微分積分 問題集

2024 年 3 月 29 日

1　数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう.

(1) $\dfrac{\sin n}{n}$　　(2) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$　　(3) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする.

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n},\quad a_1=-2$$

(1) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう

(2) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう.

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

(4) a_2^2 , a_3^2 , a_4^4 を具体的に計算し，小数表示してみよう.

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう.

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{1}{a_n^2},\quad a_1=3$$

2　関数の極限

2.1 次の極限を求めよう.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\tan^{-1}x}{x}$

2.2 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう.

(1) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (x>0)\\ -3x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x>0)\\ \cos^{-1}x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x>0)\\ \sin^{-1}A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{2x} & (x>0)\\ x^2+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0)\\ A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(6) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ A & (x=0)\end{cases}$

3　導関数

3.1 次の関数 f が $x=0$ で微分可能か否かを判定し，微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log|x| & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1,1)$ で C^2 級となるような定数 A,B,C の値を求めよう．

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0) \\ Ax^2+Bx+C & (x\leqq 0) \end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し，3 次関数 $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ が

$$f(0)=g(0),\quad f'(0)=g'(0),\quad f''(0)=g''(0),\quad f^{(3)}(0)=g^{(3)}(0)$$

を満たすとき，$g(x)$ の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 の値を求めよう．

(1) $f(x)=\sin x$　　(2) $f(x)=e^x$　　(3) $f(x)=\log(1+x)$

4　不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ A & (x\leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x^x & (x>0) \\ -x+A & (x\leqq 0) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x^3} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x} & (x\neq 0) \\ A & (x=0) \end{cases}$

4.2 次の関数 f が $x=0$ で微分可能となるような定数 A,B の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^2} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0) \end{cases}$

5　テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め，小数表示しよう．なお，$\pi = 3.141592653589793\cdots$ であることは適宜利用しよう．

(1) $\sin 3$　　(2) $\cos 1.6$　　(3) $\sqrt{e}$　　(4) $\log 1.2$　　(5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して，$\log 2$ の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\sqrt{1.2}$　　(2) $\sqrt[3]{1.01}$　　(3) $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数 f に対し，$f(0.5)$ の値の小数点以下第 2 位までを確定させよう．

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす C^∞ 級関数 f に対し，f の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう．また，指定された a に対して $P(a)$ の値を求めよう．

(1) $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2) $2f''(x) + 5f'(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3) $f(x) + \log(f'(x)) = 0,\ f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 C^∞ 級関数 f が以下の条件を満たすとする．

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0,\ f'(\pi) = -1$$

このとき，f の $x = \pi$ の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

と $P(3)$ の値を求めよう．

6　偏微分

6.1 $f(x,y)=-2x^3-y^2+x^2y+1$ とし，$P=(4,3)$ とする．

(1) P における f の勾配 $\nabla f(P)$ を求めよう．

(2) P での $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)$ 方向の方向微分 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(P)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(P+h\boldsymbol{n})-f(P)}{h}$ を求めよう．

(3) 平面の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の中で，方向微分 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(P)$ が最小となるものを求めよう．

6.2 $f(x,y)=2x^2+3y^2-1$ とし，$P_0=(3,4)$ とする．

(1) 平面ベクトル $\boldsymbol{d}_0=-\nabla f(P_0)$ を求めよう．

(2) $f(P_0+\alpha\boldsymbol{d}_0)$ を最小にする α を α_0 とする．α_0 を求めよう．

(3) 内積 $\nabla f\left(P_0+\alpha\boldsymbol{d}_0\right)\cdot\boldsymbol{d}_0$ が 0 となる α を求めよう．

(4) $P_1=P_0+\alpha_0\boldsymbol{d}_0$ とする．$f(P_1)$ を求めよう．

(5) 上記を繰り返す．つまり，$f(P_k+\alpha\boldsymbol{d}_k)$ を最小にする α を α_k とし，

$$P_{k+1}=P_k+\alpha_k\boldsymbol{d}_k,\quad \boldsymbol{d}_k=-\nabla f(P_k)\quad (k=0,1,2,\ldots)$$

