微分積分 問題集

2024 年 3 月 19 日

1　数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

(1) $\dfrac{\sin n}{n}$　　(2) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$　　(3) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n},\quad a_1=-2$$

(1) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう.

(2) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう.

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

(4) a_2^2 , a_3^2 , a_4^4 を具体的に計算し，小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{1}{a_n^2},\quad a_1=3$$

2　関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\tan^{-1}x}{x}$

2.2 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

(1) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x>0) \\ -3x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x>0) \\ \cos^{-1}x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x>0) \\ \sin^{-1}A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x} & (x>0) \\ x^2+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(6) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ A & (x=0)\end{cases}$

3　導関数

3.1 次の関数 f が $x=0$ で微分可能か否かを判定し，微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log|x| & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1,1)$ で C^2 級となるような定数 A,B,C の値を求めよう．

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0) \\ Ax^2+Bx+C & (x\leqq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し，3 次関数 $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ が

$$f(0)=g(0),\quad f'(0)=g'(0),\quad f''(0)=g''(0),\quad f^{(3)}(0)=g^{(3)}(0)$$

を満たすとき，$g(x)$ の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 の値を求めよう．

(1) $f(x)=\sin x$　　(2) $f(x)=e^x$　　(3) $f(x)=\log(1+x)$

4　不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ A & (x\leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x^x & (x>0) \\ -x+A & (x\leqq 0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x^3} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$

4.2 次の関数 f が $x=0$ で微分可能となるような定数 A,B の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^2} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$

5　テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め，小数表示しよう．なお，$\pi = 3.141592653589793\cdots$ であることは適宜利用しよう．

(1) $\sin 3$　(2) $\cos 1.6$　(3) $\sqrt{e}$　(4) $\log 1.2$　(5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\log 2$　(2) $\log 3$　(3) $\log 5$

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\sqrt{1.2}$　(2) $\sqrt[3]{1.01}$　(3) $\sqrt[5]{0.8}$