

微分積分 問題集

2024 年 4 月 1 日

1 数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

$$(1) \frac{\sin n}{n}$$

$$(2) \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

$$(3) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = -2$$

(1) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう

(2) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう.

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

(4) a_2^2, a_3^2, a_4^4 を具体的に計算し, 小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{1}{a_n^2}, \quad a_1 = 3$$

2 関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x}$$

2.2 次の関数 f が $x = 0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & (x > 0) \\ -3x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ \cos^{-1} x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \left(x - \frac{1}{2}\right) & (x > 0) \\ \sin^{-1} A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x} & (x > 0) \\ x^2 + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

3 導関数

3.1 次の関数 f が $x = 0$ で微分可能か否かを判定し、微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1, 1)$ で C^2 級となるような定数 A, B, C の値を求めよう.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (x > 0) \\ Ax^2 + Bx + C & (x \leq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し、3 次関数 $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ が

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \quad f^{(3)}(0) = g^{(3)}(0)$$

を満たすとき、 $g(x)$ の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \sin x \quad (2) f(x) = e^x \quad (3) f(x) = \log(1+x)$$

4 不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x = 0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^x & (x > 0) \\ -x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

4.2 次の関数 f が $x = 0$ で微分可能となるような定数 A, B の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases}$$

5 テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め、小数表示しよう。なお、 $\pi = 3.141592653589793 \dots$ であることは適宜利用しよう。

(1) $\sin 3$ (2) $\cos 1.6$ (3) \sqrt{e} (4) $\log 1.2$ (5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して、 $\log 2$ の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して、以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

(1) $\sqrt{1.2}$ (2) $\sqrt[3]{1.01}$ (3) $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数 f に対し、 $f(0.5)$ の値の小数点以下第 2 位までを確定させよう。

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす C^∞ 級関数 f に対し、 f の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう。また、指定された a に対して $P(a)$ の値を求めよう。

(1) $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2) $2f''(x) + 5f'(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3) $f(x) + \log(f'(x)) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 C^∞ 級関数 f が以下の条件を満たすとする。

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -1$$

このとき、 f の $x = \pi$ の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x - \pi)^4$$

と $P(3)$ の値を求めよう。

6 偏微分

6.1 $f(x, y) = -2x^3 - y^2 + x^2y + 1$ とし, $P = (4, 3)$ とする.

(1) P における f の勾配 $\nabla f(P)$ を求めよう.

(2) P での $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ 方向の方向微分 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{n}) - f(P)}{h}$ を求めよう.

(3) 平面の単位ベクトル \mathbf{n} の中で, 方向微分 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P)$ が最小となるものを求めよう.

6.2 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 1$ とし, $P_0 = (3, 4)$ とする.

(1) 平面ベクトル $\mathbf{d}_0 = -\nabla f(P_0)$ を求めよう.

(2) $f(P_0 + \alpha \mathbf{d}_0)$ を最小にする α を α_0 とする. α_0 を求めよう.

(3) 内積 $\nabla f(P_0 + \alpha \mathbf{d}_0) \cdot \mathbf{d}_0$ が 0 となる α を求めよう.

(4) $P_1 = P_0 + \alpha_0 \mathbf{d}_0$ とする. $f(P_1)$ を求めよう.

(5) 上記を繰り返す. つまり, $f(P_k + \alpha \mathbf{d}_k)$ を最小にする α を α_k とし,

$$P_{k+1} = P_k + \alpha_k \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{d}_k = -\nabla f(P_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. $f(P_1), f(P_2), f(P_3), \dots$ が f の最小値 -1 に近づいていることを確認しよう.

このようにして関数の最小値 (極小値) を探す方法は最急降下法と呼ばれる.

6.3 平面曲線 $10x^3 - 3x^2y - 26xy^2 - 14y^3 - 51x^2 - 134xy - 78y^2 - 110x - 117y - 53 = 0$ 上の点 $(0, -1)$ における接線の方程式を求めよう.