とする．$f(P_1),f(P_2),f(P_3),\ldots$ が f の最小値 -1 に近づいていることを確認しよう．このようにして関数の最小値（極小値）を探す方法は最急降下法と呼ばれる．

6.3 平面曲線 $10x^3-3x^2y-26x\,y^2-14y^3-51x^2-134xy-78y^2-110x-117y-53=0$ 上の点 $(0,-1)$ における接線の方程式を求めよう．

7　2変数関数の極値

7.1 次の関数 f の極値とそれを実現する点を全て求めよう．

(1) $f(x,y)=(x-y)^2+y^3$　　(2) $f(x,y)=-x^4-x^2-2xy-y^2$

7.2 有界閉領域 $D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;x^2-y^2\leqq 1,-1\leqq y\leqq 1\,\right\}$ における関数 $f(x,y)=x^2-y^3$ の最大値と最小値及びそれらを実現する点を全て求めよう．

7.3 関数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ の最大値と最小値を求めよう．

解答

1.1 (1) $0 \leqq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqq \frac{1}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(2) $0 \leqq \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqq \frac{2}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

(3) k を $2^k < n \leqq 2^{k+1}$ となる自然数とする．$n \to \infty$ のとき $k \to \infty$ なので，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{k}{2} \to \infty\ (k \to \infty)$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

1.2 (1) $a_1 = -2 < 0$ と漸化式から任意の n で $a_n < 0$ なので，$\{a_n\}$ は上に有界である．

(2) まず，$a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$ である．$n \geqq 2$ に対しては $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2 \cdot 2a_n} \geqq 0$ である．ここで，a_1 が有理数なのと漸化式の形から $\{a_n\}$ の各項は有理数である．従って，$a_{n-1}^2 \neq 2$ なので $a_{n+1} - a_n > 0$ である．よって，$\{a_n\}$ は狭義単調増加である．

(3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とする．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}$ より，$\alpha^2 = 2$ である．$a_n < 0$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$.

(4) $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25,\ a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots,\ a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$

1.3 $a_1 = 3 > 0$ と漸化式から任意の n で $a_n > 0$ なので，$\{a_n\}$ は下に有界である．さらに，$n \geqq 2$ に対して $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6 \cdot 3a_n^2} \geqq 0$ なので，$\{a_n\}$ は ($n \geqq 2$ で) 単調減少である．よって，$\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とすれば，前問と同様に漸化式から $\alpha = \frac{2}{3\alpha}+\frac{1}{a^2}$ が成り立つので，$\alpha^3 = 3$ である．従って，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{3}$.

2.1 (1) $0 \leqq \left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right| \leqq \sqrt{x} \to 0\ (x \to +0)$ より，$\lim_{x\to+0} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$.

(2) $0 \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq \frac{1}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ より，$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(3) $\frac{x-\tan^{-1}x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1}x}{x}$ と $\left|\frac{\tan^{-1}x}{x}\right| < \frac{\pi/2}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ より，$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\tan^{-1}x}{x} = 1$.

2.2 (1) $\lim_{x\to+0} f(x) = 3, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = 3$.

(2) $\lim_{x\to+0} f(x) = 1, \lim_{x\to-0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$ より，$A = 1 - \frac{\pi}{2}$.

(3) $\lim_{x\to+0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x\to-0} f(x) = \sin^{-1} A = f(0)$ より，$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1} A$ である．$X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおくと $\tan X = -\frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ なので，$A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(4) $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = \frac{3}{2}$.

(5) $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = 0$.

(6) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, f(0) = A$ より，$A = 0$.

3.1 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log|x|=-\infty$ より，微分不可能.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ より，微分可能で $f'(0)=\frac{1}{2}$.

(3) $0\leqq\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|\to 0\ (x\to 0)$ より，微分可能で $f'(0)=0$.

(4) $x>0$ で $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$ より，$\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ が存在しないから微分不可能.

