

積分基本問題集 式

次の2重積分または広義積分を求めよう.

$$(1) \ D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \}, \quad \iint_D x e^{xy} \, dx dy$$

$$(2) \ D = \{ (x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 \}, \quad \iint_D \sin(\pi y^2) \, dx dy$$

$$(3) \ D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi} \}, \quad \iint_D x^2 \cos(y^2) \, dx dy$$

$$(4) \ D = \{ (x, y) \mid x + y \leq 2, y^2 \leq x, 0 \leq y \}, \quad \iint_D xy \, dx dy$$

$$(5) \ D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \}, \quad \iint_D \log(x^2 + y^2) \, dx dy$$

$$(6) \ D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}, \quad \iint_D e^{-x^2 - y^2} \, dx dy$$

$$(7) \ D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16 \}, \quad \iint_D \cos(x^2 + y^2) \, dx dy$$

$$(8) \ D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2, 1 \leq x - y \leq 3 \}, \quad \iint_D (x^2 - y^2) \, dx dy$$

$$(9) \ D = \left\{ (x, y) \mid \frac{\pi}{6} \leq x + y \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \iint_D (x - y) \tan(x + y) \, dx dy$$

$$(10) \ D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}, \quad \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy$$

$$(11) \ D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \}, \quad \iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} \, dx dy$$

$$(12) \ D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq x^2 + y^2, 0 \leq x, 0 \leq y \}, \quad \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

$$(13) \ D = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{\frac{y}{2}} \leq 1 \right\}, \quad \iint_D xy \, dxdy$$

$$(14) \ D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y \}, \quad \iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3} \, dxdy$$

$$(15) \ D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \}, \quad \iint_D \frac{x + y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \, dxdy$$

$$(16) \ D = \{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \}, \quad \iint_D \frac{dxdy}{x + y}$$

$$(17) \ D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y \}, \quad \iint_D e^{-x-y} \, dxdy$$

$$(18) \ D = \{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x \}, \quad \iint_D e^{\frac{y}{x}} \, dxdy$$

$$(19) \ D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, (x, y) \neq (0, 0) \}, \quad \iint_D \frac{x + y}{x^2 + y^2} \, dxdy$$

$$(20) \ D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < x \}, \quad \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$(21) \ D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}, \quad \iint_D \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \, dxdy$$

$$(22) \ D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq e^{-x^2} \right\}, \quad \iint_D dxdy$$

$$(23) \ D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, (x, y) \neq (0, 0) \}, \quad \iint_D \sin \frac{y}{x} \, dxdy$$

$$(24) \ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x| - |y| - |x+y|} \, dxdy$$

(1) 閉領域  $D$  を縦線集合と見なして重積分を累次積分に書き直しせよ。

$$\begin{aligned}\iint_D x e^{xy} \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^2 x e^{xy} \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ e^{xy} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(2) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると図 1 の通りである。

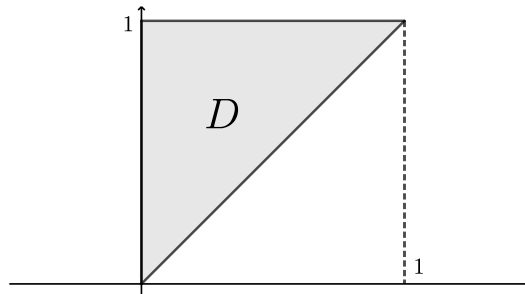


図 1  $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \}$

これより  $D$  は横線集合として

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \}$$

と表せるので、重積分は以下の累次積分に書き直せる。

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(\pi y^2) \, dy dx &= \int_0^1 \left( \int_0^y \sin(\pi y^2) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ x \sin(\pi y^2) \right]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \sin(\pi y^2) \, dy = \left[ -\frac{1}{2\pi} \cos(\pi y^2) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

(3) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると、図 2 の通りである。

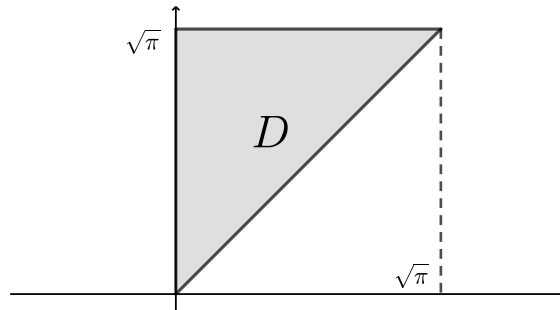


図 2  $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi} \}$

$D$  を横線集合と見なし重積分を累次積分に書き直せばよい.

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 \cos(y^2) \, dx dy &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^y x^2 \cos(y^2) \, dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{3} x^3 \cos(y^2) \right]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{\pi}} y^3 \cos(y^2) \, dy = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} y^2 \sin(y^2) + \frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(4) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると、図 3 の通りである.

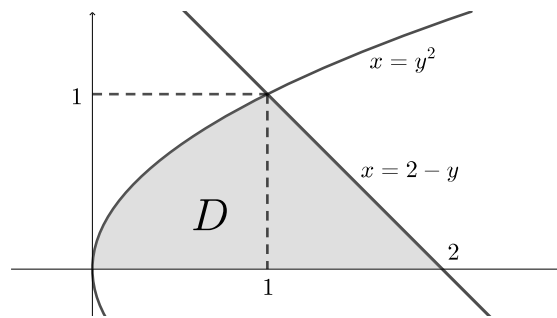


図 3  $D = \{ (x, y) \mid x + y \leq 2, y^2 \leq x, 0 \leq y \}$

これより  $D$  は横線集合として

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 2 - y \}$$

と表せるので、重積分は以下の累次積分に書き直せる.