7 2変数関数の極値

7.1 次の関数 f の極値とそれを実現する点を全て求めよう.

(1) $f(x, y) = (x - y)^2 + y^3$

(2) $f(x, y) = -x^4 - x^2 - 2xy - y^2$

7.2 有界閉領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ における関数 $f(x, y) = x^2 - y^3$ の最大値と最小値及びそれらを実現する点を全て求めよう.

7.3 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ の最大値と最小値を求めよう.

解答

- 1.1 (1) $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.
- (2) $0 \leq \left| \frac{1+(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.
- (3) k を $2^k < n \leq 2^{k+1}$ となる自然数とする. $n \rightarrow \infty$ のとき $k \rightarrow \infty$ なので, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.
- 1.2 (1) $a_1 = -2 < 0$ と漸化式から任意の n で $a_n < 0$ なので, $\{a_n\}$ は上に有界である.
- (2) まず, $a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$ である. $n \geq 2$ に対しては $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2 \cdot 2a_n} \geq 0$ である. ここで, a_1 が有理数なものと漸化式の形から $\{a_n\}$ の各項は有理数である. 従って, $a_{n-1}^2 \neq 2$ なので $a_{n+1} - a_n > 0$ である. よって, $\{a_n\}$ は狭義単調増加である.
- (3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とする. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$ より, $\alpha^2 = 2$ である. $a_n < 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$.
- (4) $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$, $a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots$, $a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$
- 1.3 $a_1 = 3 > 0$ と漸化式から任意の n で $a_n > 0$ なので, $\{a_n\}$ は下に有界である. さらに, $n \geq 2$ に対して $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6 \cdot 3a_n^2} \geq 0$ なので, $\{a_n\}$ は ($n \geq 2$ で) 単調減少である. よって, $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とすれば, 前問と同様に漸化式から $\alpha = \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ が成り立つので, $\alpha^3 = 3$ である. 従って, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{3}$.
- 2.1 (1) $0 \leq \left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +0$) より, $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$.
- (2) $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
- (3) $\frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1} x}{x}$ と $\left| \frac{\tan^{-1} x}{x} \right| < \frac{\pi/2}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1$.
- 2.2 (1) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$ より, $A = 3$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$ より, $A = 1 - \frac{\pi}{2}$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \sin^{-1} A = f(0)$ より, $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1} A$ である. $X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおくと $\tan X = -\frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ なので, $A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- (4) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$ より, $A = \frac{3}{2}$.
- (5) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$ より, $A = 0$.
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $f(0) = A$ より, $A = 0$.

3.1 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log |x| = -\infty$ より, 微分不可能.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ より, 微分可能で $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(3) $0 \leq \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) より, 微分可能で $f'(0) = 0$.

(4) $x > 0$ で $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$ より, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ が存在しないから微分不可能.

3.2 f は $x = 0$ で連続なので, $C = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \cos 0 = 1$ である. また, f は $x = 0$ で微分可能なので $f'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ である. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (Ax + B) = B$ より $f'(0) = B = 0$ である. さらに, f' は $x = 0$ で微分可能なので $f''(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ である. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\sin x}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} 2A = 2A$ より $f''(0) = -1, A = -\frac{1}{2}$ である. 最後に, $\lim_{x \rightarrow +0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +0} -\cos x = -1$, $\lim_{x \rightarrow -0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-\frac{1}{2}x^2 + 1)'' = -1$ より $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0)$ なので, f'' は $x = 0$ で連続である.

3.3 $g(0) = a_0, g'(0) = a_1, g''(0) = 2a_2, g^{(3)}(0) = 6a_3$ より $a_0 = g(0) = f(0), a_1 = g'(0) = f'(0), a_2 = g''(0)/2 = f''(0)/2, a_3 = g^{(3)}(0)/6 = f^{(3)}(0)/6$ である.

