微分積分 問題集

2024 年 3 月 21 日

1　数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

(1) $\dfrac{\sin n}{n}$　　(2) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$　　(3) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = -2$$

(1) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう

(2) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう.

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

(4) a_2^2 , a_3^2 , a_4^4 を具体的に計算し，小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{1}{a_n^2}, \quad a_1 = 3$$

2　関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\tan^{-1}x}{x}$

2.2 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

(1) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x>0) \\ -3x+A & (x \leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x>0) \\ \cos^{-1}x + A & (x \leqq 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x>0) \\ \sin^{-1}A & (x \leqq 0) \end{cases}$　　(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x} & (x>0) \\ x^2+A & (x \leqq 0) \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ A & (x \leqq 0) \end{cases}$　　(6) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$

3 導関数

3.1 次の関数 f が $x=0$ で微分可能か否かを判定し，微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log|x| & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1,1)$ で C^2 級となるような定数 A,B,C の値を求めよう．

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0) \\ Ax^2+Bx+C & (x\leqq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し，3 次関数 $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ が

$$f(0)=g(0),\quad f'(0)=g'(0),\quad f''(0)=g''(0),\quad f^{(3)}(0)=g^{(3)}(0)$$

を満たすとき，$g(x)$ の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 の値を求めよう．

(1) $f(x)=\sin x$ (2) $f(x)=e^x$ (3) $f(x)=\log(1+x)$

4 不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ A & (x\leqq 0) \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} x^x & (x>0) \\ -x+A & (x\leqq 0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x^3} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$

4.2 次の関数 f が $x=0$ で微分可能となるような定数 A,B の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^2} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$

5　テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め，小数表示しよう．なお，$\pi = 3.141592653589793\cdots$ であることは適宜利用しよう．

(1) $\sin 3$　　(2) $\cos 1.6$　　(3) $\sqrt{e}$　　(4) $\log 1.2$　　(5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\log 2$　　(2) $\log 3$　　(3) $\log 5$

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\sqrt{1.2}$　　(2) $\sqrt[3]{1.01}$　　(3) $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数 f に対し，$f(1)$ の値の小数点以下第 4 位までを確定させよう．

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす関数 f に対し，f の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう．また，指定された a に対して $P(a)$ の値を求めよう．

(1) $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2) $2f''(x) + 5'f(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3) $f(x) + \log(f'(x)) = 0,\ f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 関数 f が以下の条件を満たすとする．

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0,\ f'(\pi) = -1$$

このとき，f の $x = \pi$ の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

と $P(3)$ の値を求めよう．

解答

1.1 (1) $0 \leqq \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leqq \dfrac{1}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

(2) $0 \leqq \left|\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqq \dfrac{2}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0.$

(3) k を $2^k < n \leqq 2^{k+1}$ となる自然数とする．$n \to \infty$ のとき $k \to \infty$ なので

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \geqq& 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\ \geqq& 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\ =& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} = 1+\frac{k}{2} \to \infty\ (k\to\infty) \end{aligned}$$

より，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty.$

1.2 (1) $a_1 = -2 < 0$ と漸化式から任意の n で $a_n < 0$ なので，$\{a_n\}$ は上に有界である．

(2) まず，$a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$ である．$n \geqq 2$ に対しては $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2\cdot 2a_n} \geqq 0$ である．ここで，a_1 が有理数なのと漸化式の形から $\{a_n\}$ の各項は有理数である．従って，$a_{n-1}^2 \neq 2$ なので $a_{n+1} - a_n > 0$ である．よって，$\{a_n\}$ は狭義単調増加である．

(3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は収束するので, その極限値を α とする．とする．$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}$ より，$\alpha^2 = 2$ である．任意の n に対して $a_n < 0$ なので $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$ である．

(4) 漸化式から直接計算して，以下のように 2 に近づいていることがわかる．

$$a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25,\ a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots,\ a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$$

1.3 $a_1 = 3 > 0$ と漸化式から任意の n で $a_n > 0$ なので，$\{a_n\}$ は下に有界である．さらに，$n \geqq 2$ に対して $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6\cdot 3a_n^2} \geqq 0$ だが a_{n-1} は有理数だから $a_{n-1}^3 \neq 3$ より $a_n > a_{n+1}$ なので，$\{a_n\}$ は狭義単調増加である（$a_2 > a_1$ は明らか）．よって，$\{a_n\}$ は収束するので，その極限値を α とすれば，前問と同様に漸化式から $\alpha = \frac{2}{3\alpha}+\frac{1}{a^2}$ が成り立つので，$\alpha^3 = 3$ である．従って，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{3}$ である．