Les Flots

Mohand Cherif BOUKALA

11 mars 2021

Plan

Introduction

Introduction

Les flots permettent de modéliser une très large classe de problèmes. Leur interprétation correspond à la circulation de flux physiques sur un réseau :

- distribution électrique,
- réseau d'adduction d'eau ou tout autre liquide,
- acheminement de paquets sur un réseau informatique,
- ...

Introduction

Les flots permettent de modéliser une très large classe de problèmes. Leur interprétation correspond à la circulation de flux physiques sur un réseau :

- distribution électrique,
- réseau d'adduction d'eau ou tout autre liquide,
- acheminement de paquets sur un réseau informatique,
- ...

Il s'agit d'acheminer la plus grande quantité possible de matière entre une source **s** et une destination **t**. Les liens permettant d'acheminer les flux ont une capacité limitée, et il n'y a ni perte ni création de matière lors de l'acheminement.

Introduction

Les flots permettent de modéliser une très large classe de problèmes. Leur interprétation correspond à la circulation de flux physiques sur un réseau :

- distribution électrique,
- réseau d'adduction d'eau ou tout autre liquide,
- acheminement de paquets sur un réseau informatique,
- ...

Il s'agit d'acheminer la plus grande quantité possible de matière entre une source **s** et une destination **t**. Les liens permettant d'acheminer les flux ont une capacité limitée, et il n'y a ni perte ni création de matière lors de l'acheminement.

Pour chaque noeud intermédiaire du réseau, le flux entrant doit être égal au flux sortant (Conservation des flux).

Définition

Un réseau est un graphe orienté $R = (X, U)$ *avec une valuation positive de ses arcs. La valuation d'un arc* (x, y)*, notée* $c(x, y)$*, est appelée la capacité de l'arc.*

Définition

Un réseau est un graphe orienté $R = (X, U)$ *avec une valuation positive de ses arcs. La valuation d'un arc* (x, y)*, notée* $c(x, y)$*, est appelée la capacité de l'arc.*

On distingue sur un réseau R deux sommets particuliers : un sommet dit source s et un autre dit destination t.

Définition

Un réseau est un graphe orienté $R = (X, U)$ avec une valuation positive de ses arcs. La valuation d'un arc (x, y), notée $c(x, y)$, est appelée la capacité de l'arc.

On distingue sur un réseau R deux sommets particuliers : un sommet dit source s et un autre dit destination t.

Les arcs de capacité nulle ne sont pas représentés sur le réseau.

Définition

Un réseau est un graphe orienté $R = (X, U)$ avec une valuation positive de ses arcs. La valuation d'un arc (x, y), notée $c(x, y)$, est appelée la capacité de l'arc.

On distingue sur un réseau R deux sommets particuliers : un sommet dit source s et un autre dit destination t.

Les arcs de capacité nulle ne sont pas représentés sur le réseau.

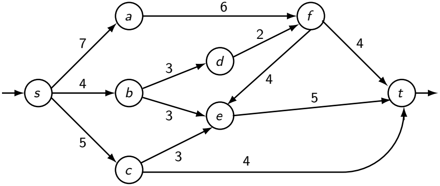


Figure – Un réseau

Flot

Un flot représente l'acheminement d'un flux, de matière par exemple, depuis une source s vers une destination t.

Un flot vérifie la loi de conservation analogue aux lois de Kirshoff en électricité. Le flux entrant à une nœud doit être égal au flux sortant de ce nœud. Il n'est donc pas possible de stocker ou de produire de la matière aux nœuds intermédiaires

Définition

Un flot φ sur un réseau $R = (X, U)$ est une valuation positive φ des arcs, φ est une application définie de U dans $\mathbb{R}^+$, telle que : pour tout sommet $x \in U \setminus \{s, t\}$, $\sum_y \varphi(y, x) = \sum_y \varphi(x, y)$

Le flux transitant sur chacun des arcs du réseau doit être inférieure à la capacité de cet arc (flot compatible ou admissible).
Un flot est dit **compatible** si pour tout arc $(x, y) \in U$, $0 \leq \varphi(x, y) \leq c(x, y)$.
La valeur du flot est définie comme le flux net sortant de s $(\sum_x \varphi(s, x))$ ou entrant dans t $(\sum_x \varphi(x, t))$.