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{y^2}^{2-y} xy \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=y^2}^{x=2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} y^5 + \frac{1}{2} y^3 - 2y^2 + 2y \right) dy = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

(5) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると、図 4 の通りである.

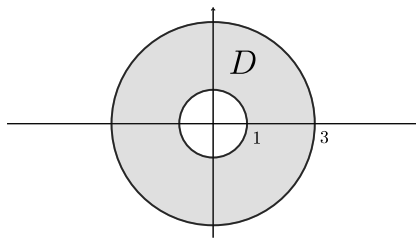


図 4  $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \}$

極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

によって  $r\theta$  平面上の集合

$$E = \{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される. 集合  $E$  を  $r\theta$  平面に図示すると図 5 の通りである.

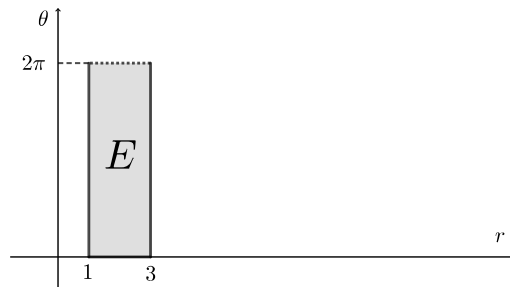


図 5  $E = \{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta < 2\pi \}$

変換のヤコビアンは

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

であるから, 重積分は以下の様書き直せる.

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x^2 + y^2) \, dx dy &= \iint_E (\log r^2) |J(r, \theta)| \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_1^3 2r \log r \, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ r^2 \log r - \frac{1}{2} r^2 \right]_1^3 d\theta = (9 \log 3 - 4) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -8\pi + 18\pi \log 3. \end{aligned}$$

(6) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると, 図 6 の通りである.

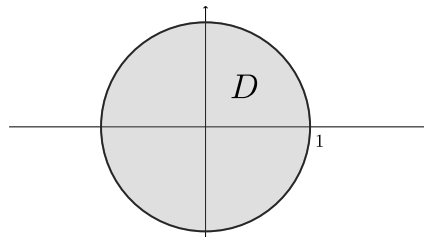


図 6  $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

によって  $r\theta$  平面上の集合

$$E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される。集合  $E$  を  $r\theta$  上に図示すると図 7 の通りである。

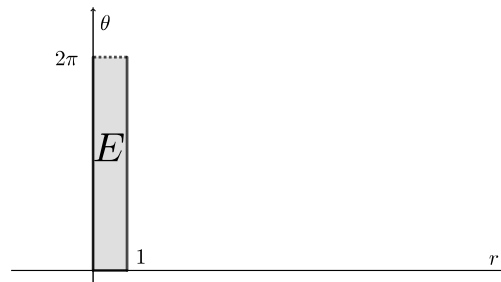


図 7  $E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi \}$

変換のヤコビアンは  $J(r, \theta) = r$  であるから、重積分は以下の様に変換される。

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_E -e^{-r^2} |J(r, \theta)| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r e^{-r^2} dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) \int_0^{2\pi} d\theta = \pi(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

(7) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると、図 8 の通りである。

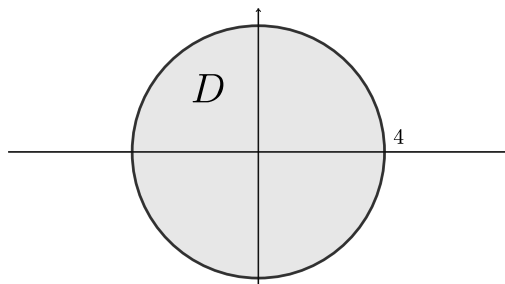


図 8  $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16 \}$

極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

によって  $r\theta$  平面上の集合

$$E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される．集合  $E$  を  $r\theta$  平面上に図示すると，図 9 の通りである．

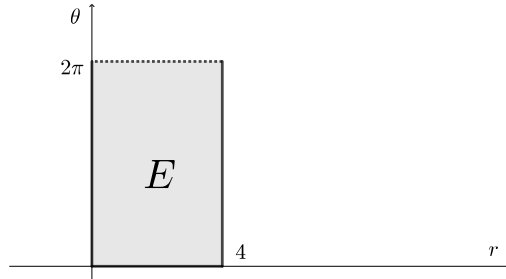


図 9  $E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta < 2\pi \}$

変換のヤコビアンは  $J(r, \theta) = r$  であるから，重積分は以下の様書き直せる．

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x^2 + y^2) \, dxdy &= \iint_E \cos(r^2) |J(r, \theta)| \, drd\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 r \cos(r^2) \, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin(r^2) \right]_0^4 d\theta = \frac{1}{2} \sin 16 \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \sin 16. \end{aligned}$$

(8) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると，図 10 の通りである．

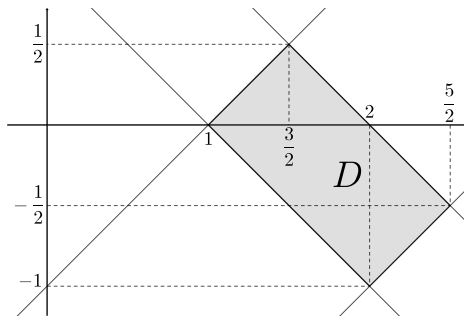


図 10  $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2, 1 \leq x - y \leq 3 \}$

