積分基本問題集　弐

次の 2 重積分または広義積分を求めよう．

(1) $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2 \}$, $\displaystyle\iint_D xe^{xy}\ dxdy$

(2) $D = \{ (x, y) \mid x \leq y \leq 1,\, 0 \leq x \leq 1 \}$, $\displaystyle\iint_D \sin(\pi y^2)\ dxdy$

(3) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq y,\, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi} \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 \cos(y^2)\ dxdy$

(4) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x + y \leq 2,\, y^2 \leq x,\, 0 \leq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy$

(5) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2)\ dxdy$

(6) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy$

(7) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \cos(x^2 + y^2)\ dxdy$

(8) $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2,\, 1 \leq x - y \leq 3 \}$, $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\ dxdy$

(9) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \dfrac{\pi}{6} \leq x + y \leq \dfrac{\pi}{4},\, 0 \leq x - y \leq \dfrac{\pi}{2} \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x - y)\tan(x + y)\ dxdy$

(10) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\ dxd$

(11) $D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq x \}$, $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\ dxdy$

(12) $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, x \leq x^2 + y^2,\, 0 \leq x,\, 0 \leq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$

(13) $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \sqrt{x} + \sqrt{\frac{y}{2}} \leq 1 \right\}, \quad \iint_D xy \; dxdy$

(14) $D = \{ (x,y) \mid 1 \leq x+y \leq 4,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y \}, \quad \iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} \; dxdy$

(15) $D = \{ (x,y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x \}, \quad \iint_D \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \; dxdy$

(16) $D = \{ (x,y) \mid 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1 \}, \quad \iint_D \frac{dxdy}{x+y}$

(17) $D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \}, \quad \iint_D e^{-x-y} \; dxdy$

(18) $D = \{ (x,y) \mid 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x \}, \quad \iint_D e^{\frac{y}{x}} \; dxdy$

(19) $D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ (x,y) \neq (0,0) \}, \quad \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} \; dxdy$

(20) $D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y < x \}, \quad \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(21) $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 < 1 \right\}, \quad \iint_D \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \; dxdy$

(22) $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leq y \leq e^{-x^2} \right\}, \quad \iint_D \; dxdy$

(23) $D = \{ (x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1,\ (x,y) \neq (0,0) \}, \quad \iint_D \sin\frac{y}{x} \; dxdy$

(24) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|-|y|-|x+y|} \; dxdy$

(1) 閉領域 D を縦線集合と見なして重積分を累次積分に書き直しせばよい.

$$\iint_D xe^{xy}\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\ dy\right) dx = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \left(e^{2x}-1\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}.$$

(2) 閉領域 D を xy 平面に図示すると図 1 の通りである.

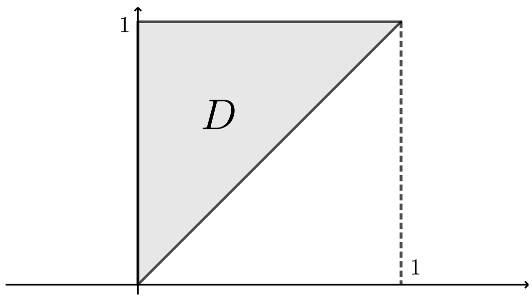

図 1　$D = \{\,(x, y)\ \mid\ 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 1\,\}$

これより D は横線集合として

$$D = \{\,(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\, 0 \le x \le y\,\}$$

と表せるので，重積分は以下の累次積分に書き直せる.

$$\iint_D \sin\left(\pi y^2\right)\ dydx = \int_0^1 \left(\int_0^y \sin(\pi y^2)\ dx\right) dy = \int_0^1 \left[x\sin(\pi y^2)\right]_{x=0}^{x=y} dy$$
$$= \int_0^1 y\sin(\pi y^2)\ dy = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi y^2)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

(3) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 2 の通りである.

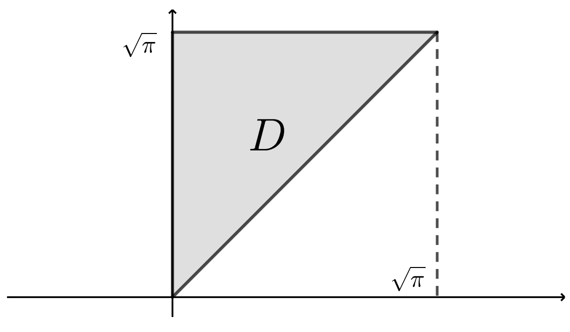

図 2　$D = \{\,(x, y)\ \mid\ 0 \le x \le y,\, 0 \le y \le \sqrt{\pi}\,\}$

D を横線集合と見なして重積分を累次積分に書き直せばよい．

$$\iint_D x^2\cos(y^2)\ dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^y x^2\cos(y^2)\ dx\right)dy = \int_0^{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{3}x^3\cos(y^2)\right]_{x=0}^{x=y}\ dy$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{\pi}} y^3\cos(y^2)\ dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y^2\sin(y^2) + \frac{1}{2}\cos(y^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}}$$
$$= -\frac{1}{3}.$$

(4) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 3 の通りである．

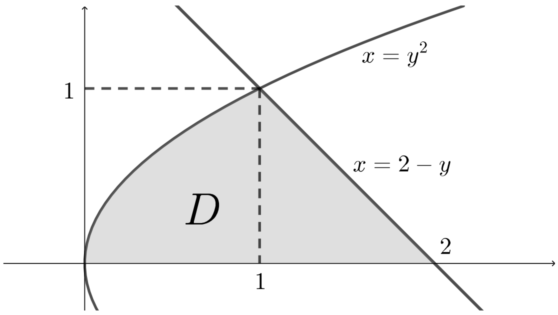

図 3　$D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x+y \leq 2,\ y^2 \leq x,\ 0 \leq y\ \right\}$

