

線形代数 問題集

2024 年 4 月 1 日

1 行列

1.1 次の行列 A に対し, A^n を求めよう. ただし, n は自然数とする.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $P^{-1}AP = B$ となる行列 A を求めよう.

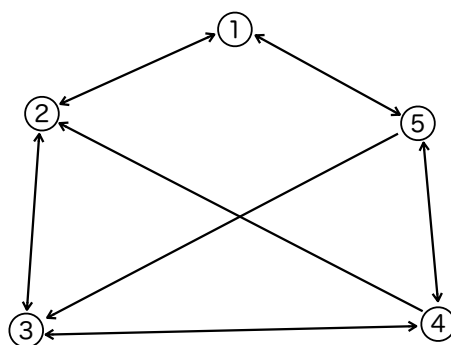
(2) 自然数 n に対し, A^n を求めよう.

1.3 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $A^2 + 5A - 4E_2$ を計算しよう.

(2) (1) の結果を活用して A^5 を効率良く計算しよう.

1.4 下図のような 5 個の空港 1, 2, 3, 4, 5 を結ぶ航空路線がある. 空港 i から空港 j への直通路線があるとき $a_{ij} = 1$ とし, そうでないとき $a_{ij} = 0$ とする. ただし, $a_{ii} = 0$ とする.



(1) a_{ij} を (i, j) 成分とする 5 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ を具体的に書いてみよう.

(2) A^2, A^3, A^4 を計算しよう.

(3) A^2 の (i, j) 成分は $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j} + a_{i5}a_{5j}$ であることから, この値が何を意味するか考えよう.

(4) 自然数 n に対して A^n の (i, j) 成分が何を意味するか考えよう.

(5) 路線 $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ のように, 空港 4 から出発して 4 回の移動 (3 回の乗り継ぎ) で空港 3 に到着する路線の個数を求めよう.