(1) $a_0 = \sin 0 = 0, a_1 = \cos 0 = 1, a_2 = -\frac{1}{2} \sin 0 = 0, a_3 = -\frac{1}{6} \cos 0 = -\frac{1}{6}$

(2) $a_0 = e^0 = 1, a_1 = e^0 = 1, a_2 = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$

(3) $a_0 = \log(1+0) = 0, a_1 = (1+0)^{-1} = 1, a_2 = \frac{-(1+0)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{2(1+0)^{-3}}{6} = \frac{1}{3}$

4.1 (*) の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \stackrel{(*)}{=} 0$

(2) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \log x} \stackrel{(*)}{=} e^0 = 1$

(3) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{6}$

(4) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} \stackrel{(*)}{=} 3$

4.2 (*) の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1) f は $x = 0$ で連続なので $B = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ である. f は $x = 0$ で微分可能なので $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - x}{x^2} \stackrel{(*)}{=} 0$ と $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} A = A$ が一致するから $A = 0$.

(2) f は $x = 0$ で連続なので $B = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} \stackrel{(*)}{=} 0$ である. f は $x = 0$ で微分可能なので $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3}$ と $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} A = A$ が一致するから $A = \frac{1}{3}$.

5.1 (1) $f(x) = \sin x$ とすると $\sin 3 = f(3)$ であり, 3 は π に近い. π に近い x に対し

$f(x)$ を 3 次式 $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!} (x - \pi)^n = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{6}$ で近似し, その誤

差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から $R(3) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (3 - \pi)^4 = \frac{\sin c}{24} (3 - \pi)^4$, $3 < c < \pi$ を満たす c がある. $|\sin c| < 1$ なので, $|R(3)| < \frac{(\pi - 3)^4}{24} < \frac{(3.15 - 3)^4}{24} = 0.00625 < 0.01$ より近似値 $g(3) = 0.141 \dots$ の誤差は 0.01 以内.

(2) $f(x) = \cos x$ とすると $\cos 1.6 = f(1.6)$ であり, 1.6 は $\frac{\pi}{2} = 1.57 \dots$ に近い.

$f(x)$ と 3 次近似式 $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!} (x - \frac{\pi}{2})^n = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{6}$ との誤差

を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から $R(1.6) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (1.6 - \frac{\pi}{2})^4 = \frac{\cos c}{24} (1.6 - \frac{\pi}{2})^4$, $\frac{\pi}{2} < c < 1.6$ を満たす c がある. $|\cos c| < 1$ なので, $|R(1.6)| < \frac{(1.6 - \frac{\pi}{2})^4}{24} < 0.01$ より近似値 $g(1.6) = -0.029 \dots$ の誤差は 0.01 以内.

(3) $f(x) = e^x$ とすると $\sqrt{e} = f(\frac{1}{2})$ である. $f(x)$ と 3 次近似式 $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$

$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ との誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から $R(\frac{1}{2}) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (\frac{1}{2})^4 = \frac{e^c}{384}$, $0 < c < \frac{1}{2}$ を満たす c がある. $e^c < e^{\frac{1}{2}} < 3$ なので, $|R(\frac{1}{2})| < \frac{3}{384} < 0.01$ より近似値 $g(\frac{1}{2}) = \frac{79}{48} = 1.6458 \dots$ の誤差は 0.01 以内.

(4) $f(x) = \log(1 + x)$ とすると $\log 1.2 = f(0.2)$ である. $f(x)$ と 2 次近似式 $g(x) =$

$\sum_{n=0}^2 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^2}{2}$ との誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理か

ら $R(0.2) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!} (0.2)^3 = \frac{1}{375(1+c)^3}$, $0 < c < 0.2$ を満たす c がある. $\frac{1}{(1+c)^3} < 1$ な

ので, $|R(0.2)| < \frac{1}{375} < 0.01$ より近似値 $g(0.2) = 0.18$ の誤差は 0.01 以内.

