線形代数たっぷり ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の合同変換

内海 和樹

2025 年 7 月 15 日

はじめに

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の合同変換を線形代数をふんだんに使って分類してみました．ここでいうユークリッド空間とは，n 次列ベクトルの集合 $\mathbb{R}^n$ に通常の方法で実線形空間，内積空間，ノルム空間，距離空間の構造を入れた，構造てんこ盛りフルトッピングの空間を指します．

平面 $\mathbb{R}^2$ と空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換については，例えば [2] で詳しく説明されています．しかしながら，[2] では個々の合同変換が主に幾何学的に記述され，線形代数的な記述が物足りないと私は感じました．$\mathbb{R}^n$ の合同変換 f は直交行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ によって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と書けるのだから，この直交行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ の情報を使って分類されてしかるべきだと思いますが，なかなかそのようなことが書かれた文献を見つけることができませんでした*1．それはたぶん探し方が悪いのだとは思いますが，文献探しに力を入れるよりも自分で考えた方が楽しそうだったのでそうしてみました．それが本稿です．がっつり線形代数を使います．

まずは，平面 $\mathbb{R}^2$ と空間 $\mathbb{R}^3$ の合同変換を線形代数的に調べ，[2] と同様の分類表に至ることができました．そちらは別記事

```
https://github.com/kazutsumi/CongruentTransformation/blob/main/CongTrans.pdf
```

にまとめました．本稿では，これを一般化し，一般次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の合同変換を線形代数をたっぷり使って調べました．主に $n \geq 4$ を想定していますが，多少の修正を加えれば $n = 1, 2, 3$ でも通用するような記述をしているはずです．

3 節の直交行列の標準化に関しては [4] をかなり参考にしました．8 節の $\mathbb{R}^n$ の合同変換が高々 $n + 1$ 個の鏡映の合成に分解できることの証明は [1] で学びました．

参考文献

[1] 岩堀長慶,『初学者のための合同変換群の話 幾何学の形での群論演習』，現代数学社（2020）．

[2] 川崎徹郎,『文様の幾何学』，牧野書店（2014）．

[3] 河野俊丈,『結晶群』，共立出版（2015）．

[4] 藤岡敦,「手を動かしてまなぶ 続・線形代数」，裳華房（2021）．

*1 そのような文献をご存知の方は教えて頂けるとうれしいです．

記号・記法

- $\mathbb{R}^n$ を n 次実列ベクトルのなす実線形空間とし，$\mathbb{C}^n$ を n 次複素ベクトルのなす複素線形空間とする．
- 行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す．
- $\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\cdot$ で表す．つまり，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ である．
- $\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積も $\cdot$ で表す．つまり，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$ である．ここで，$\overline{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の成分を全て複素共役で置き換えたベクトルを表す．
- $\mathbb{R}^n$ の標準内積から定まるノルムを $\|\ \|$ で表す．つまり，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ である．
- 線形空間 $\mathbb{R}^n$ のゼロベクトルを $\mathbf{0}$ と書き，これを $\mathbb{R}^n$ の原点とも呼ぶ．
- 線形空間の基底は順序付きの組として $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ のように書く．例えば，$\mathbb{R}^3$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$ は別の基底として扱う．
- E を単位行列とし，次数 n を明示したいときは E_n と書く．
- 行列 A に対応する線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ を T_A で表す．
- 正方行列 A の固有値 λ の固有空間を $V_A(\lambda)$ で表す．なお，λ が A の固有値でないときも便宜上 $V_A(\lambda) = \{\,\mathbf{0}\,\}$ と見なして同じ記号を用いる．
- $\mathbb{R}^n$ の部分線形空間 V の直交補空間を $V^\perp$ で表す：
$$V^\perp := \left\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{任意の } \boldsymbol{y} \in V \text{ に対して } \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \,\right\}$$
- 対角成分が左上から順に $a_1, \dots, a_n$ である対角行列を $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ で表す：
$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{bmatrix}$$
- 行列 X の随伴行列を X^* で表す．つまり，$X^* := {}^t\overline{X}$ である．
- 虚数単位は $\mathbf{i}$ で表す．アルファベットの i は添字等で使いたいので，書体を変えて区別する．
- 直交行列 A, B が向きを保って同じ標準形に標準化されることを $A \sim B$ で表す．
$$A \sim B \overset{\text{def}}{\iff} B = {}^tPAP \text{ かつ } \det(P) = 1 \text{ となる直交行列 } P \text{ が存在する}$$

1　合同変換とは

n を自然数とし，$\mathbb{R}^n$ を n 次実列ベクトルのなす実線形空間とする．また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ によって内積を定める．さらに, $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ によってノルムを, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ よって距離を定める．この距離 d を保つ変換が合同変換である．つまり，合同変換は次のように定義される．なお，列ベクトルと点を同一視し，$\mathbb{R}^n$ の元は適宜ベクトルと見なしたり点と見なしたりする．

定義. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \left(\iff \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \right)$$

を満たすとき，f を $\mathbb{R}^n$ の**合同変換**または**等長変換 (isometry)** という．

注意. 一般的な距離空間においては，距離を保つ全単射が等長写像（変換）と呼ばれる．合同変換という用語はユークリッド空間などのいくつかの特別な空間に対して使われるようである．また，上の定義では全単射性を仮定していないが，$\mathbb{R}^n$ 上で距離 d を保つ写像は全単射である．この事実は定理 1.4 から容易に導ける．

定理 1.1. (1) ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．
(2) 直交変換，すなわち，内積を保つ $\mathbb{R}^n$ の線形変換は合同変換である．

証明 (1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$\|t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) - t_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{y})\| = \|(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つので，$t_{\boldsymbol{b}}$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．
(2) f を $\mathbb{R}^n$ の直交変換とする．f は内積を保つので，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 = \|f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|^2 = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

が成り立つ．よって，f は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

□

合同変換と合同変換を合成するとやはり合同変換である．すなわち，次が成り立つ．

定理 1.2. $\mathbb{R}^n$ の 2 つの合同変換の合成は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

証明 $\mathbb{R}^n$ の合同変換 f_1, f_2 を任意にとる．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f_1(f_2(\boldsymbol{x})) - f_1(f_2(\boldsymbol{y}))\| = \|f_2(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つので，合成 $f_1 \circ f_2$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である． □

直交変換は線形変換なので原点 $\mathbf{0}$ を保つ合同変換である．この逆，すなわち，次が成り立つ．

定理 1.3. 原点 $\mathbf{0}$ を保つ合同変換は線形変換であり，従って，直交変換である．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ の合同変換とし，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x})\|=\|f(\boldsymbol{x})-\mathbf{0}\|=\|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\|=\|\boldsymbol{x}-\mathbf{0}\|=\|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つので，f はノルムを保つ．これと内積とノルムの関係から任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{2}\left(\|f(\boldsymbol{x})\|^2+\|f(\boldsymbol{y})\|^2-\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right)=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

が成り立つので，f は内積を保つ．以上から，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ と任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2 =& \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2+\|f(\boldsymbol{x})\|^2+\|f(\boldsymbol{y})\|^2 \\ & -2f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot f(\boldsymbol{x})-2f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot f(\boldsymbol{y})+2f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y}) \\ =& \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2 \\ & -2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \\ =& \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\|\mathbf{0}\|^2=0, \\ \|f(k\boldsymbol{x})-kf(\boldsymbol{x})\|^2 =& \|f(k\boldsymbol{x})\|^2-2f(k\boldsymbol{x})\cdot kf(\boldsymbol{x})+\|kf(\boldsymbol{x})\|^2 \\ =& \|k\boldsymbol{x}\|^2-2k\left(f(k\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{x})\right)+k^2\|f(\boldsymbol{x})\|^2 \\ =& \|k\boldsymbol{x}\|^2-2k\left(k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\right)+k^2\|\boldsymbol{x}\|^2=0 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，f は線形変換である．さらに，f は内積を保つので直交変換である． □

この定理から，任意の合同変換は直交行列とベクトルによって表せる．すなわち，次が成り立つ．

定理 1.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換 f は，n 次直交行列 A と n 次ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ によって

