

# 微分積分 問題集

2024 年 3 月 27 日

## 1 数列の極限

1.1 第  $n$  項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

$$(1) \frac{\sin n}{n}$$

$$(2) \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

$$(3) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1.2 数列  $\{a_n\}$  が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = -2$$

(1)  $\{a_n\}$  が上に有界であることを確認しよう

(2)  $\{a_n\}$  が狭義単調増加であることを確認しよう.

(3)  $\{a_n\}$  の極限を求めよう.

(4)  $a_2^2, a_3^2, a_4^4$  を具体的に計算し, 小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列  $\{a_n\}$  の極限を求めよう.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{1}{a_n^2}, \quad a_1 = 3$$

## 2 関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x}$$

2.2 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で連続となるような定数  $A$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & (x > 0) \\ -3x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ \cos^{-1} x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \left(x - \frac{1}{2}\right) & (x > 0) \\ \sin^{-1} A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x} & (x > 0) \\ x^2 + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

### 3 導関数

3.1 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で微分可能か否かを判定し、微分可能なら  $f'(0)$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

3.2 次の関数  $f$  が開区間  $(-1, 1)$  で  $C^2$  級となるような定数  $A, B, C$  の値を求めよう.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (x > 0) \\ Ax^2 + Bx + C & (x \leq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数  $f$  に対し、3 次関数  $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  が

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \quad f^{(3)}(0) = g^{(3)}(0)$$

を満たすとき、 $g(x)$  の係数  $a_0, a_1, a_2, a_3$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \sin x \quad (2) f(x) = e^x \quad (3) f(x) = \log(1+x)$$

### 4 不定形の極限

4.1 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で連続となるような定数  $A$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^x & (x > 0) \\ -x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

4.2 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で微分可能となるような定数  $A, B$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases}$$

## 5 テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め、小数表示しよう。なお、 $\pi = 3.141592653589793 \dots$  であることは適宜利用しよう。

(1)  $\sin 3$                       (2)  $\cos 1.6$                       (3)  $\sqrt{e}$                       (4)  $\log 1.2$                       (5)  $\tan^{-1} 0.02$

5.2  $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$  をうまく利用して、 $\log 2$  の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

5.3  $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$  をうまく利用して、以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

(1)  $\sqrt{1.2}$                                       (2)  $\sqrt[3]{1.01}$                                       (3)  $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数  $f$  に対し、 $f(0.5)$  の値の小数点以下第 2 位までを確定させよう。

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす  $C^\infty$  級関数  $f$  に対し、 $f$  の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう。また、指定された  $a$  に対して  $P(a)$  の値を求めよう。

(1)  $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2)  $2f''(x) + 5f'(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3)  $f(x) + \log(f'(x)) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6  $C^\infty$  級関数  $f$  が以下の条件を満たすとする。

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -1$$

このとき、 $f$  の  $x = \pi$  の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x - \pi)^4$$

と  $P(3)$  の値を求めよう。

## 6 偏微分

6.1  $f(x, y) = -2x^3 - y^2 + x^2y + 1$  とし,  $P = (4, 3)$  とする.

(1)  $P$  における  $f$  の勾配  $\nabla f(P)$  を求めよう.

(2)  $P$  での  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  方向の方向微分  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{n}) - f(P)}{h}$  を求めよう.

(3) 平面の単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の中で, 方向微分  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P)$  が最大となるものを求めよう.

6.2  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 1$  とし,  $P_0 = (3, 4)$  とする.

(1)  $f$  の勾配  $\nabla f(x, y)$  を求めよう.

(2)  $f(P_0 - \alpha \nabla f(P_0))$  を最小にする  $\alpha$  を  $\alpha_0$  とする.  $\alpha_0$  を求めよう.

(3) 内積  $\nabla f(P_0 - \alpha \nabla f(P_0)) \cdot \nabla f(P_0)$  が 0 となる  $\alpha$  を求めよう.

(4)  $P_1 = P_0 - \alpha_0 \nabla f(P_0)$  とする.  $f(P_1)$  を求めよう.

(5) 上記を繰り返す. つまり,  $f(P_k - \alpha \nabla f(P_k))$  を最小にする  $\alpha$  を  $\alpha_k$  とし,

$$P_{k+1} = P_k - \alpha_k \nabla f(P_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

とする.  $f(P_1), f(P_2), f(P_3), \dots$  が  $f$  の最小値  $-1$  に近づいていることを確認しよう.

