SO(2) = \{\, S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \,\}, \quad O(2) \setminus SO(2) = \{\, R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \,\}$$

である．回転同士，鏡映同士の合成は回転であり，回転と鏡映の合成は鏡映である．具体的には

$$S_\theta S_\phi = S_{\theta+\phi}, \quad R_\theta R_\phi = S_{\theta-\phi}, \quad S_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}, \quad R_\theta S_\phi = R_{\theta-\phi}$$

である．特に，$S_\theta = R_\theta R_0, R_\theta^2 = E$ である．さらに，

$$S_{\frac{\theta}{2}}^{-1} R_\theta S_{\frac{\theta}{2}} = S_{-\frac{\theta}{2}} R_\theta S_{\frac{\theta}{2}} = R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

より，R_θ は $S_{\frac{\theta}{2}}$ により直交対角化されることがわかる．これより（あるいは直接的な計算により）R_θ の固有値は $1, -1$ で，各々の固有空間 $V_\theta(1), V_\theta(-1)$ は互いに直交し，

$$V_\theta(1) = \left\langle \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \right\rangle, \quad V_\theta(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right\rangle$$

であることもわかる．なお，$V_\theta(1)$ が鏡映の軸である．また，S_θ は実固有値を持たない．

2.3　平面の合同変換の分類

平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

は直交行列 A と 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ によって表 1 のように 5 種に分類できる．定理 2.1 で示すように，平面の合同変換は 3 個以下の鏡映の合成として表せる．表 1 の 4 列目はその鏡映の最小個数を表しており，この分類は平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換をそれを合成する鏡映の個数と固定点集合によって分類したものとも一致している．

名前	A	$\boldsymbol{b}$	鏡映の最小個数	固定点集合
恒等変換	E	$\boldsymbol{0}$	0	$\mathbb{R}^2$
平行移動	E	$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$	2	空集合
回転	$S_\theta(\neq E)$	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$	2	回転の中心
鏡映	R_θ	$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$	1	鏡映軸
滑り鏡映	R_θ	$\boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1)$	3	空集合

表 1　平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換の分類表

ここでは，実際に平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換 f が表 1 のいずれかに分類され，またそれで全てであることを確かめていこう．恒等変換と平行移動に関しては明らかなので，以下 f は恒等変換でも平行移動でもない，すなわち，$A \neq E$ とする．また，直交行列 S_θ, R_θ に対応する直交変換をそれぞれ s_θ, r_θ と表す．

2.3.1　回転

$A = S_\theta \in SO(2)$ $(S_\theta \neq E)$ とする．このとき f の固定点は 1 点のみであり，f はその固定点を中心とする θ 回転である．このことを実際に確かめてみよう．

S_θ は 1 を固有値に持たないので，$\det(E - S_\theta) \neq 0$ である．従って，$E - S_\theta$ は正則なので

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow S_\theta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - S_\theta)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = (E - S_\theta)^{-1}\boldsymbol{b}$$

である．従って，f の固定点は $\boldsymbol{c} := (E - S_\theta)^{-1}\boldsymbol{b}$ のみである．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} = S_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$$

である．よって，確かに f は $\boldsymbol{c}$ を中心とする θ 回転であることがわかる（図 3）．また，これより

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ s_\theta \circ t_{-\boldsymbol{c}}$$

とも表せる．すなわち，$\boldsymbol{c}$ を中心とする回転は「一旦 $-\boldsymbol{c}$ 平行移動し，原点を中心に回転させた後に再び $\boldsymbol{c}$ 平行移動する変換」と言い換えることもできる．

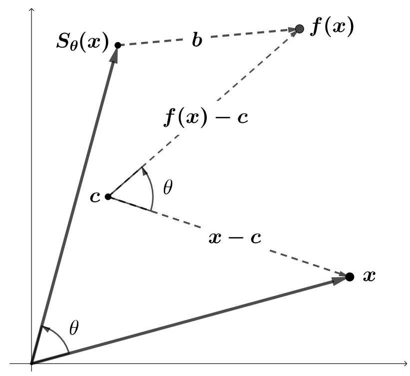


図 3　$\boldsymbol{c}$ を中心とする θ 回転

2.3.2　鏡映と滑り鏡映

$A = R_\theta \in O(2) \setminus SO(2)$ とする．このとき，$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線であり，f はこの直線に関する鏡映である．一方，$\boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1)$ なら $\mathrm{Inv}(f)$ は空集合であり，f は滑り鏡映である．これを実際に確かめていこう．

