

Практикум 10. Формула Тейлора для функций одной переменной.

Цель работы – изучить понятие формулы Тейлора для функций, познакомиться с разложением по формуле Тейлора основных элементарных функций, научиться многочлен Тейлора функции одной переменной; научиться в среде MatLab производить запись в текстовый файл, работать с массивами ячеек, использовать файл-функцию с переменным числом аргументом; использовать средства пакета MatLab для иллюстрации формулы Тейлора.

Продолжительность работы - 4 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и ре-

зультаты их выполнения, включая построенные графики; тексты М-сценариев и М-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения и практические упражнения

1. Запись выходных данных в текстовый файл. Работа с текстовыми файлами состоит из трёх этапов: открытие файла, считывание или запись информации, закрытие файла. Команда ***fopen*** предназначена для открытия существующего или создания нового файла. Имя файла указывается в апострофах первым входным аргументом, второй аргумент задаёт способ доступа к файлу (символ **t** указывает на то, что файл текстовый, его можно опускать):

‘rt’ – открываемый текстовый файл предназначен только для чтения;

‘rt+’ – открываемый текстовый файл предназначен только для чтения и записи;

‘wt’ – открываемый текстовый файл предназначен только для записи;

‘wt+’ – открываемый текстовый файл предназначен только для записи и чтения.

Символы текстового файла образуют строки со словами, предложениями или числами.

Вывод информации в текстовый файл осуществляется с помощью функции ***fprintf***.

Добавление строки в текстовый файл осуществляется при помощи ***fprintf*** с двумя входными аргументами – идентификатором файла и строкой с текстом. Последующая команда ***fprintf*** выводит заданную строку *сразу за предыдущей*. Для вывода текста с новой строки следует добавить символы перевода строки **\r\n** в начало строки или в конец предыдущей

Пример 1. Исполнение следующего М-файла

```
[F,mes]=fopen('t.txt','w');  
fprintf(F,'Строка добавлена с помощью fprintf.');
```

```
fprintf(F,' Ещё строка');
```

```
fprintf(F,'\r\n Этот текст с новой строки\r\n');
```

```
fprintf(F,'И этот тоже')  
fclose(F);
```

запишет в файл t.txt текст:

Строка добавлена с помощью fprintf. Ещё строка
Этот текст с новой строки
И этот тоже

Пример 2. Создание заголовка таблицы.

```
[F,mes]=fopen('t1.txt','w');  
%Печать в файл заголовка таблицы  
fprintf(F,'ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ sin x \r\n');  
%Печать в файл шапки таблицы  
fprintf(F,' _____ \r\n')  
fprintf(F,'| x | sin x | \r\n')  
fprintf(F,' _____ \r\n')  
fclose(F);
```

Занесение в файл *чисел или значений переменных* требуют форматного вывода.

Схема использования *fprintf* при работе с числовыми переменными такова:

Fprintf(идентификатор, 'формат', список переменных)

Пример 3. После исполнения программы

```
[F,mes]=fopen('t3.txt','w');  
x=pi/2;  
y=sin(x);  
fprintf(F,' x=%7.4f sin(x)=%11.8f',x,y);  
fclose(F);
```

в текстовом файле запишется

```
x= 1.5708 sin(x)= 1.00000000
```

Последовательность *%7.4f* задаёт формат вывода переменной *x*, которая расположена на первом месте в списке вывода. Знак процента указывает на начало формата, цифра 7 обозначает, что всего на вывод переменной *x* отводится 7 позиций, цифра 4 после разделителя-точки обеспечивает точность отображения резуль-

тате – 4 цифры после десятичной точки, спецификатор f указывает на то, что следует вывести число в формате с плавающей точкой.

Список ввода может быть матрицей. В этом случае форматы применяются *по столбцам* к каждому элементу столбца матрицы

Пример 4. После исполнения программы

```
[F,mes]=fopen('t3.txt','w');  
  
x=[0:pi/4:2*pi];  
  
y=sin(x);  
  
M=[x;y]  
  
fprintf(F,'%7.4f  |%11.8f|\r\n',M);  
  
fclose(F);
```

в текстовом файле запишется таблица

```
| 0.0000 | 0.000000000|  
  
| 0.7854 | 0.70710678|  
  
| 1.5708 | 1.000000000|  
  
| 2.3562 | 0.70710678|  
  
| 3.1416 | 0.000000000|  
  
| 3.9270 |-0.70710678|  
  
| 4.7124 |-1.000000000|  
  
| 5.4978 |-0.70710678|  
  
| 6.2832 |-0.000000000|
```

Упражнение 1. Вычислить значения первых пяти производных функции $y = \cos x$ в точке 1, результат записать в текстовый файл в виде таблицы: первый столбец – номер производной, второй – значение. Сделать заголовок и шапку таблицы.