このようにして関数の最小値 (極小値) を探す方法は最急降下法と呼ばれる.

6.3 平面曲線  $10x^3 - 3x^2y - 26xy^2 - 14y^3 - 51x^2 - 134xy - 78y^2 - 110x - 117y - 53 = 0$  上の点  $(0, -1)$  における接線の方程式を求めよう.

## 解答

- 1.1 (1)  $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  より, はさみうちの原理から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ .
- (2)  $0 \leq \left| \frac{1+(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$  より, はさみうちの原理から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$ .
- (3)  $k$  を  $2^k < n \leq 2^{k+1}$  となる自然数とする.  $n \rightarrow \infty$  のとき  $k \rightarrow \infty$  なので,  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$ .
- 1.2 (1)  $a_1 = -2 < 0$  と漸化式から任意の  $n$  で  $a_n < 0$  なので,  $\{a_n\}$  は上に有界である.
- (2) まず,  $a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$  である.  $n \geq 2$  に対しては  $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2 \cdot 2a_n} \geq 0$  である. ここで,  $a_1$  が有理数なと漸化式の形から  $\{a_n\}$  の各項は有理数である. 従って,  $a_{n-1}^2 \neq 2$  なので  $a_{n+1} - a_n > 0$  である. よって,  $\{a_n\}$  は狭義単調増加である.
- (3) (1), (2) から  $\{a_n\}$  は収束するのでその極限値を  $\alpha$  とする.  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$  より,  $\alpha^2 = 2$  である.  $a_n < 0$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$ .
- (4)  $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$ ,  $a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots$ ,  $a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$
- 1.3  $a_1 = 3 > 0$  と漸化式から任意の  $n$  で  $a_n > 0$  なので,  $\{a_n\}$  は下に有界である. さらに,  $n \geq 2$  に対して  $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6 \cdot 3a_n^2} \geq 0$  なので,  $\{a_n\}$  は ( $n \geq 2$  で) 単調減少である. よって,  $\{a_n\}$  は収束するのでその極限値を  $\alpha$  とすれば, 前問と同様に漸化式から  $\alpha = \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$  が成り立つので,  $\alpha^3 = 3$  である. 従って,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{3}$ .
- 2.1 (1)  $0 \leq \left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +0$ ) より,  $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$ .
- (2)  $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) より,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .
- (3)  $\frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1} x}{x}$  と  $\left| \frac{\tan^{-1} x}{x} \right| < \frac{\pi/2}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) より,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1$ .
- 2.2 (1)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$  より,  $A = 3$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$  より,  $A = 1 - \frac{\pi}{2}$ .
- (3)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \sin^{-1} A = f(0)$  より,  $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1} A$  である.  $X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  とおくと  $\tan X = -\frac{1}{2}$  かつ  $-\frac{\pi}{2} < X < 0$  なので,  $A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .
- (4)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$  より,  $A = \frac{3}{2}$ .
- (5)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$  より,  $A = 0$ .
- (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ ,  $f(0) = A$  より,  $A = 0$ .

3.1 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log |x| = -\infty$  より, 微分不可能.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  より, 微分可能で  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

(3)  $0 \leq \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) より, 微分可能で  $f'(0) = 0$ .

(4)  $x > 0$  で  $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$  より,  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$  が存在しないから微分不可能.

3.2  $f$  は  $x = 0$  で連続なので,  $C = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \cos 0 = 1$  である. また,  $f$  は  $x = 0$  で微分可能なので  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$  である.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (Ax + B) = B$  より  $f'(0) = B = 0$  である. さらに,  $f'$  は  $x = 0$  で微分可能なので  $f''(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}$  である.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\sin x}{x} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} 2A = 2A$  より  $f''(0) = -1, A = -\frac{1}{2}$  である. 最後に,  $\lim_{x \rightarrow +0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +0} -\cos x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-\frac{1}{2}x^2 + 1)'' = -1$  より  $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0)$  なので,  $f''$  は  $x = 0$  で連続である.

3.3  $g(0) = a_0, g'(0) = a_1, g''(0) = 2a_2, g^{(3)}(0) = 6a_3$  より  $a_0 = g(0) = f(0), a_1 = g'(0) = f'(0), a_2 = g''(0)/2 = f''(0)/2, a_3 = g^{(3)}(0)/6 = f^{(3)}(0)/6$  である.