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

と一意的に表せる．逆に，この形で表せる写像は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換とする．$f(\mathbf{0})=\boldsymbol{b}$ とおく．定理 1.1(1) と定理 1.2 よりベクトル $-\boldsymbol{b}$ による平行移動 $t_{-\boldsymbol{b}}$ と f の合成 $g=t_{-\boldsymbol{b}}\circ f$ は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．$g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ なので，定理 1.3 より g は直交変換である．従って，ある n 次直交行列 A によって $g(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と表せる．よって，$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ である．また，

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

と表せたとすると，$f(\mathbf{0})=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ である．従って，f に対して直交変換 g が一意的に定まるので，対応する直交行列も一意的に定まるから $A=B$ である．後半の主張は明らかである． □

2　合同変換の固定点集合

定理 1.4 により，$\mathbb{R}^n$ の合同変換 f に対して $A \in O(n)$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が一意的に定まり

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

と書ける．以下,「合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に対して」のように書いたら，$A \in O(n), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ であることは仮定しているものとする．

定義. $\mathbb{R}^n$ の変換 f に対し，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を f の固定点といい，f の固定点全体の集合を $\mathrm{Fix}(f)$ と書く．

$$\mathrm{Fix}(f) := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \,\}$$

$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

より，n 変数連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つなら $\mathrm{Fix}(f)$ はその解空間である．つまり，$\mathrm{Fix}(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分アフィン空間である．特に,

$$\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow A = E \text{ かつ } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

である．また，連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解がなければ，$\mathrm{Fix}(f)$ は空集合である．特に，$\boldsymbol{0}$ でない任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathrm{Fix}\,(t_{\boldsymbol{b}})$ は空集合である．

定義. $\mathbb{R}^n$ の空でない部分アフィン空間 V_1, V_2 $(\dim V_1 \geq \dim V_2)$ に対し，

$$V_2 \subset \boldsymbol{x}_0 + V_1 := \{\, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V_1 \,\}$$

を満たす $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき，V_1 と V_2 は平行であるという．特に，$\dim V_1 = \dim V_2$ なら $V_2 = \boldsymbol{x}_0 + V_1$ である．

定理 2.1. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の固定点集合 $\mathrm{Fix}(f)$ が空集合でないとき，$\mathrm{Fix}(f)$ は $\dim V_A(1)$ に平行で $\dim \mathrm{Fix}(f) = \dim V_A(1)$ である．

証明 $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = (E - A)\boldsymbol{x}$ とすれば，g は $\mathbb{R}^n$ の線形変換であり，$\mathrm{Ker}\, g = V_A(1)$ である．$\mathrm{Fix}(f)$ が空集合でないことと連立 1 次方程式の理論から，任意に $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{Fix}(f)$ をとれば

$$\mathrm{Fix}(f) = \boldsymbol{x}_0 + \mathrm{Ker}\, g = \boldsymbol{x}_0 + V_A(1)$$

と書ける．従って，$\mathrm{Fix}(f)$ と $V_A(1)$ は平行で，$\dim \mathrm{Fix}(f) = \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim V_A(1)$ である．　□

注意. 直交行列 A が 1 を固有値に持たないとき, $E - A$ が正則なので連立 1 次方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は唯一つの解 $\boldsymbol{x} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$ を持つ．ここで，固有空間 $V_A(1)$ の記号を

$$V_A(1) := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

として使うことにすれば，この事実を定理 2.1 に含むことができる．

3　直交行列の標準形

合同変換の分類においては直交変換の分類が，つまりは，直交行列の分類が重要である．そこで，今節では

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

として直交行列の標準化に関する以下の定理を証明する．

定理 3.1. 任意の n 次直交行列 A は，ある $P \in SO(n)$ によって

$$ {}^tPAP = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & S_{\theta_s} & & & \\ & & & \pm1 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & \pm1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

と標準化される．ここで，$e^{\mathbf{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathbf{i}\theta_s}$ は A の固有値である．A が実固有値を持たなければ右下の ±1 たちは現れず，A が実固有値のみを持つなら左上の S_{θ_j} たちは現れない．

ここから，一旦話を実内積空間 $\mathbb{R}^n$ からユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ に広げるが，最終的にはまた実内積空間 $\mathbb{R}^n$ に戻ってくる．$\mathbb{C}^n$ を複素数成分の n 次列ベクトルのなす複素線形空間とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して標準エルミート内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}$ によって定める．ここで，$\overline{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の複素共役を表す．

まずは，直交行列の固有値と固有ベクトルに関して次の定理 3.2, 3.3, 3.4 は基本的である．

定理 3.2. 直交行列の固有値の絶対値は 1 である．特に実固有値は ±1 のみである．

証明 $A \in O(n)$ とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ をその固有ベクトルとする．つまり，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である．$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \neq 0$ なので，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}) \cdot (\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = |\lambda|^2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$$

から $|\lambda| = 1$ である．特に $\lambda \in \mathbb{R}$ ならば $\lambda = \pm1$ である．□

定理 3.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ が直交行列 A の固有値で $\boldsymbol{x}$ がその固有ベクトルなら，$\overline{\lambda}$ は A の固有値で $\overline{\boldsymbol{x}}$ は $\overline{\lambda}$ の固有ベクトルである．特に，A の実数でない固有値の個数は偶数である．

証明 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので，$\overline{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$ であり，

$$A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{A\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$$

より，$\overline{\lambda}$ は A の固有値で，$\overline{\boldsymbol{x}}$ はその固有ベクトルである．後半の主張は明らかである．□

定理 3.4. 直交行列の異なる固有値に属する固有ベクトル同士は直交する．

証明 $A \in O(n)$ とする．$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ を A の相異なる固有値，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ をそれぞれの固有ベクトルとする．$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ であることを示す．定理 3.2 から $\overline{\mu}\mu = |\mu|^2 = 1$ なので

$$\lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\lambda \boldsymbol{x}) \cdot (\overline{\mu}\mu \boldsymbol{y}) = \mu\,(A\boldsymbol{x}) \cdot (\mu \boldsymbol{y}) = \mu\,(A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

より，$(\lambda - \mu)(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0$ である．$\lambda \neq \mu$ なので，これより $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ である． □

定理 3.2 と 3.3 から，直交行列の固有値は全て $e^{\pm \mathbf{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の形に表せる．また，直交行列は実ユニタリ行列であり，ユニタリ行列は正規行列の一種である．その正規行列はユニタリ行列によって対角化可能なので，複素数の範囲での直交行列の標準形は対角行列

$$\begin{bmatrix} e^{\mathbf{i}\theta_1} & & & & & & & O \\ & e^{-\mathbf{i}\theta_1} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & e^{\mathbf{i}\theta_s} & & & & \\ & & & & e^{-\mathbf{i}\theta_s} & & & \\ & & & & & \pm 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & & \pm 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

である．よく知られた事実ではあるが，ユニタリ行列の場合（従って，直交行列の場合も含む）に限定してこれを証明しておく．

以下，行列 X の随伴行列を X^* で表す．つまり，$X^* := {}^t\overline{X}$ とする．

定理 3.5. ユニタリ行列はユニタリ行列によって対角化可能である． 従って，直交行列もユニタリ行列によって対角化可能である．

証明 A を n 次ユニタリ行列とし，n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らかなので，$n \geq 2$ とする．λ を A の固有値，$\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ をその単位固有ベクトルとし，$(\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ を $\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle^\perp$ の正規直交基底とすると，$U_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$ はユニタリ行列である．$j = 2, \ldots, n$ に対して

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot (A\boldsymbol{u}_j) = \lambda^{-1}(\lambda \boldsymbol{u}_1) \cdot (A\boldsymbol{u}_j) = \lambda^{-1}(A\boldsymbol{u}_1) \cdot (A\boldsymbol{u}_j) = \lambda^{-1}(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_j) = 0$$