これより D は横線集合として

$$D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 2-y\ \right\}$$

と表せるので，重積分は以下の累次積分に書き直せる．

$$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^1\left(\int_{y^2}^{2-y} xy\ dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=y^2}^{x=2-y}\ dx$$
$$= \int_0^1\left(-\frac{1}{2}y^5 + \frac{1}{2}y^3 - 2y^2 + 2y\right)dy = \frac{3}{8}.$$

(5) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 4 の通りである．

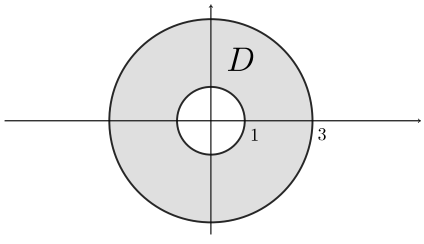

図 4　$D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\ \right\}$

極座標変換

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の集合

$$E = \{\ (r,\theta) \mid 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta < 2\pi\ \}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．集合 E を $r\theta$ 平面に図示すると図 5 の通りである．

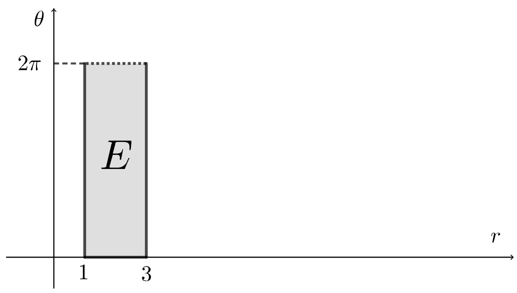

図 5　$E = \{\ (r,\theta)\ \mid\ 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta < 2\pi\ \}$

変換のヤコビアンは

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であるから，重積分は以下の様に書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_D \log(x^2+y^2)\ dxdy &= \iint_E (\log r^2)|J(r,\theta)|\ drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^3 2r\log r\ dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[r^2\log r - \frac{1}{2}r^2\right]_1^3 d\theta = (9\log 3 - 4)\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -8\pi + 18\pi\log 3.\end{aligned}$$

(6) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 6 の通りである．

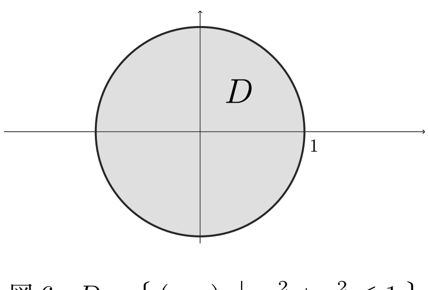

図 6　$D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \le 1\ \right\}$

極座標変換

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の集合

$$E = \{\,(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta < 2\pi\,\}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．集合 E を $r\theta$ 上に図示すると図 7 の通りである．

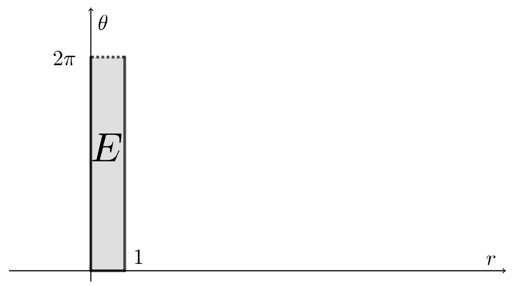

図 7　$E = \{\,(r,\theta) \ \mid\ 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta < 2\pi\,\}$

変換のヤコビアンは $J(r,\theta) = r$ であるから，重積分は以下の様に書き直せる．

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy = \iint_E -e^{r^2}|J(r,\theta)|\ drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 re^{-r^2}\ dr\right)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1\ d\theta = \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)\int_0^{2\pi}\ d\theta = \pi(1-e^{-1}).$$

(7) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 8 の通りである．

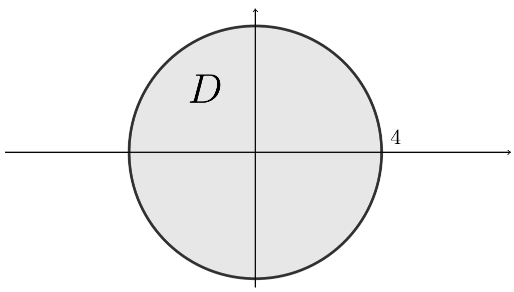

図 8　$D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 16\,\right\}$

極座標変換

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の集合

$$E = \{\,(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 4,\, 0 \leq \theta < 2\pi\,\}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．集合 E を $r\theta$ 平面上に図示すると，図 9 の通りである．

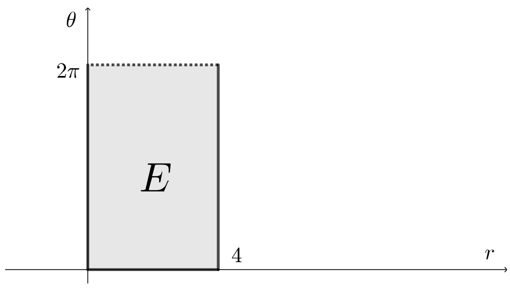

図 9　$E = \{\,(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4,\, 0 \leq \theta < 2\pi\,\}$

変換のヤコビアンは $J(r, \theta) = r$ であるから，重積分は以下の様に書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_D \cos(x^2 + y^2)\ dxdy &= \iint_E \cos(r^2)|J(r, \theta)|\ drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 r\cos(r^2)\ dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\sin(r^2) \right]_0^4\ d\theta = \frac{1}{2}\sin 16 \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \sin 16.\end{aligned}$$

