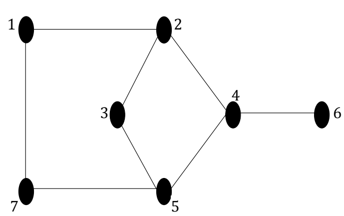
Chapitre 2
Série d'exercices de TD
2021/2022

Présenté par :
H. BENKAOUHA
Bureau 222, Faculté d'Informatique, USTHB
hbenkaouha@usthb.dz
haroun.benkaouha@gmail.com

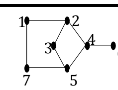
Exercice 1

- Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté, simple et connexe sur $\boldsymbol{n}$ sommets.
  - On note la **longueur** d'une chaîne $\boldsymbol{\mu(x, y)}$ joignant x et y, $|\boldsymbol{\mu(x, y)}|$.
  - L'**écart** entre x et y : $\boldsymbol{e(x, y)}$ est la longueur d'une plus courte chaîne joignant x et y :
    $e(x, y) = \min\limits_{\mu(x,y) \in G} \{|\mu(x,y)|\}$;
    $e(x, x) = 0.$
  - **Ecartement** d'un sommet x, le nombre $E(x) = \max\limits_{y \in X} \{ e(x, y) \}$
  - **Diamètre** de G, le nombre $e(G) = \max\limits_{x,y \in X} \{ e(x, y) \}$
  - **Rayon** de G, le nombre $r(G) = \min\limits_{x \in X} \{E(x)\}$
  - **Centre** de G, un sommet $s \in X$ tel que : $E(s) = r(G)$
- Déterminer le diamètre, le rayon et le ou les centres du graphe suivant.

Exercice 1 - Suite



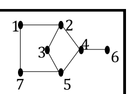
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0						
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
7							0

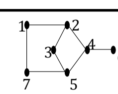
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1					1
2	1	0	1	1			
3		1	0		1		
4		1		0	1	1	
5			1	1	0		1
6				1		0	
7	1				1		0

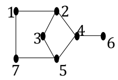
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1			
3	2	1	0		1		
4	2	1		0	1	1	
5	2		1	1	0		1
6				1		0	
7	1				1		0

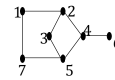
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0		1		
4	2	1		0	1	1	
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2			1		0

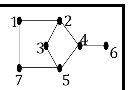
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2	2		1		0

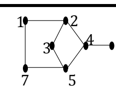
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0		1
6		2		1		0	
7	1	2	2	2	1		0

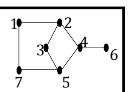
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2		1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6		2		1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

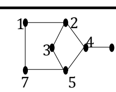
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1		2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2		1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

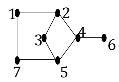
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	
7	1	2	2	2	1		0

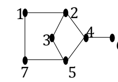
Exercice 1 - Solution



- L'écart entre toute paire de sommets :

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	3
7	1	2	2	2	1	3	0

Exercice 1 - Solution

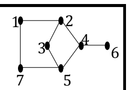


- L'écartement d'un sommet : max ligne ou colonne

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	2	2	2	3	1
2	1	0	1	1	2	2	2
3	2	1	0	2	1	3	2
4	2	1	2	0	1	1	2
5	2	2	1	1	0	2	1
6	3	2	3	1	2	0	3
7	1	2	2	2	1	3	0

$E(x)$:							
	3	2	3	2	2	3	3

Exercice 1 - Solution



$E(x)$:							
	3	2	3	2	2	3	3

- Le diamètre
  $e(G) = 3$
- Le rayon
  $r(G) = 2$
- Les centres
  2, 4 et 5

Exercice 2

- Dans un réseau téléphonique constitué de $2n$ centraux téléphoniques
- Disposés de telle façon que chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins n autres centraux.
- Montrez qu'il est toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.

