

# 微分積分 問題集

2024 年 3 月 22 日

## 1 数列の極限

1.1 第  $n$  項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

$$(1) \frac{\sin n}{n}$$

$$(2) \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

$$(3) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1.2 数列  $\{a_n\}$  が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = -2$$

(1)  $\{a_n\}$  が上に有界であることを確認しよう

(2)  $\{a_n\}$  が狭義単調増加であることを確認しよう.

(3)  $\{a_n\}$  の極限を求めよう.

(4)  $a_2^2, a_3^2, a_4^4$  を具体的に計算し, 小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列  $\{a_n\}$  の極限を求めよう.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{1}{a_n^2}, \quad a_1 = 3$$

## 2 関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x}$$

2.2 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で連続となるような定数  $A$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & (x > 0) \\ -3x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ \cos^{-1} x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \left(x - \frac{1}{2}\right) & (x > 0) \\ \sin^{-1} A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x} & (x > 0) \\ x^2 + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

### 3 導関数

3.1 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で微分可能か否かを判定し、微分可能なら  $f'(0)$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

3.2 次の関数  $f$  が開区間  $(-1, 1)$  で  $C^2$  級となるような定数  $A, B, C$  の値を求めよう.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (x > 0) \\ Ax^2 + Bx + C & (x \leq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数  $f$  に対し、3 次関数  $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  が

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \quad f^{(3)}(0) = g^{(3)}(0)$$

を満たすとき、 $g(x)$  の係数  $a_0, a_1, a_2, a_3$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \sin x \quad (2) f(x) = e^x \quad (3) f(x) = \log(1+x)$$

### 4 不定形の極限

4.1 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で連続となるような定数  $A$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^x & (x > 0) \\ -x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

4.2 次の関数  $f$  が  $x = 0$  で微分可能となるような定数  $A, B$  の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases}$$

## 5 テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め、小数表示しよう。なお、 $\pi = 3.141592653589793 \dots$  であることは適宜利用しよう。

(1)  $\sin 3$                       (2)  $\cos 1.6$                       (3)  $\sqrt{e}$                       (4)  $\log 1.2$                       (5)  $\tan^{-1} 0.02$

5.2  $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$  をうまく利用して、以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

(1)  $\log 2$                                       (2)  $\log 3$                                       (3)  $\log 5$

5.3  $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$  をうまく利用して、以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

(1)  $\sqrt{1.2}$                                       (2)  $\sqrt[3]{1.01}$                                       (3)  $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数  $f$  に対し、 $f(1)$  の値の小数点以下第 4 位までを確定させよう。

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす関数  $f$  に対し、 $f$  の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう。また、指定された  $a$  に対して  $P(a)$  の値を求めよう。

(1)  $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2)  $2f''(x) + 5f'(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1, f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3)  $f(x) + \log(f'(x)) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 関数  $f$  が以下の条件を満たすとする。

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -1$$

このとき、 $f$  の  $x = \pi$  の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x - \pi)^4$$

と  $P(3)$  の値を求めよう。

## 解答

- 1.1 (1)  $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  より, はさみうちの原理から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ .
- (2)  $0 \leq \left| \frac{1+(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$  より, はさみうちの原理から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$ .
- (3)  $k$  を  $2^k < n \leq 2^{k+1}$  となる自然数とする.  $n \rightarrow \infty$  のとき  $k \rightarrow \infty$  なので,  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$ .
- 1.2 (1)  $a_1 = -2 < 0$  と漸化式から任意の  $n$  で  $a_n < 0$  なので,  $\{a_n\}$  は上に有界である.
- (2) まず,  $a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$  である.  $n \geq 2$  に対しては  $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2 \cdot 2a_n} \geq 0$  である. ここで,  $a_1$  が有理数なと漸化式の形から  $\{a_n\}$  の各項は有理数である. 従って,  $a_{n-1}^2 \neq 2$  なので  $a_{n+1} - a_n > 0$  である. よって,  $\{a_n\}$  は狭義単調増加である.
- (3) (1), (2) から  $\{a_n\}$  は収束するのでその極限値を  $\alpha$  とする.  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$  より,  $\alpha^2 = 2$  である.  $a_n < 0$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$ .
- (4)  $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$ ,  $a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots$ ,  $a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$
- 1.3  $a_1 = 3 > 0$  と漸化式から任意の  $n$  で  $a_n > 0$  なので,  $\{a_n\}$  は下に有界である. さらに,  $n \geq 2$  に対して  $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6 \cdot 3a_n^2} \geq 0$  なので,  $\{a_n\}$  は ( $n \geq 2$  で) 単調減少である. よって,  $\{a_n\}$  は収束するのでその極限値を  $\alpha$  とすれば, 前問と同様に漸化式から  $\alpha = \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$  が成り立つので,  $\alpha^3 = 3$  である. 従って,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{3}$ .
- 2.1 (1)  $0 \leq \left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +0$ ) より,  $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$ .
- (2)  $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) より,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .
- (3)  $\frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1} x}{x}$  と  $\left| \frac{\tan^{-1} x}{x} \right| < \frac{\pi/2}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) より,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1$ .
- 2.2 (1)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$  より,  $A = 3$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$  より,  $A = 1 - \frac{\pi}{2}$ .
- (3)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \sin^{-1} A = f(0)$  より,  $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1} A$  である.  $X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  とおくと  $\tan X = -\frac{1}{2}$  かつ  $-\frac{\pi}{2} < X < 0$  なので,  $A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .
- (4)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$  より,  $A = \frac{3}{2}$ .
- (5)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$  より,  $A = 0$ .
- (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ ,  $f(0) = A$  より,  $A = 0$ .

3.1 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log |x| = -\infty$  より, 微分不可能.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  より, 微分可能で  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

(3)  $0 \leq \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ) より, 微分可能で  $f'(0) = 0$ .

(4)  $x > 0$  で  $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$  より,  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$  が存在しないから微分不可能.

3.2  $f$  は  $x = 0$  で連続なので,  $C = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \cos 0 = 1$  である. また,  $f$  は  $x = 0$  で微分可能なので  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$  である.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (Ax + B) = B$  より  $f'(0) = B = 0$  である. さらに,  $f'$  は  $x = 0$  で微分可能なので  $f''(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}$  である.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\sin x}{x} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} 2A = 2A$  より  $f''(0) = -1, A = -\frac{1}{2}$  である. 最後に,  $\lim_{x \rightarrow +0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +0} -\cos x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-\frac{1}{2}x^2 + 1)'' = -1$  より  $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0)$  なので,  $f''$  は  $x = 0$  で連続である.

3.3  $g(0) = a_0, g'(0) = a_1, g''(0) = 2a_2, g^{(3)}(0) = 6a_3$  より  $a_0 = g(0) = f(0), a_1 = g'(0) = f'(0), a_2 = g''(0)/2 = f''(0)/2, a_3 = g^{(3)}(0)/6 = f^{(3)}(0)/6$  である.

(1)  $a_0 = \sin 0 = 0, a_1 = \cos 0 = 1, a_2 = -\frac{1}{2} \sin 0 = 0, a_3 = -\frac{1}{6} \cos 0 = -\frac{1}{6}$

(2)  $a_0 = e^0 = 1, a_1 = e^0 = 1, a_2 = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$

(3)  $a_0 = \log(1+0) = 0, a_1 = (1+0)^{-1} = 1, a_2 = \frac{-(1+0)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{2(1+0)^{-3}}{6} = \frac{1}{3}$