微分積分 問題集

2024 年 3 月 25 日

1　数列の極限

1.1 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよう．

(1) $\dfrac{\sin n}{n}$　　(2) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$　　(3) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

1.2 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式と初期条件を満たすとする．

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n},\quad a_1=-2$$

(1) $\{a_n\}$ が上に有界であることを確認しよう

(2) $\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを確認しよう．

(3) $\{a_n\}$ の極限を求めよう．

(4) a_2^2 , a_3^2 , a_4^4 を具体的に計算し，小数表示してみよう．

1.3 次の漸化式と初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよう．

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3}+\frac{1}{a_n^2},\quad a_1=3$$

2　関数の極限

2.1 次の極限を求めよう．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\tan^{-1}x}{x}$

2.2 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (x>0)\\ -3x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x>0)\\ \cos^{-1}x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}\left(x-\frac{1}{2}\right) & (x>0)\\ \sin^{-1}A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{2x} & (x>0)\\ x^2+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & (x>0)\\ A & (x\leqq 0)\end{cases}$　　(6) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ A & (x=0)\end{cases}$

3　導関数

3.1 次の関数 f が $x=0$ で微分可能か否かを判定し，微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log|x| & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

3.2 次の関数 f が開区間 $(-1,1)$ で C^2 級となるような定数 A,B,C の値を求めよう．

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & (x>0) \\ Ax^2+Bx+C & (x\leqq 0)\end{cases}$$

3.3 次の関数 f に対し，3 次関数 $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ が

$$f(0)=g(0),\quad f'(0)=g'(0),\quad f''(0)=g''(0),\quad f^{(3)}(0)=g^{(3)}(0)$$

を満たすとき，$g(x)$ の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 の値を求めよう．

(1) $f(x)=\sin x$　(2) $f(x)=e^x$　(3) $f(x)=\log(1+x)$

4　不定形の極限

4.1 次の関数 f が $x=0$ で連続となるような定数 A の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ A & (x\leqq 0)\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases} x^x & (x>0) \\ -x+A & (x\leqq 0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x^3} & (x\neq 0) \\ A & (x=0)\end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x} & (x\neq 0) \\ A & (x=0)\end{cases}$

4.2 次の関数 f が $x=0$ で微分可能となるような定数 A,B の値を求めよう．

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0)\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^2} & (x>0) \\ Ax+B & (x\leqq 0)\end{cases}$

5　テイラーの定理

5.1 テイラーの定理を用いて次の値の近似値を誤差精度 0.01 以内で求め，小数表示しよう．なお，$\pi = 3.141592653589793\cdots$ であることは適宜利用しよう．

(1) $\sin 3$　　(2) $\cos 1.6$　　(3) $\sqrt{e}$　　(4) $\log 1.2$　　(5) $\tan^{-1} 0.02$

5.2 $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$ をうまく利用して，$\log 2$ の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

5.3 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x}$ をうまく利用して，以下の値の小数点以下第 3 位までを確定させよう．

(1) $\sqrt{1.2}$　　(2) $\sqrt[3]{1.01}$　　(3) $\sqrt[5]{0.8}$

5.4 以下の条件を満たす関数 f に対し，$f(0.5)$ の値の小数点以下第 2 位までを確定させよう．

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad f(0) = 0$$

5.5 以下の条件を満たす関数 f に対し，f の 5 次マクローリン多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

を求めよう．また，指定された a に対して $P(a)$ の値を求めよう．

(1) $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (a = 1/2)$

(2) $2f''(x) + 5'f(x) - 3f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 1/2 \quad (a = 1)$

(3) $f(x) + \log(f'(x)) = 0,\ f(0) = 0 \quad (a = 0.2)$

5.6 関数 f が以下の条件を満たすとする．

$$f''(x) = -f(x), \quad f(\pi) = 0,\ f'(\pi) = -1$$

このとき，f の $x = \pi$ の周りの 4 次テイラー多項式

$$P(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

と $P(3)$ の値を求めよう．

解答

1.1 (1) $0 \leqq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqq \frac{1}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(2) $0 \leqq \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqq \frac{2}{n} \to 0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