(1)  $a_0 = \sin 0 = 0, a_1 = \cos 0 = 1, a_2 = -\frac{1}{2} \sin 0 = 0, a_3 = -\frac{1}{6} \cos 0 = -\frac{1}{6}$

(2)  $a_0 = e^0 = 1, a_1 = e^0 = 1, a_2 = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$

(3)  $a_0 = \log(1+0) = 0, a_1 = (1+0)^{-1} = 1, a_2 = \frac{-(1+0)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{2(1+0)^{-3}}{6} = \frac{1}{3}$

4.1 (\*) の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1)  $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \stackrel{(*)}{=} 0$

(2)  $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \log x} \stackrel{(*)}{=} e^0 = 1$

(3)  $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{6}$

(4)  $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} \stackrel{(*)}{=} 3$

4.2 (\*) の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1)  $f$  は  $x = 0$  で連続なので  $B = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$  である.  $f$  は  $x = 0$  で微分可能なので  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - x}{x^2} \stackrel{(*)}{=} 0$  と  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} A = A$  が一致するから  $A = 0$ .

(2)  $f$  は  $x = 0$  で連続なので  $B = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} \stackrel{(*)}{=} 0$  である.  $f$  は  $x = 0$  で微分可能なので  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3}$  と  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} A = A$  が一致するから  $A = \frac{1}{3}$ .

5.1 (1)  $f(x) = \sin x$  とすると  $\sin 3 = f(3)$  であり, 3 は  $\pi$  に近い.  $\pi$  に近い  $x$  に対し

$f(x)$  を 3 次式  $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!} (x - \pi)^n = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{6}$  で近似し, その誤

差を  $R(x) = f(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から  $R(3) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (3 - \pi)^4 = \frac{\sin c}{24} (3 - \pi)^4$ ,  $3 < c < \pi$  を満たす  $c$  がある.  $|\sin c| < 1$  なので,  $|R(3)| < \frac{(\pi - 3)^4}{24} < \frac{(3.15 - 3)^4}{24} = 0.00625 < 0.01$  より近似値  $g(3) = 0.141 \dots$  の誤差は 0.01 以内.

(2)  $f(x) = \cos x$  とすると  $\cos 1.6 = f(1.6)$  であり, 1.6 は  $\frac{\pi}{2} = 1.57 \dots$  に近い.

$f(x)$  と 3 次近似式  $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!} (x - \frac{\pi}{2})^n = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{6}$  との誤差

を  $R(x) = f(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から  $R(1.6) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (1.6 - \frac{\pi}{2})^4 = \frac{\cos c}{24} (1.6 - \frac{\pi}{2})^4$ ,  $\frac{\pi}{2} < c < 1.6$  を満たす  $c$  がある.  $|\cos c| < 1$  なので,  $|R(1.6)| < \frac{(1.6 - \frac{\pi}{2})^4}{24} < 0.01$  より近似値  $g(1.6) = -0.029 \dots$  の誤差は 0.01 以内.

(3)  $f(x) = e^x$  とすると  $\sqrt{e} = f(\frac{1}{2})$  である.  $f(x)$  と 3 次近似式  $g(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$

$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  との誤差を  $R(x) = f(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から  $R(\frac{1}{2}) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (\frac{1}{2})^4 = \frac{e^c}{384}$ ,  $0 < c < \frac{1}{2}$  を満たす  $c$  がある.  $e^c < e^{\frac{1}{2}} < 3$  なので,  $|R(\frac{1}{2})| < \frac{3}{384} < 0.01$  より近似値  $g(\frac{1}{2}) = \frac{79}{48} = 1.6458 \dots$  の誤差は 0.01 以内.

(4)  $f(x) = \log(1 + x)$  とすると  $\log 1.2 = f(0.2)$  である.  $f(x)$  と 2 次近似式  $g(x) =$

$\sum_{n=0}^2 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^2}{2}$  との誤差を  $R(x) = f(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理か

ら  $R(0.2) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!} (0.2)^3 = \frac{1}{375(1+c)^3}$ ,  $0 < c < 0.2$  を満たす  $c$  がある.  $\frac{1}{(1+c)^3} < 1$  な

ので,  $|R(0.2)| < \frac{1}{375} < 0.01$  より近似値  $g(0.2) = 0.18$  の誤差は 0.01 以内.