Exercice 2 - solution

- Modélisation : Par un Graphe $G=(X, E)$
  - Chaque central téléphonique i représentée par un sommet i
  - Il y a $2n$ centraux téléphoniques $\Rightarrow$ Il y a $2n$ sommets $\Rightarrow$ Graphe d'ordre $2n$
  - Une arête $\{i,j\}$ « *Les centraux i et j sont reliés par une ligne directe* »
  - Chaque central est relié par une ligne téléphonique directe avec au moins n autres centraux
  - $\Rightarrow \forall x \in X, d_G(x) \geq n$

Exercice 2 - solution

- Identification du problème
  - Toujours possible d'établir une liaison entre deux centraux quelconques.
  - $\Rightarrow$ Il y a une chaîne reliant les sommets correspondants
  - $\Rightarrow$ G doit être connexe

Exercice 2 - solution

- Identification du problème
  - Revient à montrer que
  - Si un graphe $G=(X, E)$ d'ordre $2n$ tel que $\forall i \in X$, $d_G(x) \geq n$
  - Alors G est connexe

H. BENKAOUHA 19

Exercice 2 - solution

- On démontre par l'absurde
  - On suppose qu'il existe un graphe $G=(X, E)$ d'ordre $2n$ tel que $\forall i \in X$, $d_G(i) \geq n$ et G n'est pas connexe.

H. BENKAOUHA 20

Exercice 2 - solution

$\Rightarrow$Il y a au moins 2 CC dans G

$\Rightarrow X=C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ $(k \geq 2)$ et $\forall p \neq q$ $C_p \cap C_q = \emptyset$ où chaque C_l ($\forall 1 \leq l \leq k$) est une CC dans G

$\forall x \in X$, $d_G(x) \geq n$ *et G simple*

$\Rightarrow$ dans une CC (C_l $\forall 1 \leq l \leq k$), nous avons au moins $n+1$ sommets, c'est-à-dire le sommet x et tous ses voisins.

H. BENKAOUHA 21

Exercice 2 - solution

$\Rightarrow \forall\ 1 \leq l \leq k,\quad |C_l| \geq n+1$

$\Rightarrow |C_1| + |C_2| + \ldots + |C_k| \geq k(n+1)$

Sachant que $k \geq 2$ alors $k(n+1) \geq 2(n+1) = 2n+2 > 2n$

$\Rightarrow |C_1| + |C_2| + \ldots + |C_k| > 2n = |X|$

H. BENKAOUHA 22

Exercice 2 - solution

Or, nous avons :

$\Rightarrow \forall\ 1 \leq l \leq k,\ |C_l| \leq |X|$

et $|C_1| + |C_2| + \ldots + |C_k| = |X| = 2n$

Car $X=C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ $(k \geq 2)$ et $\forall p \neq q$ $C_p \cap C_q = \emptyset$

- *Contradiction*

H. BENKAOUHA 23

Exercice 3

- Soit $G=(X, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$.
  - Montrons qu'il existe un sommet x
  - tel que :
  - le sous-graphe de G engendré par le sous ensemble de sommets X-{x} est toujours connexe.

H. BENKAOUHA 24

Exercice 3 - Solution

- On démontre par récurrence sur l'ordre du graphe *n*.
- Cas de base :
  - n=2 : On a 2 sommets reliés entre eux car *G* est connexe
  - On supprime l'un d'eux, on obtient un graphe avec un seul sommet
  - Ce genre de graphe est considéré comme connexe
  - C'est vérifié

Exercice 3 - Solution

- On démontre par récurrence sur l'ordre du graphe *n*.
- Hypothèse de récurrence :
  - On suppose que pour un graphe d'ordre $n \leq p$ connexe, il existe un sommet *x* que si on le supprime le graphe reste connexe.
- Pas de récurrence
  - Démontrons pour $n=p+1$

Exercice 3 - Solution

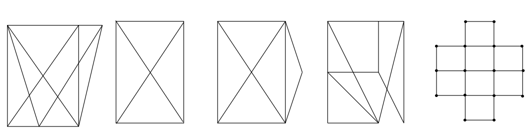
- Il s'agit d'un graphe d'ordre *p* auquel on a rajouté un sommet.
- On a 2 cas, soit le graphe d'ordre *p* est connexe, soit le graphe d'ordre *p* n'est pas connexe.
- Si le graphe d'ordre *p* est connexe, il suffit de supprimer le sommet qu'on a rajouté.

