Практикум 2.9. Условный экстремум функции нескольких переменных

Цель работы – познакомиться с понятием условного экстремума функции нескольких переменных; научиться использовать средства Anaconda для геометрической иллюстрации условного экстремума функции двух переменных и его численного нахождения.

Продолжительность работы – 4 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием Anaconda.

Порядок выполнения

1. Работа начинается с выполнения общих упражнений. Их наличие в отчете является допуском к сдаче индивидуального зачетного задания по практикуму.
2. После выполнения общих упражнений выполняются индивидуальные задания; результаты заносятся в отчет.
3. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты def-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

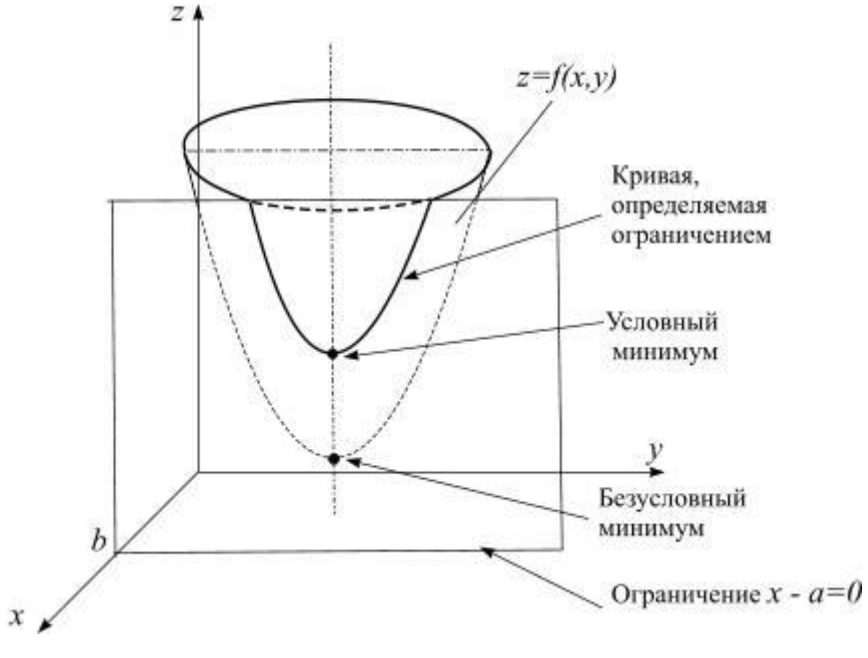
1. Геометрическая иллюстрация условного экстремума

Напомним понятие условного экстремума для случая функции двух переменных. Пусть дано уравнение $\varphi(x,y)=0$ и точка (x_0,y_0) удовлетворяет этому уравнению. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывна в этой точке. Тогда если для всех точек (x,y) этой окрестности, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x,y)=0$, выполняется неравенство $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ ($f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$) , то (x_0,y_0) называется точкой *условного максимума* (*условного минимума*) функции $z=f(x,y)$, а $\varphi(x,y)=0$ - *уравнением связи*.

Уравнение $\varphi(x,y)=0$, задающее некоторую кривую на плоскости xy, определяет в пространстве xyz цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси z.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определяет некоторую поверхность в пространстве xyz и цилиндрическая поверхность $\varphi(x,y)=0$ высекает из поверхности $z=f(x,y)$ некоторую линию. По форме этой линии можно судить об условных максимумах и минимумах функции $z=f(x,y)$.

Для пояснения изложенной идеи рассмотрим функцию $z=f(x,y)$, график которой представлен на рис. 1. В качестве ограничения взята плоскость $y-a=0$.



Для геометрической иллюстрации условного экстремума нужно построить в python поверхность $z = f(x, y)$ и линию, которую высекает на этой поверхности цилиндрическая поверхность $\varphi(x, y) = 0$. Чтобы построить линию, ее задают параметрическими уравнениями.