なので，

$$\begin{aligned} U_1^* A U_1 &= U_1^* \begin{bmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & \cdots & A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = U_1^* \begin{bmatrix} \lambda \boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda {}^t\overline{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_1}A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_1}A\boldsymbol{u}_n \\ \lambda {}^t\overline{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_1 & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_2}A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_2}A\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda {}^t\overline{\boldsymbol{u}_n}\boldsymbol{u}_1 & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_n}A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & {}^t\overline{\boldsymbol{u}_n}A\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) & \boldsymbol{u}_1 \cdot (A\boldsymbol{u}_2) & \cdots & \boldsymbol{u}_1 \cdot (A\boldsymbol{u}_n) \\ \lambda(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) & \boldsymbol{u}_2 \cdot (A\boldsymbol{u}_2) & \cdots & \boldsymbol{u}_2 \cdot (A\boldsymbol{u}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_n) & \boldsymbol{u}_n \cdot (A\boldsymbol{u}_2) & \cdots & \boldsymbol{u}_n \cdot (A\boldsymbol{u}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける．ここで，$(U_1^*AU_1)^*(U_1^*AU_1) = U_1^*A^*(U_1U_1^*)AU_1 = U_1^*({}^tAA)U_1 = U_1^*U_1 = E_n$ より，$U_1^*AU_1$ はユニタリ行列である．従って，

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\overline{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^*A_1 \end{bmatrix}$$

から，$A_1^*A_1 = E_{n-1}$ より A_1 は $n-1$ 次ユニタリ行列である．よって，帰納法の仮定から ${U_2'}^*A_1U_2'$ が対角行列となるような $n-1$ 次ユニタリ行列 U_2' が存在するので

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2' \end{bmatrix}, \quad U = U_1U_2$$

とおけば，U は n 次ユニタリ行列で，この U によって A は

$$U^*AU = U_2^*(U_1^*AU_1)U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {U_2'}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {U_2'}^*A_1U_2' \end{bmatrix}$$

と対角化される．直交行列は実ユニタリ行列なので，後半の主張は明らかである．　□

複素数の範囲まで広げた話を実数の範囲に戻し，定理 3.1 の証明を完成させる．

定理 3.1 の証明　$A \in O(n)$ とする．A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は

$$\varphi_A(t) = (t - e^{\mathbf{i}\theta_1})^{m_1}(t - e^{-\mathbf{i}\theta_1})^{m_1} \cdots (t - e^{\mathbf{i}\theta_s})^{m_s}(t - e^{-\mathbf{i}\theta_s})^{m_s}(t-1)^{m^+}(t+1)^{m^-}$$

と因数分解される．ただし，$s = 0$ や $m^{\pm} = 0$ の場合も含む．定理 3.5 より A は対角化可能なので，$\dim V_A(e^{\pm\mathbf{i}\theta_i}) = m_i$, $\dim V_A(\pm 1) = m^{\pm}$ であり，$\mathbb{C}^n$ は各固有空間によって

$$\mathbb{C}^n = V_A(e^{\mathbf{i}\theta_1}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_1}) \oplus \cdots \oplus V_A(e^{\mathbf{i}\theta_s}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_s}) \oplus V_A(1) \oplus V_A(-1)$$

と直和分解され，定理 3.4 よりこれは直交直和分解でもある．従って，各固有空間の正規直交基底を並べたユニタリ行列 U によって A は (3.2) のように対角化される．特に，$V_A(1), V_A(-1)$ の正規直交基底としては実ベクトルのみからなるものを選べるので，それらをそれぞれ

$$\left(\boldsymbol{p}_1^+, \ldots, \boldsymbol{p}_{m^+}^+\right), \quad \left(\boldsymbol{p}_1^-, \ldots, \boldsymbol{p}_{m^-}^-\right)$$

とする．また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\overline{\boldsymbol{x}} \cdot \overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{y}\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}$$

なので，$e^{-\mathbf{i}\theta_j} = \overline{e^{\mathbf{i}\theta_j}}$ であることと定理 3.3 から，$(\boldsymbol{u}_1^j, \ldots, \boldsymbol{u}_{m_j}^j)$ が $V_A(e^{\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底なら $(\overline{\boldsymbol{u}_1^j}, \ldots, \overline{\boldsymbol{u}_{m_j}^j})$ は $V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底である．従って，$j = 1, \ldots, s$ に対して

$$(\boldsymbol{u}_1^j, \overline{\boldsymbol{u}_1^j}, \ldots, \boldsymbol{u}_{m_j}^j, \overline{\boldsymbol{u}_{m_j}^j})$$

は $V_A(e^{\mathbf{i}\theta_j}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底である．ここで，各 $i = 1, \ldots, m_j$ に対して

$$\boldsymbol{q}_i^j := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{u}_i^j + \overline{\boldsymbol{u}_i^j}\right), \quad \boldsymbol{r}_i^j := \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{u}_i^j - \overline{\boldsymbol{u}_i^j}\right)$$

とすれば，$\boldsymbol{q}_i^j, \boldsymbol{r}_i^j \in \mathbb{R}^n$ であり，これらの間の内積はクロネッカーのデルタを用いて

$$\boldsymbol{q}_k^j \cdot \boldsymbol{q}_l^j = \boldsymbol{r}_k^j \cdot \boldsymbol{r}_l^j = \delta_{kl}, \quad \boldsymbol{q}_k^j \cdot \boldsymbol{r}_l^j = 0$$

と書けるので，$(\boldsymbol{q}_1^j, \boldsymbol{r}_1^j, \ldots, \boldsymbol{q}_{m_j}^j, \boldsymbol{r}_{m_j}^j)$ は $V_A(e^{\mathbf{i}\theta_j}) \oplus V_A(e^{-\mathbf{i}\theta_j})$ の正規直交基底である．よって，

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^1 & \boldsymbol{r}_1^1 & \cdots & \boldsymbol{q}_{m_s}^s & \boldsymbol{r}_{m_s}^s & \boldsymbol{p}_1^+ & \cdots & \boldsymbol{p}_{m^+}^+ & \boldsymbol{p}_1^- & \cdots & \boldsymbol{p}_{m^-}^- \end{bmatrix}$$

とすれば，P は実ユニタリ行列，すなわち，直交行列である．さらに，$e^{\mathbf{i}\theta_j} = \cos\theta_j + \mathbf{i}\sin\theta_j$ より

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{q}_i^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}A\boldsymbol{u}_i^j + \frac{1}{\sqrt{2}}A\overline{\boldsymbol{u}_i^j} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathbf{i}\theta_j}\boldsymbol{u}_i^j + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e^{\mathbf{i}\theta_j}}\;\overline{\boldsymbol{u}_i^j} = (\cos\theta_j)\,\boldsymbol{q}_i^j + (\sin\theta_j)\,\boldsymbol{r}_i^j \\ A\boldsymbol{r}_i^j &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}A\boldsymbol{u}_i^j - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}A\overline{\boldsymbol{u}_i^j} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}e^{\mathbf{i}\theta_j}\boldsymbol{u}_i^j - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\overline{e^{\mathbf{i}\theta_j}}\;\overline{\boldsymbol{u}_i^j} = (-\sin\theta_j)\,\boldsymbol{q}_i^j + (\cos\theta_j)\,\boldsymbol{r}_i^j \end{aligned}$$

なので，$A\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_i^j & \boldsymbol{r}_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_i^j & \boldsymbol{r}_i^j \end{bmatrix} S_{\theta_j}$ である．以上から，直交行列 A は直交行列 P によって

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & S_{\theta_s} & & \\ & & & E_{m^+} & \\ O & & & & -E_{m^-} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

と標準化される．ただし，各 S_{θ_j} は m_j 個並ぶ．このとき，$\det P = -1$ なら P のどこか 1 列を -1 倍したものに置き換えることで，$P \in SO(n)$ となるものを選び直せる． □