変数変換

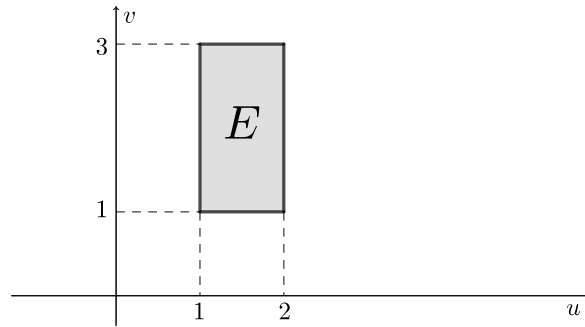
$$u = x + y, v = x - y \quad \left( \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \right)$$

によって  $uv$  平面上の閉領域

$$E = \{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 3 \}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される．閉領域  $E$  を  $uv$  平面に図示すると，図 11 の通りである．




 図 11  $E = \{ (u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3 \}$ 

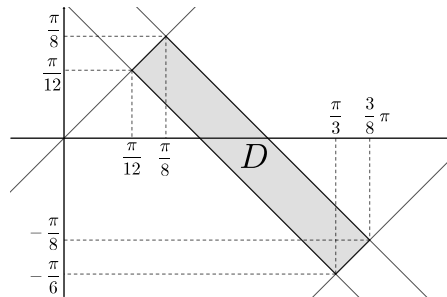
変換のヤコビアンは

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

であるから，重積分は以下の様書き直せる．

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y^2) \, dx dy &= \iint_E uv |J(u, v)| \, du dv = \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \int_1^2 uv \, du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left[ \frac{1}{2} u^2 v \right]_{u=1}^{u=2} dv = \frac{1}{4} \int_1^3 3v \, dv = 3. \end{aligned}$$

(9) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると，図 12 の通りである．


 図 12  $D = \{ (x, y) \mid \frac{\pi}{6} \leq x + y \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2} \}$ 

変数変換

$$u = x + y, v = x - y \quad \left( \Leftrightarrow x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2} \right)$$

によって  $uv$  平面上の閉領域

$$E = \left\{ (u, v) \mid \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される．閉領域  $E$  を  $uv$  平面に図示すると，図 13 の通りである．

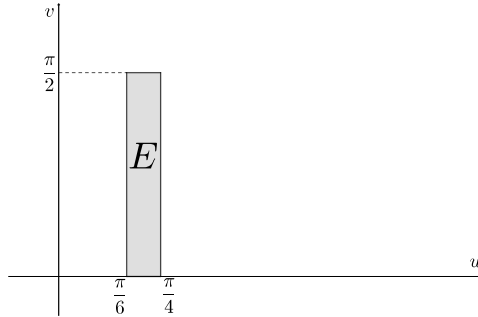


図 13  $E = \{ (u, v) \mid \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{4} \}$

変換のヤコビアンは  $J(u, v) = -\frac{1}{2}$  であるから，重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned} \iint_D (x - y) \tan(x + y) \, dx dy &= \iint_E v \tan u \, |J(u, v)| \, du dv = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} v \tan u \, du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \left[ -\log |\cos u| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dv = \frac{1}{4} \log \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, dv = \frac{\pi^2}{32} \log \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(10) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面上に図示すると，図 14 の通りである．

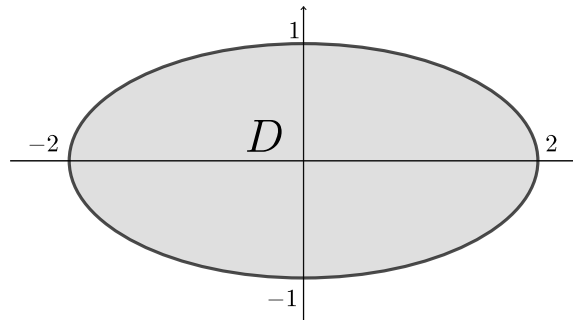


図 14  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$

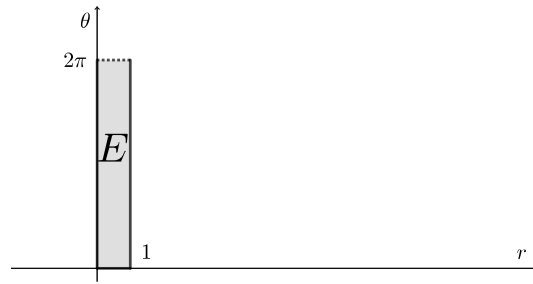
変数変換

$$x = 2r \cos \theta, \, y = r \sin \theta$$

によって  $r\theta$  平面上の集合

$$E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される．集合  $E$  を  $r\theta$  平面上に図示すると，図 15 の通りである．


