Практикум 2.5

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Цель работы – научиться решать задачу Коши методом ломаных Эйлера и методом последовательных приближений.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты функций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

В этой лабораторной работе мы рассмотрим некоторые приближенные методы решения задачи Коши, состоящей в отыскании решения $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Задачу приближенного решения задачи Коши будем понимать как задачу построения на заданном отрезке $[x_0, b]$ функции $\varphi(x)$, которая «близка» к решению $y(x)$ задачи Коши с заданной точностью ε в том смысле, что $|y(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ ($x_0 \le x \le b$).

1. Метод ломаных Эйлера.

Пусть требуется найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Решение будем искать на отрезке $[a, b]$, $a = x_0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на n частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, где $x_0 = a$, $x_n = b$. Заменим график функции $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ отрезком прямой с угловым коэффициентом $k_0 = f(x_0, y_0)$, проходящей через точку $(x_0; y_0)$. Уравнение этой прямой имеет вид $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$, ее ордината в точке x_1 равна $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. При небольшой длине отрезка $[x_0, x_1]$ $y(x_1) \approx y_1$.

Далее заменим график функции $y(x)$ на участке $[x_1, x_2]$ отрезком прямой с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$, проходящей через точку $(x_1; y_1)$. Уравнение этой прямой имеет вид $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$, ее ордината в точке x_2 равна $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$. При небольшой длине отрезка $[x_1, x_2]$ $y(x_2) \approx y_2$.

Действуя аналогично, после n шагов будем иметь числа

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

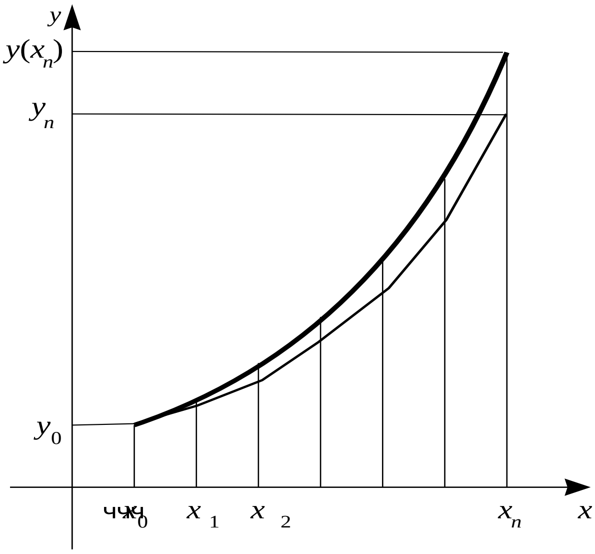

Рис. 1

Соединив точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, …, $(x_n; y_n)$, получим ломаную, которую называют ломаной Эйлера (рис. 1). Естественно ожидать, что $y(x_1) \approx y_1$, $y(x_2) \approx y_2$, …, $y(x_n) \approx y_n$ и ломаная Эйлера с достаточно короткими звеньями на отрезке $[a, b]$ близка к графику искомого решения $y(x)$.

Подытожим.

Метод ломаных Эйлера – метод приближенного решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Он состоит в замене точного решения $y = y(x)$ задачи Коши функцией, графически представленной ломаной Эйлера.

Чтобы построить ломаную Эйлера на отрезке $[a, b]$, удобно делить отрезок $[a, b]$ на n равных частей длиной $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Тогда координаты вершин ломаной определяются формулами

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x, \; y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1}) \cdot \Delta x \;\; (i = 1, 2, ..., n).$$

Можно показать, что если функция $f(x, y)$ задана на открытом выпуклом множестве G, содержащем точку $(x_0; y_0)$, имеет непрерывные частные производные по всем переменным, ограниченные на G, и точки $(x_k; y_k)$, $(x_k; y(x_k))$ не выходят за пределы множества G, то $|y(x_k) - y_k| \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Иными словами с ростом n ломаные Эйлера неограниченно приближаются к искомому решению.

Остается открытым вопрос, каким должен быть шаг Δx, который достаточно применить в алгоритме метода ломаных Эйлера, чтобы выдержать заданную точность ε. Вообще говоря, получены теоретические оценки точности приближенного решения метода Эйлера. В частности показано, что при уменьшении Δx погрешность схемы уменьшается линейно по Δx. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки нашей лабораторной работы.