(8) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 10 の通りである．

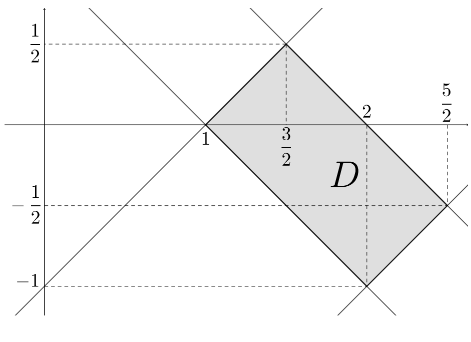

図 10　$D = \{\,(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2,\, 1 \leq x - y \leq 3\,\}$

変数変換

$$u = x + y,\ v = x - y\ \left(\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v,\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \right)$$

によって uv 平面上の閉領域

$$E = \{\,(u, v) \mid 1 \leq u \leq 3,\, 1 \leq v \leq 3\,\}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．閉領域 E を uv 平面に図示すると，図 11 の通りである．

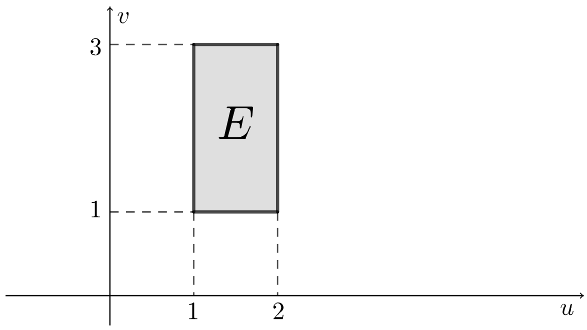

図 11　$E = \{\,(u, v) \ \mid\ 1 \leq u \leq 2,\, 1 \leq v \leq 3\,\}$

変換のヤコビアンは

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

であるから，重積分は以下の様に書き直せる．

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y^2)\ dxdy &= \iint_E uv|J(u, v)|\ dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(\int_1^2 uv\ du\right) dv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{1}{2}u^2 v\right]_{u=1}^{u=2} dv = \frac{1}{4}\int_1^3 3v\ dv = 3. \end{aligned}$$

(9) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 12 の通りである．

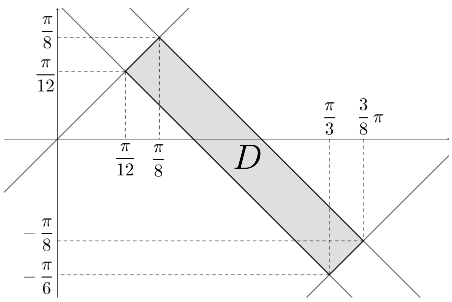

図 12　$D = \left\{\,(x, y) \,\middle|\, \frac{\pi}{6} \leq x + y \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2}\,\right\}$

変数変換

$$u = x + y,\, v = x - y \ \left(\Leftrightarrow x = \frac{u+v}{2},\, y = \frac{u-v}{2}\right)$$

によって uv 平面上の閉領域

$$E = \left\{\,(u, v) \,\middle|\, \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4},\, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\,\right\}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．閉領域 E を uv 平面に図示すると，図 13 の通りである．

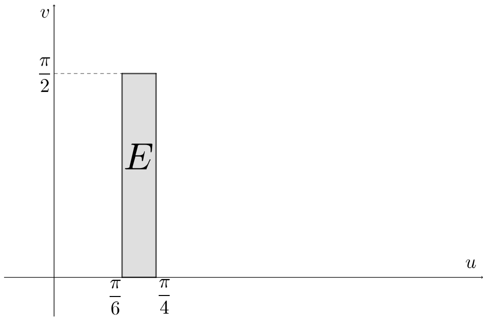

図 13　$E = \left\{ (u,v) \mid \frac{\pi}{6} \le u \le \frac{\pi}{4}, 0 \le v \le \frac{\pi}{4} \right\}$

変換のヤコビアンは $J(u,v) = -\frac{1}{2}$ であるから，重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_D (x-y)\tan(x+y)\ dxdy = \iint_E v\tan u\ |J(u,v)|dudv = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} v\tan u\ du \right) dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\Big[-\log|\cos u| \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ dv = \frac{1}{4}\log\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\ dv = \frac{\pi^2}{32}\log\frac{3}{2}.$$

(10) 閉領域 D を xy 平面上に図示すると，図 14 の通りである．

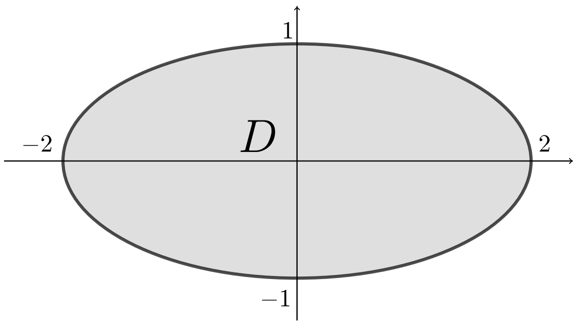

図 14　$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \right\}$

変数変換

$$x = 2r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の集合

$$E = \{ (r,\theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta < 2\pi \}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．集合 E を $r\theta$ 平面上に図示すると，図 15 の通りである．

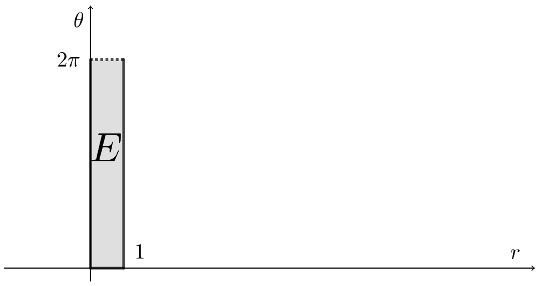

図 15　$E = \{\ (u, v) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi\ \}$

変換のヤコビアンは

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$$

であるから，重積分は以下の様に書き直せる．

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2)\ dxdy &= \iint_E r^2(4\cos^2\theta + \sin^2\theta)|J(r,\theta)|\ drd\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3(3\cos^2\theta+1)\ dr \right) d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta+1) \left[\frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta+1)\ d\theta = \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