 図 15  $E = \{ (u, v) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi \}$ 

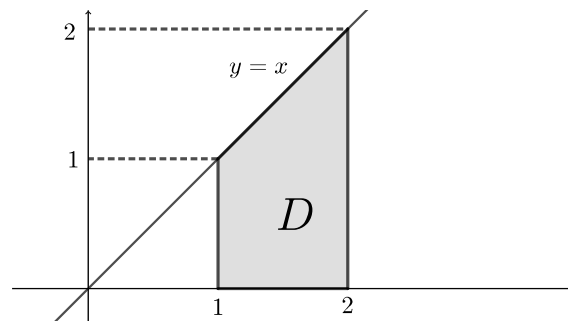
変換のヤコビアンは

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = 2r$$

であるから，重積分は以下の様に見える．

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy &= \iint_E r^2 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) |J(r, \theta)| \, dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r^3 (3 \cos^2 \theta + 1) \, dr \right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta + 1) \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta + 1) \, d\theta = \frac{5}{2} \pi. \end{aligned}$$

(11) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面上に図示すると，図 16 の通りである．


 図 16  $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \}$

$D$  を縦線集合と見なし重積分を累次積分に書き直せばよい.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy &= \int_1^2 \left( \int_0^x \frac{xy}{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \frac{x}{2} [\log(x^2+y^2)]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \frac{\log 2}{2} \int_1^2 x dx = \frac{3}{4} \log 2.\end{aligned}$$

(12) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると図 17 の通りである.

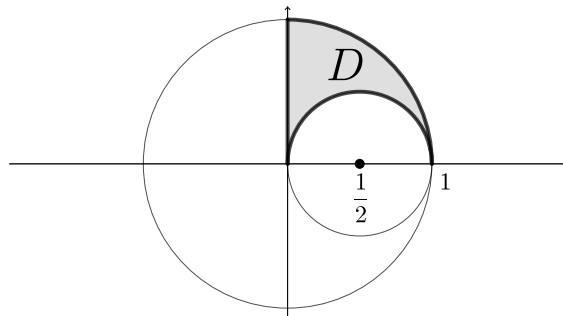


図 17  $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \}$

極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

によって  $r\theta$  平面上の閉領域

$$E = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq r \leq 1 \right\}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される. 閉領域  $E$  を  $r\theta$  平面に図示すると, 図 18 の通りである.

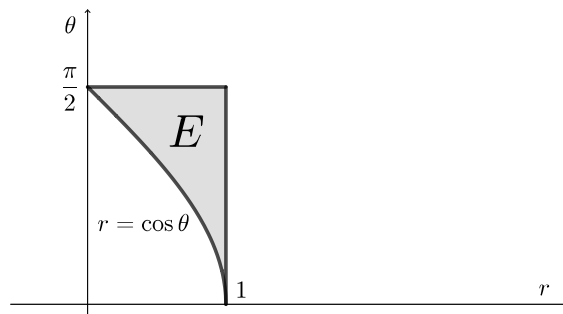


図 18  $E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq r \leq 1 \}$

変換のヤコビアンは  $J(r, \theta) = r$  であるから、重積分は以下の様書き直せる。

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdy &= \iint_E r |J(r, \theta)| \, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\cos \theta}^1 r^2 \, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \theta) \, d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

(13) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面上に図示すると、図 19 の通りである。

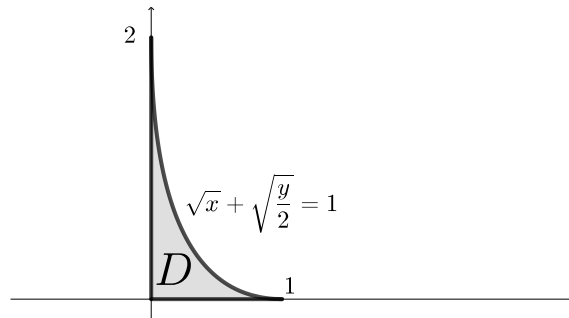


図 19  $D = \{ (x, y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{\frac{y}{2}} \leq 1 \}$

変数変換

$$x = u^2, y = 2v^2 \quad (u \geq 0, v \geq 0)$$

によって  $uv$  平面上の閉領域

$$E = \{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u \}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D$  に変換される。閉領域  $E$  を  $uv$  平面に図示すると、図 20 の通りである。

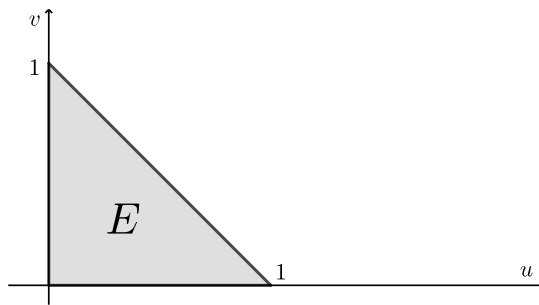


図 20  $E = \{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u \}$

変換のヤコビアンは

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 4v \end{vmatrix} = 8uv$$

であるから、重積分は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dxdy &= \iint_E 2u^2v^2|J(u,v)| \, dudv = 16 \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} u^3v^3 \, dv \right) du \\ &= 16 \int_0^1 u^3 \left[ \frac{1}{4}v^4 \right]_{v=0}^{v=1-u} du = 4 \int_0^1 u^3(1-u)^4 \, du = \frac{1}{70}.\end{aligned}$$

(14) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると、図 21 の通りである。

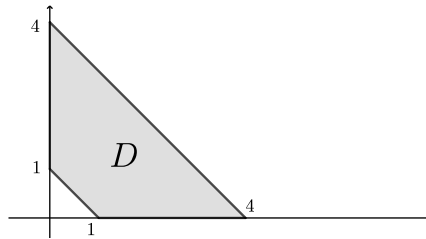


図 21  $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y \}$

これより  $D$  は縦線集合として

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

と表せる。ただし、ここで

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -x+1 & (x \leq 1) \\ 0 & (1 \leq x) \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = -x+4$$

