微分積分 問題集

2024 年 3 月 22 日

1　数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう．

(1) $\dfrac{\sin n}{n}$　　(2) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$　　(3) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする．

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n},\quad a_1=-2$$

(1) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう

(2) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう．

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう．

(4) a_2^2 , a_3^2 , a_4^4 を具体的に計算し，小数表示してみよう．

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう．

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{1}{a_n^2},\quad a_1=3$$

2　関数の極限

2.1 次の極限を求めよう．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\tan^{-1}x}{x}$

2.2 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x>0) \\ -3x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x>0) \\ \cos^{-1}x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x>0) \\ \sin^{-1}A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x} & (x>0) \\ x^2+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(6) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ A & (x=0)\end{cases}$

3 導関数

3.1 次の関数 f が $x=0$ で微分可能か否かを判定し，微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log|x| & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1,1)$ で C^2 級となるような定数 A,B,C の値を求めよう．

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0) \\ Ax^2+Bx+C & (x\leqq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し，3 次関数 $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ が

$$f(0)=g(0),\quad f'(0)=g'(0),\quad f''(0)=g''(0),\quad f^{(3)}(0)=g^{(3)}(0)$$

を満たすとき，$g(x)$ の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 の値を求めよう．

(1) $f(x)=\sin x$　　(2) $f(x)=e^x$　　(3) $f(x)=\log(1+x)$

4 不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ A & (x\leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x^x & (x>0) \\ -x+A & (x\leqq 0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x^3} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$

4.2 次の関数 f が $x=0$ で微分可能となるような定数 A,B の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^2} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$

5　テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め，小数表示しよう．なお，$\pi = 3.141592653589793\cdots$ であることは適宜利用しよう．

(1) $\sin 3$　(2) $\cos 1.6$　(3) $\sqrt{e}$　(4) $\log 1.2$　(5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\log 2$　(2) $\log 3$　(3) $\log 5$

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\sqrt{1.2}$　(2) $\sqrt[3]{1.01}$　(3) $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数 f に対し，$f(1)$ の値の小数点以下第 4 位までを確定させよう．

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす関数 f に対し，f の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう．また，指定された a に対して $P(a)$ の値を求めよう．

(1) $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2) $2f''(x) + 5'f(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3) $f(x) + \log(f'(x)) = 0,\ f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 関数 f が以下の条件を満たすとする．

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0,\ f'(\pi) = -1$$

このとき，f の $x = \pi$ の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

と $P(3)$ の値を求めよう．

解答

1.1 (1) $0 \leqq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqq \frac{1}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(2) $0 \leqq \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqq \frac{2}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

(3) k を $2^k < n \leqq 2^{k+1}$ となる自然数とする．$n \to \infty$ のとき $k \to \infty$ なので，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{k}{2} \to \infty\ (k \to \infty)$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

1.2 (1) $a_1 = -2 < 0$ と漸化式から任意の n で $a_n < 0$ なので，$\{a_n\}$ は上に有界である．

(2) まず，$a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$ である．$n \geqq 2$ に対しては $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2\cdot 2a_n} \geqq 0$ である．ここで，a_1 が有理数なのと漸化式の形から $\{a_n\}$ の各項は有理数である．従って，$a_{n-1}^2 \neq 2$ なので $a_{n+1} - a_n > 0$ である．よって，$\{a_n\}$ は狭義単調増加である．

(3) (1)，(2) から $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とする．$\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}$ より，$\alpha^2 = 2$ である．$a_n < 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$.

(4) $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25,\ a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots,\ a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$

1.3 $a_1 = 3 > 0$ と漸化式から任意の n で $a_n > 0$ なので，$\{a_n\}$ は下に有界である．さらに，$n \geqq 2$ に対して $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6\cdot 3a_n^2} \geqq 0$ なので，$\{a_n\}$ は（$n \geqq 2$ で）単調減少である．よって，$\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とすれば，前問と同様に漸化式から $\alpha = \frac{2}{3\alpha}+\frac{1}{a^2}$ が成り立つので，$\alpha^3 = 3$ である．従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{3}$.

2.1 (1) $0 \leqq \left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right| \leqq \sqrt{x} \to 0\ (x \to +0)$ より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$.

(2) $0 \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq \frac{1}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

(3) $\frac{x-\tan^{-1}x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1}x}{x}$ と $\left|\frac{\tan^{-1}x}{x}\right| < \frac{\pi/2}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\tan^{-1}x}{x} = 1$.

2.2 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 3, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = 3$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 1, \lim_{x\to-0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$ より，$A = 1 - \frac{\pi}{2}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x\to-0} f(x) = \sin^{-1}A = f(0)$ より，$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1}A$ である．$X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおくと $\tan X = -\frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ なので，$A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = \frac{3}{2}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = 0$.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, f(0) = A$ より，$A = 0$.

3.1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\log|x|=-\infty$ より，微分不可能.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ より，微分可能で $f'(0)=\frac{1}{2}$.

(3) $0\leqq\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|\to 0\ (x\to 0)$ より，微分可能で $f'(0)=0$.

(4) $x>0$ で $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$ より，$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ が存在しないから微分不可能.

3.2 f は $x=0$ で連続なので，$C=f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\cos 0=1$ である．また，f は $x=0$ で微分可能なので $f'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ である．$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{x}=0$, $\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}(Ax+B)=B$ より $f'(0)=B=0$ である．さらに，f' は $x=0$ で微分可能なので $f''(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ である．$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\sin x}{x}=-1$, $\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to-0}2A=2A$ より $f''(0)=-1, A=-\frac{1}{2}$ である．最後に，$\lim_{x\to+0}f''(x)=\lim_{x\to+0}-\cos x=-1$, $\lim_{x\to-0}f''(x)=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)''=-1$ より $\lim_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$ なので，f'' は $x=0$ で連続である.