Например, мы хотим построить линию, высекаемую на поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 6x + 8y$. Перепишем последнее уравнение в виде $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ и положим $x = 3 + 5\cos t$, $y = 4 + 5\sin t$, $z = -46 - 30\cos t - 40\sin t$, $t \in [0; 2\pi)$. Полученные параметрические уравнения определяют требуемую линию.

Упражнение 1.

Построить на поверхности $z = f(x, y)$ кривую, определяемую ограничением $\varphi(x, y) = 0$. По возможности, определить визуально наличие и примерное расположение точек безусловного минимума и максимума функции $z = f(x, y)$, а также точек условного минимума и максимума этой функции при ограничении $\varphi(x, y) = 0$.

а) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$, если $1 = x + 4y$.

б) $z = (x+1)^2 + y^2$, если $y^2 - x^3 = 0$.

2. Прямой метод отыскания точек условного экстремума

Понятие условного экстремума обобщается на случай функции n переменных $f(x_1, ..., x_n)$ и m уравнений связи $\varphi_1(x_1, ..., x_n) = 0$, …, $\varphi_m(x_1, ..., x_n) = 0$.

Предположим, что из системы уравнений $\varphi_1(x_1, ..., x_n) = 0$, …, $\varphi_m(x_1, ..., x_n) = 0$ можно выразить какие-либо m переменных x_i через остальные $n - m$ переменных. Тогда, подставив вместо соответствующих переменных x_i их выражения через остальные $n - m$ переменных в функцию $f(x_1, ..., x_n)$, получим функцию F от $n - m$ переменных. Тем самым задача о нахождении точек условного экстремума сводится к задаче нахождения обычного (безусловного) экстремума функции F.

Упражнение 2. Используя прямой метод, найдите точки условного экстремума функции $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$, если $1 = x + 4y$.

Заметим, что ввиду трудности разрешения уравнений связей относительно какой-либо группы переменных прямой метод нахождения условного экстремума редко бывает эффективным. Далее рассмотрим другой способ решения задачи – метод множителей Лагранжа.

3. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа поиска условного экстремума рассмотрим для случая функции двух переменных $z = f(x, y)$ и одного уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

Рассмотрим функцию $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$. Число λ называется множителем Лагранжа, а функция $L(x, y, \lambda)$ функцией Лагранжа. Метод множителей Лагранжа применяется при определенных ограничениях на функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ и вытекает из двух теорем.

Теорема 1. Пусть (x_0, y_0) - точка условного экстремума функции $f(x, y)$ при наличии связи $\varphi(x, y) = 0$, и пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (x_0, y_0) и хотя бы одна из частых производных $\varphi'_x(x_0, y_0)$, $\varphi'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля. Тогда найдется такое значение λ_0, что (x_0, y_0, λ_0) удовлетворяет системе $L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$.

Заметим, что точка (x_0, y_0, λ_0), определяемая системой $L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, $L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, называется *стационарной точкой*.

Теорема 2 (достаточные условия условного экстремума). Пусть функции, $f(x, y)$. $\varphi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки (x_0, y_0), (x_0, y_0, λ_0) - стационарная точка функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$ и Δ - определитель вида

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда, если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный максимум; если $\Delta > 0$, то условный минимум.

Обратите внимание, что наличие ограничений на функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в формулировках теорем говорит о том, что есть функции $z = f(x, y)$ и ограничения

$\varphi(x, y)$, для которых точки условного экстремума могут не быть стационарными точками.

Упражнение 3.

Выясните, для каких из перечисленных ниже задач можно использовать метод множителей Лагранжа:

а) Найти условный экстремум $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$, если $1 = x + 4y$.

б) Найти условный экстремум $z = (x+1)^2 + y^2$, если $y^2 - x^3 = 0$.

Упражнение 4.

Используя метод множителей Лагранжа, найдите точки условного экстремума в тех из перечисленных ниже задачах, к которым этот метод применим:

а) Найти условный экстремум $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$, если $1 = x + 4y$.