(11) 閉領域 D を xy 平面上に図示すると，図 16 の通りである．

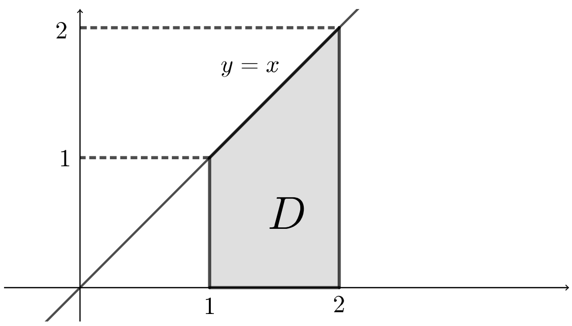

図 16　$D = \{\ (x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\ \}$

D を縦線集合と見なして重積分を累次積分に書き直せばよい．

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\ dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^x \frac{xy}{x^2+y^2}\ dy \right) dx = \int_1^2 \frac{x}{2} \left[\log(x^2+y^2) \right]_{y=0}^{y=x}\ dx$$
$$= \frac{\log 2}{2} \int_1^2 x\ dx = \frac{3}{4} \log 2.$$

(12) 閉領域 D を xy 平面に図示すると図 17 の通りである．

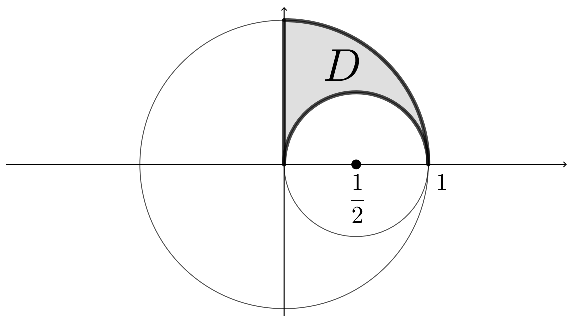

図 17　$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \right\}$

極座標変換

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の閉領域

$$E = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos\theta \leq r \leq 1 \right\}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．閉領域 E を $r\theta$ 平面に図示すると，図 18 の通りである．

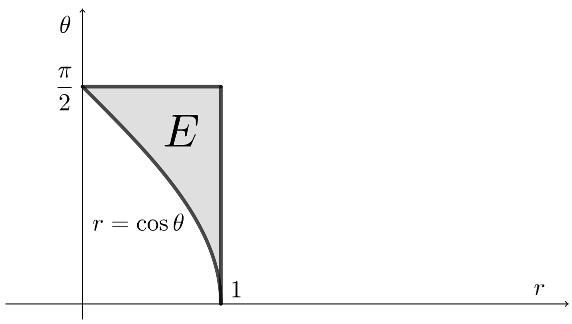

図 18　$E = \left\{ (r,\theta) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos\theta \leq r \leq 1 \right\}$

変換のヤコビアンは $J(r,\theta)=r$ であるから，重積分は以下の様に書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy &= \iint_E r|J(r,\theta)|\ drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 r^2\ dr\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^3\theta\right)\ d\theta = \frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

(13) 閉領域 D を xy 平面上に図示すると，図 19 の通りである．

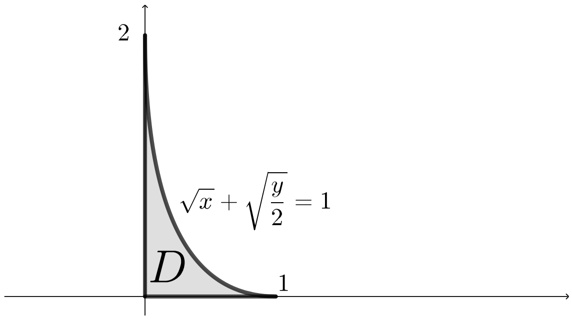

図 19　$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ \sqrt{x}+\sqrt{\frac{y}{2}}\le 1\ \right\}$

変数変換

$$x=u^2,\ y=2v^2\ (u\ge 0,\ v\ge 0)$$

によって uv 平面上の閉領域

$$E=\{\ (u,v)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1-u\ \}$$

が xy 平面上の閉領域 D に変換される．閉領域 E を uv 平面に図示すると，図 20 の通りである．

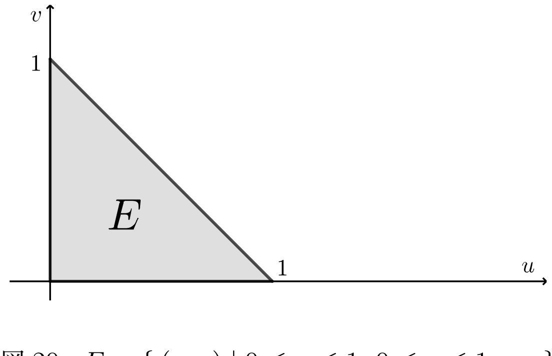

図 20　$E=\{\ (u,v)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1-u\ \}$

変換のヤコビアンは

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & 0\\ 0 & 4v\end{vmatrix}=8uv$$

であるから，重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_D xy\ dxdy = \iint_E 2u^2v^2|J(u,v)|\ dudv = 16\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} u^3v^3\ dv\right)du$$
$$= 16\int_0^1 u^3\left[\frac{1}{4}v^4\right]_{v=0}^{v=1-u} du = 4\int_0^1 u^3(1-u)^4\ du = \frac{1}{70}.$$