На практике для оценки точности пользуются следующим правилом. Вычисляют координаты вершин ломаных с n и $2n$ звеньями. Находят максимум разности между ординатами этих ломаных в общих узлах сетки (при одинаковых значениях абсцисс). Если его значение оказывается меньшим заданной точности ε, то вычисления заканчивают и за приближенное решение принимают ломаную с $2n$ звеньями. В противном случае число отрезков разбиения удваивают и т.д.

Упражнение 1.

Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, на отрезке $[a, b]$ ($a = x_0$) методом ломаных Эйлера с заданной точностью ε.

Порядок выполнения упражнения:

1. Для отыскания приближенного решения создайте функцию.

В качестве входных аргументов функции используйте: заданную в символьном виде функцию $f(x, y)$; ее символьные аргументы x, y; координаты начальной точки x_0, y_0; координаты a и b концов отрезка, на котором ищется решение; начальное число отрезков разбиения n_0, точность ε.

В качестве выходных аргументов функции используйте: массивы координат вершин ломаной Эйлера и число отрезков разбиения n, понадобившихся для построения приближенного решения с заданной точностью.

Код функции должен включать:

а) Последовательное вычисление координат вершин ломаной Эйлера для числа отрезков разбиения n_0, $2n_0$, $4n_0$ и т.д. до тех пор, пока не будет достигнута точность ε (правило, по которому оценивается точность, изложено перед упр. 1).

б) Построение в графическом окне figure 1 в одной системе координат трех ломаных Эйлера с числом звеньев, равным n_0, $2n_0$ и n (полученных в результате первой, второй и последней итерации); ломаные должны быть изображены разными цветами.

2. Для тестирования функции из п.1 используйте решение уравнения $y' = xy$ с начальным условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0;1]$ с точностью $\varepsilon = 0,001$. Вначале найдите «вручную» точное решение.

Код должен включать:

а) Задание входных аргументов функции из п.1, вызов функции, отыскание приближенного решения с заданной точностью.

б) Оценку реальной точности приближения: вычисление максимального отклонения в узлах сетки найденного приближенного решения от полученного аналитически точного решения.

в) Построение в графическом окне в одной системе координат двух графиков: приближенного и точного решения.

3. Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$ из индивидуального задания, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, на отрезке $[a,b]$ ($a = x_0$) методом ломаных Эйлера с точностью $\varepsilon = 0,01$. Найти точное аналитическое решения.

Индивидуальные задания

Вариант 1: $y' = x\,y$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.0$

Вариант 2: $y' = \cos(x)\,y$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 3: $y' = x^2 y^2$ при $y(0)=5$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.$
.

Вариант 4: $y' = x^{-2} y^2$ при $y(1)=2$ на отрезке $[1,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 5: $y' = x^2 \tan(y)$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 6: $y' = x \cot(y)$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 7: $y' = x \sin(y)$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 8: $y' = \sin(x)\,y$ при $y(0)=2$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 9: $y' = x^2 \cos(y)$ при $y(0)=\pi$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 10: $y' = \ln(x)\,y^2$ при $y(1)=5$ на отрезке $[1,3]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 11: $y' = (x+1)\,y$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 12: $y' = \cosh(x)\,y$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Вариант 13: $y' = x^4 y^3$ при $y(0)=5$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 14: $y' = x^{-1} y^3$ при $y(1)=2$ на отрезке $[1,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 15: $y' = \tan(y)/x$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Вариант 16: $y'=x\coth(y)$ при $y(0)=2$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 17: $y'=\sin(y)/x$ при $y(1)=1$ на отрезке $[1,2]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 18: $y'=\ln(x)/\ln(y)$ при $y(1)=2$ на от-ке $[1,4]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 19: $y'=x/\cos(y)$ при $y(0)=\pi$ на отрезке $[0,4]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 20: $y'=\ln(x)/y$ при $y(1)=3$ на отрезке $[1,3]$ с точностью $\varepsilon=0.001$.

Вариант 21: $y'=x(y-2)$ при $y(0)=3$ на отрезке $[0,3]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 22: $y'=x/y$ при $y(0)=1$ на отрезке $[0,3]$ с точностью $\varepsilon=0.001$.