б) Найти условный экстремум $z = (x+1)^2 + y^2$, если $y^2 - x^3 = 0$.

Упражнение 5.

Построить на поверхности $z=f(x,y)$ кривую, определяемую ограничением $\phi(x,y)=0$. По возможности, определить визуально наличие и примерное расположение точек безусловного минимума и максимума функции $z=f(x,y)$, а также точек условного минимума и максимума этой функции при ограничении $\phi(x,y)=0$. Выясните, для каких из перечисленных ниже задач можно использовать метод множителей Лагранжа. Используя метод множителей Лагранжа, найдите точки условного экстремума в тех из перечисленных ниже задачах, к которым этот метод применим.

Номер компьютера	$f(x,y)$	$\phi(x,y)$
1.	$x^2+12xy+2y^2$	$4x^2+y^2-25$
2.	$x^2-2xy+y^2$	$4x^2+2y^2-9$
3.	$2x^2+6xy+y^3$	x^2+y^2-12
4.	$x^2+y^2-2x+3y$	$2x^2+y^2+2xy$
5.	$x^3+2xy+y^2$	$4x^2+y^3-12$
6.	$4x^2-12xy+3y^2$	$4x^2+y^2-9$
7.	$2x^3+6xy+y^3+2y$	x^2+2y^2-12
8.	$x^2+y^2-2x+3y$	$x^2+y^2-2xy-5$
9.	x^2+2y^2-12	x^2+2y^2-12
10.	x^2+2y^2+3y	x^2+y^2-2xy
11.	$2x^2+xy+2y^2$	$4x^2+4y^2-36$

12.	$x^2-2xy-4y^2$	$2x^2-4y^2-25$
13.	$2x^2+xy+y^3$	x^2+y^2-1
14.	x^2+y^2-y	$2x^2+y^2-1$
15.	$x^3+2xy+y^2$	$4x^2+y^2-9$
16.	$4x^2-6xy+9y^2$	x^2-y^2-25
17.	$2x^3+6xy+y^3+2y$	x^2+2y^2-12
18.	$x^2+y^2-2x+3y$	$x^2+y^2-2xy-5$
19.	$x^3+2xy-y^2$	x^2+2y^2-1
20.	x^2+2y^2-y	x^2+y^2-9
21.	x^2-xy-y^2	$4x^2+y^2-25$
22.	$x^2+2xy-y^2$	$4x^2-2y^2-1$
23.	$2x^3+6xy-y^3$	x^2+y^2-12
24.	x^2-y^2-2x	$2x^2-y^2+2xy$
25.	$x^3+2xy+y^2$	$4x^2+y^3-12$
26.	$4x^2-12xy+3y^2$	$4x^2-y^2-9$
27.	$2x^3+xy+y^3+2y$	x^2-2y^2-12
28.	$x^2-y^2-2x+3y$	$x^2+y^2-2xy-5$

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение 1С.

Построить на поверхности $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ кривую, определяемую ограничением $4x^2 + y^2 = 25$. По возможности, определить визуально наличие и примерное расположение точек безусловного минимума и максимума функции $z = f(x, y)$, а также точек условного минимума и максимума этой функции при данном ограничении.

Упражнение 2С.

Используя метод множителей Лагранжа, найдите точки условного экстремума функции $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, если $4x^2 + y^2 = 25$.

3. Ответить на контрольные вопросы:

1) В чем состоит прямой метод отыскания точек условного экстремума?
2) Сформулируйте необходимое условие условного экстремума функции двух переменных.
3) Сформулируйте достаточное условие условного экстремума функции двух переменных.

Список рекомендуемой литературы

1. Официальная документация по языку программирования Python https://docs.python.org/3/

2. Официальная документация к библиотеке numpy https://numpy.org/doc/stable/index.html

3. Официальная документация к библиотеке scipy https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html

4. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.5.