

Primeiro Exercício-Programa

Ronaldo Fumio Hashimoto

Data de Entrega: 18 de maio de 2012

Minimização de Funções Booleanas

Neste primeiro exercício programa, vamos implementar o algoritmo ISI para encontrar os cubos maximais para minimização de funções booleanas.

Entrada e Saída do Algoritmo ISI

A entrada do algoritmo é uma lista dos mintermos da função booleana que se deseja minimizar. A saída é uma lista de cubos maximais. Por exemplo:

- Entrada: 000, 010, 100, 110, 111
- Saída: XX0, 11X

O Algoritmo ISI

Seja $B = \{0, 1\}$. Seja $f : B^n \rightarrow B$ uma função de chaveamento em n variáveis. Seja $f \langle 1 \rangle$ o conjunto dos mintermos de f . Seja $f \langle 0 \rangle$ o conjunto dos maxtermos de f .

O algoritmo ISI (*incremental splitting of intervals*) inicia o processo a partir do n -cubo e, sucessivamente, elimina os zeros da função, ou seja, os elementos de $f\langle 0 \rangle$, tomando cuidado em representar os elementos que restam após uma eliminação através do conjunto de seus cubos maximais.

Depois de eliminar todos os zeros, os elementos restantes correspondem aos cubos maximais (ou seja, os implicantes primos) que cobrem os mintermos da função (ou seja, os elementos de $f\langle 1 \rangle$).

Um Exemplo Completo

Este exemplo foi retirado das notas de aula da Profa. Nina. Consideremos a minimização da função $f(x, y, z) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6)$. Neste caso, temos $f\langle 0 \rangle = \{111, 011, 010\}$. A figura abaixo mostra os elementos que permanecem após sucessivas remoções de elementos de $f\langle 0 \rangle$. Cada seta indica um passo de remoção (note que não mostramos os cubos maximais resultantes individualmente, mas os elementos restantes em negrito).

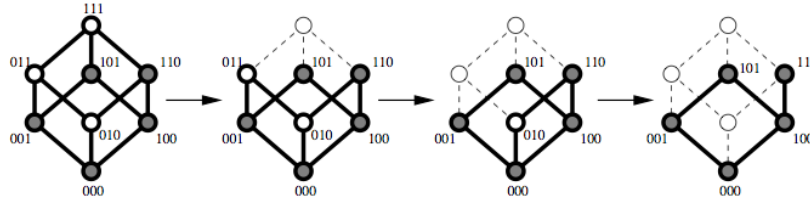


Figura 01: Cálculo dos cubos maximais de $f(x, y, z) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6)$ com $f\langle 0 \rangle = \{111, 011, 010\}$. A ordem de remoção: 111, 011, 010.

A próxima figura mostra o mesmo processo em uma estrutura de árvore. Cada nível da árvore corresponde ao resultado após um passo de remoção. Note que alguns cubos podem ser descartados por estarem contidos em outros.

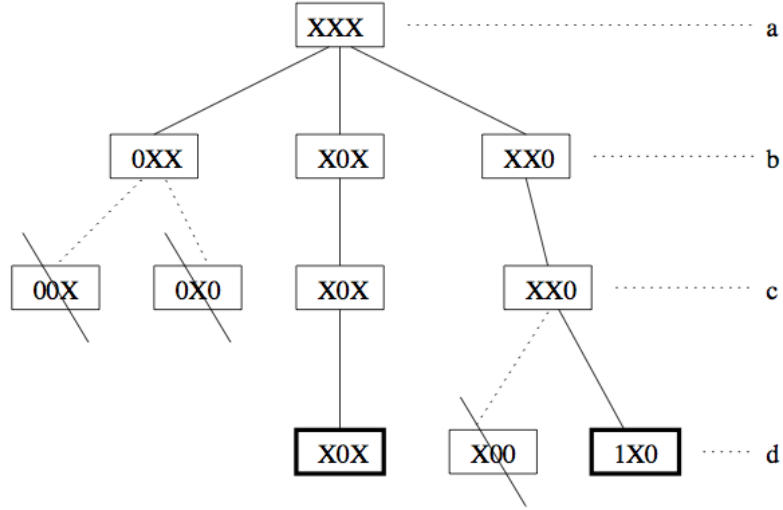


Figura 02: Cálculo dos cubos maximais de $f(x, y, z) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6)$ com $f(0) = \{111, 011, 010\}$. (a) Cubo inicial; (b) após remoção de 111; (c) após remoção de 011; (d) resultado final, após remoção de 010.