(14) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 21 の通りである．

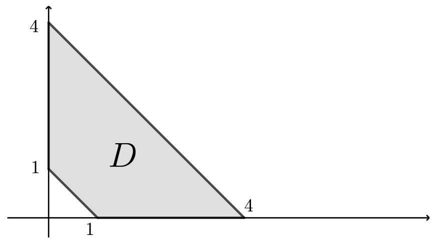

図 21　$D = \{\ (x,y)\mid 1\le x+y\le 4,\ 0\le x,\ 0\le y\ \}$

これより D は縦線集合として

$$D = \{\ (x,y)\mid 0\le x\le 4,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\ \}$$

と表せる．ただし，ここで

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -x+1 & (x\le 1) \\ 0 & (1\le x) \end{cases},\quad \varphi_2(x) = -x+4$$

である．これより重積分は以下のように 2 つの累次積分の和に書き直せる．

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}\ dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{-x+1}^{-x+4} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}\ dy\right)dx + \int_1^4 \left(\int_0^{-x+4} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}\ dy\right)dx.$$

被積分関数を y の 1 変数関数と見なして部分分数に分解すると

$$\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} = \frac{1}{x+y} - \frac{2x}{(x+y)^2} + \frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_{-x+1}^{-x+4} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}\ dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-x+1}^{-x+4} \frac{dy}{x+y} - 2x \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{dy}{(x+y)^2} + 2x^2 \int_{-x+1}^{-x+4} \frac{dy}{(x+y)^3} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\Big[\log|x+y| \Big]_{y=-x+1}^{y=-x+4} + 2x \left[\frac{1}{x+y} \right]_{y=-x+1}^{y=-x+4} - x^2 \left[\frac{1}{(x+y)^2} \right]_{y=-x+1}^{y=-x+4} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + 2\log 2 \right)\ dx = -\frac{7}{16} + 2\log 2
\end{aligned}$$

を得る．全く同様にして

$$\int_1^4 \left(\int_0^{-x+4} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}\ dy \right) dx = \frac{39}{16} - 2\log 2$$

が得られるので，これらを合わせて以下を得る．

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy = \left(-\frac{7}{16} + 2\log 2 \right) + \left(\frac{39}{16} - 2\log 2 \right) = 2.$$

(15) 閉領域 D を xy 平面に図示すると，図 22 の通りである．

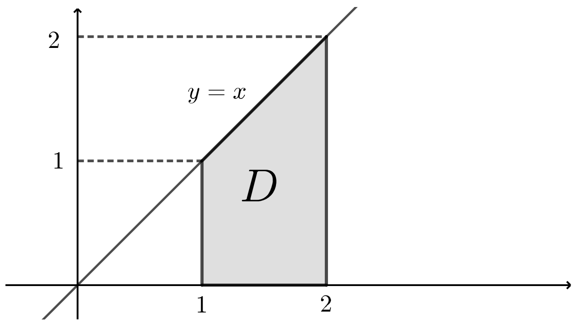

図 22　$D = \{\ (x,y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\ \}$

D を縦線集合と見なして，重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\ dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^x \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\ dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x}\ dx = \int_1^2 e\ dx = e.$$

(16) 集合 D は閉領域ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \left\{ (x,y)\ \middle|\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \right\}$$

とすると，$\{ D_n \}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 23 の通りである．
$(x,y) \in D$ に対して $\frac{1}{x+y} > 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{x+y}$$

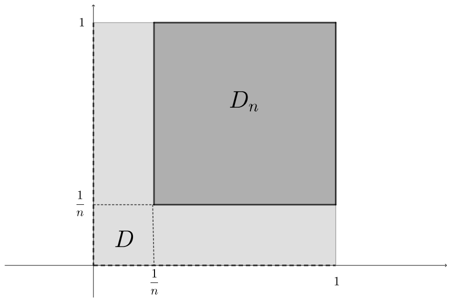

図 23　$D_n = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\, \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \right\}$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は横線集合と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{dxdy}{x+y} &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{x+y} \right) dy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \Big[\log|x+y| \Big]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} dy \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\log(y+1) - \log\left(y + \frac{1}{n}\right)\right) dy \\
&= \left[(y+1)\log(y+1) - 1 - \left(y + \frac{1}{n}\right)\log\left(y+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \right]_{\frac{1}{n}}^{1} \\
&= 2\log 2 - 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n}\log\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

ここで，$t = \frac{2}{n}$ とおくと $n \to \infty$ のとき $t \to +0$ であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\log\frac{2}{n} = \lim_{t\to+0} t\log t = \lim_{t\to+0} \frac{\log t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t\to+0} t = 0$$

である．これより，以下を得る．

$$\iint_D \frac{dxdy}{x+y} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{x+y} = 2\log 2.$$

(17) 集合 D は有界ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq n \}$$

とすると，$\{ D_n \}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 24 の通りである．
$(x,y) \in D$ に対して $e^{-x-y} \geq 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x-y} dxy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は横線集合

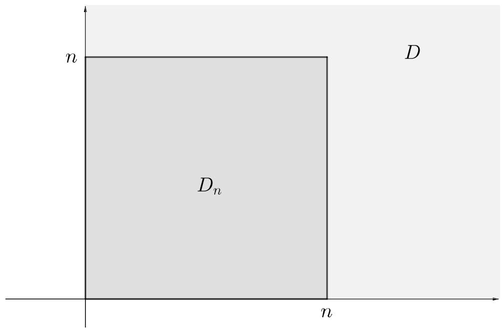

図 24　$D_n = \{\, (x, y) \mid 0 \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq n \,\}$

