

微分積分 問題集

2024 年 3 月 22 日

1 数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

$$(1) \frac{\sin n}{n}$$

$$(2) \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

$$(3) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = -2$$

(1) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう

(2) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう.

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

(4) a_2^2, a_3^2, a_4^4 を具体的に計算し, 小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{1}{a_n^2}, \quad a_1 = 3$$

2 関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x}$$

2.2 次の関数 f が $x = 0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & (x > 0) \\ -3x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ \cos^{-1} x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \left(x - \frac{1}{2}\right) & (x > 0) \\ \sin^{-1} A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x} & (x > 0) \\ x^2 + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

3 導関数

3.1 次の関数 f が $x = 0$ で微分可能か否かを判定し、微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1, 1)$ で C^2 級となるような定数 A, B, C の値を求めよう.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (x > 0) \\ Ax^2 + Bx + C & (x \leq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し、3 次関数 $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ が

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \quad f^{(3)}(0) = g^{(3)}(0)$$

を満たすとき、 $g(x)$ の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \sin x \quad (2) f(x) = e^x \quad (3) f(x) = \log(1+x)$$

4 不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x = 0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ A & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^x & (x > 0) \\ -x + A & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} & (x \neq 0) \\ A & (x = 0) \end{cases}$$

4.2 次の関数 f が $x = 0$ で微分可能となるような定数 A, B の値を求めよう.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} & (x > 0) \\ Ax + B & (x \leq 0) \end{cases}$$

5 テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め、小数表示しよう。なお、 $\pi = 3.141592653589793 \dots$ であることは適宜利用しよう。

(1) $\sin 3$ (2) $\cos 1.6$ (3) \sqrt{e} (4) $\log 1.2$ (5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して、以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

(1) $\log 2$ (2) $\log 3$ (3) $\log 5$

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して、以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう。

(1) $\sqrt{1.2}$ (2) $\sqrt[3]{1.01}$ (3) $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数 f に対し、 $f(1)$ の値の小数点以下第 4 位までを確定させよう。

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす関数 f に対し、 f の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう。また、指定された a に対して $P(a)$ の値を求めよう。

(1) $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2) $2f''(x) + 5f'(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1, f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3) $f(x) + \log(f'(x)) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 関数 f が以下の条件を満たすとする。

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -1$$

このとき、 f の $x = \pi$ の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x - \pi)^4$$

と $P(3)$ の値を求めよう。

解答

1.1 (1) $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(2) $0 \leq \left| \frac{1+(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ より, はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

(3) k を $2^k < n \leq 2^{k+1}$ となる自然数とする. $n \rightarrow \infty$ のとき $k \rightarrow \infty$ なので, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

1.2 (1) $a_1 = -2 < 0$ と漸化式から任意の n で $a_n < 0$ なので, $\{a_n\}$ は上に有界である.

(2) まず, $a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$ である. $n \geq 2$ に対しては $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2 \cdot 2a_n} \geq 0$ である. ここで, a_1 が有理数なと漸化式の形から $\{a_n\}$ の各項は有理数である. 従って, $a_{n-1}^2 \neq 2$ なので $a_{n+1} - a_n > 0$ である. よって, $\{a_n\}$ は狭義単調増加である.

(3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とする. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$ より, $\alpha^2 = 2$ である. $a_n < 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$.

(4) $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$, $a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots$, $a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$

1.3 $a_1 = 3 > 0$ と漸化式から任意の n で $a_n > 0$ なので, $\{a_n\}$ は下に有界である. さらに, $n \geq 2$ に対して $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6 \cdot 3a_n^2} \geq 0$ なので, $\{a_n\}$ は ($n \geq 2$ で) 単調減少である. よって, $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とすれば, 前問と同様に漸化式から $\alpha = \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ が成り立つので, $\alpha^3 = 3$ である. 従って, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{3}$.

2.1 (1) $0 \leq \left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +0$) より, $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$.

(2) $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(3) $\frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1} x}{x}$ と $\left| \frac{\tan^{-1} x}{x} \right| < \frac{\pi/2}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \tan^{-1} x}{x} = 1$.

2.2 (1) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$ より, $A = 3$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$ より, $A = 1 - \frac{\pi}{2}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \sin^{-1} A = f(0)$ より, $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1} A$ である. $X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおくと $\tan X = -\frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ なので, $A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$ より, $A = \frac{3}{2}$.

(5) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A = f(0)$ より, $A = 0$.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $f(0) = A$ より, $A = 0$.

3.1 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log |x| = -\infty$ より, 微分不可能.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ より, 微分可能で $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(3) $0 \leq \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) より, 微分可能で $f'(0) = 0$.

(4) $x > 0$ で $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$ より, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ が存在しないから微分不可能.

3.2 f は $x = 0$ で連続なので, $C = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \cos 0 = 1$ である. また, f は $x = 0$ で微分可能なので $f'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ である. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (Ax + B) = B$ より $f'(0) = B = 0$ である. さらに, f' は $x = 0$ で微分可能なので $f''(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ である. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\sin x}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} 2A = 2A$ より $f''(0) = -1, A = -\frac{1}{2}$ である. 最後に, $\lim_{x \rightarrow +0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +0} -\cos x = -1$, $\lim_{x \rightarrow -0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-\frac{1}{2}x^2 + 1)'' = -1$ より $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0)$ なので, f'' は $x = 0$ で連続である.

3.3 $g(0) = a_0, g'(0) = a_1, g''(0) = 2a_2, g^{(3)}(0) = 6a_3$ より $a_0 = g(0) = f(0), a_1 = g'(0) = f'(0), a_2 = g''(0)/2 = f''(0)/2, a_3 = g^{(3)}(0)/6 = f^{(3)}(0)/6$ である.

(1) $a_0 = \sin 0 = 0, a_1 = \cos 0 = 1, a_2 = -\frac{1}{2} \sin 0 = 0, a_3 = -\frac{1}{6} \cos 0 = -\frac{1}{6}$

(2) $a_0 = e^0 = 1, a_1 = e^0 = 1, a_2 = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6}$

(3) $a_0 = \log(1+0) = 0, a_1 = (1+0)^{-1} = 1, a_2 = \frac{-(1+0)^{-2}}{2} = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{2(1+0)^{-3}}{6} = \frac{1}{3}$

4.1 (1) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$

(2) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \log x} = e^0 = 1$

(3) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

(4) $A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 4 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x}{\cos x} = 3$

4.2 (1) f は $x = 0$ で連続なので $B = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ である. f は $x = 0$ で微分可能なので $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\sin x}{2} = 0$ と $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} A = A$ が一致するから $A = 0$.

(2) f は $x = 0$ で連続なので $B = f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - (1+x^2)^{-1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-2x(1+x^2)^{-2}}{2} = 0$ である. f は $x = 0$ で微分可能な
ので $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - (1+x^2)^{-1}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}$ と
 $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} A = A$ が一致するから $A = \frac{1}{3}$.