(5) $f(x) = \tan^{-1} x$ とすると $\tan^{-1} 0.02 = f(0.02)$ である. 1 次近似式 $g(x) = f(0) +$

$f'(0)x = x$ と $f(x)$ の誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から

$R(0.02) = \frac{f^{(2)}(c)}{2} (0.02)^2 = -\frac{c}{1250(c^2+1)^2}$, $0 < c < 0.02$ を満たす c がある. $\frac{c}{(c^2+1)^2} < \frac{0.02}{(0.02^2+1)^2} < 0.02$ なので, $|R(0.02)| < \frac{0.02}{1250} < 0.01$ より近似値 $g(0.02) = 0.02$ の誤差

は 0.01 以内.

5.2 $\log 2 = f(\frac{1}{3})$ である. f とその 7 次近似式 $g(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$ との誤差を

$R(x) = f(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から $R(\frac{1}{3}) = \frac{1}{52488} \left(\frac{1}{(1-c)^8} - \frac{1}{(1+c)^8} \right)$, $0 < c < \frac{1}{3}$ を満たす c がある. $0 < R(\frac{1}{3}) < \frac{255}{524288}$ なので, $g(\frac{1}{3}) < f(\frac{1}{3}) < g(\frac{1}{3}) + \frac{255}{524288}$ である. よって, $0.6931 < \log 2 < 0.6937$ より小数第 3 位までが 0.693 と確定する.

5.3 (1) $\sqrt{1.2} = f_2(0.2)$ である. f_2 と 2 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ との誤差を $R(x) =$

$f_2(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から $R(0.2) = \frac{1}{2000(1+c)^{5/2}}$, $0 < c < 0.2$ を満たす c がある. $0 < R(0.2) < \frac{1}{2000}$ なので, $g(0.2) < f(0.2) < g(0.2) + \frac{1}{2000}$ である.

よって, $1.095 < \sqrt{1.2} < 1.0955$ より小数点第 3 位までが 1.095 と確定する.

(2) $\sqrt[3]{1.01} = f_3(0.01)$ である. f_3 とその 1 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{3}$ との誤差を $R(x) = f_3(x) - g(x)$ とすると, テイラーの定理から $R(0.01) = -\frac{1}{90000(1+c)^{5/3}}, 0 < c < 0.01$ を満たす c がある. $-\frac{1}{90000} < R(0.01) < 0$ なので, $g(0.01) - \frac{1}{90000} < f_3(0.01) < g(0.01)$ より, $1.00332 < \sqrt[3]{1.01} < 1.00334$ から小数点第 3 位までが 1.003 と確定する.

(3) $\sqrt[5]{0.8} = f_5(-0.2)$ である. 3 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3$ で近似すれば, テイラーの定理から誤差は $-\frac{6}{15625} < R(-0.2) < 0$ と評価できる. よって, $0.9564 < \sqrt[5]{0.8} < 0.9568$ より, 小数第 3 位までが 0.956 と確定する.

5.4 $x = 0$ を中心とする f の 6 次近似式を $g(x)$ とし, その誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とする. $f'(x) = e^{-x^2}$ より f の高階導関数は $f''(x) = -2xe^{-x^2}, f^{(3)}(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1), \dots$ と逐次計算できるので, $f(0) = 0$ と合わせて f の 6 次近似式は $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$ と求められる. テイラーの定理より $R(0.5) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}(0.5)^7 = \frac{e^{-c^2}(8c^6 - 60c^4 + 90c^2 - 15)}{80640}, 0 < c < 0.5$ を満たす c がある. ここで 3 次関数 $p(t) = 8t^3 - 60t^2 + 90t - 15$ を考えると, $0 < c^2 < 0.25$ なので $-15 < p(c^2) < 3.875$ より, $|R(0.5)| < \left| \frac{e^{-c^2}p(c^2)}{80640} \right| < \left| \frac{p(c^2)}{80640} \right| < \frac{15}{80640} = \frac{1}{5376}$ である. よって, $g(0.5) - \frac{1}{5376} < f(0.5) < g(0.5) + \frac{1}{5376}$ より $0.4612 < f(0.5) < 0.4617$ である. これより小数第 2 位までが 0.46 と確定する.