である。これより重積分は以下のように 2 つの累次積分の和に書き直せる。

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy &= \int_0^1 \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dy \right) dx + \int_1^4 \left( \int_0^{-x+4} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dy \right) dx.\end{aligned}$$

被積分関数を  $y$  の 1 変数関数と見なして部分分数に分解すると

$$\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} = \frac{1}{x+y} - \frac{2x}{(x+y)^2} + \frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left( \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3} dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{dy}{x+y} - 2x \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{dy}{(x+y)^2} + 2x^2 \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{dy}{(x+y)^3} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( \left[ \log |x+y| \right]_{y=-x+1}^{y=-x+4} + 2x \left[ \frac{1}{x+y} \right]_{y=-x+1}^{y=-x+4} - x^2 \left[ \frac{1}{(x+y)^2} \right]_{y=-x+1}^{y=-x+4} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + 2\log 2 \right) dx = -\frac{7}{16} + 2\log 2
 \end{aligned}$$

を得る。全く同様にして

$$\int_1^4 \left( \int_0^{-x+4} \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{39}{16} - 2\log 2$$

が得られるので、これらを合わせて以下を得る。

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3} dx dy = \left( -\frac{7}{16} + 2\log 2 \right) + \left( \frac{39}{16} - 2\log 2 \right) = 2.$$

(15) 閉領域  $D$  を  $xy$  平面に図示すると、図 22 の通りである。

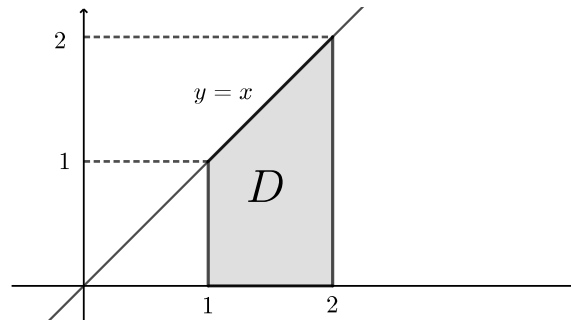


図 22  $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \}$

$D$  を縦線集合と見なして、重積分は以下のように書き直せる。

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^x \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_1^2 \left[ \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_1^2 e dx = e.$$

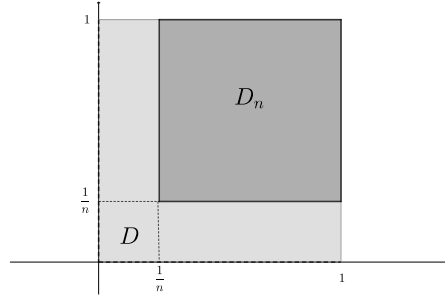
(16) 集合  $D$  は閉領域ではないのでこれは広義積分である。自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \right\}$$

とすると、 $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり、これを図示すると図 23 の通りである。

$(x, y) \in D$  に対して  $\frac{1}{x+y} > 0$  であるから、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{x+y}$$


 図 23  $D_n = \{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \}$ 

が存在すれば広義積分は収束し、その極限值が求める広義積分の値である。各  $D_n$  は横線集合と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{x+y} &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x+y} \right) dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \log|x+y| \right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} dy \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \log(y+1) - \log\left(y + \frac{1}{n}\right) \right) dy \\ &= \left[ (y+1) \log(y+1) - 1 - \left(y + \frac{1}{n}\right) \log\left(y + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \\ &= 2 \log 2 - 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} \log \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

ここで、 $t = \frac{2}{n}$  とおくと  $n \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$  であるから、ロピタルの定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log \frac{2}{n} = \lim_{t \rightarrow +0} t \log t = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\log t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = - \lim_{t \rightarrow +0} t = 0$$

である。これより、以下を得る。

$$\iint_D \frac{dxdy}{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{x+y} = 2 \log 2.$$

(17) 集合  $D$  は有界ではないのでこれは広義積分である。自然数  $n$  に対して

$$D_n = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n \}$$

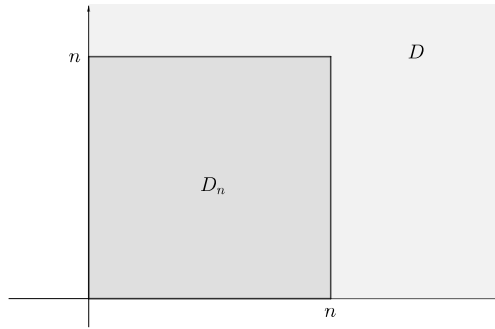
とすると、 $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり、これを図示すると図 24 の通りである。

$(x, y) \in D$  に対して  $e^{-x-y} \geq 0$  であるから、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-x-y} dxy$$

が存在すれば広義積分は収束し、その極限值が求める広義積分の値である。各  $D_n$  は横線集合




 図 24  $D_n = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n \}$ 

と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} e^{-x-y} dx dy &= \int_0^n \left( \int_0^n e^{-x-y} dx \right) dy = \int_0^n e^{-y} [-e^{-x}]_0^n dy = (1 - e^{-n}) \int_0^n e^{-y} dy \\ &= (1 - e^{-n})^2. \end{aligned}$$

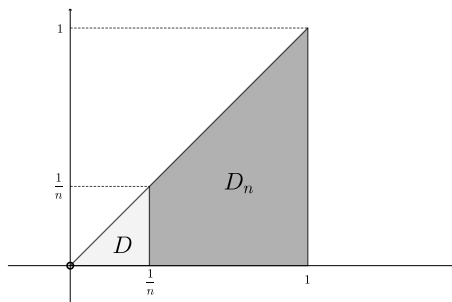
よって, これより以下を得る.

$$\iint_D e^{-x-y} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-x-y} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n})^2 = 1.$$

(18) 集合  $D$  は閉領域ではないのでこれは広義積分である. 自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

とすると,  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり, これを図示すると図 25 の通りである.