と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} e^{-x-y}\ dxdy &= \int_0^n \left(\int_0^n e^{-x-y}\ dx \right) dy = \int_0^n e^{-y} \left[-e^{-x} \right]_0^n dy = (1-e^{-n}) \int_0^n e^{-y} dy \\ &= (1-e^{-n})^2.\end{aligned}$$

よって，これより以下を得る．

$$\iint_D e^{-x-y}\ dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} e^{-x-y}\ dxdy = \lim_{n\to\infty} \left(1-e^{-n}\right)^2 = 1.$$

(18) 集合 D は閉領域ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

とすると，$\{\, D_n \,\}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 25 の通りである．

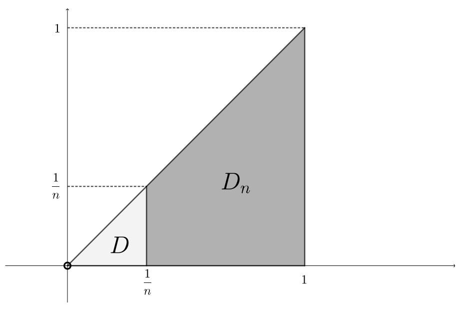

図 25　$D_n = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \right\}$

$(x, y) \in D$ に対して $e^{\frac{y}{x}} > 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{\frac{x}{y}}\ dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は縦線集合と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_{D_n} e^{\frac{y}{x}}\ dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\ dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[xe^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = (e-1) \int_{\frac{1}{n}}^{1} x\ dx$$
$$= \frac{e-1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

よって，これより以下を得る．

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\ dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{e-1}{2}.$$

(19) 集合 D は閉領域ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

とすると，$\{ D_n \}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 26 の通りである．

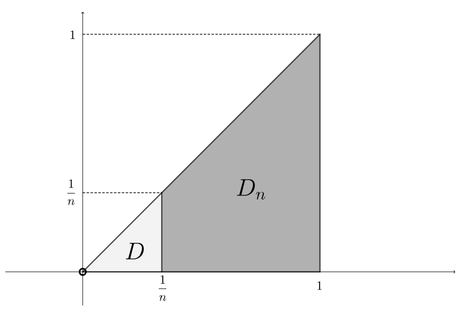

図 26　$D_n = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$

$(x,y) \in D$ に対して $\frac{x+y}{x^2+y^2} > 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は縦線集合と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^x \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dy \right) dx$$
$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(x \int_0^x \frac{dy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2y}{x^2+y^2}\ dy \right) dx$$
$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\left[\tan^{-1} \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{y=x} + \frac{1}{2} \left[\log(x^2+y^2) \right]_{y=0}^{y=x} \right) dx$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

よって，これより以下を得る．

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2.$$

(20) 集合 D は閉領域ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x-\frac{1}{n}\ \right\}$$

とおくと，$\{\ D_n\ \}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 27 の通りである．

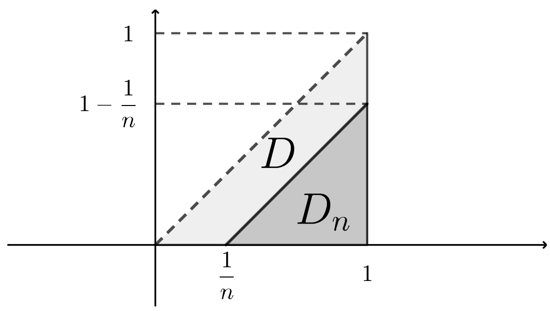

図 27　$D_n = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-\frac{1}{n}\ \right\}$

$(x,y)\in D$ 対して $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\geq 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は縦線集合と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}} &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\ dy\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=x-\frac{1}{n}}\ dx\\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{nx}\right)dx = \left[x\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{nx}\right)-\frac{\sqrt{2nx-1}}{n}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}\\ &= \sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{\sqrt{2n-1}-1}{n}.\end{aligned}$$

よって，これより以下を得る．

$$\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{\sqrt{2n-1}-1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(21) 集合 D は閉領域ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\ \right\}$$

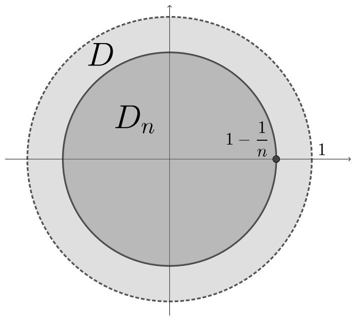

図 28　$D_n = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \right\}$

とすると，$\{ D_n \}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 28 の通りである．
$(x,y) \in D$ に対して

$$\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2+y^2}} > 0$$

であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

により，$r\theta$ 平面上の集合

$$E_n = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leq r \leq 1-\frac{1}{n},\ 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

が xy 平面上の閉領域 D_n に変換される．変換のヤコビアンは $J(r,\theta) = r$ であるから，D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dxdy &= \iint_{E_n} \frac{1-r\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} |J(r,\theta)|\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\ dr - \cos\theta \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\ dr \right) d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left[\sqrt{1-r^2} \right]_0^{1-\frac{1}{n}} - \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\ d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\ dr \right) \\
&= 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \right).
\end{aligned}$$

よって，これより以下を得る．

$$\iint_D \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dxdy = \lim_{n\to\infty} 2\pi \left(1 - \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \right) = 2\pi.$$

(22) 集合 D は有界ではないのでこれは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n = \left\{ (x,y) \,\middle|\, -n \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq e^{-x^2} \right\}$$