直交変換 r_θ による平面の固有分解 $\mathbb{R}^2 = V_\theta(1) \oplus V_\theta(-1)$ によって $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_\theta(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_\theta(-1) \tag{2.1}$$

と分解する．$R_\theta^2 = E$ であるから，

$$x \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = R_\theta \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{0}$$

である．従って，

$$\mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$$

である．これより，$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ かそうでないかによって合同変換 f を分けることができる．

まず，$\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ とする．$\mathrm{Inv}(f)$ が空集合でないので，連立 1 次方程式

$$(E - R_\theta)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は解を持つ．R_θ は 1 を固有値に持つので $\det(E - R_\theta) = 0$ であり，$E - R_\theta \neq O$ だから，$\mathrm{rank}(E - R_\theta) = 1$ である．従って，2.1 節で見たように $\mathrm{Inv}(f)$ は直線である．特に，

$$f\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = R_\theta\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{2}$$

より $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Inv}(f)$ だから $\mathrm{Inv}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通る．さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (R_\theta \boldsymbol{x}, R_\theta \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

より $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{b}\|^2/2$ が成り立つから $\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}, \boldsymbol{b}\right) = 0$ となり，$\mathrm{Inv}(f)$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する．つまり，$\mathrm{Inv}(f)$ は $V_\theta(-1)^\perp = V_\theta(1)$ に平行である．

f は直線 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映である．実際，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と任意の $\boldsymbol{p} \in V_\theta(1)$ に対して，

$$(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (R_\theta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (R_\theta \boldsymbol{x}, R_\theta \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = 0,$$
$$f\left(\frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}\right) = R_\theta\left(\frac{R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} + R_\theta \boldsymbol{x}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2} = \frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}$$

であるから，$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ が $V_\theta(1)$ に，従って $\mathrm{Inv}(f)$ に，直交し，$f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点が $\mathrm{Inv}(f)$ 上にあるので，f は直線 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映である（図 4）．

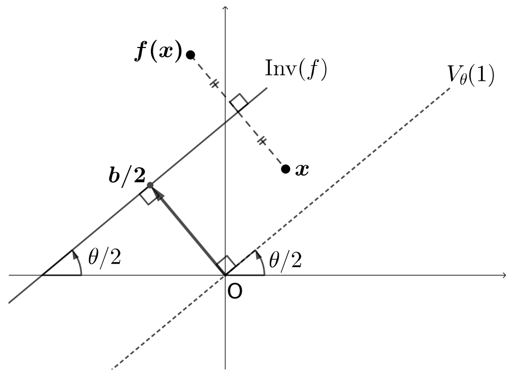


図 4　直線 $\mathrm{Inv}(f)$ に関する鏡映

また，任意の $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Inv}(f)$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = R_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$$

が成り立つから，

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ r_\theta \circ t_{-\boldsymbol{c}}$$

である．すなわち，$\boldsymbol{c}$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線に関する鏡映は「一旦 $-\boldsymbol{c}$ 平行移動し，$V_\theta(1)$ に関する鏡映移動をした後に再び $\boldsymbol{c}$ 平行移動する変換」と言い換えることもできる（図 5）．

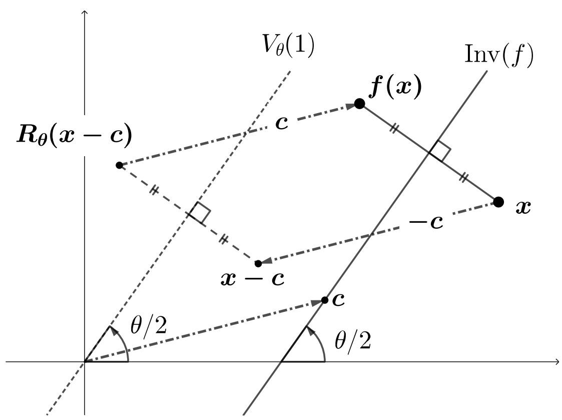


図 5　$\boldsymbol{c}$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線に関する鏡映

次に，$\boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1)$ とする．このとき f は滑り鏡映であることを確かめよう．なお，平面上の滑り鏡映の定義は次の通りである．