 図 25  $D_n = \{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$ 

$(x, y) \in D$  に対して  $e^{\frac{y}{x}} > 0$  であるから, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{\frac{x}{y}} dx dy$$

が存在すれば広義積分は収束し、その極限值が求める広義積分の値である。各  $D_n$  は縦線集合と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} e^{\frac{y}{x}} dx dy &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ x e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = (e-1) \int_{\frac{1}{n}}^1 x dx \\ &= \frac{e-1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).\end{aligned}$$

よって、これより以下を得る。

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{e-1}{2}.$$

(19) 集合  $D$  は閉領域ではないのでこれは広義積分である。自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

とすると、 $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり、これを図示すると図 26 の通りである。

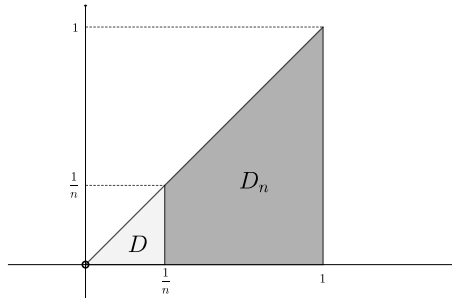


図 26  $D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$

$(x, y) \in D$  に対して  $\frac{x+y}{x^2+y^2} > 0$  であるから、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$$

が存在すれば広義積分は収束し、その極限值が求める広義積分の値である。各  $D_n$  は縦線集合と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^x \frac{x+y}{x^2+y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( x \int_0^x \frac{dy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2y}{x^2+y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \left[ \tan^{-1} \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{y=x} + \frac{1}{2} \left[ \log(x^2+y^2) \right]_{y=0}^{y=x} \right) dx \\ &= \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \int_{\frac{1}{n}}^1 dx = \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \left( 1 - \frac{1}{n} \right).\end{aligned}$$

よって、これより以下を得る.

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$$

(20) 集合  $D$  は閉領域ではないのでこれは広義積分である. 自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \right\}$$

とおくと,  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり, これを図示すると図 27 の通りである.

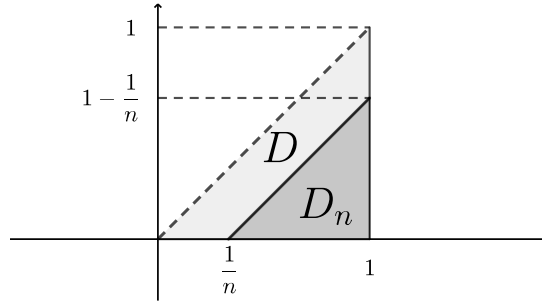


図 27  $D_n = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \right\}$

$(x, y) \in D$  に対して  $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} \geq 0$  であるから, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

が存在すれば広義積分は収束し, その極限值が求める広義積分の値である. 各  $D_n$  は縦線集合と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2-y^2}} &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \sin^{-1} \frac{y}{x} \right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=x-\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \sin^{-1} \left( 1 - \frac{1}{nx} \right) dx = \left[ x \sin^{-1} \left( 1 - \frac{1}{nx} \right) - \frac{\sqrt{2nx-1}}{n} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \\ &= \sin^{-1} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{\sqrt{2n-1}-1}{n}. \end{aligned}$$

よって、これより以下を得る.

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin^{-1} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{\sqrt{2n-1}-1}{n} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

(21) 集合  $D$  は閉領域ではないのでこれは広義積分である. 自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right\}$$

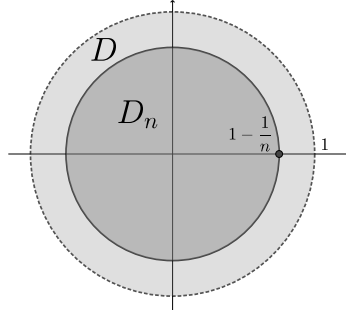


図 28  $D_n = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$

とすると,  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり, これを図示すると図 28 の通りである.  
 $(x, y) \in D$  に対して

$$\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0$$

であるから, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

が存在すれば広義積分は収束し, その極限值が求める広義積分の値である. 極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

により,  $r\theta$  平面上の集合

$$E_n = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 - \frac{1}{n}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $D_n$  に変換される. 変換のヤコビアンは  $J(r, \theta) = r$  であるから,  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy &= \iint_{E_n} \frac{1-r \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}} |J(r, \theta)| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr - \cos \theta \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\theta \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left[ \sqrt{1-r^2} \right]_0^{1-\frac{1}{n}} - \left( \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) \left( \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) \\ &= 2\pi \left( 1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

よって, これより以下を得る.

$$\iint_D \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \left( 1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \right) = 2\pi.$$