注意． この証明の最後の $P \in SO(n)$ となるように P を取り替えるところで，A が実固有値を持てば $\boldsymbol{p}_j^\pm$ のどれか 1 個を $-\boldsymbol{p}_j^\pm$ に置き換えることで標準形を変化させず $\det P = 1$ とできるが，A に実固有値がなければ標準形が変化する．例えば，P の 1 列目 $\boldsymbol{q}_1^1$ を $-\boldsymbol{q}_1^1$ に置き換えれば，

$$\begin{aligned} A\left(-\boldsymbol{q}_1^1\right) &= -(\cos\theta_1)\,\boldsymbol{q}_1^1 - (\sin\theta_1)\,\boldsymbol{r}_1^1 = (\cos(-\theta_1))\left(-\boldsymbol{q}_1^1\right) + (\sin(-\theta_1))\,\boldsymbol{r}_1^1 \\ A\boldsymbol{r}_1^1 &= (-\sin\theta_1)\,\boldsymbol{q}_1^1 + (\cos\theta_1)\,\boldsymbol{r}_1^1 = (-\sin(-\theta_1))\left(-\boldsymbol{q}_1^1\right) + (\cos(-\theta_1))\,\boldsymbol{r}_1^1 \end{aligned}$$

なので，標準形 (3.3) の左上の S_{θ_1} が $S_{-\theta_1}$ に置き換わる．

定理 3.1 を A の次数の偶奇によって分ける．$A \in O(n)$ の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は

$$\varphi_A(t) = (t - e^{\mathbf{i}\theta_1})(t - e^{-\mathbf{i}\theta_1})\cdots(t - e^{\mathbf{i}\theta_s})(t - e^{-\mathbf{i}\theta_s})(t-1)^{m^+}(t+1)^{m^-} \tag{3.4}$$

と因数分解される．ただし，$s = 0$ や $m^\pm = 0$ の場合も含み，$e^{\pm\mathbf{i}\theta_j}$ たちに重複を許す．このとき，

$$2s + m^+ + m^- = n \tag{3.5}$$

である．また，$\det A = (-1)^{m^-}$ なので，$\det A$ の符号によって m^- の偶奇が定まり，n の偶奇と合わせて m^+ の偶奇も定まる．以下，k を正の整数とし，定理 3.1 を $n = 2k$ のときと $n = 2k+1$ のときに分離する．

定理 3.6. 任意の $A\in O(2k)$ はある $P\in SO(2k)$ によって次のいずれかの形に標準化される．

$$ {}^tPAP=\left\{\begin{array}{ll} S(\theta_1,\dots,\theta_k):=\mathrm{diag}\,(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_k}) & (\det A=1)\\ R(\theta_1,\dots,\theta_{k-1}):=\mathrm{diag}\,\big(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_{k-1}},1,-1\big) & (\det A=-1)\end{array}\right. $$

ここで，$e^{\pm \mathbf{i}\theta_1},\dots,e^{\pm\mathbf{i}\theta_k}$ は A の固有値である．なお，$S_0=E_2$，$S_\pi=-E_2$ である．ただし，$A\in O(2)$ かつ $\det A=-1$ のときは ${}^tPAP=R_0:=\mathrm{diag}(1,-1)$ と標準化される．

証明 $A\in O(2k)$ の固有多項式を (3.4) の通りとする．

まず，$\det A=1$ とする．$1=\det A=(-1)^{m^-}$ より m^- は偶数である．さらに，(3.5) と $n=2k$ から m^+ も偶数である．$S_0=E_2$，$S_\pi=-E_2$ なので，

$$ \theta_j=\left\{\begin{array}{ll} 0 & (s+1\le j\le s+m^+/2)\\ \pi & (s+m^+/2\le j\le s+(m^++m^-)/2=k)\end{array}\right. $$

とすれば，A の標準形 (3.1) は $\mathrm{diag}(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_s},E_{m^+},-E_{m^-})=S(\theta_1,\dots,\theta_k)$ である．

次に，$\det A=-1$ とする．$-1=\det A=(-1)^{m^-}$ より m^- は奇数で，(3.5) と $n=2k$ から m^+ も奇数である．よって，θ_j $(j>s)$ を上と同様に適切に定めれば，A の標準形 (3.1) は

$$ \mathrm{diag}(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_s},E_{m^+-1},-E_{m^--1},1,-1)=\mathrm{diag}(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_{k-1}},1,-1)=R(\theta_1,\dots,\theta_{k-1}) $$

とできる．なお，$A\in O(2)$ の標準形に関しては既に示している． □

定理 3.7. 任意の $A\in O(2k+1)$ はある $P\in SO(2k+1)$ によって次の形に標準化される．

$$ {}^tPAP=\left\{\begin{array}{ll} S^+(\theta_1,\dots,\theta_k):=\mathrm{diag}\,(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_k},1) & (\det A=1)\\ S^-(\theta_1,\dots,\theta_k):=\mathrm{diag}\,(S_{\theta_1},\dots,S_{\theta_k},-1) & (\det A=-1)\end{array}\right. $$

ここで，$e^{\pm\mathbf{i}\theta_1},\dots,e^{\pm\mathbf{i}\theta_k},\det A(=\pm1)$ は A の固有値である．

証明 $A\in O(2k+1)$ の固有多項式を (3.4) の通りとする．(3.5) と $n=2k+1$ から m^+ と m^- の偶奇は異なる．$\det A=(-1)^{m^-}$ なので，$\det A=1$ なら m^- は偶数で m^+ は奇数となり，特に $m^+\ge 1$ だから 1 は A の固有値である．一方で，$\det A=-1$ なら m^- が奇数で m^+ が偶数なので，$m^-\ge1$ より -1 は A の固有値である．いずれの場合も，$\det A$ は A の固有値であり，A の標準形 (3.1) の対角成分に $\det A$ は奇数個，$-\det A$ は偶数個並ぶので，A の標準形の左上 $(n-1)\times(n-1)$ ブロックは $S(\theta_1,\dots,\theta_k)$ で，(n,n) 成分が $\det A$ となるようにできる． □

定義. $A,B\in O(n)$ に対して $B={}^tPAP$ となる $P\in SO(n)$ が存在するとき，$A\sim B$ と書く．

例えば，A が $S(\theta_1,\dots,\theta_k)$ に標準化されることを $A\sim S(\theta_1,\dots,\theta_k)$ と書くための記号である．

4　$\mathbb{R}^n$ の直交変換

$A \in O(n)$ が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \in SO(n)$ によって標準化されるとし，$\mathbb{R}^n$ の直交変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を分類する．空間の次元 n の偶奇で分けるとやりやすい．

まず，n を偶数とし $n = 2k$ とする．定理 3.6 より A は $\det A = 1$ なら $S(\theta_1, \dots, \theta_k)$ に標準化され，$\det A = -1$ なら $R(\theta_1, \dots, \theta_{k-1})$ に標準化される．なお，標準形の対角ブロック S_{θ_i} に単位行列 E_2 が含まれるときは，それらが全て右下に集まるように，つまり，${}^tPAP$ が

$$\mathrm{diag}(\dots, E_2, \dots, E_2, 1, \pm 1)$$

となるように P の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ を適宜並びかえておく．

- ${}^tPAP = S(\theta_1, \dots, \theta_k)$ のとき，T_A は 2 次元部分空間 $\langle \boldsymbol{p}_{2i-1}, \boldsymbol{p}_{2i} \rangle$ 上の θ_i 回転たち $(i = 1, \dots, k)$ の合成，すなわち，多重回転である．さらに細かく，次のように分類できる．ただし，表の中の各 θ_i はいずれも $S_{\theta_i} \neq E_2$ を満たすとする．

名前	${}^tPAP$	$\mathrm{Fix}(T_A) = V_A(1)$	$\dim V_A(1)$
恒等変換	E_n	$\mathbb{R}^n$	n
単回転	$S(\theta_1, 0, \dots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_3, \dots, \boldsymbol{p}_n \rangle$	$n-2$
2 重回転	$S(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_5, \dots, \boldsymbol{p}_n \rangle$	$n-4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$ 重回転	$S(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_{n-1}, \boldsymbol{p}_n \rangle$	2
k 重回転	$S(\theta_1, \dots, \theta_k)$	$\{\boldsymbol{0}\}$	0