Définition

Un flot maximum dans un réseau est un flot compatible de valeur maximale.

Flot maximal et coupe minimale

Dans un réseau de transport $R = (X, U)$, soit S un sous-ensemble de X et T son complément. Une coupe se définit par une partition $X = S \cup T$, les arcs de la coupe sont alors les arcs (x,y) ayant leur extrémité initiale dans S et leur extrémité terminale dans T.
La **capacité d'une coupe**, notée $v(S, T)$, est donnée par la somme des capacités des arcs de la coupe.

$$v(S, T) = \sum_{u \in \omega^+(S)} c(u)$$

Théorème

Ford-Fulkerson (Max-flow Min-cut)
La valeur d'un flot maximum φ dans le réseau R est égale à la coupe de capacité minimale.

Dans un réseau de transport $R = (X, U)$, soit S un sous-ensemble de X et T son complément. Une coupe se définit par une partition $X = S \cup T$, les arcs de la coupe sont alors les arcs (x,y) ayant leur extrémité initiale dans S et leur extrémité terminale dans T.
La **capacité d'une coupe**, notée $v(S, T)$, est donnée par la somme des capacités des arcs de la coupe.

$$v(S, T) = \sum_{u \in \omega^+(S)} c(u)$$

Théorème

Ford-Fulkerson (Max-flow Min-cut)
La valeur d'un flot maximum φ dans le réseau R est égale à la coupe de capacité minimale.

Graphe d'écart et chemin augmentant

Soit φ un flot compatible sur R. Le **graphe d'écart** associé à φ sur R est le graphe $R_e(\varphi) = (X, U^e(\varphi))$ défini comme suit : $\forall u = (i,j) \in U$,

- Si $\varphi(u) < c(u)$, $(i,j) \in U^e(\varphi)$ avec la capacité (résiduelle) $c'(i,j) = c(u) - \varphi(u)$
- Si $\varphi(u) > 0$, $(j,i) \in A$ avec la capacité $c'(j,i) = \varphi(u)$

Soit φ un flot admissible sur R et $R^e(\varphi) = (X, U^e(\varphi))$ le graphe d'écart associé. Soit μ un chemin allant de s à t dans $R^e(\varphi)$ et $\delta = \min_{u \in \mu} c(u)$. Ce chemin est appelé **chemin augmentant** car il est possible d'augmenter la valeur du flot sur R de δ de la façon suivante $\forall (i,j) \in \mu$:

- Si $u = (i,j) \in U$, alors $\varphi(u) = \varphi(u) + \delta$
- Si $u = (j,i) \in U$, alors $\varphi(u) = \varphi(u) - \delta$

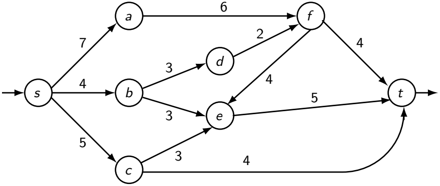


Figure – Un réseau

Soit φ un flot admissible sur R et $R^e(\varphi) = (X, U^e(\varphi))$ le graphe d'écart associé. Soit μ un chemin allant de s à t dans $R^e(\varphi)$ et $\delta = \min_{u \in \mu} c(u)$. Ce chemin est appelé **chemin augmentant** car il est possible d'augmenter la valeur du flot sur R de δ de la façon suivante $\forall (i,j) \in \mu$:

- Si $u = (i,j) \in U$, alors $\varphi(u) = \varphi(u) + \delta$
- Si $u = (j,i) \in U$, alors $\varphi(u) = \varphi(u) - \delta$

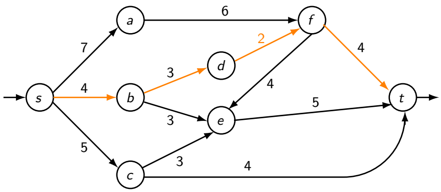


Figure – Un réseau

$\delta = 2$

Soit φ un flot admissible sur R et $R^e(\varphi) = (X, U^e(\varphi))$ le graphe d'écart associé. Soit μ un chemin allant de s à t dans $R^e(\varphi)$ et $\delta = \min_{u \in \mu} c(u)$. Ce chemin est appelé **chemin augmentant** car il est possible d'augmenter la valeur du flot sur R de δ de la façon suivante $\forall (i,j) \in \mu$:

- Si $u = (i,j) \in U$, alors $\varphi(u) = \varphi(u) + \delta$
- Si $u = (j,i) \in U$, alors $\varphi(u) = \varphi(u) - \delta$

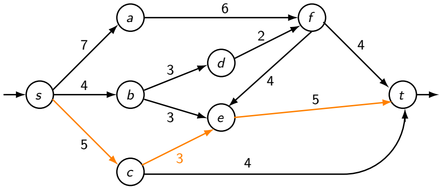


Figure – Un réseau

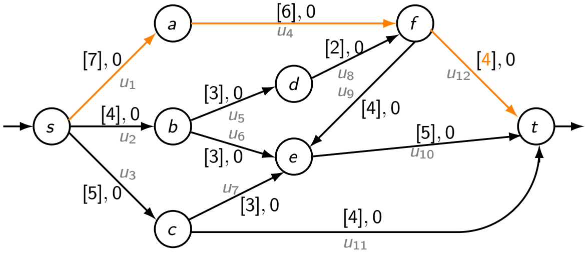
$\delta = 3$

Recherche d'un flot maximal : algorithme de Ford-Fulkerson

Soit un réseau R, un flot compatible φ dans R et le graphe d'écart $R_e(\varphi)$. Pour déterminer un flot maximum, l'algorithme générique consiste, à chaque itération :

- Chercher un chemin μ allant de s à t dans $R_e(\varphi)$.
- Si un tel chemin existe, on augmente le flot φ de la quantité $\delta = \min_{u \in \mu} c_u$. Sinon l'algorithme termine et φ est le flot de valeur maximale.