Вариант 23: $y'=x^3y^5$ при $y(0)=1/4$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon=0.001$.

Вариант 24: $y'=x^{-3}y^3$ при $y(1)=2$ на отрезке $[1,4]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 25: $y'=\tan(x)\tan(y)$ при $y(0)=1$ на $[0,1]$ с точностью $\varepsilon=0.0001$.

Вариант 26: $y'=\cot(x)\cot(y)$ при $y(1)=1$ на $[1,2]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 27: $y'=\cos(x)\sin(y)$ при $y(0)=1$ на $[0,1]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Вариант 28: $y'=\sin(x)/y$ при $y(0)=2$ на отрезке $[0,2]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

2. Метод последовательных приближений.

Заметим что всякое решение $y(x)$ задачи Коши

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

определенное на некотором отрезке $[a,b]$, содержащем x_0, удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{2}$$

И обратно: всякое решение $y(x)$ интегрального уравнения (2), непрерывное на отрезке $[a,b]$, содержащем x_0, является также решением задачи Коши (1).

Поэтому вместо того, чтобы искать приближенное решение задачи Коши (1) можно искать приближенное решение интегрального уравнения (2). Решение уравнения (2) на отрезке $[a,b]$, заключающем в себя x_0, будем строить методом последовательных приближений Пикара.

Метод последовательных приближений Пикара сводится к следующему.

В качестве нулевого приближения $\varphi_0(t)$ можно взять любую непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию, в частности $\varphi_0(t) = y_0$. Последовательные приближения $\varphi_n(x)$ определяются рекуррентно по формуле

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt .$$

Обрывая процесс последовательных приближений при некотором значении n, мы получим приближенное решение $\varphi_n(x)$, тем более точное, чем больше n.

Правда, последнее можно утверждать только при определенных ограничениях на функцию $f(x,y)$. В частности, последовательные приближения равномерно сходятся на отрезке $[a;b]$ к решению задачи Коши при выполнении следующих условий: 1) функция $f(x,y)$ определена, непрерывна по x в некоторой области G на плоскости xOy, содержащей полосу $a \le x \le b$; 2) в любой замкнутой ограниченной области G', содержащейся в пересечении полосы $a \le x \le b$ с областью G, функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y с константой K, не зависящей от выбора G'.

Недостатком метода последовательных приближений Пикара является сложность вычислений, связанная с необходимостью вычислять для каждого следующего приближения интеграл вида $\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt$.

Ограничимся использованием этого метода для уравнений, правая часть которых, функция $f(x,y)$, представляет собой многочлен переменных x, y. В этом случае для поиска последовательных приближений можно воспользоваться аппаратом символьного интегрирования пакета MATLAB.

Упражнение 2.

Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, методом последовательных приближений Пикара.

Порядок выполнения упражнения:

1. Для отыскания приближенного решения создайте функцию.

В качестве входных аргументов функции используйте: заданную в символьном виде функцию $f(x, y)$; ее символьные аргументы x, y; координаты начальной точки x_0, y_0; число итераций n_0.

В качестве выходных аргументов функции используйте: массив приближенных решений, соответствующих 1-ой, 2-ой, …, n_0-ой итерации.

Код функции должен включать:

а) Последовательное отыскание приближенных решений с 1-ой по n_0-ю итерацию.

б) Построение в одной системе координат графиков приближенных решений, соответствующих 1-ой, 2-ой, …, n_0-ой итерации.

2. Для тестирования функции из п.1 используйте решение уравнения $y' = xy$ с начальным условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0;1]$. Вначале найдите «вручную» точное решение.

Код должен включать:

а) Задание входных аргументов М-функции из п.1; вызов М-функции, последовательное отыскание приближенный решений, соответствующих 1-ой, 2-ой, …, n_0-ой итерации.

б) Оценку реальной точности приближения: вычисление на отрезке $[0;1]$ максимального отклонения приближенного решения, соответствующего итерации n_0, и точного решения.

в) Построение в той же системе координат, где были построены приближенные решения, графика точного решения.

3. Найти приближенное решение уравнения из индивидуального задания методом последовательных приближений Пикара.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Ответить на контрольные вопросы:

1) В чем состоит метод ломаных Эйлера?
2) В чем состоит метод последовательных приближений?