- ${}^tPAP = R(\theta_1, \dots, \theta_k)$ のとき，T_A は 2 次元部分空間 $\langle \boldsymbol{p}_{2i-1}, \boldsymbol{p}_{2i} \rangle$ 上の θ_i 回転たち $(i = 1, \dots, k-1)$ と超平面 $\langle \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$ に関する鏡映との合成，すなわち，多重回転鏡映である．さらに細かく，次のように分類できる．やはり $S_{\theta_i} \neq E_2$ とする．

名前	${}^tPAP$	$\mathrm{Fix}(T_A) = V_A(1)$	$\dim V_A(1)$
鏡映	$R(0, \dots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	$n-1$
単回転鏡映	$R(\theta_1, 0, \dots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_3, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	$n-3$
2 重回転鏡映	$R(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_5, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	$n-5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$ 重回転鏡映	$R(\theta_1, \dots, \theta_{k-2}, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_{n-3}, \boldsymbol{p}_{n-2}, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	3
$k-1$ 重回転鏡映	$R(\theta_1, \dots, \theta_{k-1})$	$\langle \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	1

次に，n を奇数とし $n = 2k+1$ とする．定理 3.7 より A は $\det A = 1$ なら $S^+(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ に標準化され，$\det A = -1$ なら $S^-(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ に標準化される．また，先と同様に標準形の対角ブロック S_{θ_i} に単位行列が含まれる場合は，それらが右下に集まるように，つまり，

$$ {}^tPAP = \mathrm{diag}(\ldots, E_2, \ldots, E_2, \pm 1) $$

となるように P の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を適宜並び替えておく．

- ${}^tPAP = S^+(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ のとき，T_A は 2 次元部分空間 $\langle \boldsymbol{p}_{2i-1}, \boldsymbol{p}_{2i} \rangle$ 上の θ_i 回転たち $(i = 1, \ldots, k)$ の合成，すなわち，多重回転である．さらに細かく，次のように分類できる．ただし，各 θ_i は $S_{\theta_i} \neq E_2$ を満たすとする．

名前	${}^tPAP$	$\mathrm{Fix}(T_A) = V_A(1)$	$\dim V_A(1)$
恒等変換	E_n	$\mathbb{R}^n$	n
単回転	$S^+(\theta_1, 0 \ldots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_n \rangle$	$n-2$
2 重回転	$S^+(\theta_1, \theta_2, 0, \ldots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_5, \ldots, \boldsymbol{p}_n \rangle$	$n-4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$ 重回転	$S^+(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_{n-2}, \boldsymbol{p}_{n-1}, \boldsymbol{p}_n \rangle$	3
k 重回転	$S^+(\theta_1, \ldots, \theta_k)$	$\langle \boldsymbol{p}_n \rangle$	1

- ${}^tPAP = S^-(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ のとき，T_A は 2 次元部分空間 $\langle \boldsymbol{p}_{2i-1}, \boldsymbol{p}_{2i} \rangle$ 上の θ_i 回転たち $(i = 1, \ldots, k)$ と超平面 $\langle \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$ に関する鏡映との合成，すなわち，多重回転鏡映である．やはり $S_{\theta_i} \neq E_2$ とする．

名前	${}^tPAP$	$\mathrm{Fix}(T_A) = V_A(1)$	$\dim V_A(1)$
鏡映	$S^-(0, \ldots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	$n-1$
単回転鏡映	$S^-(\theta_1, 0, \ldots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	$n-3$
2 重回転鏡映	$S^-(\theta_1, \theta_2, 0, \ldots, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_5, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	$n-5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$ 重回転鏡映	$S^-(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, 0)$	$\langle \boldsymbol{p}_{n-2}, \boldsymbol{p}_{n-1} \rangle$	2
k 重回転鏡映	$S^-(\theta_1, \ldots, \theta_k)$	$\{\boldsymbol{0}\}$	0

5　鏡映

合同変換全体を分類する前に $\mathbb{R}^n$ の鏡映についてまとめる．まずは鏡映を次のように定義する．

定義. $\mathbb{R}^n$ の超平面を固定点集合とする合同変換，すなわち，$\dim \mathrm{Fix}(f) = n-1$ となる合同変換 f を $\mathbb{R}^n$ の鏡映という．定理 5.4 で示すように，$\mathbb{R}^n$ の鏡映全体と $\mathbb{R}^n$ の超平面全体とは 1 対 1 に対応するから，超平面 H を固定点集合とする鏡映は H に関する鏡映と呼ばれる．

鏡映は合同変換なので，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

の形で表しておきたい．これ以降 $R_{\mathbf{0}} := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ とする．

定理 5.1. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $A \sim R_{\mathbf{0}}$ かつ $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ であるとき，またそのときに限り，鏡映である．このとき $\mathrm{Fix}(f)$ は $\boldsymbol{b}/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な超平面である．

証明 $A \sim R_{\mathbf{0}}$ かつ $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ であるとする．合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に対し

$$f\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{1}{2}A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{2}$$

より $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Fix}(f)$ であるから， $\mathrm{Fix}(f)$ は空集合でない．よって，定理 2.1 から $\dim \mathrm{Fix}(f) = \dim V_A(1) = n-1$ より f は $\mathbb{R}^n$ の鏡映である．

逆に，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を鏡映とする．まず $A \sim R_{\mathbf{0}}$ を示す．定理 2.1 より $\dim V_A(1) = \dim \mathrm{Fix}(f) = n-1$ だから A は 1 を固有値に持ち，その重複度は $n-1$ 以上である．定理 3.3 より残りの固有値は実数なので 1 か -1 であり，定理 3.1 から $A \sim E$ または $A \sim R_{\mathbf{0}}$ である．$A \sim E$ なら $A = E$ だが，このとき $\dim V_A(1) = \dim \mathbb{R}^n = n \neq n-1$ より，これは f が鏡映であることに反するので $A \sim R_{\mathbf{0}}$ である．次に $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ を示す．A に対応する直交変換によって $\mathbb{R}^n = V_A(1) \oplus V_A(-1)$ と固有空間分解できる．そこで，

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_A(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1)$$

とする．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Fix}(f)$ に対して

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{x}$$

であるが，$A \sim R_{\mathbf{0}}$ より $A^2 = E$ であるから上式の両辺に左から A を掛けて

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = A\boldsymbol{x}$$

を得る．さらに上記 2 式を連立して $\boldsymbol{b}^+ = \mathbf{0}$ を得る．従って，$\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ である．

後半の主張は $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Fix}(f)$ であることと定理 2.1 から従う．　□

鏡映はその名が示すように，超平面を鏡とする対称な変換である．つまり，次の定理が成り立つ．

定理 5.2. $\mathbb{R}^n$ の鏡映 f に対して以下が成り立つ．ただし，$H = \mathrm{Fix}(f)$ とする．

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点は H 上にある．
(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ は H と直交する．

証明 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を $\mathbb{R}^n$ の鏡映とする．

(1) 定理 5.1 から $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$，$A^2 = E$ なので，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f\left(\frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}\right) = A\left(\frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2}\right) + \boldsymbol{b} = \frac{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}}{2} = \frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}$$

より $(f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x})/2 \in \mathrm{Fix}(f)$ である．
(2) 定理 3.4 から，$\boldsymbol{p} \in V_A(1)$ に対して $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) = 0$ である．従って，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}) - (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{p}) = 0$$

より $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ は $V_A(1)$ と直交する．よって，定理 2.1 より $H = \mathrm{Fix}(f)$ とも直交する．

□

逆に，超平面を鏡とする対称な変換は鏡映である．つまり，定理 5.2 の (1),(2) を満たす $\mathbb{R}^n$ の変換 f は超平面 H を固定点集合とする鏡映である．これを実際に確かめよう．

H を $\mathbb{R}^n$ の超平面とし，その方程式を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = d$ とする．すなわち，

$$H = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = d \,\} \quad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R})$$

とする．このとき，$\boldsymbol{a}$ は H の法線ベクトルである．実際，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$ に対し