3.2 f は $x=0$ で連続なので，$C=f(0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\cos 0=1$ である．また，f は $x=0$ で微分可能なので $f'(0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ である．$\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}(Ax+B)=B$ より $f'(0)=B=0$ である．さらに，f' は $x=0$ で微分可能なので $f''(0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ である．$\lim\limits_{x\to+0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{-\sin x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to-0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}2A=2A$ より $f''(0)=-1, A=-\frac{1}{2}$ である．最後に，$\lim\limits_{x\to+0}f''(x)=\lim\limits_{x\to+0}-\cos x=-1$, $\lim\limits_{x\to-0}f''(x)=\lim\limits_{x\to-0}\left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)''=-1$ より $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$ なので，f'' は $x=0$ で連続である.

3.3 $g(0)=a_0$, $g'(0)=a_1$, $g''(0)=2a_2$, $g^{(3)}(0)=6a_3$ より $a_0=g(0)=f(0)$, $a_1=g'(0)=f'(0)$, $a_2=g''(0)/2=f''(0)/2$, $a_3=g^{(3)}(0)/6=f^{(3)}(0)/6$ である.

(1) $a_0=\sin 0=0$, $a_1=\cos 0=1$, $a_2=-\frac{1}{2}\sin 0=0$, $a_3=-\frac{1}{6}\cos 0=-\frac{1}{6}$

(2) $a_0=e^0=1$, $a_1=e^0=1$, $a_2=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{e^0}{6}=\frac{1}{6}$

(3) $a_0=\log(1+0)=0$, $a_1=(1+0)^{-1}=1$, $a_2=\frac{-(1+0)^{-2}}{2}=-\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{2(1+0)^{-3}}{6}=\frac{1}{3}$

4.1 $(*)$ の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1) $A=f(0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}x\log x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{(*)}{=}0$

(2) $A=f(0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\log x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\log x}\overset{(*)}{=}e^0=1$

(3) $A=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{(*)}{=}\frac{1}{6}$

(4) $A=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x}\overset{(*)}{=}3$

4.2 $(*)$ の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1) f は $x=0$ で連続なので $B=f(0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ である．f は $x=0$ で微分可能なので $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x-x}{x^2}\overset{(*)}{=}0$ と $\lim\limits_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}A=A$ が一致するから $A=0$.

(2) f は $x=0$ で連続なので $B=f(0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^2}\overset{(*)}{=}0$ である．f は $x=0$ で微分可能なので $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}\overset{(*)}{=}\frac{1}{3}$ と $\lim\limits_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}A=A$ が一致するから $A=\frac{1}{3}$.

5.1 (1) $f(x)=\sin x$ とすると $\sin 3=f(3)$ であり，3 は π に近い．π に近い x に対し $f(x)$ を 3 次式 $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n=-(x-\pi)+\frac{(x-\pi)^3}{6}$ で近似し，その誤差を $R(x)=f(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(3)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(3-\pi)^4=\frac{\sin c}{24}(3-\pi)^4$, $3<c<\pi$ を満たす c がある．$|\sin c|<1$ なので，$|R(3)|<\frac{(\pi-3)^4}{24}<\frac{(3.15-3)^4}{24}=0.00625<0.01$ より近似値 $g(3)=0.141\cdots$ の誤差は 0.01 以内.

(2) $f(x)=\cos x$ とすると $\cos 1.6=f(1.6)$ であり，1.6 は $\frac{\pi}{2}=1.57\cdots$ に近い．$f(x)$ と 3 次近似式 $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}$ との誤差を $R(x)=f(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(1.6)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4=\frac{\cos c}{24}\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4$, $\frac{\pi}{2}<c<1.6$ を満たす c がある．$|\cos c|<1$ なので，$|R(1.6)|<\frac{\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4}{24}<0.01$ より近似値 $g(1.6)=-0.029\cdots$ の誤差は 0.01 以内.

(3) $f(x)=e^x$ とすると $\sqrt{e}=f\left(\frac{1}{2}\right)$ である．$f(x)$ と 3 次近似式 $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ との誤差を $R(x)=f(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{e^c}{384}$, $0<c<\frac{1}{2}$ を満たす c がある．$e^c<e^{\frac{1}{2}}<3$ なので，$\left|R\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{3}{384}<0.01$ より近似値 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{79}{48}=1.6458\cdots$ の誤差は 0.01 以内.

