

離散構造（後半）レポート

16B04852 川原和弥

1. (1) $F - E + V = 0 - 3 + 3 = 0$
(2) $F - E + V = 1 - 3 + 3 = 1$
(3) $F - E + V = 0 - 5 + 4 = -1$
(4) $F - E + V = 1 - 5 + 4 = 0$
(5) $F - E + V = 1 - 7 + 5 = -1$
2. *Proof.* まず次の補題 1 を示す。

補題 1 (隣国は 5 つだけ定理).

どんな地図にも、5 個以下の隣国しか持たない国が少なくとも一つは存在する。

補題 1 の証明. 背理法により証明する。

すなわち、すべての国が 6 個以上の隣国を持つような地図があるとする。

この地図の (面, 辺, 頂点) の数を (F, E, V) とおくと、

$$1 \text{ つの頂点に集まる辺は } 3 \text{ 本以上} \Rightarrow E \geq \frac{3}{2}V \quad (1)$$

$$1 \text{ つの面の境界になる辺は } 6 \text{ 本以上} \Rightarrow E \geq \frac{6}{2}F \quad (2)$$

また任意の地図上で次の公式 2 が成り立つ。

公式 2 (Euler の多面体公式).

$$F - E + V = 2 \quad (3)$$

(1),(2) より、

$$F - E + V \leq \frac{2}{6}E - E + \frac{2}{3}E = 0$$

しかしこれは (3) に反する。これにより、すべての国が 6 個以上の隣国を持つ地図が存在しないことが示された。□

以上の補題 1 を踏まえ、問題である 5 色定理を示す。

地図上の国の数 N に関する帰納法により証明する。

(a) $N = 1$ のとき

任意の色で塗ればよく、自明である。

(b) $N = k$ で 5 色定理が成り立つとする。

$N = k + 1$ である地図 M を考える。補題 1 により M には隣国が 5 個以下の国が存在するから、その国を C とする。

- i.
- ii.
- 3.

□