

## 1 変数多項式の終結式

多項式の係数はいずれも整域  $R$  の元としておく．こうしておくと多項式の係数を商体  $\text{Rat}(R)$  の元として分数に拡張できる．さらに方程式の解は代数閉包  $\overline{\text{Rat}(R)}$  上で考えられる．もしかしたら  $R$  を UFD くらいに仮定しといた方が安全かもしれない．

**定義 (終結式).** 多項式  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_m x^i$  と  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_n x^j$  ( $a_m, b_n \neq 0$ ) に対して

$$\text{Syl}(f, g) := \left[ \begin{array}{ccccccccc} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} n \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m$$

を  $f$  と  $g$  のシルベスター行列といい、その行列式

$$\text{resul}(f, g) := \det(\text{Syl}(f, g))$$

を  $f$  と  $g$  の終結式 (**resultant**) という．なお、零でない定数  $g(x) = b_0 \neq 0$  に対しては

$$\text{Syl}(f, b_0) = \begin{bmatrix} b_0 & & \\ & \ddots & \\ & & b_0 \end{bmatrix}, \quad \text{resul}(f, b_0) = b_0^m$$

と定める．同様に、 $\text{resul}(a_0, g) = a_0^n$  とする．さらに、零多項式に対しては  $\text{resul}(f, 0) = \text{resul}(0, g) = 0$  と定める．

**例 1.**  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ,  $h(x) = x^2 + 1$  とする．

$$\text{resul}(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \text{resul}(f, h) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

## 2 変数多項式の終結式