定義． 平面上の直線 L に関する鏡映 g と L に平行なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{c}}$ との合成 $t_{\boldsymbol{c}} \circ g$ を L と $\boldsymbol{c}$ に関する（平面上の）滑り鏡映または並進鏡映という．滑り鏡映は鏡映（$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のとき）を含むが，これ以後鏡映でない滑り鏡映を単に滑り鏡映と呼ぶことにする．

$\boldsymbol{b}$ を式 (2.1) のように分解すると，$\boldsymbol{b}^+ \neq \boldsymbol{0}$ である．従って，

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+$$

である．$g(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とおくと，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ である．$\boldsymbol{b}^- \in V_\theta(-1)$ だから g は直線 $\mathrm{Inv}(g)$ に関する鏡映である．また，$\boldsymbol{b}^+ \in V_\theta(1)$ より $\boldsymbol{b}^+$ は $\mathrm{Inv}(g)$ と平行である．よって，f は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な直線とベクトル $\boldsymbol{b}^+$ に関する滑り鏡映である（図 6）．

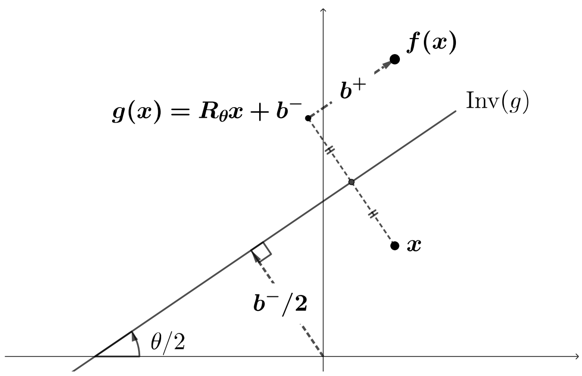


図 6　滑り鏡映

なお，鏡映と平行移動を合成する順番はどちらでもよい．実際，$R_\theta \boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{b}^+$ より

$$g\left(t_{\boldsymbol{b}^+}(\boldsymbol{x})\right) = R_\theta\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+\right) + \boldsymbol{b}^- = \left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = t_{\boldsymbol{b}^+}\left(g(\boldsymbol{x})\right)$$

であるから，$g \circ t_{\boldsymbol{b}^+} = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ である．

最後に，内積による鏡映と滑り鏡映の判別方法をまとめておこう．R_θ の単位固有ベクトルに

$$\boldsymbol{p}_\theta^+ = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \in V_\theta(1), \quad \boldsymbol{p}_\theta^- = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \in V_\theta(-1)$$

と名前を付ける．$\left(\boldsymbol{p}_\theta^+, \boldsymbol{p}_\theta^-\right)$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底だから式 (2.1) における $\boldsymbol{b}^+, \boldsymbol{b}^-$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{b}^+ = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+)\boldsymbol{p}_\theta^+, \quad \boldsymbol{b}^- = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^-)\boldsymbol{p}_\theta^-$$

と表せる．これより，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は以下の 2 つに分けられる．

- $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+\right) = 0$ のとき，f は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線に関する鏡映である．
- $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+\right) \neq 0$ のとき，f は $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^-\right)\boldsymbol{p}_\theta^-/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線とベクトル $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}_\theta^+)\boldsymbol{p}_\theta^+$ に関する滑り鏡映である．

2.4　鏡映の個数

平面の合同変換それぞれに対し，それを合成する鏡映を全て調べ上げ，分類表 1 を完成させよう．

定理 2.1. 平面 $\mathbb{R}^2$ の任意の合同変換は 3 個以下の鏡映の合成として表せる．特に，各合同変換に対してそれを合成する鏡映の最小個数は表 1 にある通りである．