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = d - d = 0$$

より $\boldsymbol{a}$ は H に直交する．この $\boldsymbol{a}$ と d を用いて定理 5.2 の (1),(2) を満たす $\mathbb{R}^n$ の変換 f を具体的に記述する．

定理 5.3. $\mathbb{R}^n$ の超平面 $H = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d \,\}$ に対し，定理 5.3 の (1),(2) を満たす $\mathbb{R}^n$ の変換 f は

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) - 2d}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

で与えられ，これは H を固定点集合とする鏡映である．

証明 任意に $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる．(2) より $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ は平行なので，ある実数 k によって

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + k\boldsymbol{a}$$

と書ける．さらに，(1) からこれを $(\boldsymbol{a}, (f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x})/2) = d$ に代入して

$$k = -\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) - 2d}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$$

を得る．任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} d(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))^2 = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 &= \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \frac{2\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \right\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 - 2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right) + \left(\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\right)^2 (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \\ &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 - \frac{4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} + \frac{4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \end{aligned}$$

より f は $\mathbb{R}^n$ の合同変換である．また, 任意の $\boldsymbol{x} \in H$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ であるから $H \subset \mathrm{Fix}(f)$ より $\dim \mathrm{Fix}(f) \geq \dim H = n-1$ である．さらに,

$$\frac{d+1}{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \notin \mathrm{Fix}(f)$$

より $\mathrm{Fix}(f) \neq \mathbb{R}^n$ であるから $\dim \mathrm{Fix}(f) \leq n-1$ である．従って，$\dim \mathrm{Fix}(f) = n-1$ より $\mathrm{Fix}(f) = H$ であるから f は H を固定点集合とする鏡映である． □

$\mathbb{R}^n$ の鏡映 f から超平面 $\mathrm{Fix}(f)$ が定まり，逆に超平面 H から $H = \mathrm{Fix}(f)$ となる鏡映 f が定まることが分かった．この対応は 1 対 1 である．すなわち，次が成り立つ．

定理 5.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の超平面に対し，それを固定点集合とする鏡映が唯一つ存在する．

証明 存在性は定理 5.3 で示したので，一意性を示す．f_1, f_2 を 超平面 H を固定点集合とする鏡映とし，

$$f_1(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \quad f_2(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

とする．定理 2.1 より $V_A(1), V_B(1)$ は共に原点を通り H に平行な超平面であるから

$$V_A(1) = V_B(1)$$

である．従って，定理 3.4 より

$$V_A(-1) = V_A(1)^{\perp} = V_B(1)^{\perp} = V_B(-1)$$

である．定理 5.1 から $\boldsymbol{b} \in V_A(-1) = V_B(-1)$ かつ $\boldsymbol{b}/2 \in \mathrm{Fix}(f_1) = H = \mathrm{Fix}(f_2)$ であるから

$$\frac{\boldsymbol{b}}{2} = f_2\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{1}{2}B\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{c}$$

より $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ である．さらに, 再び定理 5.1 から $A \sim R_{\boldsymbol{0}} \sim B$ より正則行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$ を $(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1})$ が $V_A(1) = V_B(1)$ の基底で，$\boldsymbol{p}_n \in V_A(-1) = V_B(-1)$ となるようにとると

$$A = PR_{\boldsymbol{0}}P^{-1} = B$$

である．よって，$f_1 = f_2$ である． □

6　滑り鏡映

鏡映と平行移動の合成によって，鏡映とは本質的に異なる合同変換である滑り鏡映が定義される．前節に引き続き $R_{\mathbf{0}} := \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ とする．

定義． $\mathbb{R}^n$ の超平面 H に関する鏡映 g と H に平行なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ による平行移動 $t_{\boldsymbol{c}}$ との合成 $t_{\boldsymbol{c}} \circ g$ を H と $\boldsymbol{c}$ に関する滑り鏡映または並進鏡映という．ただし，ここで $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が超平面 H に平行であるとは，H と 直線 $\langle \boldsymbol{c} \rangle$ が平行であることをいう．鏡映は滑り鏡映の一種とみなすのが自然ではあるが，本稿ではこれ以後鏡映でない滑り鏡映のみを滑り鏡映と呼ぶことにする．

定理 6.1. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $A \sim R_{\mathbf{0}}$ かつ $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ のとき，またそのときに限り，滑り鏡映である．このとき，固有空間分解 $\mathbb{R}^n = V_A(1) \oplus V_A(-1)$ による $\boldsymbol{b}$ の分解を

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^-, \quad \boldsymbol{b}^+ \in V_A(1),\ \boldsymbol{b}^- \in V_A(-1) \tag{6.1}$$

とすると，f は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な超平面と $\boldsymbol{b}^+$ に関する滑り鏡映である．

証明 $A \sim R_{\mathbf{0}}$ とする．$g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ とすると，定理 5.1 から g は鏡映である．よって，$f = t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g$ より f は $\boldsymbol{b}^-/2$ を通り $V_A(1)$ に平行な超平面と $\boldsymbol{b}^+$ に関する滑り鏡映である．

逆に，f を超平面 H と $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に関す滑り鏡映とする．H に関する鏡映を $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}) = t_{\boldsymbol{c}} \circ g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$$

より定理 1.4 から $A = B$ である．従って，定理 5.1 より $A = B \sim R_{\mathbf{0}}$ である．　□

注意． 滑り鏡映は鏡映と平行移動の合成であるが，合成の順序はどちらでも良い．実際，滑り鏡映 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を式 (6.1) により鏡映 $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-$ と平行移動 $t_{\boldsymbol{b}^+}$ に分解すると，

$$f(\boldsymbol{x}) = t_{\boldsymbol{b}^+}(g(\boldsymbol{x})) = \left(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^-\right) + \boldsymbol{b}^+ = A\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+\right) + \boldsymbol{b}^- = g\left(t_{\boldsymbol{b}^+}(\boldsymbol{x})\right)$$

であるから $t_{\boldsymbol{b}^+} \circ g = g \circ t_{\boldsymbol{b}^+}$ である．

定理 6.2. 滑り鏡映には固定点がない．

証明 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を滑り鏡映とする．定理 6.1 より $A \sim R_{\mathbf{0}}$ かつ $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ である．f に固定点 $\boldsymbol{x}$ があるとすると，$\boldsymbol{b}$ を (6.1) のように分解することで定理 5.1 の証明後半と同様に

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ + \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = A\boldsymbol{x}$$

から $\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ となるが，これは $\boldsymbol{b} \notin V_A(-1)$ に矛盾する．　□

この定理と定理 5.1 と定理 6.1 から，$A \sim R_{\mathbf{0}}$ のときの固定点の有無に関して次が成り立つ．

定理 6.3. $A \sim R_{\mathbf{0}}$ のとき，$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の固定点集合 $\operatorname{Fix}(f)$ は，$\boldsymbol{b} \in V_A(-1)$ のとき，そのときに限り空集合でない．

7　$\mathbb{R}^n$ の合同変換の分類

$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $\det A$ の正負によって大きく分けられる．$\det A = 1$ なら f は多重回転と平行移動との合成なので多重螺旋と名付けることにする．一方で，$\det A = -1$ なら f は多重回転鏡映と平行移動の合成なので多重螺旋鏡映と名付けることにする．本節では，直交行列 A の標準形と $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ か $\boldsymbol{b} \notin V_A(1)^\perp$ かによって f をさらに細かく分類する．

まず，n が偶数のときの分類が以下の定理 7.1 である．

定理 7.1. $n = 2k$ とする．$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は次の表 1 のように分類できる．ただし，各 θ_i は $S_{\theta_i} \neq E_2$ を満たすとし，$R_{\boldsymbol{0}} := R(0, \dots, 0) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$ とする．なお，A の標準形が $S(\theta_1, \dots, \theta_k)$ のときは $V_A(1) = \{\, \boldsymbol{0} \,\}$ なので必ず $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp = \mathbb{R}^n$ となる．