Exercice 3 - Solution

- Si le graphe d'ordre *p* n'est pas connexe, alors le sommet qui a été rajouté permet de relier les différentes CC
- Dans ce cas, chaque sous graphe engendré par une CC vérifie l'hypothèse de récurrence car il est connexe et d'ordre $<p$
- Donc il existe un sommet qu'on eut supprimer sans déconnecter le graphe.

Exercice 4

- *Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !…) ? Pourquoi ?*



Exercice 4 - Solution

- Modélisation
  - On représente chacune des 5 figures par un graphe $G_i=(X_i, E_i)$ tel que i=1 à 5
  - Chaque point extrémité d'un trait est représenté par un sommet.
  - Chaque trait ou segment de trait reliant 2 points d'extrémités est représenté par une arête.

Exercice 4 - Solution

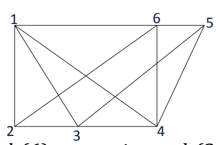
- Identification du problème
  - Tracer une figure sans lever le crayon : parcourir tout le graphe (toutes les arêtes) en passant d'une arête à une autre qui lui est adjacente.
  - C'est-à-dire tracer une chaîne qui passe par toutes les arêtes du graphe.

Exercice 4 - Solution

- Identification du problème
  - Sans passer deux fois sur le même trait ⇒ Ne pas passer par la même arête plus d'une fois ⇒ Chaîne simple
  - Chaîne simple qui passe par toutes les arêtes ⇒ Chaîne Eulérienne
  - Le problème revient à vérifier pour chacun des graphes G_i s'il admet une chaîne Eulérienne.

Exercice 4 - Solution

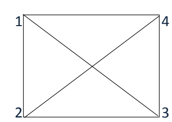
- Résolution
  - Selon le théorème d'Euler, G_i doit être connexe (à des sommets isolés près) et doit avoir 0 ou 2 sommets de degrés impairs.



  - $d_G(1)$, $d_G(3)$, $d_G(4)$, $d_G(6)$ sont pairs et $d_G(2)$, $d_G(5)$ sont impairs

⇒ 2 sommets de degrés impairs ⇒ Possible

Exercice 4 - Solution

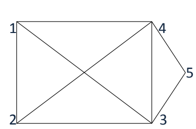


- $d_G(1)$, $d_G(2)$, $d_G(3)$, $d_G(4)$ sont impairs

⇒Plus de 2 sommets de degrés impairs

⇒ Impossible

Exercice 4 - Solution

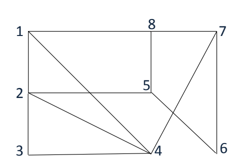


- $d_G(3)$, $d_G(4)$, $d_G(5)$ sont pairs et $d_G(1)$, $d_G(2)$ sont impairs

⇒2 sommets de degrés impairs

⇒ Possible

Exercice 4 - Solution

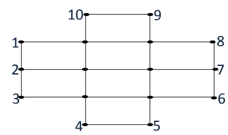


- $d_G(1)$, $d_G(5)$, $d_G(7)$, $d_G(8)$ sont impairs

⇒Plus de 2 sommets de degrés impairs

⇒ Impossible

Exercice 4 - Solution



- $d_G(2)$, $d_G(7)$ sont impairs et les autres sont tous pairs

$\Rightarrow$2 sommets de degrés impairs

$\Rightarrow$ Possible

Exercice 4 - Solution

- Remarque:
  - Les points d'intersection entre deux ou plusieurs traits, peut-on les prendre comme sommets? Si oui, qu'est ce qui va changer?
  - Oui, on peut les prendre comme sommets
  - Ça ne change rien à ce problème, car leurs degrés seront pairs.

Exercice 5

- Soit G un graphe non eulérien.
- Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes ?