証明 恒等変換は 0 個，鏡映は 1 個の鏡映の合成であり，またそれ以外の合同変換は 1 個以下の鏡映の合成として表せないは明らかである．残りの平行移動，回転，滑り鏡映に関しては以下に続く補題 2.1，補題 2.2，補題 2.3 により証明が完成する． □

補題 2.1. (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ $(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ は平行な 2 直線に関する 2 個の鏡映の合成である．このとき，鏡映軸間の距離は $\|\boldsymbol{b}\|/2$ である．

(2) 逆に，平面 $\mathbb{R}^2$ の平行な 2 直線 L_1, L_2 $(L_1 \neq L_2)$ に関する鏡映 g_1, g_2 の合成 $g_2 \circ g_1$ は平行移動である．移動方向は L_1 から L_2 の方へ両直線に直交する方向で，移動距離は 2 直線の距離の 2 倍である．

証明 (1) $\boldsymbol{b} \in V_\theta(-1)$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ をとる．このとき，合同変換 $g(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_\theta(1)$ を通る直線 L に関する鏡映である．従って，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g\left(r_\theta(\boldsymbol{x})\right) = R_\theta\left(R_\theta \boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})$$

であるから $t_{\boldsymbol{b}}$ は 2 個の鏡映の合成 $g \circ r_\theta$ である．また，図 7 のように g, r_θ の鏡映軸 $L, V_\theta(1)$ はそれぞれ $\boldsymbol{b}/2, \boldsymbol{0}$ を通り共に $\boldsymbol{b}$ に直交するので，2 直線の距離は $\|\boldsymbol{b}\|/2$ である．

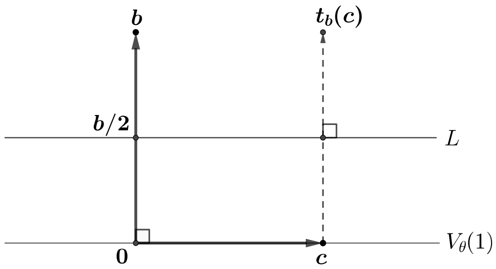


図 7　平行移動は平行な 2 直線に関する鏡映の合成である．

(2) 逆に，平行な 2 直線 L_1, L_2 $(L_1 \neq L_2)$ に関する鏡映の合成が平行移動となることを示す．L_1, L_2 が x 軸とのなす角を $\theta/2$ とすると，L_1, L_2 に関する鏡映 g_1, g_2 は

$$g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in V_\theta(-1),\ \boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2)$$

と書ける．ただし，L_1, L_2 はそれぞれ $\boldsymbol{b}_1/2, \boldsymbol{b}_2/2$ を通る．これより任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_2 \circ g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta\left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1\right) + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$$

だから，$g_2 \circ g_1$ は平行移動 $t_{\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1}$ である．また，図 8 のようにその移動方向は L_1 から L_2 の方へ両直線に直交する方向であり，移動距離 $\|\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1\|$ は L_1, L_2 の距離の 2 倍である．　□

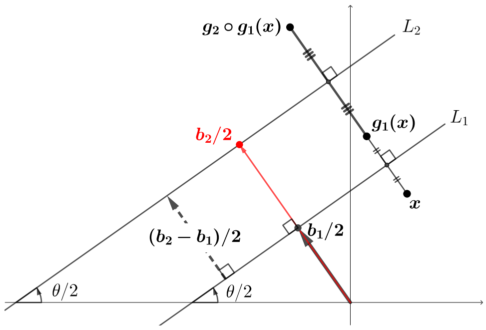


図 8　鏡映軸が平行な 2 つの鏡映の合成は平行移動である．

補題 2.2. (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ の θ 回転は回転の中心で交わる 2 直線に関する 2 個の鏡映の合成である．このとき，鏡映軸同士のなす角は $\theta/2$ である．

(2) 逆に，平面 $\mathbb{R}^2$ の平行でない 2 直線 L_1, L_2 に関する鏡映 g_1, g_2 の合成 $g_2 \circ g_1$ は 2 直線の交点を中心とする L_1 から L_2 の方への回転である．回転角は 2 直線のなす角の 2 倍である．

