# Лабораторная работа №8

# Решение задач на использование производной в геометрических и физических моделях

***Цель работы*** *–* изучить понятие производной функции в точке, приобрести опыт решения задач с использованием геометрического и физического смысла производной.

***Продолжительность работы*** *–* 2 часа.

***Оборудование, приборы, инструментарий*** – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета Anaconda.

# Краткие теоретические сведения и практические упражнения

## 1. Вычисление производной по определению

Если для функции в фиксированной точке , существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии , то этот предел называется значением производной функции в точке . Этот предел обозначают одним из следующих символов , .

Таким образом, .

***Замечание:*** если для исследования функций в Python требуется запрограммировать алгоритм, который должен оперировать с достаточно большим набором функций, то удобно оформить алгоритм в виде функции, входными аргументами которой будут служить другие функции. Имя используемой функции передаётся отдельной переменной.

Пример 1.Создадим функцию, вычисляющую значение сложной функции при произвольных функциях

def pr(fname,x):

  p=np.cos(fname(x))\*\*3

  return p

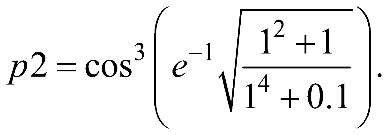
Затем в другом блоке кода можно вызвать заданную функцию с любой функцией (существующей в Python или созданной нами).

p1=pr(np.sin,0)

p2=pr(myfun1,1)

Результаты вычисления:





Упражнение 1.Создать функцию, зависящую от функции и точки, вычисляющую значение производной функции в точке по определению.

С помощью данной функции вычислить значения производной в точках 1, 2, -3 для функций , .

## 2. Символьное вычисление производной

Вычисление производной любого порядка проще производить с помощью функции ***diff (fname,x,k),*** где ***fname –*** символьная запись дифференцируемой функции, ***х –*** переменная, по которой производится дифференцирование, ***k***  - порядок производной. После вычисления производной в символьном виде можно получить её значение в точке с помощью команды ***fname.subs(x,x0)***, которая возвращает значение символьного выражения ***fname*** при подстановке в него вместо переменной ***х*** значения ***x0*** (или  выражения).

Пример 2.Вычислим производную функции и её значение в точке 2.

from sympy import \*

x=symbols('x')

f=x\*\*3+x

y=diff(f,x,1)

y.subs(x,2)

Упражнение 2.Вычислить производные и их значения в точке для следующих функций

а) ,           б) .

## 3. Геометрический смысл производной

Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке. Уравнение касательной имеет вид

.

Пример 3. Составим уравнение касательной к графику функции , проходящей через точку , не лежащую на графике.

Пусть  - точка касания. Тогда, уравнение касательной имеет вид . Поскольку , а , то ,  и уравнение касательной можем уточнить: . Касательная проходит через точку , следовательно, выполняется равенство , из которого находим:  или .

Подставляем найденные значения в уравнение касательной :

1) если , то ;

2) если , то .

Упражнение 3.Создать функцию для построения касательной к графику функции в точке.  Входными аргументами функции являются строка с символьным представлением функции одной переменной и числовое значение абсциссы точки в которой следует провести касательную. Файл-функция выводит в одном графическом окне графики функции и касательной к ней в заданной точке на промежутке . Алгоритм файл-функции включает:

1. Нахождение производной заданной функции.
2. Формирование символьного выражения для касательной и подстановки в него значения производной, абсциссы и ординаты точки, в которой проводится касательная.
3. Построение графика функции и касательной к нему в указанной точке на указанном промежутке.

Используя созданную блок-функцию, построить график функции и касательную к нему для функции в точке .

## 4. Механический смысл производной

Рассмотрим простой случай: материальная точка движется по координатной прямой по известному закону  ( – координата точки на прямой в момент времени).

Под *средней скоростью* движения за некоторый промежуток времени в физике понимают отношение перемещения к промежутку времени, т.е. средняя скорость за промежуток времени от до выражается равенством .

*Мгновенной скоростью* в момент времени называют предел средней скорости движения за промежуток времени [ при условии. Таким образом, .

Но согласно определению производной , значит, производная координаты по времени при прямолинейном движении есть скорость. В этом состоит *механический смысл* производной.

## 5. Производная и мгновенная угловая скорость тела

Рассмотрим вращение тела вокруг оси. Его можно описать функцией , определяющей угол поворота тела за промежуток времени . Если вращение происходит равномерно, то его угловой скоростью называют отношение угла поворота к величине промежутка времени . Если же вращение происходит неравномерно, то *средней угловой скоростью* этого вращения за промежуток времени [ называют отношение

.

*Мгновенной угловой скоростью* в момент времени называют предел средней угловой скорости за промежуток времени [ при условии : . Таким образом, .

Пример 4. Найдем значения аргумента, при которых скорость изменения функции равна 2.