(4) $f(x)=\log(1+x)$ とすると $\log 1.2=f(0.2)$ である．$f(x)$ と 2 次近似式 $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{2}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{x^2}{2}$ との誤差を $R(x)=f(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.2)=\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.2)^3=\frac{1}{375(1+c)^3}$, $0<c<0.2$ を満たす c がある．$\frac{1}{(1+c)^3}<1$ なので，$|R(0.2)|<\frac{1}{375}<0.01$ より近似値 $g(0.2)=0.18$ の誤差は 0.01 以内.

(5) $f(x)=\tan^{-1}x$ とすると $\tan^{-1}0.02=f(0.02)$ である．1 次近似式 $g(x)=f(0)+f'(0)x=x$ と $f(x)$ の誤差を $R(x)=f(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.02)=\frac{f^{(2)}(c)}{2}(0.02)^2=-\frac{c}{1250(c^2+1)^2}$, $0<c<0.02$ を満たす c がある．$\frac{c}{(c^2+1)^2}<\frac{0.02}{(0.02^2+1)^2}<0.02$ なので，$|R(0.02)|<\frac{0.02}{1250}<0.01$ より近似値 $g(0.02)=0.02$ の誤差は 0.01 以内.

5.2 $\log 2=f\left(\frac{1}{3}\right)$ である．f とその 7 次近似式 $g(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7$ との誤差を $R(x)=f(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{52488}\left(\frac{1}{(1-c)^8}-\frac{1}{(1+c)^8}\right)$, $0<c<\frac{1}{3}$ を満たす c がある．$0<R\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{255}{524288}$ なので，$g\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)<g\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{255}{524288}$ である．よって，$0.6931<\log 2<0.6937$ より小数第 3 位までが 0.693 と確定する.

5.3 (1) $\sqrt{1.2}=f_2(0.2)$ である．f_2 と 2 次近似式 $g(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ との誤差を $R(x)=f_2(x)-g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.2)=\frac{1}{2000(1+c)^{5/2}}$, $0<c<0.2$ を満たす c がある．$0<R(0.2)<\frac{1}{2000}$ なので，$g(0.2)<f(0.2)<g(0.2)+\frac{1}{2000}$ である．よって，$1.095<\sqrt{1.2}<1.0955$ より小数点第 3 位までが 1.095 と確定する.

(2) $\sqrt[3]{1.01} = f_3(0.01)$ である．f_3 とその 1 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{3}$ との誤差を $R(x) = f_3(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.01) = -\frac{1}{90000(1+c)^{5/3}}, 0 < c < 0.01$ を満たす c がある．$-\frac{1}{90000} < R(0.01) < 0$ なので，$g(0.01) - \frac{1}{90000} < f_3(0.01) < g(0.01)$ より，$1.00332 < \sqrt[3]{1.01} < 1.00334$ から小数点第 3 位までが 1.003 と確定する．

(3) $\sqrt[5]{0.8} = f_5(-0.2)$ である．3 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3$ で近似すれば，テイラーの定理から誤差は $-\frac{6}{15625} < R(-0.2) < 0$ と評価できる．よって，$0.9564 < \sqrt[5]{0.8} < 0.9568$ より，小数第 3 位までが 0.956 と確定する．

5.4 $x = 0$ を中心とする f の 6 次近似式を $g(x)$ とし，その誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とする．$f'(x) = e^{-x^2}$ より f の高階導関数は $f''(x) = -2xe^{-x^2}, f^{(3)}(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1), \ldots$ と逐次計算できるので，$f(0) = 0$ と合わせて f の 6 次近似式は $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$ と求められる．テイラーの定理より $R(0.5) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}(0.5)^7 = \frac{e^{-c^2}(8c^6 - 60c^4 + 90c^2 - 15)}{80640}, 0 < c < 0.5$ を満たす c がある．ここで 3 次関数 $p(t) = 8t^3 - 60t^2 + 90t - 15$ を考えると，$0 < c^2 < 0.25$ なので $-15 < p(c^2) < 3.875$ より，$|R(0.5)| < \left|\frac{e^{-c^2}p(c^2)}{80640}\right| < \left|\frac{p(c^2)}{80640}\right| < \frac{15}{80640} = \frac{1}{5376}$ である．よって，$g(0.5) - \frac{1}{5376} < f(0.5) < g(0.5) + \frac{1}{5376}$ より $0.4612 < f(0.5) < 0.4617$ である．これより小数第 2 位までが 0.46 と確定する．