大分類	小分類	A の標準形	$\boldsymbol{b} \overset{?}{\in} V_A(1)^\perp$	$\dim \mathrm{Fix}(f)$
多重螺旋	恒等変換	E	YES	n
$(\det A = 1)$	平行移動		NO	–
	単回転	$S(\theta_1, 0, \dots, 0)$	YES	$n-2$
	単螺旋		NO	–
	2 重回転	$S(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	YES	$n-4$
	2 重螺旋		NO	–
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$k-1$ 重回転	$S(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, 0)$	YES	2
	$k-1$ 重螺旋		NO	–
	k 重回転	$S(\theta_1, \dots, \theta_k)$	YES	0
多重螺旋鏡映	鏡映	$R_{\boldsymbol{0}}$	YES	$n-1$
$(\det A = -1)$	滑り鏡映		NO	–
	単回転鏡映	$R(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	YES	$n-3$
	単螺旋回転		NO	–
	2 重回転鏡映	$R(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	YES	$n-5$
	2 重螺旋鏡映		NO	–
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$k-1$ 重回転鏡映	$R(\theta_1, \dots, \theta_{k-1})$	YES	1
	$k-1$ 重螺旋鏡映		NO	–

表 1　$\mathbb{R}^{2k}$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の分類表

続いて，n が奇数のときの分類が以下の定理 7.2 である．

定理 7.2. $n = 2k+1$ とする．$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は次の表 2 のように分類できる．ただし，各 θ_i は $S_{\theta_i} \neq E_2$ を満たすとし，$R_{\mathbf{0}} := S^-(0,\dots,0) = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)$ とする．なお，A の標準形が $S^-(\theta_1,\dots,\theta_k)$ のときは $V_A(1) = \{\,\mathbf{0}\,\}$ なので 必ず $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp = \mathbb{R}^n$ となる．

大分類	小分類	A の標準形	$\boldsymbol{b} \overset{?}{\in} V_A(1)^\perp$	$\dim \mathrm{Fix}(f)$
多重螺旋	恒等変換	E	YES	n
$(\det A = 1)$	平行移動		NO	–
	単回転	$S^+(\theta_1, 0, \dots, 0)$	YES	$n-2$
	単螺旋		NO	–
	2 重回転	$S^+(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	YES	$n-4$
	2 重螺旋		NO	–
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	k 重回転	$S^+(\theta_1, \dots, \theta_k)$	YES	1
	k 重螺旋		NO	–
多重螺旋鏡映	鏡映	$R_{\mathbf{0}}$	YES	$n-1$
$(\det A = -1)$	滑り鏡映		NO	–
	単回転鏡映	$S^-(\theta_1, 0, \dots, 0)$	YES	$n-3$
	単螺旋鏡映		NO	–
	2 重回転鏡映	$S^-(\theta_1, \theta_2, 0, \dots, 0)$	YES	$n-5$
	2 重螺旋鏡映		NO	–
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$k-1$ 重回転鏡映	$S^-(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, 0)$	YES	2
	$k-1$ 重螺旋鏡映		NO	–
	k 重回転鏡映	$S^-(\theta_1, \dots, \theta_k)$	YES	0

表 2　$\mathbb{R}^{2k+1}$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の分類表

定理 7.1 と定理 7.2 のいずれにおいても，$\boldsymbol{b} \overset{?}{\in} V_A(1)^\perp$ が YES か NO かは，f が固定点を持つか持たないかを判別している．つまり，次が成り立つ．

定理 7.3. $\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ の固定点集合 $\mathrm{Fix}(f)$ は，$\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ のとき，そのときに限り空集合でない．なお，1 が A の固有値でないときは $V_A(1) = \{\mathbf{0}\}$ とする．

証明 まず，$\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ とする．$\mathbb{R}^n$ の線形変換 $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}$ と任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\boldsymbol{p} \in V_A(1)$ に対して

$$g(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - (A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - (A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} = 0$$

だから，$g(\mathbb{R}^n) \subset V_A(1)^\perp$ である．また，$\ker g = V_A(1)$ なので線形変換の次元定理から

$$\dim g(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \ker g = n - \dim V_A(1) = \dim V_A(1)^\perp$$

より，$g(\mathbb{R}^n) = V_A(1)^\perp$ である．よって，$\boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} - A\boldsymbol{c}$ となる $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が存在する．すなわち，$\boldsymbol{c} \in \mathrm{Fix}(f)$ なので $\mathrm{Fix}(f)$ は空集合でない．

逆に，$\mathrm{Fix}(f)$ が空集合でないとし，任意に $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Fix}(f)$ をとる．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - A\boldsymbol{c}$ だから，任意の $\boldsymbol{p} \in V_A(1)$ に対して

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p} - (A\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p} - (A\boldsymbol{c}) \cdot (A\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p} - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p} = 0$$

より，$\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ である． □

注意． $A \sim R_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ のとき $V_A(1)^\perp = V_A(-1)$ なので，定理 6.3 はこの定理 7.3 の特別な場合である．

$\mathbb{R}^n$ の合同変換は固定点の有無によって「直交変換及びその仲間」とそうでないものとに分けることができる．合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は直交変換 T_A と平行移動 $t_{\boldsymbol{b}}$ の合成として

$$f = t_{\boldsymbol{b}} \circ T_A$$

と書ける．ここで，f に固定点 $\boldsymbol{c}$ が存在すれば，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して次が成り立つ．

$$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \tag{7.1}$$

このとき f は直交変換 T_A と同じクラスの合同変換である．例えば，T_A が鏡映なら f も鏡映であり，T_A が多重回転なら f も多重回転である．これは，$\mathbb{R}^n$ のベクトルを全て $\boldsymbol{c}$ を起点とするベクトルと見なし直しているということである．合同変換 f は，$\mathbb{R}^n$ の原点 $\boldsymbol{0}$ を起点とするベクトル $\boldsymbol{x}$ をやはり $\boldsymbol{0}$ を起点とするベクトル $\boldsymbol{y} := f(\boldsymbol{x})$ に写す変換である．式 (7.1) はこれが起点を $\boldsymbol{c}$ だけずらしたベクトル

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}$$

の間の変換として

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{x}' = T_A(\boldsymbol{x}')$$

と書けることを表している．つまり，平行移動によって $\boldsymbol{c}$ を原点とするように座標変換を行えば，f を直交変換 T_A とみなせる．このような合同変換 f には直交変換 T_A と同じ名前を付けようというのが本稿での分類の基本方針である．このとき，f の固定点集合 $\mathrm{Fix}(f)$ は直交変換 T_A の固定点集合 $V_A(1) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \,\}$ を $\boldsymbol{c}$ だけ平行移動した集合である．

$$\mathrm{Fix}(f) = \boldsymbol{c} + V_A(1) := \{\, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \in V_A(1) \,\}$$

一方で，f に固定点がなければ（例えば滑り鏡映のような），f は直交変換の中には現れない種類の合同変換であり，こちらは平行移動を合成したからこそ現れる合同変換である．

つまるところ，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に固定点があれば f には T_A と同じ名前を付け，固定点がなければ新たな名前を付けたいのである．その固定点の有無を定理 7.3 を使って $\boldsymbol{b} \in V_A(1)^\perp$ か $\boldsymbol{b} \notin V_A(1)^\perp$ かによって類別していけば，定理 7.1, 7.2 のような分類に至る．

8　鏡映の個数

本節では $\mathbb{R}^n$ の任意の合同変換が高々 $n+1$ 個の鏡映の合成に分解できることを示す．以下，$(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．

補題 8.1． $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ を固定する $\mathbb{R}^n$ の合同変換は恒等変換に限る．

証明 $\mathbb{R}^n$ の合同変換 f が $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n$ を固定するとする．f は原点を固定するので定理 1.3 から，ある $A \in O(n)$ によって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける．さらに，$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{e}_n$ だから

$$A = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 & \cdots & A\boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = E$$