O algoritmo ISI deve devolver os cubos maximais X0X e 1X0.

O Algoritmo ISI

Um pseudo-código do algoritmo é dado a seguir:

```

1: /* Inicialmente  $\mathcal{C}$  é o  $n$ -cubo. */
2:  $\mathcal{C} \leftarrow f \langle 0 \rangle \cup f \langle 1 \rangle$ 
3: /*  $\mathcal{D}$  uma lista dos maxterms. */
4:  $\mathcal{D} \leftarrow f \langle 0 \rangle$ 
5: while  $\mathcal{D} \neq \emptyset$  do
6:   Let  $X \in \mathcal{D}$ 
7:   /* Remove  $X$  from  $\mathcal{D}$  */
8:    $\mathcal{M} \leftarrow \emptyset$ 
9:    $\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D} \setminus \{X\}$ 
10:  for  $[A, B] \in \mathcal{C}$  do
11:    if  $X \in [A, B]$  then
12:      /* Remove  $X$  from  $[A, B]$  */
13:       $\mathcal{M} \leftarrow [A, B] \setminus \{X\}$ 
14:       $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \mathcal{M}$ 
15:    else
16:       $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{[A, B]\}$ 
17:    end if
18:  end for
19:  for  $[A, B] \in \mathcal{F}$  do
20:    if there exists  $[A', B'] \in \mathcal{F} : [A, B] \subset [A', B']$  then
21:      /* Remove  $[A, B]$  from  $\mathcal{F}$  */
22:       $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \setminus \{[A, B]\}$ 
23:    end if
24:  end for
25:   $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{F}$ 
26: end while
27:
28: return  $\mathcal{C}$ 

```

O Passo Básico do ISI

Remover um elemento de um cubo maximal e representar os elementos restantes por subcubos maximais é a chave do algoritmo ISI (veja a Linha 13).

Seja $[A, B]$ um cubo e X um elemento do cubo (ou seja, $X \in [A, B]$) que desejamos remover. Ou seja, desejamos obter o conjunto $[A, B] \setminus \{X\}$.

Para isso, temos que considerar 3 casos:

Primeiro caso: $X = B$

Neste caso, estamos interessados no conjunto $[A, B] \setminus \{B\}$ que é dado pela equação abaixo:

$$[A, B] \setminus \{B\} = \{[A, C] : C = B \setminus \{x\}, x \notin A, x \in B\}$$

Segundo caso: $X = A$

Neste caso, estamos interessados no conjunto $[A, B] \setminus \{A\}$ que é dado pela equação abaixo:

$$[A, B] \setminus \{A\} = \{[C, B] : C = A \cup \{x\}, x \notin A, x \in B\}$$

Terceiro caso: $X \in [A, B], X \neq A, X \neq B$

Neste caso, estamos interessados no conjunto $[A, B] \setminus \{X\}$ que é dado pela equação abaixo:

$$[A, B] \setminus \{X\} = \{[A, C] : C = B \setminus \{x\}, x \in X, x \notin A\} \cup \{[C, B] : C = A \cup \{x\}, x \notin X, x \in B\}$$

O que você deve fazer

Faça uma implementação do algoritmo ISI em C. Depois faça um manual (na verdade, um relatório) de uso do programa, indicando suas características (complexidade de tempo, estruturas de dados, etc.) e as dificuldades encontradas para sua implementação.