離散構造（後半）レポート

16B04852 川原和弥

1. (1) $F - E + V = 0 - 3 + 3 = 0$
   (2) $F - E + V = 1 - 3 + 3 = 1$
   (3) $F - E + V = 0 - 5 + 4 = -1$
   (4) $F - E + V = 1 - 5 + 4 = 0$
   (5) $F - E + V = 1 - 7 + 5 = -1$

2. *Proof.* まず次の補題 1 を示す。

   補題 1 (隣国は 5 つだけ定理)**.**

   どんな地図にも、5 個以下の隣国しか持たない国が少なくとも一つは存在する。

   補題 1 の証明.　背理法により証明する。
   すなわち、すべての国が 6 個以上の隣国を持つような地図があるとする。
   この地図の (面, 辺, 頂点) の数を (F, E, V) とおくと、

   $$1\text{ つの頂点に集まる辺は }3\text{ 本以上} \Rightarrow E \geq \frac{3}{2}V \tag{1}$$

   $$1\text{ つの面の境界になる辺は }6\text{ 本以上} \Rightarrow E \geq \frac{6}{2}F \tag{2}$$

   また任意の地図上で次の公式 2 が成り立つ。

   公式 2 (Euler の多面体公式)**.**

   $$F - E + V = 2 \tag{3}$$

   式 (1),(2) より、

   $$F - E + V \leq \frac{2}{6}E - E + \frac{2}{3}E = 0$$

   しかしこれは式 (3) に反する。これにより、すべての国が 6 個以上の隣国を持つ地図が存在しないことが示された。 □

   以上の補題 1 を踏まえ、問題である 5 色定理を示す。
   地図上の国の数 N に関する帰納法により証明する。
   (a) $N = 1$ のとき
   　任意の色で塗ればよく、自明である。

(b) $N=k$ で 5 色定理が成り立つとする。

$N(M)=k+1$ である地図 M を 5 色で塗ることを考える。補題 1 により M には隣国が 5 個以下の国が存在するから、その国を $C(\in M)$ とする。M から C を除いた地図を $M'(\subsetneq M)$ とすると、$N(M')=k$ だから、帰納法の仮定により M' は 5 色で塗り分けられる。

i. C が 5 個の隣国を持ち、全て異なる色で塗られているとき

C の隣国を時計回りに $C_1,\cdots,C_5$ として、それぞれの色を $c_1,\cdots,c_5$ とする。C_2 から c_2 と c_5 のみをたどって到達可能な国の集合を $S(\subsetneq M')$ とし、C_1 から c_1 と c_3 のみをたどって到達可能な国の集合を $S'(\subsetneq M')$ とする。

A. $C_5 \notin S$ のとき

S の c_2 と c_5 を反転させ、C を c_2 で塗ればよい。

B. $C_5 \in S$ のとき

S により C_1 と C_3 は分断されているから $C_3 \notin S'$ である。したがって A. と同様にして S' の c_1 と c_3 を反転させ、C を c_1 で塗ればよい。

ii. そのほかの場合

C の隣国に使われていない色で C を塗ればよい。

(a),(b) より、数学的帰納法から任意の地図上で 5 色定理は肯定される。 $\square$

3. (1) $w(L_1)=3$、$\langle L_1\rangle=-A^5-A^{-3}+A^{-7}$ より $V(L_1)=(-A^3)^{-3}(-A^5-A^{-3}+A^{-7})$

(2) ジョーンズ多項式は不変量であり、図形のイソトピーとライマイスター移動に関して不変である。L_1,L_2 は互いにイソトピックだから

$$V(L_2)=V(L_1)=(-A^3)^{-3}(-A^5-A^{-3}+A^{-7})$$

(3) $w(L_3)=0$、$\langle L_3\rangle=A^8-A^4+1-A^{-4}+A^{-8}$ より $V(L_3)=A^8-A^4+1-A^{-4}+A^{-8}$

(4) ある結び目 L とその鏡像 R のジョーンズ多項式 $V(L),V(R)$ の関係を考える。

まず正交点と負交点が逆転するから

$$w(R)=-w(L) \tag{4}$$

そして同様の理由により、カウフマン括弧のルール (K1) の A と A^{-1} が逆転するから

$$\langle R\rangle(A)=\langle L\rangle(A^{-1}) \tag{5}$$

式 (4),(5) より

$$\begin{aligned} V(R)(A) &= (-A^3)^{-w(R)}\langle R\rangle(A) \\ &= (-(A^{-1})^3)^{-w(L)}\langle L\rangle(A^{-1}) \\ &= V(L)(A^{-1}) \end{aligned}$$

したがって $V(L),V(R)$ は A,A^{-1} を置き換えた関係にある。

L_4 は L_3 の鏡像であるから、

$$V(L_4)=V(L_3)(A^{-1})=A^8-A^4+1-A^{-4}+A^{-8}$$

(5) 間に交差を挟まないように結び目 L, L' の和をとる。
このとき交点の数はその和となるので、

$$w(L \times L') = w(L) + w(L') \tag{6}$$

また L' 側を固定したまま L の方から $\langle L \times L' \rangle$ を展開することを考えると、$\langle L \rangle$ で最後に残る $\langle \bigcirc \rangle$ を $\langle L' \rangle$ に置換したものとなるので、

$$\langle L \times L' \rangle = \langle L \rangle \langle L' \rangle \tag{7}$$

式 (6),(7) より

$$\begin{aligned} V(L \times L') &= (-A^3)^{-w(L \times L')} \langle L \times L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(w(L)+w(L'))} \langle L \rangle \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle \\ &= V(L)V(L') \end{aligned}$$

L_1 の鏡像を R_1 とすると $L_5 = R_1 \times L_3$ であるから、

$$\begin{aligned} V(L_5) &= V(R_1 \times L_3) \\ &= V(R_1)V(L_3) \\ &= V(L_1)_{A \to A^{-1}} V(L_3) \\ &= (-A^{-3})^{-3}(-A^{-5} - A^3 + A^7)(A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}) \end{aligned}$$

2.