Задача состоит в отыскании значений , при которых производная функции равна 2. Производная задается формулой, значит, нужно решить уравнение , или.

Для решения такого уравнения можно воспользоваться встроенной функцией brentq, которая позволяет приближённо вычислить корень уравнения по заданному начальному приближению. Базовый формат вызова этой функции включает два аргумента и имеет следующий вид:

brentq (fun, a, b)

Параметры a, b представляет собой границы интервала, при этом значения fun должны менять знак на концах интервала, это гарантирует нахождение, по крайней мере, одного корня на этом интервале.

Для локализации корней построим график функции .

from scipy import optimize

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def myfun(x):

    return x+np.exp(x)

x = np.linspace(-5, 5, 100)

plt.plot(x, myfun(x))

plt.grid(True)

plt.title('y=x+exp(x)')

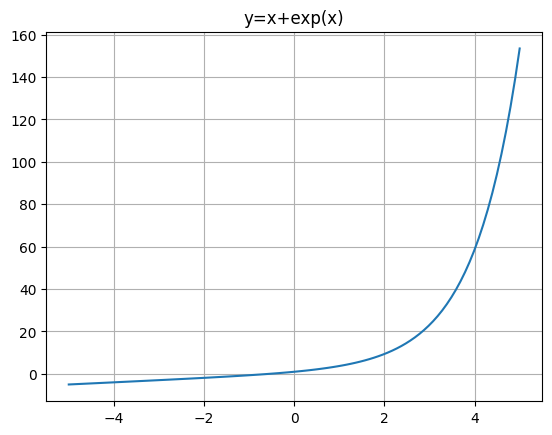


График показывает наличие корня на отрезке [-2; 0], причем на концах этого отрезка функция принимает разные по знаку значения.

root = optimize.brentq(myfun, -2, 0)

print('root =', root)

print('f =', myfun(root))

Результат:

root = -0.5671432904098384

f = -8.537615059367454e-14

Таким образом, искомое значение аргумента равно -0.5671. Значение функции говорит о высокой точности нахождения корня.

Упражнение 4.Тело движется по прямой. Формула зависимости пути от времени нам неизвестна, но опытным путем получены данные об этой зависимости, представленные в виде таблиц. С помощью этих таблиц можно найти средние значения скорости тела на малых промежутках времени и, тем самым, составить представление о мгновенной скорости в различные моменты времени.

а) Составьте отношения для разных значений  и представьте их в виде матрицы, в первой строке которой указаны значения , а во второй – значения средних скоростей на промежутках времени [.

б) Постройте «график» зависимости пройденного телом пути от времени и «график мгновенной скорости тела».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 |
|  | 2.3733 | 2.5889 | 2.7974 | 3.0000 | 3.1976 | 3.3909 | 3.5804 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|  | 3.7664 | 3.9495 | 4.1298 | 4.3077 | 4.4833 | 4.6568 | 4.8284 |

**6. Производная и теплоемкость тела**

Рассмотрим процесс нагревания тела. Его можно описать функцией, определяющей количество тепла (в джоулях), которое надо придать 1 кг рассматриваемого вещества для нагревания его от исходной температуры до температуры. Для нагревания тела от температуры до понадобится тепла. *Средней теплоемкостью* вещества на участке называется отношение .

*Мгновенной теплоемкостью*  вещества при фиксированном значении температуры называют предел средней теплоемкости на участке при условии : . Таким образом, .

Таким образом, понятие производной позволяет определить не только мгновенную скорость прямолинейного движения, но и мгновенную скорость протекания других физических процессов.

# Дополнительные задания для самостоятельной работы

Упражнение 5.В землю врыта труба, поперечное сечение которой имеет форму эллипса с полуосями 0,63 м и 0,77 м. Труба утоплена в землю на глубину 0,28 м (см. рис.1). На высоте 0,6 м над поверхностью земли на трубу опирается доска, другой конец доски упирается в землю. По доске от точки касания с трубой вверх ползет муха.

а) Напишите уравнение, описывающее положение доски. Проверьте результат графически, построив в системе координат  эллипс и график уравнения доски.

б) На сколько выше поверхности трубы окажется муха в моменты, когда ее сдвиг вправо (вдоль поверхности земли) составит 1, 2, 3, …, 15 см? Ответ на вопрос представьте как матрицу, в первой строке которой записаны отклонения мухи от начального положения по горизонтальной оси, а во второй – соответствующие им расстояния от мухи до поверхности трубы по вертикали. Размерами мухи пренебрегите.

|  |
| --- |
| 0,6 м  0,28 м |
| Рис. 1 |

Упражнение 6. Для алмаза количество тепла (в Джоулях), необходимое для нагревания 1 кг вещества от  до C в пределах от  до C хорошо передается следующей эмпирической формулой: .

Найдите формулу, определяющую теплоемкость  алмаза. Постройте графики зависимостей  и . Графики постройте в разных системах координат одного графического окна, расположив их друг под другом.