5.5 (1) $f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x)$ より $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 1$ である．これより $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6331}{3840} = 1.6486\cdots$.

(2) まず，$f''(0) = \frac{-5f'(0)+3f(0)}{2} = \frac{1}{4}$ である．次に，$2f^{(3)}(x) + 5f''(x) - 3f'(x) = 0$ より $f^{(3)}(0) = \frac{-5f''(0)+3f'(0)}{2} = \frac{1}{8}$ である．以下同様に $f^{(4)}(0) = \frac{-5f^{(3)}(0)+3f''(0)}{2} = \frac{1}{16}, f^{(5)}(0) = \frac{-2f^{(4)}(0)+3f^{(3)}(0)}{2} = \frac{1}{32}$ である．これより $P(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \frac{x^5}{3840}, P(1) = \frac{6331}{3840} = 1.6486\cdots$.

(3) $f'(x) = e^{-f(x)}$ より $f'(0) = e^{-f(0)} = 1$, $f'(x) + \frac{f''(x)}{f'(x)} = 0$ から $f''(x) = -f'(x)^2$ より $f''(0) = -f'(0)^2 = -1$, $f^{(3)}(x) = -2f'(x)f''(x) = 2f'(x)^3$ より $f^{(3)}(0) = 2f'(0)^3 = 2$, $f^{(4)}(x) = 6f'(x)^2f''(x) = -6f''(x)^2$ より $f^{(4)}(0) = -6f''(0)^2 = -6$, $f^{(5)}(x) = -12f''(x)f^{(3)}(x)$ より $f^{(5)}(0) = -12f''(0)f^{(3)}(0) = 24$. これより $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, $P(0.2) = 0.1823\cdots$.

5.6 $f''(\pi) = -f(\pi) = 0, f^{(3)}(\pi) = -f'(\pi) = 1, f^{(4)}(\pi) = -f''(\pi) = 0$ より $P(x) = -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6}, P(3) = 0.141\cdots$.

6.1 (1) $\nabla f(x, y) = \left(-6x^2 + 2xy, x^2 - 2y\right)$ より $\nabla f(P) = \nabla f(4, 3)) = (-72, 10)$.

(2) $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(P) = \lim_{h\to 0} \frac{-2(n_1h+4)^3 - (n_2h+3)^2 + (n_1h+4)^2(n_2h+3) + 89}{h} = -72n_1 + 10n_2$.

(3) (2) より $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(P) = \nabla f(P) \cdot \boldsymbol{n}$ なので，$\boldsymbol{n} = -\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \frac{1}{\sqrt{1321}}(36, -5)$ のとき最小.

6.2 (1) $\nabla f(x,y)=(4x,6y)$ より $\boldsymbol{d}_0=-\nabla f(3,4)=(-12,-24)$.

(2) $f(P_0+\alpha\boldsymbol{d}_0)=f(3-12\alpha,4-24\alpha)=2016\alpha^2-720\alpha+65$ なので，$\frac{d}{d\alpha}f(P_0+\alpha\boldsymbol{d}_0)=4032\alpha-720=0$ を解いて $\alpha_0=\frac{5}{28}$.

(3) $\nabla f(3-12\alpha,4-24\alpha)\cdot(-12,-24)=4032\alpha-720=0$ を解いて $\alpha=\alpha_0=\frac{5}{28}$.

(4) $f(P_1)=f\left(\frac{6}{7},-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{7}$.

