

## Практикум 2.10

### Вычисление кратных интегралов

**Цель работы** – научиться вычислять кратные интегралы, используя средства Anaconda.

**Продолжительность работы** – 4 часа.

**Оборудование, приборы, инструментарий** – работа выполняется в компьютерном классе с использованием Anaconda.

#### **Порядок выполнения**

1. Работа начинается с выполнения общих упражнений. Их наличие в отчете является допуском к сдаче индивидуального зачетного задания по практикуму.
2. После выполнения общих упражнений выполняются индивидуальные задания; результаты заносятся в отчет.
3. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp\_10\_Ivanov\_P\_01\_s\_1 (факультет\_группа\_Фамилия студента\_Инициал\_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты def-функций; выводы.

## **Краткие теоретические сведения и практические упражнения**

**1. Вычисление двойного интеграла.** Двойной интеграл можно вычислить с помощью повторного интеграла. Если множество  $G$  задано неравенствами  $a \leq x \leq b$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ , где  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  - непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции, то двойной интеграл сводится к повторному

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

в котором интеграл по  $dy$  будем называть внутренним, а по  $dx$  - внешним интегралом. Если множество  $G$  задано неравенствами  $c \leq y \leq d$ ,  $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ , где  $x_1(y)$  и  $x_2(y)$  - непрерывные на отрезке  $[c, d]$  функции, то двойной интеграл сводится к повторному

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx,$$

в котором интеграл по  $dx$  называется внутренним, а по  $dy$  - внешним интегралом.

Двойные интегралы вычисляются в python повторным применением функции *integrate* библиотеки *sympy*.

**Пример 1.** Вычислим интеграл  $\iint_G xy dx dy$ ,  $G: 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$ .

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x, y

f = x * y
c, d = (x, 2*x)
a, b = (1, 2)
Iy = sp.integrate(f, (y, c, d))
Ix = sp.integrate(Iy, (x, a, b))
print(f'I = {Ix}')
```

$I = 45/8$

**Упражнение 1.** Изобразить область интегрирования. Вычислить интеграл, расставив пределы интегрирования двумя способами:

$$\iint_G (x + y^2) dx dy, \text{ где } G \text{ ограничена кривыми } y = 2x \text{ и } y = x^2.$$

**Упражнение 2.** Изобразить область интегрирования. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V z dx dy dz$ , где  $V$  ограничена координатными плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и плоскостью  $x + y + z = 1$ .

## 2. Замена переменных в кратном интеграле.

**Упражнение 3.** Изобразить область интегрирования. Вычислить интеграл двумя способами.

### Индивидуальное задание

№п\п	Интеграл	Область S
1	$\iint_S x \sqrt{1-y} dx dy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
2	$\iint_S \cos x \sqrt{2-2y} dx dy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$
3	$\iint_S \frac{\sqrt{3y+1}}{x} dx dy$	$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{cases}$
4	$\iint_S \sin x \sqrt{2y+3} dx dy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \cos x \end{cases}$
5	$\iint_S \frac{e^x dx dy}{\sqrt{1+2y}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$
6	$\iint_S \frac{x dx dy}{\sqrt{3y+1}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
7	$\iint_S \frac{\cos x dx dy}{\sqrt{3y+1}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$
8	$\iint_S \frac{\sqrt{4-3y}}{x} dx dy$	$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \ln x \leq y \leq 1 \end{cases}$
9	$\iint_S \frac{\sin x dx dy}{\sqrt{2y+3}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \cos x \end{cases}$

10	$\iint_S \frac{(1-x)dxdy}{(y+1)^2}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
11	$\iint_S x\sqrt{1-y}dxdy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
12	$\iint_S \cos x\sqrt{2-2y}dxdy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$
13	$\iint_S \frac{\sqrt{3y+1}}{x}dxdy$	$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{cases}$
14	$\iint_S \sin x\sqrt{2y+3}dxdy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \cos x \end{cases}$
15	$\iint_S \frac{e^x dxdy}{\sqrt{1+2y}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$
16	$\iint_S \frac{xdxdy}{\sqrt{3y+1}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
16	$\iint_S \frac{\cos x dxdy}{\sqrt{3y+1}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$
17	$\iint_S \frac{\sqrt{4-3y}}{x}dxdy$	$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \ln x \leq y \leq 1 \end{cases}$
19	$\iint_S \frac{\sin x dxdy}{\sqrt{2y+3}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \cos x \end{cases}$
20	$\iint_S \frac{(1-x)dxdy}{(y+1)^2}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
21	$\iint_S x\sqrt{1-y}dxdy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
22	$\iint_S \cos x\sqrt{2-2y}dxdy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$
23	$\iint_S \frac{\sqrt{3y+1}}{x}dxdy$	$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{cases}$
24	$\iint_S \sin x\sqrt{2y+3}dxdy$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \cos x \end{cases}$

25	$\iint_S \frac{e^x dx dy}{\sqrt{1+2y}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$
26	$\iint_S \frac{x dx dy}{\sqrt{3y+1}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$
27	$\iint_S \frac{\cos x dx dy}{\sqrt{3y+1}}$	$S = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$
28	$\iint_S \frac{\sqrt{4-3y}}{x} dx dy$	$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \ln x \leq y \leq 1 \end{cases}$

### *Задания для самостоятельной работы*

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.
2. Самостоятельно выполнить упражнения.

**Упражнение 1С.** Изобразить область интегрирования. Вычислить интеграл, расставив пределы интегрирования двумя способами:

$$\iint_G \sin(xy) dx dy, \text{ где } G \text{ ограничена кривыми } y = 1 - 2x^2 \text{ и } y + x = 0.$$

**Упражнение 2.** Изобразить область интегрирования. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , где  $V$  ограничена поверхностями  $x = y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $z = xy$  и координатной плоскостью  $z = 0$ .

**Упражнение 3.** Изобразить область интегрирования. Вычислить интеграл двумя способами (без помощи и с помощью замены переменных):

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ где область интегрирования } V \text{ определяется неравенством } x^2 + y^2 + z^2 \leq z.$$

3. Ответить на контрольные вопросы:
  - 1) Какие функции среды Anaconda используются для вычисления двойного интеграла?
  - 2) Какие функции среды Anaconda используются для вычисления тройного интеграла?

### *Список рекомендуемой литературы*

1. Официальная документация по языку программирования Python  
<https://docs.python.org/3/>
2. Официальная документация к библиотеке numpy  
<https://numpy.org/doc/stable/index.html>
3. Официальная документация к библиотеке scipy  
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html>
4. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.5.