とおくと，$\{ D_n \}$ は D の増加近似列であり，これを図示すると図 29 の通りである．$1 \geq 0$ で

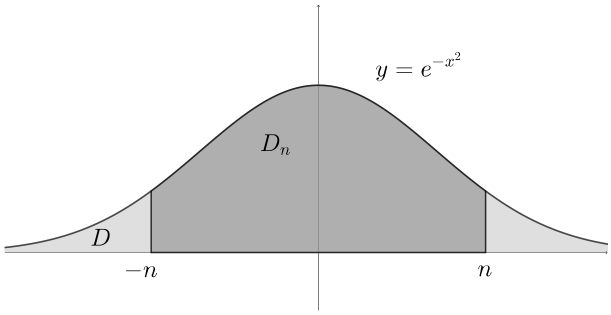

図 29　$D_n = \left\{ (x,y) \,\middle|\, -n \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq e^{-x^2} \right\}$

あるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は縦線集合と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\iint_{D_n} dxdy = \int_{-n}^{n} \left(\int_0^{e^{-x^2}} dy \right) dx = \int_{-n}^{n} \Big[y \Big]_{y=0}^{y=e^{-x^2}} dx = \int_{-n}^{n} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

従って，

$$\iint_D dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} dxdy = 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

であるから上式最右辺に残った広義積分を求めればよい．

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx, \quad I_n = \int_0^n e^{-x^2}\ dx$$

とおくと，$I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$ である．また，自然数 n に対して

$$E_n = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq n \}$$

とおくと，

$$(I_n)^2 = \left(\int_0^n e^{-x^2}\ dx \right) \left(\int_0^n e^{-y^2}\ dy \right) = \int_0^n \left(\int_0^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy = \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

である．$\{ E_n \}$ は第 1 象限

$$E = \{ (x,y) \mid 0 \leq x,\, 0 \leq y \}$$

の増加近似列であり，$e^{-x^2-y^2} > 0$ だから $n \to \infty$ のとき $(I_n)^2$ が収束するなら

$$I^2 = \left(\lim_{n\to\infty} I_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} (I_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_E e^{-x^2-y^2} dxdy$$

である．従って，広義積分

$$\iint_E e^{-x^2-y^2}\ dxdy \tag{$\heartsuit$}$$

を求めればよい．自然数 n に対して

$$F_n = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq n^2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\ \right\}$$

とすると，$\{\ F_n\ \}$ は E の増加近似列であり，$e^{-x^2-y^2} > 0$ であるから極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{F_n} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$$

が存在すればその極限値が広義積分 ($\heartsuit$) の値である．E, E_n, F_n を図示すると，図 30 の通りである．

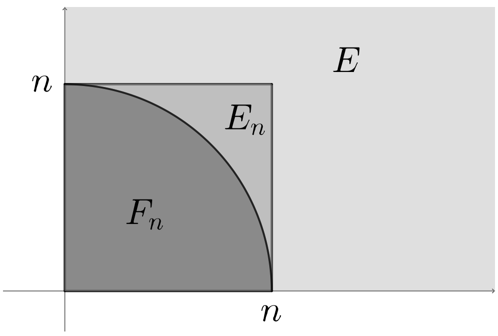

図 30　$\{\ E_n\ \}, \{\ F_n\ \}$ はいずれも第 1 象限 E の増加近似列である．

極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

により，$r\theta$ 平面上の閉領域

$$G_n = \left\{\ (r,\theta)\ \middle|\ 0 \leq r \leq n,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ \right\}$$

が xy 平面上の閉領域 F_n に変換される．変換のヤコビアンは $J(r,\theta) = r$ であるから，F_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_{F_n} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \iint_{G_n} e^{-r^2} |J(r,\theta)|\ drd\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_0^n re^{-r^2} dr\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-n^2}\right).\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}(I_n)^2=\iint_E e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{F_n}e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

より $(I_n)^2$ は収束するので $I^2=\dfrac{\pi}{4}$ であり，明らかに $I>0$ であるから，$I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．以上から，最終的な結論として以下を得る．

$$\iint_D dxdy=2I=\sqrt{\pi}.$$

(23) 集合 D は閉領域ではないので，これは広義積分である．自然数 n に対して

$$D_n=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;\frac{1}{n}\le x\le 1,\ 0\le y\le x\,\right\}$$

とすると，$\{\,D_n\,\}$ は D の増加近似列であり，図示すると図 31 の通りである．

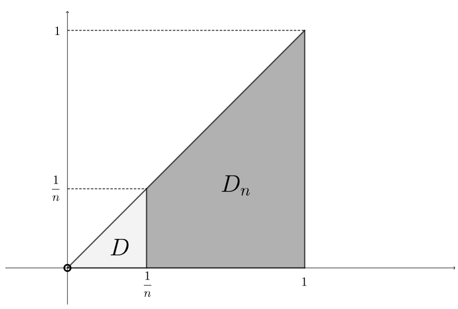

図 31　$D_n=\left\{\,(x,y)\mid\frac{1}{n}\le x\le 1,\ 0\le y\le x\,\right\}$

$(x,y)\in D$ に対して $\sin\frac{y}{x}\ge 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\sin\frac{y}{x}\ dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である．各 D_n は縦線集合と見なせるので D_n 上の重積分は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\iint_{D_n}\sin\frac{y}{x}\ dydx&=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^x\sin\frac{y}{x}\ dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[-x\cos\frac{y}{x}\right]_{y=0}^{y=x}\ dx\\&=(1-\cos 1)\int_{\frac{1}{n}}^{1}x\ dx=\frac{1-\cos 1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

よって，これより以下を得る．

$$\iint_D\sin\frac{y}{x}\ dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\sin\frac{y}{x}\ dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos 1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1-\cos 1}{2}.$$

(24) 集合 $\mathbb{R}^2$ は有界ではないので，これは広義積分である．被積分関数を $f(x,y)$ とおく．

$$D_n = \{\, (x,y) \mid -n \leq x \leq n,\ -n \leq y \leq n \,\}$$

とすると $\{\, D_n \,\}$ は $\mathbb{R}^2$ の増加近似列である．任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x,y) > 0$ であるから，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\ dxdy$$