証明 (1) f を $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ を中心とする平面の θ 回転とする．$f(\boldsymbol{x}) = S_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}$ と書ける．

$$g_1(\boldsymbol{x}) = R_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = R_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \quad (\theta \neq 0)$$

とすると，g_1 は x 軸に平行で $\boldsymbol{c}$ を通る直線 L_1 に関する鏡映であり，g_2 は $V_\theta(1)$ に平行で $\boldsymbol{c}$ を通る直線 L_2 に関する鏡映である．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_2 \circ g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta\left(R_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\right) + \boldsymbol{c} = S_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} = f(\boldsymbol{x})$$

より，f は 2 個の鏡映の合成 $g_2 \circ g_1$ である．図 9 のように鏡映軸 L_1, L_2 のなす角は $\theta/2$ である．

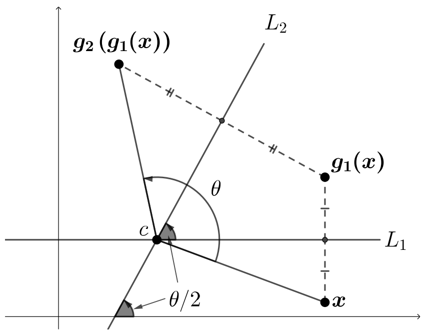


図 9　回転は平行でない 2 直線に関する鏡映の合成である．

(2) 逆に，平行でない 2 直線 L_1, L_2 に関する鏡映の合成が回転となることを示す．L_1, L_2 が x 軸

となす角をそれぞれ $\theta/2, \phi/2$ とすると，L_1, L_2 に関する鏡映 g_1, g_2 は

$$g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = R_\phi \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b_2} \quad (\boldsymbol{b}_1 \in V_\theta(-1),\ \boldsymbol{b}_2 \in V_\phi(-1))$$

と書ける．ただし，L_1, L_2 はそれぞれ $\boldsymbol{b}_1/2, \boldsymbol{b}_2/2$ を通る．これより任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_2 \circ g_1(\boldsymbol{x}) = R_\phi(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1) + \boldsymbol{b}_2 = S_{\phi-\theta}\boldsymbol{x} + R_\phi \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

だから，$g_2 \circ g_1$ は $\boldsymbol{c} := (E - S_{\phi-\theta})^{-1}(R_\phi \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)$ を中心とする $\phi - \theta$ 回転である．鏡映軸 L_1, L_2 の交点を $\boldsymbol{c}' \in L_1 \cap L_2$ とすると，$\boldsymbol{c}' \in \mathrm{Inv}(g_2 \circ g_1)$ である．回転の固定点は中心点だけなので $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c}$ である．また，図 10 のように回転方向は L_1 から L_2 の方へ，回転角 $\phi - \theta$ は L_1 と L_2 のなす角の 2 倍である． □

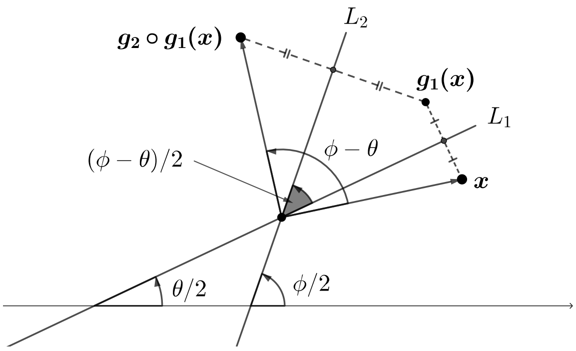


図 10　鏡映軸が平行でない 2 つの鏡映の合成は回転である．

補題 2.3. 平面 $\mathbb{R}^2$ の滑り鏡映は 3 個の鏡映の合成として表せる．また，滑り鏡映は 2 個以下の鏡映の合成としては表せない．

証明 f を平面 $\mathbb{R}^2$ の滑り鏡映とする．$f(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(\theta \neq 0,\ \boldsymbol{b} \notin V_\theta(-1))$ と書ける．

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_\theta(1), \quad \boldsymbol{b}^- \in V_\theta(-1), \quad \boldsymbol{b}^+ \neq \boldsymbol{0}$$