Exercice 5 - Solution

- Oui, il est possible de rendre G eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes comme suit :
- S'assurer que tous les degrés deviennent pairs car un graphe est Eulérien Ssi il admet un cycle Eulérien.
- Pour toute paire de sommets de degrés impairs on les relie avec une arête.
- C'est-à-dire si on a k (qui est pair) sommets de degrés impairs, on va rajouter $k/2$ arêtes.

Exercice 5 - Solution

```
i← 1
Répéter
    Tant Que (i<=N) et (d_G(i) pair)
      Faire    i← i+1  Fait
    Si (i<N) Alors
        x ← i
        i← i+1
        Tant Que (i<=N) et (d_G(i) pair)
          Faire    i← i+1  Fait
        y ← i; i← i+1
        Créer_arête({x,y})
    fSi
Jusqu'à (i=N);
```


Exercice 6

- Soit le graphe orienté $G=(X,U)$ représenté dans le tableau ci-dessous par le dictionnaire des prédécesseurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
Prédécesseurs de x	3, 7	4, 6	5	1	1	7, 8	5	2

1. Donner la matrice d'adjacence M du graphe G. Représenter sous forme de listes LS et PS.
2. G est-il connexe. Justifier.
3. G admet-il un parcours Eulerien ? Pourquoi ?
4. Donner la matrice de fermeture transitive du graphe G. G admet-il un circuit ?
5. Trouver les cfc de G. Donner le graphe réduit.

Exercice 6 - Solution

- Matrice d'adjacence :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0

Remarque : Attention, liste prédécesseurs et non successeurs

Exercice 6 - Solution

- Représentation par listes :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PS	1	3	4	5	6	8	9	11	12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
LS	4	5	8	1	2	3	7	2	1	6	6

Exercice 6 - Solution

- Connexité :
  - Algorithme de connexité :

  Sommet de départ : 1

  C={1}

  On rajoute les voisins de 1

  V(1)={3, 4, 5, 7}

  C={1, 3, 4, 5, 7}. On marque le sommet 1.

Exercice 6 - Solution

C={1, 3, 4, 5, 7}

On choisit un sommet non marqué de *C* : 7

On rajoute les voisins de 7

V(7)={1, 5, 6}

C={1, 3, 4, 5, 6, 7}. On marque le sommet 7.

Exercice 6 - Solution

C={1, 3, 4, 5, 6, 7}

On choisit un sommet non marqué de *C* : 6

On rajoute les voisins de 6

V(6)={2, 7, 8}

C={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8}. On marque le sommet 6.

C=X $\Rightarrow$ Fin Algo.

G est connexe.

Exercice 6 - Solution

- On vérifie si G admet un parcours Eulérien :
  - Calculons les degrés :

	1	2	3	4	5	6	7	8	d_G^+
1	0	0	0	1	1	0	0	0	2
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	1	0	2
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1	0	0	2
8	0	0	0	0	0	1	0	0	1
d_G^-	2	2	1	1	1	2	1	1	

Exercice 6 - Solution

- $d_G(2)=1+2=3$
- $d_G(5)=2+1=3$
- $d_G(6)=1+2=3$
- Plus de deux (2) sommets de degrés impairs
- $\Rightarrow G$ n'admet pas de chaine Eulérienne
- $\Rightarrow G$ n'admet aucun parcours Eulérien

H. BENKAOUHA 49

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	1	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1					1	1
5	1		1			1	1	
6		1						1
7	1	1		1	1	1		
8		1				1		

H. BENKAOUHA 50

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						
5			1				1	
6		1						
7	1			1	1	1		
8						1		

H. BENKAOUHA 51

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						1
5			1				1	
6		1						1
7	1			1	1	1		
8						1		

H. BENKAOUHA 52

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1	1			
2								1
3	1			1	1			
4		1						1
5	1		1	1	1		1	
6		1						1
7	1			1	1	1		
8						1		

H. BENKAOUHA 53

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1		1	1			1
2								1
3	1	1		1	1			1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1		1	1	1		1
8						1		

H. BENKAOUHA 54

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1		1	1
2								1
3	1	1	1	1	1		1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8						1		

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1		1	1
2								1
3	1	1	1	1	1		1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1		1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2								1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1						1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1						1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1				1		1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1				1		1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1				1		1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8		1				1		1

Exercice 6 - Solution

- Matrice de fermeture transitive :
  - Algorithme de Warshall

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	1	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	1	0	0	0	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1

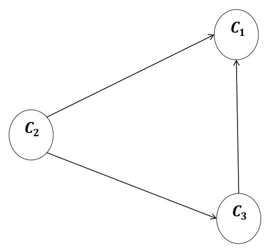
  - Oui, G admet un circuit car il y a des 1 sur la diagonale.