(5)  $f(x) = \tan^{-1} x$  とすると  $\tan^{-1} 0.02 = f(0.02)$  である. 1 次近似式  $g(x) = f(0) +$

$f'(0)x = x$  と  $f(x)$  の誤差を  $R(x) = f(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から

$R(0.02) = \frac{f^{(2)}(c)}{2} (0.02)^2 = -\frac{c}{1250(c^2+1)^2}$ ,  $0 < c < 0.02$  を満たす  $c$  がある.  $\frac{c}{(c^2+1)^2} < \frac{0.02}{(0.02^2+1)^2} < 0.02$  なので,  $|R(0.02)| < \frac{0.02}{1250} < 0.01$  より近似値  $g(0.02) = 0.02$  の誤差

は 0.01 以内.

5.2  $\log 2 = f(\frac{1}{3})$  である.  $f$  とその 7 次近似式  $g(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$  との誤差を

$R(x) = f(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から  $R(\frac{1}{3}) = \frac{1}{52488} \left( \frac{1}{(1-c)^8} - \frac{1}{(1+c)^8} \right)$ ,  $0 <$

$c < \frac{1}{3}$  を満たす  $c$  がある.  $0 < R(\frac{1}{3}) < \frac{255}{524288}$  なので,  $g(\frac{1}{3}) < f(\frac{1}{3}) < g(\frac{1}{3}) + \frac{255}{524288}$  で

ある. よって,  $0.6931 < \log 2 < 0.6937$  より小数第 3 位までが 0.693 と確定する.

5.3 (1)  $\sqrt{1.2} = f_2(0.2)$  である.  $f_2$  と 2 次近似式  $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$  との誤差を  $R(x) =$

$f_2(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から  $R(0.2) = \frac{1}{2000(1+c)^{5/2}}$ ,  $0 < c < 0.2$  を満

たす  $c$  がある.  $0 < R(0.2) < \frac{1}{2000}$  なので,  $g(0.2) < f(0.2) < g(0.2) + \frac{1}{2000}$  である.

よって,  $1.095 < \sqrt{1.2} < 1.0955$  より小数点第 3 位までが 1.095 と確定する.



(2)  $\sqrt[3]{1.01} = f_3(0.01)$  である.  $f_3$  とその 1 次近似式  $g(x) = 1 + \frac{x}{3}$  との誤差を  $R(x) = f_3(x) - g(x)$  とすると, テイラーの定理から  $R(0.01) = -\frac{1}{90000(1+c)^{5/3}}, 0 < c < 0.01$  を満たす  $c$  がある.  $-\frac{1}{90000} < R(0.01) < 0$  なので,  $g(0.01) - \frac{1}{90000} < f_3(0.01) < g(0.01)$  より,  $1.00332 < \sqrt[3]{1.01} < 1.00334$  から小数点第 3 位までが 1.003 と確定する.

(3)  $\sqrt[5]{0.8} = f_5(-0.2)$  である. 3 次近似式  $g(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3$  で近似すれば, テイラーの定理から誤差は  $-\frac{6}{15625} < R(-0.2) < 0$  と評価できる. よって,  $0.9564 < \sqrt[5]{0.8} < 0.9568$  より, 小数第 3 位までが 0.956 と確定する.

5.4  $x = 0$  を中心とする  $f$  の 6 次近似式を  $g(x)$  とし, その誤差を  $R(x) = f(x) - g(x)$  とする.  $f'(x) = e^{-x^2}$  より  $f$  の高階導関数は  $f''(x) = -2xe^{-x^2}, f^{(3)}(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1), \dots$  と逐次計算できるので,  $f(0) = 0$  と合わせて  $f$  の 6 次近似式は  $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$  と求められる. テイラーの定理より  $R(0.5) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}(0.5)^7 = \frac{e^{-c^2}(8c^6 - 60c^4 + 90c^2 - 15)}{80640}, 0 < c < 0.5$  を満たす  $c$  がある. ここで 3 次関数  $p(t) = 8t^3 - 60t^2 + 90t - 15$  を考えると,  $0 < c^2 < 0.25$  なので  $-15 < p(c^2) < 3.875$  より,  $|R(0.5)| < \left| \frac{e^{-c^2}p(c^2)}{80640} \right| < \left| \frac{p(c^2)}{80640} \right| < \frac{15}{80640} = \frac{1}{5376}$  である. よって,  $g(0.5) - \frac{1}{5376} < f(0.5) < g(0.5) + \frac{1}{5376}$  より  $0.4612 < f(0.5) < 0.4617$  である. これより小数第 2 位までが 0.46 と確定する.

5.5 (1)  $f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x)$  より  $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 1$  である. これより  $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}, P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6331}{3840} = 1.6486\dots$ .