3.3 $g(0)=a_0$, $g'(0)=a_1$, $g''(0)=2a_2$, $g^{(3)}(0)=6a_3$ より $a_0=g(0)=f(0)$, $a_1=g'(0)=f'(0)$, $a_2=g''(0)/2=f''(0)/2$, $a_3=g^{(3)}(0)/6=f^{(3)}(0)/6$ である.

(1) $a_0=\sin 0=0$, $a_1=\cos 0=1$, $a_2=-\frac{1}{2}\sin 0=0$, $a_3=-\frac{1}{6}\cos 0=-\frac{1}{6}$

(2) $a_0=e^0=1$, $a_1=e^0=1$, $a_2=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{e^0}{6}=\frac{1}{6}$

(3) $a_0=\log(1+0)=0$, $a_1=(1+0)^{-1}=1$, $a_2=\frac{-(1+0)^{-2}}{2}=-\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{2(1+0)^{-3}}{6}=\frac{1}{3}$

4.1 (1) $A=f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$

(2) $A=f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\log x}=e^0=1$

(3) $A=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

(4) $A=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+4\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos^2 x-4\sin^2 x}{\cos x}=3$

4.2 (1) f は $x=0$ で連続なので $B=f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ である．f は $x=0$ で微分可能なので $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\sin x}{2}=0$ と $\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}A=A$ が一致するから $A=0$.

(2) f は $x=0$ で連続なので $B=f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{1-(1+x^2)^{-1}}{2x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2x(1+x^2)^{-2}}{2}=0$ である．f は $x=0$ で微分可能なので $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to+0}\frac{1-(1+x^2)^{-1}}{3x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{3(x^2+1)}=\frac{1}{3}$ と $\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}A=A$ が一致するから $A=\frac{1}{3}$.

5.1 (1) $f(x)=\sin x$ とすると $\sin 3=f(3)$ である．3 と π が近いので, $x=\pi$ の周りでの f の 3 次近似を用いる．$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n+R(x)=-(x-\pi)+\frac{(x-\pi)^3}{6}+R(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(3)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(3-\pi)^4=\frac{\sin c}{24}(3-\pi)^4$, $3<c<\pi$ を満たす実数 c が存在する．$|\sin c|<1$ なので, $|R(3)|<\frac{(\pi-3)^4}{24}<\frac{(3.15-3)^4}{24}=0.00625<0.01$ より $-(3-\pi)+\frac{(3-\pi)^3}{6}=0.141\cdots$ は誤差 0.01 以内の $\sin 3$ の近似値である．（実際には π の近似値を何桁まで使うかによってさらに多少の誤差が生じるが省略する．）

(2) $f(x)=\cos x$ とすると $\cos 1.6=f(1.6)$ である．1.6 と $\frac{\pi}{2}=1.570796\cdots$ が近いので，$x=\frac{\pi}{2}$ の周りでの f の 3 次近似を用いる．$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n+R(x)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}+R(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(1.6)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4=\frac{\cos c}{24}\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4$, $\frac{\pi}{2}<c<1.6$ を満たす実数 c が存在する．$|\cos c|<1$ なので，$|R(1.6)|<\frac{\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4}{24}<\frac{(1.6-1.5)^4}{24}<4.17\times10^{-6}<0.01$ より $-\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}=-0.029\cdots$ は誤差 0.01 以内の $\cos 1.6$ の近似値である．

(3) $f(x)=e^x$ とすると $\sqrt{e}=f\left(\frac{1}{2}\right)$ である．$\frac{1}{2}=0.5$ は 0 に近いので，$x=0$ の周りでの f の 3 次近似を用いる．$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R(x)$ とすると，テイラーの定理から $R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{e^c}{384}$, $0<c<\frac{1}{2}$ を満たす実数 c が存在する．$1<e^c<e^{\frac{1}{2}}<e^1<3$ なので，$0<R\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{384}=\frac{1}{128}<0.01$ より $1+\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6}=\frac{79}{48}=1.6458\cdots$ は誤差 0.01 以内の $\sqrt{e}$ の近似値である．

(4) $f(x)=\log(1+x)$ とすると，$\log 1.2=f(0.2)$ である．$x=0$ の周りでの f の 2 次近似を用いる．$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+R(x)=x-\frac{x^2}{2}+R(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.2)=\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.2)^3=\frac{1}{375(1+c)^3}$, $0<c<0.2$ を満たす実数 c が存在する．$0<\frac{1}{(1+c)^3}<1$ なので，$0<R(0.2)<\frac{1}{375}<0.01$ より $0.2-\frac{0.2^2}{2}=0.18$ は誤差 0.01 以内の $\log 1.2$ の近似値である．

(5) $f(x)=\tan^{-1}x$ とすると．$\tan^{-1}0.02=f(0.02)$ である．$x=0$ の周りでの f の 1 次近似を用いる．$f(x)=f(0)+f'(0)x+R(x)=x+R(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.02)=\frac{f^{(2)}(c)}{2}(0.02)^2=-\frac{c}{1250(c^2+1)^2}$, $0<c<0.02$ を満たす実数 c が存在する．$\frac{c}{(c^2+1)^2}<\frac{0.02}{(0.02^2+1)^2}<0.01998\cdots<0.02$ なので，$|R(0.02)|<\frac{0.02}{1250}=\frac{1}{62500}<0.01$ より 0.02 は $\tan^{-1}0.02$ の誤差 0.01 以内の近似値である．

5.2 (1)

(2)

(3)

5.3 (1)

(2)

(3)

5.4

5.5 (1)

(2)

(3)

5.6