Exercice 6 - Solution

- Les CFCs :
  - $C_1=\{4\}$ car 0 sur la diagonale
  - Lignes identiques (sauf 4) :
    $Lg_1=\{1, 3, 5, 7\}$
    $Lg_2=\{2, 6, 8\}$
  - Colonnes identiques (sauf 4) :
    $Cl_1=\{2, 6, 8\}$
    $Cl_2=\{1, 3, 5, 7\}$
    $\Rightarrow$
  - $C_2=\{1, 3, 5, 7\}$ et $C_3=\{2, 6, 8\}$

Exercice 6 - Solution

- Le graphe réduit :



Exercice 7

- On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

1. En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
2. Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à *n*, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 7 - Solution

- Modélisation :
  - Graphe non orienté $G=(X, E)$ d'ordre n et de taille m
  - Chaque face (chaque numéro) i par un sommet i
  - Chaque domino (pièce) qui est constitué de deux faces (i et j) par une arête $\{i, j\}$
  - $n=5$

Exercice 7 - Solution

1. Nombre de dominos
   - Correspond au nombre d'arêtes dans le graphe
   - Pas de dominos doubles ⇒Pas de boucles
   - Chaque pièce est unique (combinaison unique de deux numéros) ⇒Pas d'arêtes parallèles
   - ⇒ *G* est <u>simple</u>
   - Dans un jeu de dominos, nous avons toutes les combinaisons de faces possibles
   - Tous les sommets sont reliés entre eux
   - ⇒ *G* est <u>complet</u>

Exercice 7 - Solution

1. Nombre de dominos
   - G simple et complet, $\forall i \in x$, $d_G(x)=n-1$
   - ⇒ $n(n-1) = 2m$
   - ⇒ $m= n(n-1)/2$
   - ⇒ $m=5(5-1)/2$
   - ⇒ $m=10$
   - ⇒ Il y a 10 dominos

Exercice 7 - Solution

2. On montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée.
   - Règle de contact des dominos : contacter 2 dominos à travers les faces ayant le même numéro.
   - 2 arêtes adjacentes ⇒ former une chaîne
   - Les arranger en boucle fermée ⇒chaîne fermée
   - Vu qu'on utilise chaque domino une seule fois ⇒ Chaque arête est utilisée une seule fois dans la chaîne ⇒ Chaîne fermée et simple ⇒cycle
   - Utiliser tous les dominos ⇒ cycle Eulérien

Exercice 7 - Solution

2. On montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée.
   - Revient à montrer que *G* admet un cycle Eulérien
   - Chaque sommet est degré n–1 = 5–1 = 4
   - Tous les sommets sont degrés pairs ⇒ Pas de sommets de degrés impairs, de plus le graphe est connexe (car il est complet) ⇒ *G* admet une chaîne Eulérienne selon le théorème d'Euler et cette chaîne est un cycle (0 sommets de degrés impairs).

Exercice 7 - Solution

3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
   - Les dominos doubles sont représentés par des boucles.
   - Une boucle fait augmenter le degré d'un sommet de 2, ce qui ne change pas la parité de son degré.
   - De ce fait, le nombre de sommets de degrés impairs ne change pas.

