線形代数 問題集

2024 年 4 月 4 日

1　行列の演算

1.1 次の行列 A に対し，A^n を求めよう．ただし，n は自然数とする．

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$　(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.2 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $P^{-1}AP = B$ となる行列 A を求めよう．

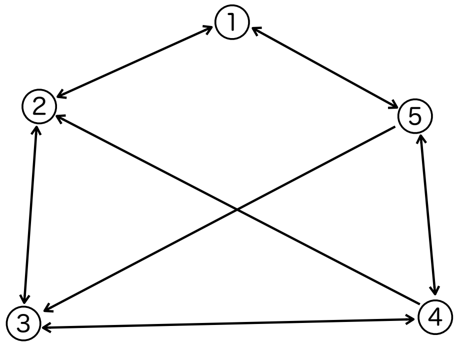
(2) 自然数 n に対し，A^n を求めよう．

1.3 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $A^2 + 5A - 4E_2$ を計算しよう．

(2) (1) の結果を活用して A^5 を効率良く計算しよう．

1.4 下図のような 5 個の空港 $1, 2, 3, 4, 5$ を結ぶ航空路線がある．空港 i から空港 j への直通路線があるとき $a_{ij} = 1$ とし，そうでないとき $a_{ij} = 0$ とする．ただし，$a_{ii} = 0$ とする．



(1) a_{ij} を (i, j) 成分とする 5 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ を具体的に書いてみよう．

(2) A^2, A^3, A^4 を計算しよう．

(3) A^2 の (i, j) 成分は $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j} + a_{i5}a_{5j}$ であることから，この値が何を意味するか考えよう．

(4) 自然数 n に対して A^n の (i, j) 成分が何を意味するか考えよう．

(5) 路線 $4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 3$ のように，空港 4 から出発して 4 回の移動（3 回の乗り継ぎ）で空港 3 に到着する路線の個数を求めよう．

2 行列の基本変形

以下の 2.1, 2.2, 2.3 で定義する行列 $M_n(i;c), S_n(i,j), A_n(i,j;c)$ を（行の）基本行列という．

2.1 n 次単位行列 E_n の (i,i) 成分を c で置き換えた行列を $M_n(i;c)$ とする．

(1) $M_3(1;3),\ M_3(2;-2)$ を具体的に書いてみよう．

(2) 3 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し，行列の積 $M_3(1;3)A$ と $M_3(2;-2)A$ を計算しよう．

(3) $M_n(i;c)$ を左から掛けることは何を意味するかを考えよう．

2.2 n 次単位行列 E_n の (i,i) 成分と (j,j) 成分を 0 に，(i,j) 成分と (j,i) 成分を 1 に置き換えた行列を $S_n(i,j)$ $(i \neq j)$ とする．

(1) $S_3(1,2),\ S_3(2,3)$ を具体的に書いてみよう．

(2) 3 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し，行列の積 $S_3(1,2)A$ と $S_3(2,3)A$ を計算しよう．

(3) $S_n(i,j)$ を左から掛けることは何を意味するかを考えよう．

2.3 n 次単位行列 E_n の (i,j) 成分を c で置き換えた行列を $A_n(i,j;c)$ $(i \neq j)$ とする．

(1) $A_3(1,2;3),\ A_3(3,2;-1)$ を具体的に書いてみよう．

(2) 3 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し，行列の積 $A_3(1,2;3)A$ と $A_3(3,2;-1)A$ を計算しよう．

(3) $A_n(i,j;c)$ を左から掛けることは何を意味するかを考えよう．

2.4 $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ とし，$B=[A\ \ E_3]=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列の積 $S_3(1,2)B$ と $A_3(3,1;-2)S_3(1,2)B$ を計算しよう．

(2) A の簡約化を C とする．$PA=C$ となる 3 次正方行列 P を求めよう．

2.5 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列の積 ${}^tAA$ を計算しよう．

(2) 内積 $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$ を (i,j) 成分とする 3 次正方行列 $G=[\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j]$ を計算しよう．

(3) $L=A_3(3,1,-1)A_3\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$ とする．行列の積 LG と $L({}^tA)$ を計算しよう．

(4) $B={}^t\left(L({}^tA)\right)$ とする．行列の積 ${}^tBB$ を計算しよう．

3　連立 1 次方程式

3.1 次の行列 A, B に対して，$AX = B$ を満たす行列 X を全て求めよう．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 21 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 16 \\ 9 & 12 & 28 \end{bmatrix}$

3.2 以下を満たす 3 次関数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ の係数を決定しよう．

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f'(1) = 2, \quad f'(2) = 3$$

3.3 xy 平面において $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ という形の 2 次方程式によって定まる曲線を 2 次曲線という．以下の 5 点 A, B, C, D, E を通る 2 次曲線の方程式を求めよう．

$$\mathrm{A}(3, -1), \quad \mathrm{B}(2, 2), \quad \mathrm{C}(-4, -1), \quad \mathrm{D}(-1, -2), \quad \mathrm{E}(0, -4)$$