(3) k を $2^k < n \leqq 2^{k+1}$ となる自然数とする．$n \to \infty$ のとき $k \to \infty$ なので，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \geqq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\frac{k}{2} \to \infty\ (k \to \infty)$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

1.2 (1) $a_1 = -2 < 0$ と漸化式から任意の n で $a_n < 0$ なので，$\{a_n\}$ は上に有界である．

(2) まず，$a_2 = -\frac{3}{2} > a_1$ である．$n \geqq 2$ に対しては $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} = -\frac{(a_{n-1}^2-2)^2}{4a_{n-1}^2 \cdot 2a_n} \geqq 0$ である．ここで，a_1 が有理数なのと漸化式の形から $\{a_n\}$ の各項は有理数である．従って，$a_{n-1}^2 \neq 2$ なので $a_{n+1} - a_n > 0$ である．よって，$\{a_n\}$ は狭義単調増加である．

(3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とする．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}$ より，$\alpha^2 = 2$ である．$a_n < 0$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$.

(4) $a_2^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25,\ a_3^2 = \left(-\frac{17}{12}\right)^2 = 2.0069\cdots,\ a_4^2 = \left(-\frac{577}{408}\right)^2 = 2.000006\cdots$

1.3 $a_1 = 3 > 0$ と漸化式から任意の n で $a_n > 0$ なので，$\{a_n\}$ は下に有界である．さらに，$n \geqq 2$ に対して $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^3-3}{3a_n^2} = \frac{(8a_{n-1}^3+3)(a_{n-1}^3-3)^2}{27a_{n-1}^6 \cdot 3a_n^2} \geqq 0$ なので，$\{a_n\}$ は（$n \geqq 2$ で）単調減少である．よって，$\{a_n\}$ は収束するのでその極限値を α とすれば，前問と同様に漸化式から $\alpha = \frac{2}{3\alpha}+\frac{1}{a^2}$ が成り立つので，$\alpha^3 = 3$ である．従って，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{3}$.

2.1 (1) $0 \leqq \left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right| \leqq \sqrt{x} \to 0\ (x \to +0)$ より，$\lim_{x\to+0} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$.

(2) $0 \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq \frac{1}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ より，$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(3) $\frac{x-\tan^{-1}x}{x} = 1 - \frac{\tan^{-1}x}{x}$ と $\left|\frac{\tan^{-1}x}{x}\right| < \frac{\pi/2}{x} \to 0\ (x \to \infty)$ より，$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\tan^{-1}x}{x} = 1$.

2.2 (1) $\lim_{x\to+0} f(x) = 3, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = 3$.

(2) $\lim_{x\to+0} f(x) = 1, \lim_{x\to-0} f(x) = \frac{\pi}{2} + A = f(0)$ より，$A = 1 - \frac{\pi}{2}$.

(3) $\lim_{x\to+0} f(x) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x\to-0} f(x) = \sin^{-1}A = f(0)$ より，$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1}A$ である．$X = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ とおくと $\tan X = -\frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ なので，$A = \sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin X = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(4) $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = \frac{3}{2}$.

(5) $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x\to-0} f(x) = A = f(0)$ より，$A = 0$.

(6) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, f(0) = A$ より，$A = 0$.

3.1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\log|x|=-\infty$ より，微分不可能.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ より，微分可能で $f'(0)=\frac{1}{2}$.

(3) $0\leqq\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|\to 0\ (x\to 0)$ より，微分可能で $f'(0)=0$.

(4) $x>0$ で $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$ より，$\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ が存在しないから微分不可能.

3.2 f は $x=0$ で連続なので，$C=f(0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\cos 0=1$ である．また，f は $x=0$ で微分可能なので $f'(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ である．$\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x-1}{x}=0$, $\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}(Ax+B)=B$ より $f'(0)=B=0$ である．さらに，f' は $x=0$ で微分可能なので $f''(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ である．$\lim_{x\to +0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{-\sin x}{x}=-1$, $\lim_{x\to -0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to -0}2A=2A$ より $f''(0)=-1, A=-\frac{1}{2}$ である．最後に，$\lim_{x\to +0}f''(x)=\lim_{x\to +0}-\cos x=-1$, $\lim_{x\to -0}f''(x)=\lim_{x\to -0}\left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)''=-1$ より $\lim_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$ なので，f'' は $x=0$ で連続である.