(2) まず,  $f''(0) = \frac{-5f'(0)+3f(0)}{2} = \frac{1}{4}$  である. 次に,  $2f^{(3)}(x) + 5f''(x) - 3f'(x) = 0$  より  $f^{(3)}(0) = \frac{-5f''(0)+3f'(0)}{2} = \frac{1}{8}$  である. 以下同様に  $f^{(4)}(0) = \frac{-5f^{(3)}(0)+3f''(0)}{2} = \frac{1}{16}, f^{(5)}(0) = \frac{-2f^{(4)}(0)+3f^{(3)}(0)}{2} = \frac{1}{32}$  である. これより  $P(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \frac{x^5}{3840}, P(1) = \frac{6331}{3840} = 1.6486\dots$ .

(3)  $f'(x) = e^{-f(x)}$  より  $f'(0) = e^{-f(0)} = 1, f'(x) + \frac{f''(x)}{f'(x)} = 0$  から  $f''(x) = -f'(x)^2$  より  $f''(0) = -f'(0)^2 = -1, f^{(3)}(x) = -2f'(x)f''(x) = 2f'(x)^3$  より  $f^{(3)}(0) = 2f'(0)^3 = 2, f^{(4)}(x) = 6f'(x)^2f''(x) = -6f''(x)^2$  より  $f^{(4)}(0) = -6f''(0)^2 = -6, f^{(5)}(x) = -12f''(x)f^{(3)}(x)$  より  $f^{(5)}(0) = -12f''(0)f^{(3)}(0) = 24$ . これより  $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}, P(0.2) = 0.1823\dots$ .

5.6  $f''(\pi) = -f(\pi) = 0, f^{(3)}(\pi) = -f'(\pi) = 1, f^{(4)}(\pi) = -f''(\pi) = 0$  より  $P(x) = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{6}, P(3) = 0.141\dots$ .

6.1 (1)  $\nabla f(x, y) = (-6x^2 + 2xy, x^2 - 2y)$  より  $\nabla f(P) = \nabla f(4, 3) = (-72, 10)$ .

(2)  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(n_1h+4)^3 - (n_2h+3)^2 + (n_1h+4)^2(n_2h+3) + 89}{h} = -72n_1 + 10n_2$ .

(3) (2) より  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{n}$  なので,  $\mathbf{n} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \frac{1}{\sqrt{1321}}(-36, 5)$  のとき最大.

6.2 (1)  $\nabla f(x, y) = (4x, 6y)$

(2)  $f(P_0 - \alpha \nabla f(P_0)) = f(3 - 12\alpha, 4 - 24\alpha) = 2016\alpha^2 - 720\alpha + 65$  なので,  $\frac{d}{d\alpha} f(P_0 - \alpha \nabla f(P_0)) = 4032\alpha - 720 = 0$  を解いて  $\alpha_0 = \frac{5}{28}$ .

(3)  $\nabla f(3 - 12\alpha, 4 - 24\alpha) \cdot \nabla f(3, 4) = -(4032\alpha - 720) = 0$  を解いて  $\alpha = \alpha_0 = \frac{5}{28}$ .

(4)  $f(P_1) = f\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{7}$ .

(5)  $f(P_1) = \frac{5}{7} = 0.7142\cdots$ ,  $f(P_2) = f\left(\frac{6}{77}, \frac{8}{77}\right) = -\frac{515}{539} = -0.955\cdots$ ,  $f(P_3) = f\left(\frac{12}{539}, -\frac{4}{539}\right) = -\frac{41455}{41503} = -0.998\cdots$  と確かに  $-1$  に近づいている.

6.3  $f(x, y) = 10x^3 - 3x^2y - \cdots$  とおく.  $f(0, -1) = 0$ ,  $f_x(0, -1) = -2 \neq 0$  なので陰関数定理から  $x = 0$  の近くで  $f(x, g(x)) = 0$ ,  $g(0) = -1$  を満たす微分可能な関数  $g$  があり,  $g'(0) = -\frac{f_x(0, -1)}{f_y(0, -1)}$  である. つまり,  $(0, -1)$  の近くで曲線  $f(x, y) = 0$  は  $y = g(x)$  と一致するので,  $(0, -1)$  における接線の方程式は  $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$  である. これを整理して  $f_x(0, -1)(x - 0) + f_y(0, -1)(y + 1) = 0$  より接線の方程式は  $-2x - 3y - 3 = 0$ .