(22) 集合  $D$  は有界ではないのでこれは広義積分である．自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid -n \leq x \leq n, 0 \leq y \leq e^{-x^2} \right\}$$

とおくと， $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり，これを図示すると図 29 の通りである． $1 \geq 0$  で

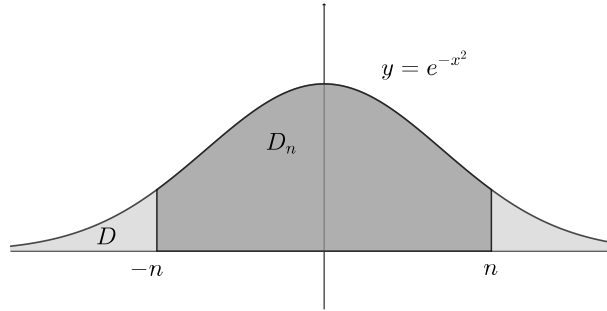


図 29  $D_n = \left\{ (x, y) \mid -n \leq x \leq n, 0 \leq y \leq e^{-x^2} \right\}$

あるから，極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} dx dy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限值が求める広義積分の値である．各  $D_n$  は縦線集合と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_{D_n} dx dy = \int_{-n}^n \left( \int_0^{e^{-x^2}} dy \right) dx = \int_{-n}^n \left[ y \right]_{y=0}^{y=e^{-x^2}} dx = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx = 2 \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

従って，

$$\iint_D dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} dx dy = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

であるから上式最右辺に残った広義積分を求めればよい．

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$$

とおくと， $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  である．また，自然数  $n$  に対して

$$E_n = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n \right\}$$

とおくと，

$$(I_n)^2 = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^n e^{-y^2} dy \right) = \int_0^n \left( \int_0^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

である． $\{E_n\}$  は第 1 象限

$$E = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y \right\}$$

の増加近似列であり,  $e^{-x^2-y^2} > 0$  だから  $n \rightarrow \infty$  のとき  $(I_n)^2$  が収束するなら

$$I^2 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_E e^{-x^2-y^2} dx dy$$

である. 従って, 広義積分

$$\iint_E e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (\heartsuit)$$

を求めればよい. 自然数  $n$  に対して

$$F_n = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2, 0 \leq x, 0 \leq y \}$$

とすると,  $\{F_n\}$  は  $E$  の増加近似列であり,  $e^{-x^2-y^2} > 0$  であるから極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{F_n} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

が存在すればその極限值が広義積分  $(\heartsuit)$  の値である.  $E, E_n, F_n$  を図示すると, 図 30 の通りである.

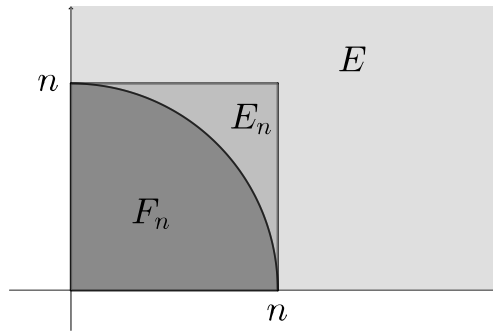


図 30  $\{E_n\}, \{F_n\}$  はいずれも第 1 象限  $E$  の増加近似列である.

極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

により,  $r\theta$  平面上の閉領域

$$G_n = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

が  $xy$  平面上の閉領域  $F_n$  に変換される. 変換のヤコビアンは  $J(r, \theta) = r$  であるから,  $F_n$  上の重積分は以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned} \iint_{F_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{G_n} e^{-r^2} |J(r, \theta)| dr d\theta = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_0^n r e^{-r^2} dr \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}). \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)^2 = \iint_E e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

より  $(I_n)^2$  は収束するので  $I^2 = \frac{\pi}{4}$  であり, 明らかに  $I > 0$  であるから,  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  である. 以上から, 最終的な結論として以下を得る.

$$\iint_D dx dy = 2I = \sqrt{\pi}.$$

(23) 集合  $D$  は閉領域ではないので, これは広義積分である. 自然数  $n$  に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}$$

とすると,  $\{D_n\}$  は  $D$  の増加近似列であり, 図示すると図 31 の通りである.

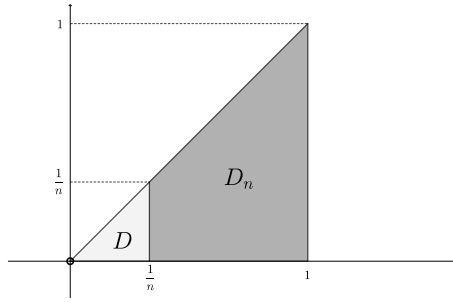


図 31  $D_n = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}$

$(x, y) \in D$  に対して  $\sin \frac{y}{x} \geq 0$  であるから, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \sin \frac{y}{x} dx dy$$

が存在すれば広義積分は収束し, その極限值が求める広義積分の値である. 各  $D_n$  は縦線集合と見なせるので  $D_n$  上の重積分は以下のように書き直せる.

