離散構造（後半）レポート

16B04852 川原和弥

1. (1) $F - E + V = 0 - 3 + 3 = 0$
   (2) $F - E + V = 1 - 3 + 3 = 1$
   (3) $F - E + V = 0 - 5 + 4 = -1$
   (4) $F - E + V = 1 - 5 + 4 = 0$
   (5) $F - E + V = 1 - 7 + 5 = -1$
2. *Proof.* まず次の補題 1 を示す。

   補題 1 (隣国は 5 つだけ定理)**.**

   どんな地図にも、5 個以下の隣国しか持たない国が少なくとも一つは存在する。

   補題 1 の証明.　背理法により証明する。
   すなわち、すべての国が 6 個以上の隣国を持つような地図があるとする。
   この地図の (面, 辺, 頂点) の数を (F, E, V) とおくと、

   $$1\text{ つの頂点に集まる辺は } 3 \text{ 本以上} \Rightarrow E \geq \frac{3}{2}V \tag{1}$$

   $$1\text{ つの面の境界になる辺は } 6 \text{ 本以上} \Rightarrow E \geq \frac{6}{2}F \tag{2}$$

   また任意の地図上で次の公式 2 が成り立つ。

   公式 2 (Euler の多面体公式)**.**

   $$F - E + V = 2 \tag{3}$$

   (1),(2) より、

   $$F - E + V \leq \frac{2}{6}E - E + \frac{2}{3}E = 0$$

   しかしこれは (3) に反する。これにより、すべての国が 6 個以上の隣国を持つ地図が存在しないことが示された。 □

   以上の補題 1 を踏まえ、問題である 5 色定理を示す。
   地図上の国の数 N に関する帰納法により証明する。
   (a) $N = 1$ のとき
      任意の色で塗ればよく、自明である。

(b) $N=k$ で5色定理が成り立つとする。

$N(\mathrm{M})=k+1$ である地図 M を5色で塗ることを考える。補題1により M には隣国が5個以下の国が存在するから、その国を C とする。M から C を除いた地図を M' とすると、$N(\mathrm{M}')=k+1$ だから、帰納法の仮定により M' は5色で塗り分けられる。

i. C が5個の隣国を持ち、全て異なる色で塗られているとき

A.

B.

ii. そのほかの場合

C の隣国に使われていない色で C を塗れば良い。

$\square$

3.