3.4 4 つの物質 A, B, C を含む混合溶液 W, X, Y, Z がある．これら 4 つの混合溶液を適切な割合で混ぜ合わせて新たな溶液 Ω を作りたい．以下の表は各溶液 W, X, Y, Z とこれから作りたい溶液 Ω の 100g あたりに含まれる物質 A, B, C の含有量（単位は g）を表したものである．各溶液を混ぜ合わせることで化学反応等による質量欠損は起きないものとして，混ぜ合わせる溶液 W, X, Y, Z の適切な割合を求めよう．

	W	X	Y	Z	Ω
A	2.00	1.00	4.00	9.00	3.00
B	7.00	10.0	1.00	2.00	6.00
C	4.00	8.00	10.0	7.00	7.00

3.5 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解こう．

(2) 連立 1 次方程式 ${}^tAA\boldsymbol{x} = {}^tA\boldsymbol{b}$ を解こう．

(3) (2) で求めた解 $\boldsymbol{x}$ に対して，空間ベクトルの内積 $(A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$ を計算しよう．

(4) 空間ベクトル $A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ の大きさの 2 乗 $|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2$ が最小となる $\boldsymbol{x}$ を求めよう．

4　行列式

4.1 (1) O を原点とする xy 平面上に 3 点 A(a,c), B(b,d), C$(a+b,c+d)$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でないとする．平行四辺形 OACB と三角形 OAB の面積を求めよう．

(2) 2 次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式を計算しよう．

(3) 5 点 P$(4,4)$, Q$(-2,6)$, R$(-5,1)$, S$(-3,-3)$, T$(5,-3)$ を頂点とする五角形 PQRST の面積を求めよう．

4.2 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = {}^t\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積という．（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を形式的に数のように扱って行列式を計算する）

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を計算しよう．

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ を求めよう．

(3) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積を求めよう．

4.3 ${}^t\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が張る平行六面体の体積を求めよう．

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積を求めよう．

(3) 空間ベクトルの内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を計算しよう．

(4) 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ の行列式を計算しよう．

4.4 xyz 空間の以下の 4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体 OABC の体積と表面積を求めよう．

$$\mathrm{O}(0,0,0),\quad \mathrm{A}(3,0,-3),\quad \mathrm{B}(2,2,4),\quad \mathrm{C}(-2,1,1)$$

4.5 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $g_{ij} = \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$ $(1 \leqq i,j \leqq 3)$ とする．

(1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1,\quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$ を計算しよう．

(2) 3 次正方行列 $B = [\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j]$ を計算しよう．

解答

1.1 (1) $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ より $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ と予想できる．実際，$n = 1$ のときは明らかに正しくて，n のとき正しいと仮定すると，$A^{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & (n+1) \cdot 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix}$ より $n+1$ のときも正しいので，数学的帰納法から予想は正しい．

(2) (1) の結果と行列の分割を用いて計算すると $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

(3) $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $A = 2E_3 + N$ である．$2E_3N = N(2E_3) = 2N$ より $2E_3$ と N の積が可換だから二項展開が使える．さらに，$N^3 = O$ なので $n \geqq 3$ のとき $A^n = (2E_3 + N)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i (2E_3)^{n-i} N^i = 2^n E_3 + n \cdot 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} N^2 = \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & n(n-1) \cdot 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$ である．これは $n = 1, 2$ でも明らかに正しい．

1.2 (1) $A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

(2) $A^n = (PBP^{-1})^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$ より，1.1(1) から $A^n = P \begin{bmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 2 - 6n & 9n \\ -4n & 2 + 6n \end{bmatrix}$.

1.3 (1) $A^2 + 5A - 4E_2 = O$

(2) 前問より $A^2 = 4E_2 - 5A$ なので，$A^5 = A(A^2)^2 = A(16E_2 - 40A + 25A^2) = A(116E_2 - 165A) = 116A - 165A^2 = 941A - 660E_2 = \begin{bmatrix} -2542 & 1882 \\ 4705 & -3483 \end{bmatrix}$.

1.4 (1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 10 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 12 & 7 & 3 \\ 3 & 14 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(3) $i \to * \to j$ と，空港 i から 2 回の移動（1 回の乗り継ぎ）で空港 j に到着する路線の個数

(4) 空港 i から n 回の移動（$n-1$ 回の乗り継ぎ）で空港 j に到着する路線の個数

(5) A^4 の $(4,3)$ 成分なので，(2) より 12 個.

2.1 (1) $M_3(1;3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3(2;-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $M_3(1;3)A = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_3(2;-2)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

(3) 右の行列に行基本変形「i 行目を c 倍する」を適用することを意味する.

2.2 (1) $S_3(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S_3(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $S_3(1,2)A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{3,2} & a_{33} \end{bmatrix}$, $S_3(2,3)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

(3) 右の行列に行基本変形「第 i 行と第 j 行を入れ替える」を適用することを意味する.