2. Массивы ячеек. Массив ячеек состоит из ячеек или контейнеров, каждый из которых может содержать данные разных типов. Заполнение массива ячеек

производится поэлементно, причём для доступа к отдельным контейнерам применяется индексация, индексы заключаются в фигурные скобки. Просмотр содержимого массива из командной строки приводит к отображению информации в сжатом виде. Функция *celldisp(M)* с входным аргументом – именем массива ячеек выводит значения всех контейнеров в командное окно. Более наглядным представлением больших массивов ячеек является отображение схемы массива в графическом окне при помощи *cellplot(m)*. Массивы чисел или текстовые строки отображаются макетами таблиц с соответствующим числом строк и столбцов, а записи в них – квадратами.

Пример 5.

```
m{1,1}='студент Иванов';
m{1,2}=[5 4 3 5];
m{2,1}='студент Петров';
m{2,2}=[5 2 3 5;4 3 2 4];
>> m
m =
    'студент Иванов'    [1x4 double]
    'студент Петров'    [2x4 double]
>> celldisp(m)
m{1,1} =
студент Иванов
m{2,1} =
студент Петров
m{1,2} =
    5    4    3    5

m{2,2} =
    5    2    3    5
    4    3    2    4
>> cellplot(m)
```

студент Иванов	
студент Петров	

Упражнение 2. Создать массив ячеек: первая ячейка – значение аргумента, вторая – количество производных, третья – вектор значений функции и её производных в точке из упражнения 2.

3. Формула Тейлора для функций.

Если функция $f(x)$ имеет производную порядка n в точке x_0 , то для неё можно составить многочлен **Тейлора**

$$P_n(x) = b_n(x - x_0)^n + b_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + b_0, \text{ где}$$

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Для выполнения следующего задания удобно использовать файл-функции с переменным числом аргументов. При создании файл-функции с переменным количеством входных аргументов в качестве единственного входного аргумента используется массив ячеек. При обращении к конкретному элементу координаты ячейки пишутся в фигурных скобках. Если ячейка представляет из себя массив, то координаты элемента в массиве пишутся далее в круглых скобках.

Упражнение 3. Создать М-функцию, зависящую от функции, точки, и числа n - количества производных, выходным аргументом которой является вектор длины $n+1$, первый элемент которого – значение функции в точке, остальные – значения производных. Проверить работу М-функции для функций $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$ в точке $x_0 = 0$.

Упражнение 4. Создать М-функцию, входным аргументом которой является массив, в первой ячейке которого записана x_0 - точка, в окрестности которой происходит разложение по формуле Тейлора, во второй число n - порядок, до которого происходит разложение, в третьей – вектор длины $(n+1)$, составленный из значений функции и производных в точке x_0 . Выходной аргумент – многочлен Тейлора.

Для следующих функций в указанной точке x_0 построить многочлены Тейлора порядка n_1 , n_2 , n_3 в одном графическом окне построить графики функции и многочленов Тейлора:

- а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$;
- б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$;
- в) $f(x) = \ln(4+x)$, $x_0 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$.

Указание. При выполнении упражнения 4 могут оказаться полезными следующие сведения:

- 1) Если функция задана в символьном виде, то ее график можно построить с помощью функции **ezplot**.
- 2) Если функция задана в символьном виде, а Вам нужно использовать указатель на нее, то можно воспользоваться функцией **subs**. Например,

```
>> syms x
>> y=(x-1)^3;
>> fzero(@(x)subs(y),0.5)

ans =
```

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1. Для указанной функции в точке x_0 построить многочлены Тейлора порядка n_1 и n_2 , в одном графическом окне построить графики функции и многочленов Тейлора: $f(x) = \sqrt{4+x}$, $x_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$.

Упражнение С2. Воспользуйтесь `help`, чтобы познакомиться с встроенной функцией *taylor*. Используя эту функцию, найдите:

а) многочлены Тейлора 7-го порядка в точке $x_0 = 0$ для функций $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$, $\operatorname{tg} x$;

б) многочлены Тейлора 5-го порядка в точке $x_0 = \pi/2$ для функций $\sin x$, $\cos x$.

3. Ответить на контрольные вопросы:

1. Как можно использовать многочлены Тейлора для приближенных оценок значений функции?
2. Как изменяется ошибка в оценках значений функции с помощью формулы Тейлора при увеличении порядка многочлена?
3. Как изменяется ошибка в оценках значений функции с помощью формулы Тейлора при удалении значений аргумента от точки разложения x_0 ?

Список рекомендуемой литературы

1. В.Г.Потемкин "Введение в Matlab" (v 5.3), <http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php>.

2. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002.

3. А. Кривелёв. Основы компьютерной математики с использованием системы MatLab. М, 2005.