Exercice 7 - Solution

4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?
   - Chaque sommet est de degré n–1
   - Il faut que n–1 soit pair
   - C'à.d. $n-1=2k$ où k est un entier ≥0
   - ⇒ $n=2k+1$
   - ⇒ n doit être impair
   - ⇒ Le plus grand numéro des faces doit être impair

Exercice 8

- Soit un tournoi de volley-ball regroupant n clubs.
  - Chaque club affronte un autre exactement une (1) seule fois.
  - On veut représenter à travers un graphe les résultats de ce tournoi.
  - Sachez qu'en volley-ball il n'y a pas de score d'égalité.

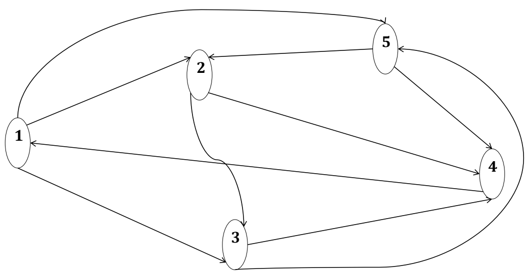
1. Modéliser (sans dessiner) le problème. Puis dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.
2. Est-il possible de trouver une situation où le club C_1 a gagné contre C_2 et C_2 a battu C_3 et ainsi de suite jusqu'à C_{n-1} a gagné contre C_n ? Justifier. (C_i est un club quelconque)
3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus C_n a gagné contre C_1.

Exercice 8 - Solution

1. Modéliser (sans dessiner) le problème.
   - Par un graphe orienté $G=(X, U)$
   - Chaque sommet représente un club
   - Chaque arc (i, j) représente le résultat du match entre les clubs i et j : i « a gagné contre » j.
   - Le graphe est complet car tous les clubs s'affrontent entre eux.
   - Le graphe est simple car tous les clubs s'affrontent une seule fois (pas d'arêtes parallèles) et un club ne peut pas affronter lui-même (pas de boucles).

Exercice 8 - Solution

1. Dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.



Exercice 8 - Solution

2. Est-il possible de trouver une situation où le club C_1 a gagné contre C_2 et C_2 a battu C_3 et ainsi de suite jusqu'à C_{n-1} a gagné contre C_n ? Justifier. (C_i est un club quelconque)

- Ceci revient à avoir des arcs :
  - (1, 2), (2, 3) … (n-1, n)

Exercice 8 - Solution

- En d'autres termes avoir un chemin dans G
  - γ=1 2 3 … n-1 n : élémentaire de longueur n-1 (passant par tous les sommets) $\Rightarrow$ Chemin Hamiltonien
  - On sait que G est un graphe simple et complet d'ordre $n \Rightarrow G$ est un tournoi T_n.
  - On sait que tout tournoi admet un chemin Hamiltonien
  - $\Rightarrow$ C'est possible

Exercice 8 - Solution

3. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus C_n a gagné contre C_1.

- Cette situation correspond à un circuit Hamiltonien dans G
- On sait qu'un tournoi T_n fortement connexe admet un circuit Hamiltonien.
- Il faut que le graphe associé soit formtement connexe

Exercice 9

- Démontrer que si deux sommets ***x*** et ***y*** $\in$ à une même composante fortement connexe ***C***, alors tout chemin de ***x*** à ***y*** est entièrement inclus dans ***C***.

Exercice 9 - Solution

- On démontre par l'absurde
- On suppose qu'on a un graphe G qui admet au moins 2 CFCs C et C'
- x et $y \in C$ et $z \in C'$
- Tel qu'on a un chemin de x vers y qui passe par z
- $\gamma = x \ldots z \ldots y$

$\Rightarrow x\alpha z$…(1) et zαy…(2)

- x et y dans la même CFC

$\Rightarrow$xαy…(3) et yαx…(4)

Exercice 9 - Solution

- $x\alpha z$…(1)
- $z\alpha y$…(2)
- $x\alpha y$…(3)
- $y\alpha x$…(4)
- De (2) et (4) et par transitivité $\Rightarrow z\alpha x$…(5)
- De 1 et 5, on a z dans la même CFC que x

$\Rightarrow z \in C$ et sachant que $z \in C'$

$\Rightarrow z \in C \cap C' \Rightarrow C \cap C' \neq \phi$

$\Rightarrow$Contradiction