より，f は恒等変換である．□

定理 8.1． $\mathbb{R}^n$ の合同変換は $n+1$ 個以下の鏡映の合成に分解できる．

証明 f を $\mathbb{R}^n$ の合同変換とする．$\mathbb{R}^n$ の恒等変換または鏡映であって，次を満たす $\sigma_0, \sigma_1 \ldots, \sigma_n$ が存在することを示せばよい．

$$f = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$$

まず，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ならば σ_0 を恒等変換とし，$f(\boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{0}$ と $f(\boldsymbol{0})$ の垂直二等分超平面 H_0 に関する鏡映を σ_0 として，$f_0 = \sigma_0 \circ f$ とする．このとき，$f_0(\boldsymbol{0}) = \sigma_0(f(\boldsymbol{0})) = \boldsymbol{0}$ より，f_0 は $\boldsymbol{0}$ を固定する合同変換である．

次に，$f_0(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1$ ならば σ_1 を恒等変換とし，$f_0(\boldsymbol{e}_1) \neq \boldsymbol{e}_1$ ならば $\boldsymbol{e}_1$ と $f_0(\boldsymbol{e}_1)$ の垂直二等分超平面 H_1 に関する鏡映を σ_1 として，$f_1 = \sigma_1 \circ f_0$ とすると $f_1(\boldsymbol{e}_1) = \sigma_1(f_0(\boldsymbol{e}_1)) = \boldsymbol{e}_1$ である．さらに，$f_1(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．実際，σ_1 が恒等変換なら明らかで，H_1 に関する鏡映なら

$$d(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{0}) = d(f_0(\boldsymbol{e}_1), f_0(\boldsymbol{0})) = d(f_0(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{0})$$

より，$\boldsymbol{0} \in H_1$ だから $f_1(\boldsymbol{0}) = \sigma_1(f_0(\boldsymbol{0})) = \sigma_1(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．従って，σ_1 がいずれの場合も f_1 は $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1$ を固定する合同変換である．

以下，これを繰り返して f_i $(i = 1, \ldots, n)$ を構成する．すなわち，$f_{i-1}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ ならば σ_i を恒等変換とし，$f_{i-1}(\boldsymbol{e}_i) \neq \boldsymbol{e}_i$ ならば $\boldsymbol{e}_i$ と $f_{i-1}(\boldsymbol{e}_i)$ の垂直二等分超平面 H_i に関する鏡映を σ_i として，$f_i =: \sigma_i \circ f_{i-1}$ とする．このとき，各 f_i は $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i$ を固定する合同変換である．特に，f_n は $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を固定するので，補題 8.1 から f_n は恒等変換である．よって，

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_n = \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1 \circ \sigma_0 \circ f$$

より f は以下のように $n+1$ 個の鏡映または恒等変換の合成に分解できる．

$$f = (\sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1 \circ \sigma_0)^{-1} = \sigma_0^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ \cdots \circ \sigma_n^{-1} = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$$

□

9　$\mathbb{R}^n$ の合同変換群

$\mathbb{R}^n$ の合同変換に関して群論的にまとめておく．まとめるだけで特にこれ以上の話題は用意していないが，普通の数学書ならここからが本題である．

定義. $\mathbb{R}^n$ の合同変換全体は写像の合成により群をなす．この群を $\mathbb{R}^n$ の合同変換群といい，$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ で表す．

定義. $\mathbb{R}^n$ の平行移動全体

$$\mathbb{T}(\mathbb{R}^n) := \{\, t_{\boldsymbol{b}} \mid \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \,\}$$

は $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ の部分群をなす．明らかに $\mathbb{T}(\mathbb{R}^n)$ は加法群 $\mathbb{R}^n$ に群として同型である．

定義. $\mathbb{R}^n$ の直交変換全体 $O(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ の部分群をなす．これを直交変換群という．明らかに $O(\mathbb{R}^n)$ は n 次直交群 $O(n) := \{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E \,\}$ に群として同型である．

定理 1.4 から写像

$$\varphi : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to O(\mathbb{R}^n)\ ;\ f \mapsto t_{-f(\boldsymbol{0})} \circ f$$

は全射群準同型であり，明らかに $\ker\varphi = \mathbb{T}(\mathbb{R}^n)$ なので，$\mathbb{T}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})^n$ の正規部分群である．従って，群準同型定理から

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{T}(\mathbb{R}^n) \simeq O(\mathbb{R}^n)$$

である．これより合同変換群の以下のような半直積表示が得られる．

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = O(\mathbb{R}^n) \ltimes \mathbb{T}(\mathbb{R}^n) \simeq O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$$

2 つの合同変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$ と $f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成 $f_1 \circ f_2$ は

$$(f_1 \circ f_2)(\boldsymbol{x}) = f_1(f_2(\boldsymbol{x})) = f_1(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2) = A_1(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2) + \boldsymbol{b}_1 = (A_1A_2)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2)$$

と書ける．これより半直積表示 $f_1 = (A_1, \boldsymbol{b}_1),\ f_2 = (A_2, \boldsymbol{b}_2)$ での群演算が次のように書ける．

$$(A_1, \boldsymbol{b}_1)(A_2, \boldsymbol{b}_2) = (A_1A_2, \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2)$$

また，n 次特殊直交群 $SO(n) := \{\, A \in O(n) \mid \det A = 1 \,\}$ は $O(n)$ の部分群であり，直交行列の行列式は ± 1 なので

$$\det : O(n) \to \{\, \pm 1 \,\}\ ;\ A \mapsto \det A$$

は全射群準同型である．明らかに $\ker(\det) = SO(n)$ なので，$SO(n)$ は $O(n)$ の正規部分群である．従って，群準同型定理から

$$O(n)/SO(n) \simeq \{\, \pm 1 \,\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である．特に，$R_{\mathbf{0}} := \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1) \in O(n) \setminus SO(n)$ に対して $R_{\mathbf{0}}^2 = E$ より，以下の $O(n)$ の半直積表示が得られる．

$$O(n) = \{\, E, R_{\mathbf{0}} \,\} \ltimes SO(n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes SO(n)$$

本稿では，$\mathbb{R}^n$ の合同変換を固定点の有無によって直交変換の仲間とそうでないものに分けた．合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ に固定点 $\boldsymbol{c}$ があれば，式 (7.1) から

$$f = t_{\boldsymbol{c}} \circ T_A \circ t_{-\boldsymbol{c}} = t_{\boldsymbol{c}} \circ T_A \circ t_{\boldsymbol{c}}^{-1}$$

と書ける．これは，$\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ の正規部分群 $\mathbb{T}(\mathbb{R}^n)$ に関して f が直交変換 T_A と同じ共役類に属することを意味している．固定点の有無によって合同変換を分けるのは，合同変換群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ を正規部分群 $\mathbb{T}(\mathbb{R}^n)$ による共役類に分類したときに，直交変換と同じクラスに属するものとそうでないものに分けていることに相当する．

10 $\mathbb{R}^n$ の合同変換と $n+1$ 次正方行列

$\mathbb{R}^n$ の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ は $n+1$ 次正方行列と $n+1$ 次列ベクトルの積を用いて

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．さらに，合同変換 $f_1(\boldsymbol{x}) = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1$, $f_2(\boldsymbol{x}) = A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2$ の合成

$$f_1 \circ f_2(\boldsymbol{x}) = f_1\left(f_2\left(\boldsymbol{x}\right)\right) = f_1\left(A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2\right) = A_1A_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2$$

は $n+1$ 次行列同士の積として

$$\begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \boldsymbol{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & \boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

と表せる．これにより $\mathbb{R}^n$ の合同変換を $n+1$ 次正方行列の演算で記述できる．これは $\mathbb{R}^n$ のアフィン変換を $\mathbb{P}^n$ の射影変換として扱う方法でもある．

演習問題

1. $\mathbb{R}^n$ の一般の位置にある $n+1$ 個の点，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n}$ が 1 次独立となる点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ を固定する合同変換は恒等変換に限ることを証明しよう．

2. $\mathbb{R}^n$ の内積が正定値対称行列 G によって $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}G\boldsymbol{y}$ と与えられるとき，これまでの議論はどこがどう変わるか考えよう．

3. 内積に正定値性を仮定しない場合，これまでの議論はどこがどう変わるか考えよう．

4. $\mathbb{R}^n$ 上の距離が通常とは異なるとき，これまでの議論はどこがどう変わるか考えよう．