3.3 $g(0)=a_0$, $g'(0)=a_1$, $g''(0)=2a_2$, $g^{(3)}(0)=6a_3$ より $a_0=g(0)=f(0)$, $a_1=g'(0)=f'(0)$, $a_2=g''(0)/2=f''(0)/2$, $a_3=g^{(3)}(0)/6=f^{(3)}(0)/6$ である.

(1) $a_0=\sin 0=0$, $a_1=\cos 0=1$, $a_2=-\frac{1}{2}\sin 0=0$, $a_3=-\frac{1}{6}\cos 0=-\frac{1}{6}$

(2) $a_0=e^0=1$, $a_1=e^0=1$, $a_2=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{e^0}{6}=\frac{1}{6}$

(3) $a_0=\log(1+0)=0$, $a_1=(1+0)^{-1}=1$, $a_2=\frac{-(1+0)^{-2}}{2}=-\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{2(1+0)^{-3}}{6}=\frac{1}{3}$

4.1 $(*)$ の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1) $A=f(0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\overset{(*)}{=}0$

(2) $A=f(0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{x\log x}=e^{\lim_{x\to +0}x\log x}\overset{(*)}{=}e^0=1$

(3) $A=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{(*)}{=}\frac{1}{6}$

(4) $A=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x-\sin x}\overset{(*)}{=}3$

4.2 $(*)$ の箇所でロピタルの定理を用いている.

(1) f は $x=0$ で連続なので $B=f(0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$ である．f は $x=0$ で微分可能なので $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x-x}{x^2}\overset{(*)}{=}0$ と $\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}A=A$ が一致するから $A=0$.

(2) f は $x=0$ で連続なので $B=f(0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^2}\overset{(*)}{=}0$ である．f は $x=0$ で微分可能なので $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}\overset{(*)}{=}\frac{1}{3}$ と $\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}A=A$ が一致するから $A=\frac{1}{3}$.

5.1 (1) $f(x) = \sin x$ とすると $\sin 3 = f(3)$ であり，3 は π に近い．π に近い x に対し $f(x)$ を 3 次式 $g(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6}$ で近似し，その誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(3) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(3-\pi)^4 = \frac{\sin c}{24}(3-\pi)^4$, $3 < c < \pi$ を満たす c がある．$|\sin c| < 1$ なので，$|R(3)| < \frac{(\pi-3)^4}{24} < \frac{(3.15-3)^4}{24} = 0.00625 < 0.01$ より近似値 $g(3) = 0.141\cdots$ の誤差は 0.01 以内.

(2) $f(x) = \cos x$ とすると $\cos 1.6 = f(1.6)$ であり，1.6 は $\frac{\pi}{2} = 1.57\cdots$ に近い．$f(x)$ と 3 次近似式 $g(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}$ との誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(1.6) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4 = \frac{\cos c}{24}\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4$, $\frac{\pi}{2} < c < 1.6$ を満たす c がある．$|\cos c| < 1$ なので，$|R(1.6)| < \frac{\left(1.6-\frac{\pi}{2}\right)^4}{24} < 0.01$ より近似値 $g(1.6) = -0.029\cdots$ の誤差は 0.01 以内.

(3) $f(x) = e^x$ とすると $\sqrt{e} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ である．$f(x)$ と 3 次近似式 $g(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ との誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{e^c}{384}$, $0 < c < \frac{1}{2}$ を満たす c がある．$e^c < e^{\frac{1}{2}} < 3$ なので，$\left|R\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{3}{384} < 0.01$ より近似値 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{79}{48} = 1.6458\cdots$ の誤差は 0.01 以内.

(4) $f(x) = \log(1+x)$ とすると $\log 1.2 = f(0.2)$ である．$f(x)$ と 2 次近似式 $g(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = x - \frac{x^2}{2}$ との誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.2) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.2)^3 = \frac{1}{375(1+c)^3}$, $0 < c < 0.2$ を満たす c がある．$\frac{1}{(1+c)^3} < 1$ なので，$|R(0.2)| < \frac{1}{375} < 0.01$ より近似値 $g(0.2) = 0.18$ の誤差は 0.01 以内.

