線形代数 問題集

2024 年 4 月 1 日

1　行列の演算

1.1 次の行列 A に対し，A^n を求めよう．ただし，n は自然数とする．

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　　(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.2 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $P^{-1}AP = B$ となる行列 A を求めよう．

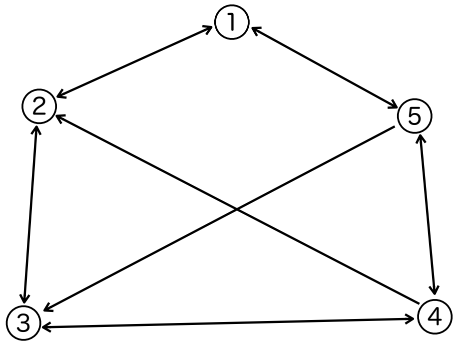
(2) 自然数 n に対し，A^n を求めよう．

1.3 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $A^2 + 5A - 4E_2$ を計算しよう．

(2) (1) の結果を活用して A^5 を効率良く計算しよう．

1.4 下図のような 5 個の空港 $1, 2, 3, 4, 5$ を結ぶ航空路線がある．空港 i から空港 j への直通路線があるとき $a_{ij} = 1$ とし，そうでないとき $a_{ij} = 0$ とする．ただし，$a_{ii} = 0$ とする．



(1) a_{ij} を (i, j) 成分とする 5 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ を具体的に書いてみよう．

(2) A^2, A^3, A^4 を計算しよう．

(3) A^2 の (i, j) 成分は $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j} + a_{i5}a_{5j}$ であることから，この値が何を意味するか考えよう．

(4) 自然数 n に対して A^n の (i, j) 成分が何を意味するか考えよう．

(5) 路線 $4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 3$ のように，空港 4 から出発して 4 回の移動（3 回の乗り継ぎ）で空港 3 に到着する路線の個数を求めよう．

2　連立 1 次方程式

2.1 以下を満たす 3 次関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ の係数を決定しよう．

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f'(1) = 2, \quad f'(2) = 3$$

2.2 行基本変形と基本行列に関する問題を作りたい

2.3 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解こう．

(2) 連立 1 次方程式 ${}^tAA\boldsymbol{x} = {}^tA\boldsymbol{b}$ を解こう．

(3) (2) で求めた解 $\boldsymbol{x}$ に対して，空間ベクトルの内積 $(A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$ を計算しよう．

(4) 空間ベクトル $A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ の大きさの 2 乗 $|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2$ が最小となる $\boldsymbol{x}$ を求めよう．

3 行列式

3.1 (1) O を原点とする xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a, c)$, $\mathrm{B}(b, d)$, $\mathrm{C}(a+b, c+d)$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でないとする．平行四辺形 OACB と三角形 OAB の面積を求めよう．

(2) 2 次正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式を計算しよう．

(3) 5 点 $\mathrm{P}(4,4)$, $\mathrm{Q}(-2,6)$, $\mathrm{R}(-5,1)$, $\mathrm{S}(-3,-3)$, $\mathrm{T}(5,-3)$ を頂点とする五角形 PQRST の面積を求めよう．

3.2 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = {}^t\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積という．（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を形式的に数のように扱って行列式を計算する）

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を計算しよう．

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ を求めよう．

(3) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積を求めよう．

3.3 ${}^t\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が張る平行六面体の体積を求めよう．

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積を求めよう．

(3) 空間ベクトルの内積 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ を計算しよう．

(4) 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ の行列式を計算しよう．

3.4 四面体の体積とか表面積を計算したい