とし，$g_1(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とする．g_1 は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_\theta(1)$ に平行な直線 L_1 に関する鏡映である．

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = t_{\boldsymbol{b}^+}(g_1(\boldsymbol{x}))$$

より，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g_1$ である．さらに，補題 2.1(1) より平行移動 $t_{\boldsymbol{b}^-}$ は図 11 のように平行な 2 直線 L_2, L_3 に関する鏡映 g_2, g_3 の合成として表せる．実際，L_2, L_3 をそれぞれ $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}^+/2$ を通り共に $\boldsymbol{b}^+$ に平行な直線とすれば $t_{\boldsymbol{b}^+} = g_2 \circ g_1$ である．よって，

$$f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$$

より f は 3 個の鏡映の合成である．また，補題 2.1(2) と補題 2.2(2) から 2 個の鏡映の合成は恒等変換か平行移動か回転なので，滑り鏡映を 2 個以下の鏡映の合成として表すことはできない． □

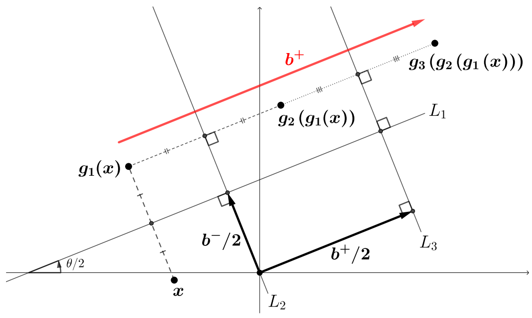


図 11　滑り鏡映は 3 個の鏡映の合成である．

2.5　平面の合同変換と 3 次正方行列

平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は 3 次正方行列と 3 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，合同変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$，$f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成

$$f_1 \circ f_2(\boldsymbol{x}) = f_1\left(f_2\left(\boldsymbol{x}\right)\right) = f_1\left(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2\right) = A_1A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2$$

は 3 次正方行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．これにより平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換を 3 次正方行列の演算で記述できる．

例えば，2 つの合同変換

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の合成 $f_1 \circ f_2$ は

$$f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるが，これが 3 次正方行列同士の積として

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と計算できる．この右辺の 3 次正方行列の左上部分と右上部分が，それぞれ合成 $f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の直交行列 A と平面ベクトル $\boldsymbol{b}$ である．このように全てを行列演算にしてしまうことで計算機で合同変換が扱いやすくなる．なお，これは平面上のアフィン変換や射影平面上の射影変換を 3 次正方行列によって表現する手法の特殊な場合でもある．

演習問題 2

1. 次の平面の合同変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の形に書き下そう．
   (1) 点 (c_1, c_2) を中心とする θ 回転
   (2) 直線 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ に関する鏡映
   (3) 点 (c_1, c_2) を通り x 軸とのなす角が θ の直線と，x 軸とのなす角が θ で大きさが $k > 0$ のベクトルに関する滑り鏡映

2. 次の平面の合同変換が分類の表 1 のどれに当てはまるか判別しよう．また，回転に対しては中心と回転角を，鏡映に対しては軸の方程式を，滑り鏡映に対しては軸の方程式と平行移動ベクトルを明示しよう．

   (1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (2) $f_2(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

   (3) $f_3(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (4) $f_4 = f_1 \circ f_2$

   (5) $f_5 = f_2 \circ f_1$

   (6) $f_6(\boldsymbol{x}) = f_2\left(\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

   (7) $f_7(\boldsymbol{x}) = f_3(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (8) $f_8 = f_7 \circ f_2$

3. 適当なプログラミング環境のもとで，2 次直交行列 A と 2 次列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたときに平面の合同変換
$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$
が表 1 のどれに当てはまるか判定するプログラムを作成しよう．また，回転に対しては中心と回転角，鏡映に対しては軸の方程式，滑り鏡映に対しては軸の方程式と平行移動ベクトルなどの情報も出力しよう．

4. 平面の合同変換 f_1, f_2 の合成 $f_1 \circ f_2$ を分類しよう．

3　空間の合同変換

作成中