5.5 (1) $f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x)$ より $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 1$ である. これより $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}, P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6331}{3840} = 1.6486\dots$.

(2) まず, $f''(0) = \frac{-5f'(0)+3f(0)}{2} = \frac{1}{4}$ である. 次に, $2f^{(3)}(x) + 5f''(x) - 3f'(x) = 0$ より $f^{(3)}(0) = \frac{-5f''(0)+3f'(0)}{2} = \frac{1}{8}$ である. 以下同様に $f^{(4)}(0) = \frac{-5f^{(3)}(0)+3f''(0)}{2} = \frac{1}{16}, f^{(5)}(0) = \frac{-2f^{(4)}(0)+3f^{(3)}(0)}{2} = \frac{1}{32}$ である. これより $P(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \frac{x^5}{3840}, P(1) = \frac{6331}{3840} = 1.6486\dots$.

(3) $f'(x) = e^{-f(x)}$ より $f'(0) = e^{-f(0)} = 1, f'(x) + \frac{f''(x)}{f'(x)} = 0$ から $f''(x) = -f'(x)^2$ より $f''(0) = -f'(0)^2 = -1, f^{(3)}(x) = -2f'(x)f''(x) = 2f'(x)^3$ より $f^{(3)}(0) = 2f'(0)^3 = 2, f^{(4)}(x) = 6f'(x)^2f''(x) = -6f''(x)^2$ より $f^{(4)}(0) = -6f''(0)^2 = -6, f^{(5)}(x) = -12f''(x)f^{(3)}(x)$ より $f^{(5)}(0) = -12f''(0)f^{(3)}(0) = 24$. これより $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}, P(0.2) = 0.1823\dots$.

5.6 $f''(\pi) = -f(\pi) = 0, f^{(3)}(\pi) = -f'(\pi) = 1, f^{(4)}(\pi) = -f''(\pi) = 0$ より $P(x) = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{6}, P(3) = 0.141\dots$.

6.1 (1) $\nabla f(x, y) = (-6x^2 + 2xy, x^2 - 2y)$ より $\nabla f(P) = \nabla f(4, 3) = (-72, 10)$.

(2) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(n_1h+4)^3 - (n_2h+3)^2 + (n_1h+4)^2(n_2h+3) + 89}{h} = -72n_1 + 10n_2$.

(3) (2) より $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{n}$ なので, $\mathbf{n} = -\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \frac{1}{\sqrt{1321}}(36, -5)$ のとき最小.

6.2 (1) $\nabla f(x, y) = (4x, 6y)$ より $\mathbf{d}_0 = -\nabla f(3, 4) = (-12, -24)$.

(2) $f(P_0 + \alpha \mathbf{d}_0) = f(3 - 12\alpha, 4 - 24\alpha) = 2016\alpha^2 - 720\alpha + 65$ なので, $\frac{d}{d\alpha} f(P_0 + \alpha \mathbf{d}_0) = 4032\alpha - 720 = 0$ を解いて $\alpha_0 = \frac{5}{28}$.

(3) $\nabla f(3 - 12\alpha, 4 - 24\alpha) \cdot (-12, -24) = 4032\alpha - 720 = 0$ を解いて $\alpha = \alpha_0 = \frac{5}{28}$.

(4) $f(P_1) = f\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{7}$.

(5) $f(P_1) = \frac{5}{7} = 0.7142\cdots$, $f(P_2) = f\left(\frac{6}{77}, \frac{8}{77}\right) = -\frac{515}{539} = -0.955\cdots$, $f(P_3) = f\left(\frac{12}{539}, -\frac{4}{539}\right) = -\frac{41455}{41503} = -0.998\cdots$ と確かに -1 に近づいている.