(5) $f(x) = \tan^{-1} x$ とすると $\tan^{-1} 0.02 = f(0.02)$ である．1 次近似式 $g(x) = f(0) + f'(0)x = x$ と $f(x)$ の誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.02) = \frac{f^{(2)}(c)}{2}(0.02)^2 = -\frac{c}{1250(c^2+1)^2}$, $0 < c < 0.02$ を満たす c がある．$\frac{c}{(c^2+1)^2} < \frac{0.02}{(0.02^2+1)^2} < 0.02$ なので，$|R(0.02)| < \frac{0.02}{1250} < 0.01$ より近似値 $g(0.02) = 0.02$ の誤差は 0.01 以内.

5.2 $\log 2 = f\left(\frac{1}{3}\right)$ である．f とその 7 次近似式 $g(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$ との誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{52488}\left(\frac{1}{(1-c)^8} - \frac{1}{(1+c)^8}\right), 0 < c < \frac{1}{3}$ を満たす c がある．$0 < R\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{255}{524288}$ なので，$g\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < g\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{255}{524288}$ である．よって，$0.6931 < \log 2 < 0.6937$ より小数第 3 位までが 0.693 と確定する.

5.3 (1) $\sqrt{1.2} = f_2(0.2)$ である．f_2 と 2 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ との誤差を $R(x) = f_2(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.2) = \frac{1}{2000(1+c)^{5/2}}, 0 < c < 0.2$ を満たす c がある．$0 < R(0.2) < \frac{1}{2000}$ なので，$g(0.2) < f(0.2) < g(0.2) + \frac{1}{2000}$ である．よって，$1.095 < \sqrt{1.2} < 1.0955$ より小数点第 3 位までが 1.095 と確定する.

(2) $\sqrt[3]{1.01} = f_3(0.01)$ である．f_3 とその 1 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{3}$ との誤差を $R(x) = f_3(x) - g(x)$ とすると，テイラーの定理から $R(0.01) = -\frac{1}{90000(1+c)^{5/3}}, 0 < c < 0.01$ を満たす c がある．$-\frac{1}{90000} < R(0.01) < 0$ なので，$g(0.01) - \frac{1}{90000} < f_3(0.01) < g(0.01)$ より，$1.00332 < \sqrt[3]{1.01} < 1.00334$ から小数点第 3 位までが 1.003 と確定する．

(3) $\sqrt[5]{0.8} = f_5(-0.2)$ である．3 次近似式 $g(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3$ で近似すれば，テイラーの定理から誤差は $-\frac{6}{15625} < R(-0.2) < 0$ と評価できる．よって，$0.9564 < \sqrt[5]{0.8} < 0.9568$ より，小数第 3 位までが 0.956 と確定する．

5.4 $x = 0$ を中心とする f の 6 次近似式を $g(x)$ とし，その誤差を $R(x) = f(x) - g(x)$ とする．$f'(x) = e^{-x^2}$ より f の高階導関数は $f''(x) = -2xe^{-x^2}, f^{(3)}(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1), \dots$ と逐次計算できるので，$f(0) = 0$ と合わせて f の 6 次近似式は $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$ と求められる．テイラーの定理より $R(0.5) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}(0.5)^7 = \frac{e^{-c^2}(8c^6 - 60c^4 + 90c^2 - 15)}{80640}, 0 < c < 0.5$ を満たす c がある．ここで 3 次関数 $p(t) = 8t^3 - 60t^2 + 90t - 15$ を考えると，$0 < c^2 < 0.25$ なので $-15 < p(c^2) < 3.875$ より，$|R(0.5)| < \left|\frac{e^{-c^2}p(c^2)}{80640}\right| < \left|\frac{p(c^2)}{80640}\right| < \frac{15}{80640} = \frac{1}{5376}$ である．よって，$g(0.5) - \frac{1}{5376} < f(0.5) < g(0.5) + \frac{1}{5376}$ より $0.4612 < f(0.5) < 0.4617$ である．これより小数第 2 位までが 0.46 と確定する．

5.5 (1)

(2)

(3)

5.6