2.3 (1) $A_3(1,2;3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3(3,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $S_3(1,2;3)A = \begin{bmatrix} a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3a_{22} & a_{13}+3a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$S_3(3,2;-1)A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23} \end{bmatrix}$

(3) 右の行列に行基本変形「第 i 行に第 j 行の c 倍を加える」を適用することを意味する.

2.4 (1) $S_3(1,2)B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A_3(3,1;-2)S_3(1,2)B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $PB = [PA\ PE_3] = [C\ P]$ は簡約行列なので，B を簡約化すればよい．(1) を続けて

$$B \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

より $P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.5 (1) ${}^tAA = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = {}^t\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j$ なので, $G = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 \\ {}^t\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ {}^t\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} =$

${}^tAA = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

(3) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$LG = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$， $L({}^tA) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(4) ${}^tBB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

補足：$B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]$ とおけば，$[\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j] = {}^tBB$ なので，(4) の結果は $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 = 0$ を意味する．つまり，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は互いに直交する．3×6 行列 $\begin{bmatrix} G & {}^tA \end{bmatrix}$ に左 3 列が上三角行列になるまで「ある行に別の行の定数倍を加える」という行基本変形を適宜繰り返したのが $L\begin{bmatrix} G & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LG & L({}^tA) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LG & {}^tB \end{bmatrix}$ である．これは与えれたベクトルたちから互いに直交するベクトルたちを行列の行基本変形によって作り出している．

3.1 (1) $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$AX = B \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ かつ } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

なので，2 個の連立 1 次方程式を同時に解くために，$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ を簡約化すればよい．

$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 21 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ より $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$AX = B \iff A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1 \text{ かつ } A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2 \text{ かつ } A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{b}_3$$

なので，3 個の連立 1 次方程式を同時解くために $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ を簡約化すればよい．

$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 9 & 16 \\ 7 & 8 & 9 & 9 & 12 & 28 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{b}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より $X = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2 $\begin{cases} f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + 3a_3 = 1 \\ f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 9a_3 = 2 \\ f'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 2 \\ f'(2) = a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 3 \end{cases}$ を解いて $f(x) = -8 + 19x - 13x^2 + 3x^3$.

3.3 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ とおく．同次形連立 1 次方程式

$$\begin{cases} f(3, -1) = 9a - 3b + c + 3d - e + f = 0 \\ f(2, 2) = 4a + 4b + 4c + ed + ee + f = 0 \\ f(-4, -1) = 16a + 4b + c - 4d - e + f = 0 \\ f(-1, -2) = a + 2b + 4c - d - 2e + f = 0 \\ f(0, -4) = 16c - 4e + f = 0 \end{cases}$$

を解いて $(a,b,c,d,e,f)=(k,6k,-k,7k,-9k,-20k)$ を得る．明らかに $k\neq 0$ なので，求める 2 次曲線の方程式は $x^2+6xy-y^2+7x-9y-20=0$.

3.4 W, X, Y, Z をそれぞれ w,x,y,z ずつ混ぜる．Ω に含まれる A, B, C の割合からそれぞれ

$$\frac{\frac{2}{100}w+\frac{1}{100}x+\frac{4}{100}y+\frac{9}{100}z}{w+x+y+z}=\frac{3}{100},\quad \frac{\frac{7}{100}w+\frac{10}{100}x+\frac{1}{100}y+\frac{2}{100}z}{w+x+y+z}=\frac{6}{100},$$
$$\frac{\frac{4}{100}w+\frac{8}{100}x+\frac{10}{100}y+\frac{7}{100}z}{w+x+y+z}=\frac{7}{100}$$

が成り立つ．これらを整理して得られる同次形連立 1 次方程式 $\begin{cases} w+2x-y-6z=0 \\ w+4x-5y-4z=0 \\ 3w-x-3y=0 \end{cases}$ を解いて $(w,x,y,z)=(37c,36c,25c,14c)$ を得る．明らかに $c\neq 0$ なので，W, X, Y, Z を $37c:36c:25c:14c=37:36:25:14$ の割合で混ぜればよい．

3.5 (1) 解はない．

(2) ${}^tAA\boldsymbol{x}={}^tA\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 26 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$ より解は $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \frac{19}{5} \\ -\frac{21}{10} \end{bmatrix}$.

(3) $(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{13}{10} \\ \frac{23}{5} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{10} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}=0$

(4) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とおくと，$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2$ なので，$A\boldsymbol{x}$ を位置ベクトルとする点を H とすれば，H は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が張る平面上にある．$\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点を B とすれば，$A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ が直交するとき，すなわち，$A\boldsymbol{x}\cdot(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=0$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|$ は最小となる．よって，(2), (3) より $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \frac{19}{5} \\ -\frac{21}{10} \end{bmatrix}$ のとき $|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|^2$ は最小となる．

補足：(2) の $\boldsymbol{x}$ は (4) で見たように $|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|^2$ を最小にするので，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の最小 2 乗解と呼ばれる．$A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ が最も $\boldsymbol{0}$ に近づく $\boldsymbol{x}$ でという意味で，厳密が解は存在しない方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の近似解として採用される．