(5) $f(P_1)=\frac{5}{7}=0.7142\cdots$, $f(P_2)=f\left(\frac{6}{77},\frac{8}{77}\right)=-\frac{515}{539}=-0.955\cdots$, $f(P_3)=f\left(\frac{12}{539},-\frac{4}{539}\right)=-\frac{41455}{41503}=-0.998\cdots$ と確かに -1 に近づいている.

6.3 $f(x,y)=10x^3-3x^2y-\cdots$ とおく．$f(0,-1)=0$, $f_x(0,-1)=-2\neq 0$ なので陰関数定理から $x=0$ の近くで $f(x,g(x))=0$, $g(0)=-1$ を満たす微分可能な関数 g があり，$g'(0)=-\frac{f_x(0,-1)}{f_y(0,-1)}$ である．つまり，$(0,-1)$ の近くで曲線 $f(x,y)=0$ は $y=g(x)$ と一致するので，$(0,-1)$ における接線の方程式は $y-g(0)=g'(0)(x-0)$ である．これを整理して $f_x(0,-1)(x-0)+f_y(0,-1)(y+1)=0$ より接線の方程式は $-2x-3y-3=0$.

7.1 (1) f の停留点は $(0,0)$ のみで，$(0,0)$ におけるヘシアン $H(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=12y$ の値は 0 なので，ヘシアンによる極値判定法は役に立たない．$f(t,t)=t^3$ より，$t>0$ に対して $f(-t,-t)<0=f(0,0)<f(t,t)$ なので，$(0,0)$ のどんな近傍でも $f(0,0)$ は最大にも最小にもならない．つまり，$f(0,0)$ は極値ではないので，f は極値を持たない.

(2) f の停留点は $(0,0)$ のみで，$(0,0)$ におけるヘシアン $H(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=24x^2$ の値は 0 なので，ヘシアンによる極値判定法は役に立たない．一方で，$f(x,y)=-x^4-(x+y)^2\leqq 0$ なので明らかに f は $(0,0)$ で極大値 0 をとる.

7.2 D の内部での停留点と境界上で極値をとる点における値を比べる．f の停留点は $(0,0)$ のみでこれは D の内部にあり，$f(0,0)=0$ である．D は双曲線 $C: x^2-y^2=1$ と 2 直線 $L_1: y=1$ と $L_2: y=-1$ で囲まれる閉領域である．ラグランジュの未定乗数法から，f は C 上では 4 点 $(x,y)=(\pm1,0),\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{3},\frac{2}{3}\right)\in D$ で極値をとり，$f(\pm1,0)=1$, $f\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{31}{27}$ である．また，$f(x,\pm1)=x^2\mp1$ なので，2 直線 L_1,L_2 上ではそれぞれ $(0,1),(0,-1)$ で極値をとり，$f(0,\pm1)=\mp1$ である．さらに，C,L_1 の交点 $(\pm\sqrt{2},1)$ での値は $f(\pm\sqrt{2},1)=1$ で，C,L_2 の交点 $(\pm\sqrt{2},-1)$ での値は $f(\pm\sqrt{2},-1)=3$ である．以上から，f は $(0,1)$ で最小値 -1 をとり，$(\pm\sqrt{2},-1)$ で最大値 3 をとる.

7.3 明らかに $f(x,y)\geqq 0$ かつ $f(x,0)=f(y,0)=0$ なので f の最小値は 0 である．また，f の停留点は $t\neq 0$ によって $(0,t),(t,0),(t,\pm t^2)$ と書ける点全てである．特に，$f(t,\pm t^2)=\frac{1}{2}$ $(t\neq 0)$ が f の最大値の候補である．ここで，$k>\frac{1}{2}$ のとき，$k-f(x,y)=\frac{kx^8-x^4y^2+ky^4}{x^8+y^4}=\frac{k(x^4-y^2)^2+(2k-1)x^4y^2}{x^8+y^4}>0$ なので $f(x,y)=k$ を満たす (x,y) は存在しない．よって，$f(x,y)\leqq\frac{1}{2}$ なので $\frac{1}{2}$ は f の最大値である.