6.3 $f(x, y) = 10x^3 - 3x^2y - \cdots$ とおく. $f(0, -1) = 0$, $f_x(0, -1) = -2 \neq 0$ なので陰関数定理から $x = 0$ の近くで $f(x, g(x)) = 0$, $g(0) = -1$ を満たす微分可能な関数 g があり, $g'(0) = -\frac{f_x(0, -1)}{f_y(0, -1)}$ である. つまり, $(0, -1)$ の近くで曲線 $f(x, y) = 0$ は $y = g(x)$ と一致するので, $(0, -1)$ における接線の方程式は $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$ である. これを整理して $f_x(0, -1)(x - 0) + f_y(0, -1)(y + 1) = 0$ より接線の方程式は $-2x - 3y - 3 = 0$.

7.1 (1) f の停留点は $(0, 0)$ のみで, $(0, 0)$ におけるヘシアン $H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12y$ の値は 0 なので, ヘシアンによる極値判定法は役に立たない. $f(t, t) = t^3$ より, $t > 0$ に対して $f(-t, -t) < 0 = f(0, 0) < f(t, t)$ なので, $(0, 0)$ のどんな近傍でも $f(0, 0)$ は最大にも最小にもならない. つまり, $f(0, 0)$ は極値ではないので, f は極値を持たない.

(2) f の停留点は $(0, 0)$ のみで, $(0, 0)$ におけるヘシアン $H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 24x^2$ の値は 0 なので, ヘシアンによる極値判定法は役に立たない. 一方で, $f(x, y) = -x^4 - (x + y)^2 \leq 0$ なので明らかに f は $(0, 0)$ で極大値 0 をとる.

7.2 D の内部での停留点と境界上で極値をとる点における値を比べる. f の停留点は $(0, 0)$ のみでこれは D の内部にあり, $f(0, 0) = 0$ である. D は双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ と 2 直線 $L_1 : y = 1$ と $L_2 : y = -1$ で囲まれる閉領域である. ラグランジュの未定乗数法から, f は C 上では 4 点 $(x, y) = (\pm 1, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2}{3}\right) \in D$ で極値をとり, $f(\pm 1, 0) = 1$, $f\left(\pm \frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{31}{27}$ である. また, $f(x, \pm 1) = x^2 \mp 1$ なので, 2 直線 L_1, L_2 上ではそれぞれ $(0, 1), (0, -1)$ で極値をとり, $f(0, \pm 1) = \mp 1$ である. さらに, C, L_1 の交点 $(\pm\sqrt{2}, 1)$ での値は $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 1$ で, C, L_2 の交点 $(\pm\sqrt{2}, -1)$ での値は $f(\pm\sqrt{2}, -1) = 3$ である. 以上から, f は $(0, 1)$ で最小値 -1 をとり, $(\pm\sqrt{2}, -1)$ で最大値 3 をとる.

7.3 明らかに $f(x, y) \geq 0$ かつ $f(x, 0) = f(y, 0) = 0$ なので f の最小値は 0 である. また, $(x, y) \neq (0, 0)$ での f の停留点は $t \neq 0$ によって $(0, t), (t, 0), (t, \pm t^2)$ と書ける点全てなので, $f(t, \pm t^2) = \frac{1}{2}$ ($t \neq 0$) が f の最大値の候補である. ここで, $k > \frac{1}{2}$ のとき, $k - f(x, y) = \frac{kx^8 - x^4y^2 + ky^4}{x^8 + y^4} = \frac{k(x^4 - y^2)^2 + (2k - 1)x^4y^2}{x^8 + y^4} > 0$ なので $f(x, y) = k$ を満たす (x, y) は存在しない. よって, $f(x, y) \leq \frac{1}{2}$ なので $\frac{1}{2}$ は f の最大値である.