1 変数多項式の終結式

多項式の係数はいずれも整域 R の元としておく．こうしておくと多項式の係数を商体 $\mathrm{Rat}(R)$ の元として分数に拡張できる．さらに方程式の解は代数閉包 $\overline{\mathrm{Rat}(R)}$ 上で考えられる．もしかしたら R を UFD くらいに仮定しといた方が安全かもしれない．

定義 (終結式). 多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_m x^i$ と $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_n x^j$ $(a_m, b_n \neq 0)$ に対して

$$\mathrm{Syl}(f,g) := \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}m \end{array}$$

を f と g の**シルベスター行列**といい，その行列式

$$\mathrm{resul}(f,g) := \det(\mathrm{Syl}(f,g))$$

を f と g の**終結式 (resultant)** という．なお，零でない定数 $g(x) = b_0 \neq 0$ に対しては

$$\mathrm{Syl}(f,b_0) = \begin{bmatrix} b_0 & & \\ & \ddots & \\ & & b_0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{resul}(f,b_0) = b_0^m$$

と定める．同様に，$\mathrm{resul}(a_0,g) = a_m^n$ とする．さらに，零多項式に対しては $\mathrm{resul}(f,0) = \mathrm{resul}(0,g) = 0$ と定める．

例 1. $f(x) = x^3+1$, $g(x) = x^2+2x+1$, $h(x) = x^2+1$ とする．

$$\mathrm{resul}(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathrm{resul}(f,h) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2 変数多項式の終結式