が存在すれば広義積分は収束し，その極限値が求める広義積分の値である． $f(x,y)$ は $x, y, x+y$ の符号により以下のように分けられる．

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-2(x+y)} & (0 \leq x, 0 \leq y) \\ e^{-2y} & (x \leq 0 \leq y, 0 \leq x+y) \\ e^{2x} & (x \leq 0 \leq y, x+y \leq 0) \\ e^{2(x+y)} & (x \leq 0, y \leq 0) \\ e^{2y} & (y \leq 0 \leq x, x+y \leq 0) \\ e^{-2x} & (y \leq 0 \leq x, 0 \leq x+y) \end{cases}$$

そこで，図 32 のように D_n を以下の 6 個の閉領域 $D_n^1, \ldots, D_n^6$ に分割する．

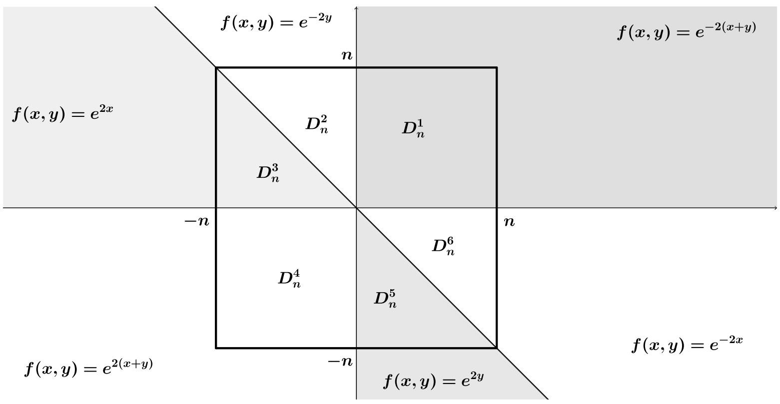

図 32　$D_n = D_n^1 \cup D_n^2 \cup D_n^3 \cup D_n^4 \cup D_n^5 \cup D_n^6$

$$\begin{aligned} D_n^1 &= \{\, (x,y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n \,\} \\ D_n^2 &= \{\, (x,y) \mid x \leq 0 \leq y, 0 \leq x+y, y \leq n \,\} = \{\, (x,y) \mid 0 \leq y \leq n,\ -y \leq x \leq 0 \,\} \\ D_n^3 &= \{\, (x,y) \mid x \leq 0 \leq y, x+y \leq 0, -n \leq x \,\} = \{\, (x,y) \mid -n \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq -x \,\} \\ D_n^4 &= \{\, (x,y) \mid -n \leq x \leq 0, -n \leq y \leq 0 \,\} \\ D_n^5 &= \{\, (x,y) \mid y \leq 0 \leq x, x+y \leq 0, -n \leq y \,\} = \{\, (x,y) \mid -n \leq y \leq 0,\ 0 \leq x \leq -y \,\} \\ D_n^6 &= \{\, (x,y) \mid y \leq 0 \leq x, 0 \leq x+y, x \leq n \,\} = \{\, (x,y) \mid 0 \leq x \leq n,\ -x \leq y \leq 0 \,\} \end{aligned}$$

これらの共通部分はいずれも面積 0 の集合であるから

$$\iint_{D_n} f(x,y)\ dxdy = \iint_{D_n^1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{D_n^2} f(x,y)dxdy + \cdots + \iint_{D_n^6} f(x,y)\ dxdy$$

である．上式右辺の各重積分は次のように累次積分に書き直せる．

$$\iint_{D_n^1} f(x,y)dxdy = \iint_{D_n^1} e^{-2(x+y)}dxdy = \int_0^n \int_0^n e^{-2(x+y)}dxdy = \frac{1-2e^{-2n}+e^{-4n}}{4},$$
$$\iint_{D_n^2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_n^2} e^{-2y}dxdy = \int_0^n \int_{-y}^0 e^{-2y}dxdy = \frac{1-2ne^{-2n}-e^{-2n}}{4},$$
$$\iint_{D_n^3} f(x,y)dxdy = \iint_{D_n^3} e^{2x}dxdy = \int_{-n}^0 \int_0^{-x} e^{2x}dydx = \frac{1-2ne^{-2n}-e^{-2n}}{4},$$
$$\iint_{D_n^4} f(x,y)dxdy = \iint_{D_n^4} e^{2(x+y)}dxdy = \int_{-n}^0 \int_{-n}^0 e^{2(x+y)}dxdy = \frac{1-2e^{-2n}+e^{-4n}}{4},$$
$$\iint_{D_n^5} f(x,y)dxdy = \iint_{D_n^5} e^{2y}dxdy = \int_{-n}^0 \int_0^{-y} e^{2y}dxdy = \frac{1-2ne^{-2n}-e^{-2n}}{4},$$
$$\iint_{D_n^6} f(x,y)dxdy = \iint_{D_n^6} e^{-2x}dxdy = \int_0^n \int_{-x}^0 e^{-2x}dydx = \frac{1-2ne^{-2n}-e^{-2n}}{4}.$$

よって，これら 6 個の重積分を全て足し合わせて

$$\iint_{D_n} f(x,y)\ dxdy = \frac{3}{2} - \frac{2}{e^{2n}} + \frac{1}{2e^{4n}} - \frac{2n}{e^{2n}}$$

より，以下を得る．

$$\iint_D e^{-|x|-|y|-|x+y|}\ dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{e^{2n}} + \frac{1}{2e^{4n}} - \frac{2n}{e^{2n}}\right) = \frac{3}{2}.$$