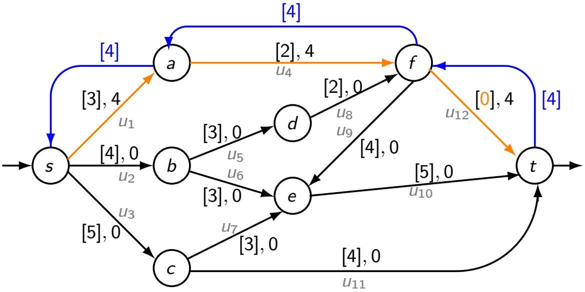
Itération 1



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

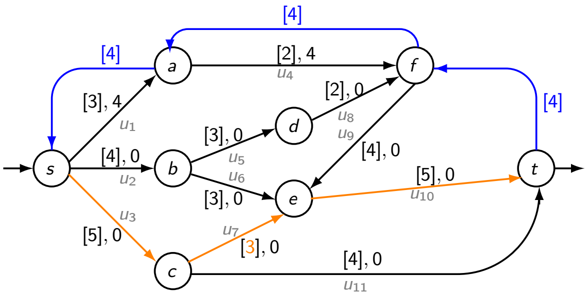
Itération 1



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	4

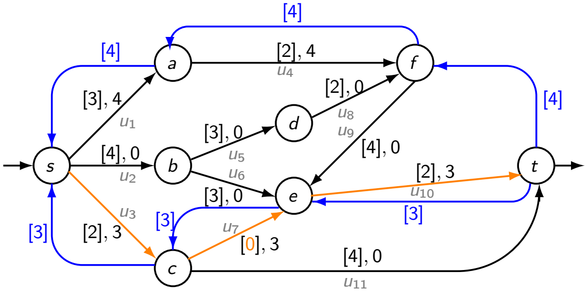
Itération 2



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	4

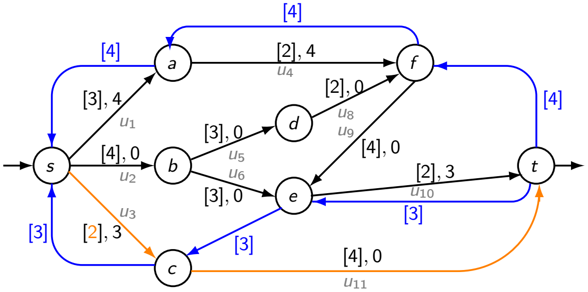
Itération 2



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	0	3	4	0	0	3	0	0	3	0	4

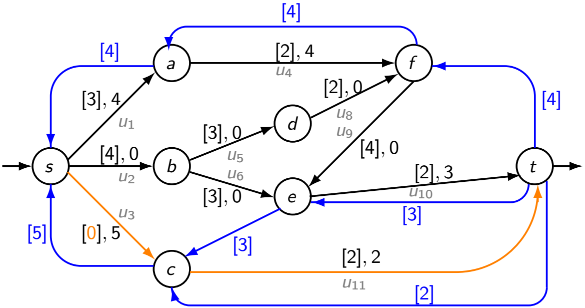
Itération 3



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	0	3	4	0	0	3	0	0	3	0	4

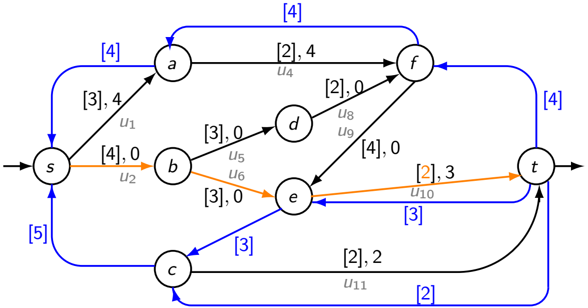
Itération 3



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	0	5	4	0	0	3	0	0	3	2	4

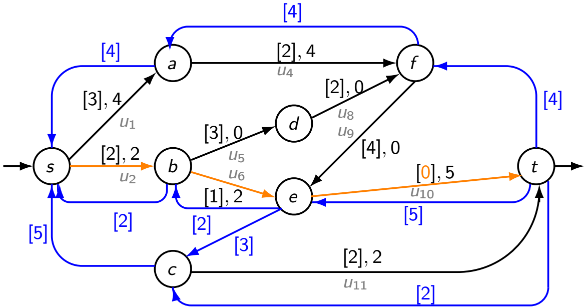
Itération 4



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	0	5	4	0	0	3	0	0	3	2	4

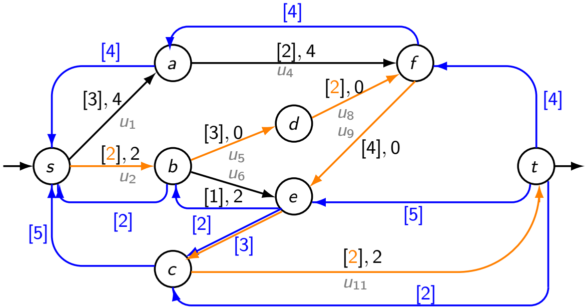
Itération 4



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	2	5	4	0	2	3	0	0	5	2	4

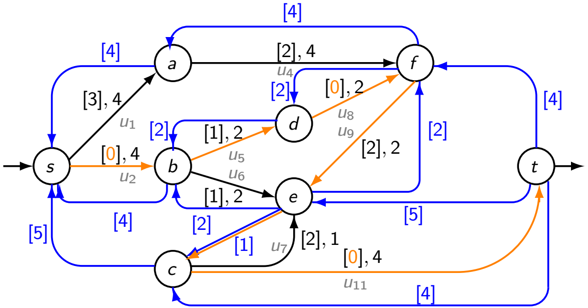
Itération 5



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	2	5	4	0	2	3	0	0	5	2	4

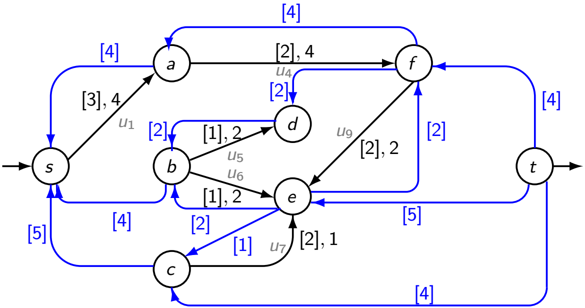
Itération 5



Le flot

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
4	4	5	4	2	2	1	2	2	5	4	4

Itération 6



Il n'y a plus de chemins de s vers t, le flot max est :

$\varphi 1$	$\varphi 2$	$\varphi 3$	$\varphi 4$	$\varphi 5$	$\varphi 6$	$\varphi 7$	$\varphi 8$	$\varphi 9$	$\varphi 10$	$\varphi 11$	$\varphi 12$
4	4	5	4	2	2	1	2	2	5	4	4