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \sin \frac{y}{x} dy dx &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^x \sin \frac{y}{x} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ -x \cos \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= (1 - \cos 1) \int_{\frac{1}{n}}^1 x dx = \frac{1 - \cos 1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

よって, これより以下を得る.

$$\iint_D \sin \frac{y}{x} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \sin \frac{y}{x} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1 - \cos 1}{2}.$$

(24) 集合  $\mathbb{R}^2$  は有界ではないので、これは広義積分である。被積分関数を  $f(x, y)$  とおく。

$$D_n = \{ (x, y) \mid -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n \}$$

とすると  $\{D_n\}$  は  $\mathbb{R}^2$  の増加近似列である。任意の  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  に対して  $f(x, y) > 0$  であるから、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し、その極限值が求める広義積分の値である。 $f(x, y)$  は  $x, y, x+y$  の符号により以下のように分けられる。

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-2(x+y)} & (0 \leq x, 0 \leq y) \\ e^{-2y} & (x \leq 0 \leq y, 0 \leq x+y) \\ e^{2x} & (x \leq 0 \leq y, x+y \leq 0) \\ e^{2(x+y)} & (x \leq 0, y \leq 0) \\ e^{2y} & (y \leq 0 \leq x, x+y \leq 0) \\ e^{-2x} & (y \leq 0 \leq x, 0 \leq x+y) \end{cases}$$

そこで、図 32 のように  $D_n$  を以下の 6 個の閉領域  $D_n^1, \dots, D_n^6$  に分割する。

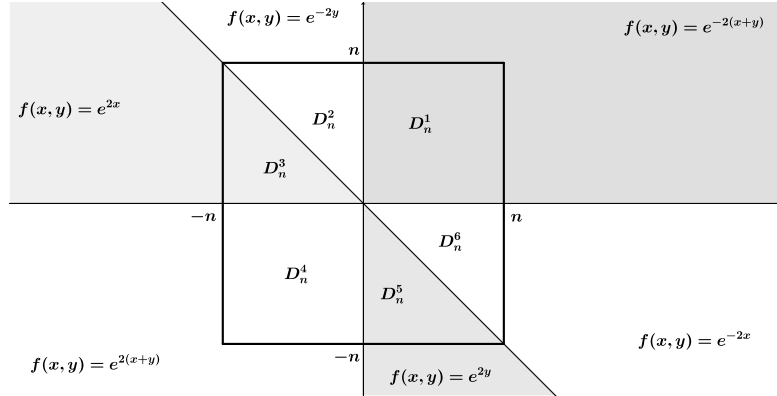


図 32  $D_n = D_n^1 \cup D_n^2 \cup D_n^3 \cup D_n^4 \cup D_n^5 \cup D_n^6$

$$D_n^1 = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n \}$$

$$D_n^2 = \{ (x, y) \mid x \leq 0 \leq y, 0 \leq x+y, y \leq n \} = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq n, -y \leq x \leq 0 \}$$

$$D_n^3 = \{ (x, y) \mid x \leq 0 \leq y, x+y \leq 0, -n \leq x \} = \{ (x, y) \mid -n \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq -x \}$$

$$D_n^4 = \{ (x, y) \mid -n \leq x \leq 0, -n \leq y \leq 0 \}$$

$$D_n^5 = \{ (x, y) \mid y \leq 0 \leq x, x+y \leq 0, -n \leq y \} = \{ (x, y) \mid -n \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq -y \}$$

$$D_n^6 = \{ (x, y) \mid y \leq 0 \leq x, 0 \leq x+y, x \leq n \} = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, -x \leq y \leq 0 \}$$

これらの共通部分はいずれも面積 0 の集合であるから

$$\iint_{D_n} f(x, y) \, dxdy = \iint_{D_n^1} f(x, y) \, dxdy + \iint_{D_n^2} f(x, y) \, dxdy + \cdots + \iint_{D_n^6} f(x, y) \, dxdy$$



である．上式右辺の各重積分は次のように累次積分に書き直せる．

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_n^1} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_n^1} e^{-2(x+y)} dx dy = \int_0^n \int_0^n e^{-2(x+y)} dx dy = \frac{1 - 2e^{-2n} + e^{-4n}}{4}, \\
 \iint_{D_n^2} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_n^2} e^{-2y} dx dy = \int_0^n \int_{-y}^0 e^{-2y} dx dy = \frac{1 - 2ne^{-2n} - e^{-2n}}{4}, \\
 \iint_{D_n^3} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_n^3} e^{2x} dx dy = \int_{-n}^0 \int_0^{-x} e^{2x} dy dx = \frac{1 - 2ne^{-2n} - e^{-2n}}{4}, \\
 \iint_{D_n^4} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_n^4} e^{2(x+y)} dx dy = \int_{-n}^0 \int_{-n}^0 e^{2(x+y)} dx dy = \frac{1 - 2e^{-2n} + e^{-4n}}{4}, \\
 \iint_{D_n^5} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_n^5} e^{2y} dx dy = \int_{-n}^0 \int_0^{-y} e^{2y} dx dy = \frac{1 - 2ne^{-2n} - e^{-2n}}{4}, \\
 \iint_{D_n^6} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_n^6} e^{-2x} dx dy = \int_0^n \int_{-x}^0 e^{-2x} dy dx = \frac{1 - 2ne^{-2n} - e^{-2n}}{4}.
 \end{aligned}$$

よって，これら 6 個の重積分を全て足し合わせて

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \frac{3}{2} - \frac{2}{e^{2n}} + \frac{1}{2e^{4n}} - \frac{2n}{e^{2n}}$$

より，以下を得る．

$$\iint_D e^{-|x|-|y|-|x+y|} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} - \frac{2}{e^{2n}} + \frac{1}{2e^{4n}} - \frac{2n}{e^{2n}} \right) = \frac{3}{2}.$$