

Практикум 5. Предел последовательности

Цель работы – изучение символьных переменных, выражений и операций, способов решений неравенств, нахождения предела последовательности, построение иллюстраций определения предела.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты М-сценариев и М-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения и практические упражнения

1. Символьные переменные, константы и выражения.

Поскольку переменные в системе MATLAB по умолчанию задаются как векторные, матричные, числовые и т.д, то есть не имеющие отношения к символьной математике, то для реализации символьных вычислений нужно прежде всего позаботиться о создании специальных *символьных переменных*.

Для создания *символьных переменных* используется функция **sym**.

Пример 1.

```
>> x=sym('x');
```

```
>> whos x
```

Name	Size	Bytes	Class
x	1x1	126	sym object

Grand total is 2 elements using 126 bytes

Для создания группы символьных объектов служит функция **syms**.

Пример 2.

```
>> x=sym('x');
```

```
>> syms a b c
```

```
>> y=1:5;
```

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class
a	1x1	126	sym object
b	1x1	126	sym object
c	1x1	126	sym object
x	1x1	126	sym object
y	1x5	40	double array

Grand total is 13 elements using 544 bytes

Команда

x=sym('x', 'real') дополнительно определяет x как вещественную переменную,

x=sym('x', 'positive') - как положительную (вещественную) переменную,
x=sym('x', 'unreal') - как чисто формальную переменную (т.е. не обладающую дополнительными свойствами).

Команда **pi=sym('pi')** или **syms pi** создаёт символьное число π , не обладающее погрешностью представления числа π в формате с плавающей запятой. Созданная таким образом переменная π заменяет системную константу π до тех пор, пока она не будет очищена в текущем сеансе командой **clear pi**

Проверить наличие символьных переменных можно с помощью команды **syms** без аргументов.

Упражнение 1. Создать символьное число π , вычислить значения $\cos \frac{\pi k}{2}$ при $k = 1, 2, \dots, 10$, вернуть π значение системной константы, снова вычислить $\cos \frac{\pi k}{2}$. Проверить равенство полученных результатов с помощью логической операции. Объяснить результат.

Проверить наличие символьных переменных можно с помощью команды **syms** без аргументов.

Упражнение 2. Задать символьные переменные x и y . Задать z - массив

$\begin{pmatrix} \cos x & \sin y \\ -\sin y & \cos x \end{pmatrix}$. Проверить наличие символьных переменных. Сделать вывод.

2. Символьные операции с выражениями.

Функция **simplify(S)** поэлементно упрощает символьные выражения массива S

Пример 3.

```
>> syms x y
>> v=cos(x)^2+sin(x)^2
v =
cos(x)^2+sin(x)^2
>> simplify(v)
```

Если упрощение невозможно, то возвращается исходное выражение.

Упражнение 3. Задать массив с элементами $\frac{x^7 + 3x^2 - 4}{x - 1}$, $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ и упростить его.

Функция **factor(S)** осуществляет поэлементное разложение элементов вектора S на множители, а целых числа – на произведение простых чисел.

Упражнение 4. Разложить на множители:

а) $x^4 + 4$; б) $x^7 + 1$; в) 123456789, г) $2x^3 + x^2y - 5xy^2 + 2y^3$.

3. Решение неравенств. Решение неравенств осуществляется с помощью команды **maple('solve','{неравенство}',x)**. При этом, если неравенство имеет точное решение в радикалах, то выдаётся это решение, иначе – приближённое численно. Для того, чтобы получить приближённое числовое решение из точного, необходимо применить команду **vpa(ans, n)**, где n – число цифр в выводимом ответе.

Решение системы неравенств осуществляется с помощью команды **maple('solve','{неравенство1, неравенство 2, неравенство 3}',x)**.

Последние версии не поддерживают **maple**, поэтому для решения неравенства рекомендуется сначала решить уравнение, а потом записать решения неравенства

Пример 4.

```
>> syms x
>> maple('solve','{abs(x^2-3)>3}',x)
ans =
[{x<-6^(1/2)}, {6^(1/2)<x}]
>> vpa(ans,5)
ans =
[ {x<-2.4495}, {2.4495<x}]
```

Упражнение 5. Решить неравенство, получить точный и приближённый ответ:

$$x^3 + 3x > 3.$$

4. Определение предела последовательности.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при n , стремящемся к бесконечности ($a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пример 5. Найти $n_0(0.001)$ для предела последовательности

$$x_n = \frac{n^3 + 3n + 10}{2n^3 - 2n + 5}.$$

Решение. Так как $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$, то $n_0(0.001)$ находим из неравенства

$$\left| \frac{n^3 + 3n + 10}{2n^3 - 2n + 5} - \frac{1}{2} \right| < 0.001:$$

>> syms n

maple('solve','{abs((n^3+3*n+10)/(2*n^3-2*n+5)-1/2)<0.001,n>0}',n)

ans =

{45.641078546530764473715572994630 < n}

$n_0(0.001) = 45.$

Замечание. Обратите внимание на то, что для того, чтобы не выводить лишние отрицательные промежутки, к основному неравенству было добавлено ограничение $n > 0$.

Упражнение 6. Написать М-файл с параметрами $x(n)$, n_0 , a , ϵ , осуществляющий следующие действия:

1. Задаёт массив n номеров от n_0-5 до n_0+10 .
2. Строит график последовательности $x(n)$ на указанном промежутке.
3. Строит прямые $y = a - \epsilon$, $y = a + \epsilon$.

Для последовательностей $\{x_n\}$:

а) $x_n = \frac{n^3 - 1}{2n^3 + 2n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{2n^4 + 1}$

выполнить:

1. Найти $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
2. Вычислить $n_0(0.01)$, $n_0(0.001)$. Результат оформить в виде таблицы

	а)	б)
$n_0(0.01)$		
$n_0(0.001)$		

3. С помощью созданного М-файла построить графическую иллюстрацию.

Указание. При задании формулы $x(n)$ не забывайте, что n – это массив.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.
2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1. Решить неравенство $x^3 - 3x + 1 > 0$., получить точный и приближённый ответ. Объяснить результат.

Упражнение С2. Для последовательностей $\{x_n\}$:

а) $x_n = \frac{2n^5 + 2n^4 + 3}{n^5 - 5n - 10000}$; б) $x_n = \frac{\sqrt{2n^5 + 3}}{\sqrt{n^5 - 5}}$;

в) $x_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$.

выполнить:

1) Найти $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2) Вычислить $n_0(0.01)$, $n_0(0.001)$. Результат оформить в виде таблицы

	а)	б)
$n_0(0.01)$		
$n_0(0.001)$		

3) С помощью созданного М-файла построить графическую иллюстрацию.

3. Ответить на контрольные вопросы:

- 1) Каким образом задаются символьные переменные и массивы?
- 2) Каким образом можно упростить символьное выражение?
- 3) Каким образом можно разложить на множители алгебраическое выражение или натуральное число?
- 4) В каком случае при решении неравенства выдаётся символьное выражение?
- 5) Как получить численное решение неравенства?
- 6) Дайте определение предела последовательности.

Список рекомендуемой литературы

1. <http://orioks.miet.ru/oroks-miet/scripts/login.pl?DBnum=9> - ОМА. Предел и непрерывность. Последовательности и пределы.
2. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.3.
3. <http://www.tehnauk.ru/mathlab/8?start=2> – Символьные вычисления