UTADEO
UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO

Curso Métodos y Modelos

Profesora:
Karen Ballesteros-González PhD.

Modelos Matemáticos Clásicos

a. Diferencias entre modelos determinísticos y estocásticos

Modelos Determinísticos

i. Ecuaciones diferenciales (Ej. crecimiento poblacional de Malthus)
ii. Modelos de optimización (Ej. programación lineal para maximizar beneficios, modelo de transporte)

Modelos Estocásticos - Probabilísticos

i. Cadenas de Markov (Ej. predicción de estados en sistemas dinámicos)
ii. Modelos de Monte Carlo (Ej. simulación de precios en mercados financieros; Procesos de colas en redes de telecomunicaciones)

Modelos Matemáticos Clásicos - Diferencias entre modelos determinísticos y estocásticos

Modelo Determinístico

- **Definición:** No incluye componentes aleatorios. Los resultados son completamente determinados por las condiciones iniciales y los parámetros del modelo.
- **Resultado:** Siempre da el mismo resultado si se repiten las condiciones iniciales.
- **Ejemplos:**
  - Ecuaciones diferenciales que modelan el crecimiento poblacional sin variabilidad (como el modelo logístico clásico).
  - Simulación de trayectorias de partículas sin turbulencia.

Modelo Estocástico

- **Definición:** Incluye variables aleatorias o procesos probabilísticos. Reconoce la incertidumbre inherente en muchos sistemas reales.
- **Resultado:** Puede dar diferentes resultados aun con las mismas condiciones iniciales.
- **Ejemplos:**
  - Modelos de crecimiento poblacional con eventos aleatorios como nacimientos o muertes.
  - Dispersión de contaminantes con influencia de la turbulencia atmosférica.

Modelos Matemáticos Clásicos - Diferencias entre modelos determinísticos y estocásticos

Característica	**Determinístico**	**Estocástico**
¿Usa probabilidad?	No	Sí
¿Resultados repetibles?	Siempre los mismos	Pueden variar entre ejecuciones
¿Captura incertidumbre?	No	Sí
Aplicación típica	Sistemas físicos o técnicos controlados	Procesos naturales o sociales variables
Complejidad computacional	Generalmente menor	Puede requerir simulaciones múltiples

Ejemplo: Crecimiento poblacional

Modelo Determinístico

Usamos el clásico **modelo exponencial**:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

P_0: Población Inicial

r: Tasa de cremiento

t: Tiempo

Este modelo **siempre da el mismo resultado** si usamos los mismos parámetros.

Modelo Estocástico

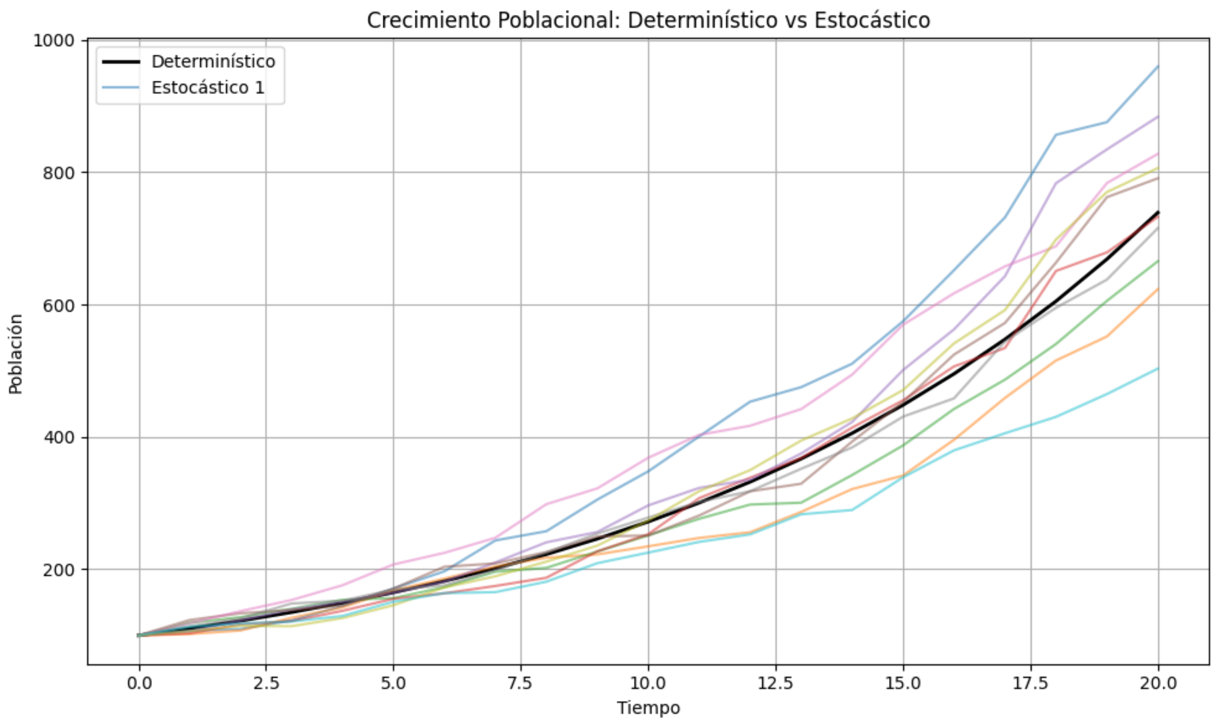
Agregamos una componente aleatoria a la tasa de crecimiento:

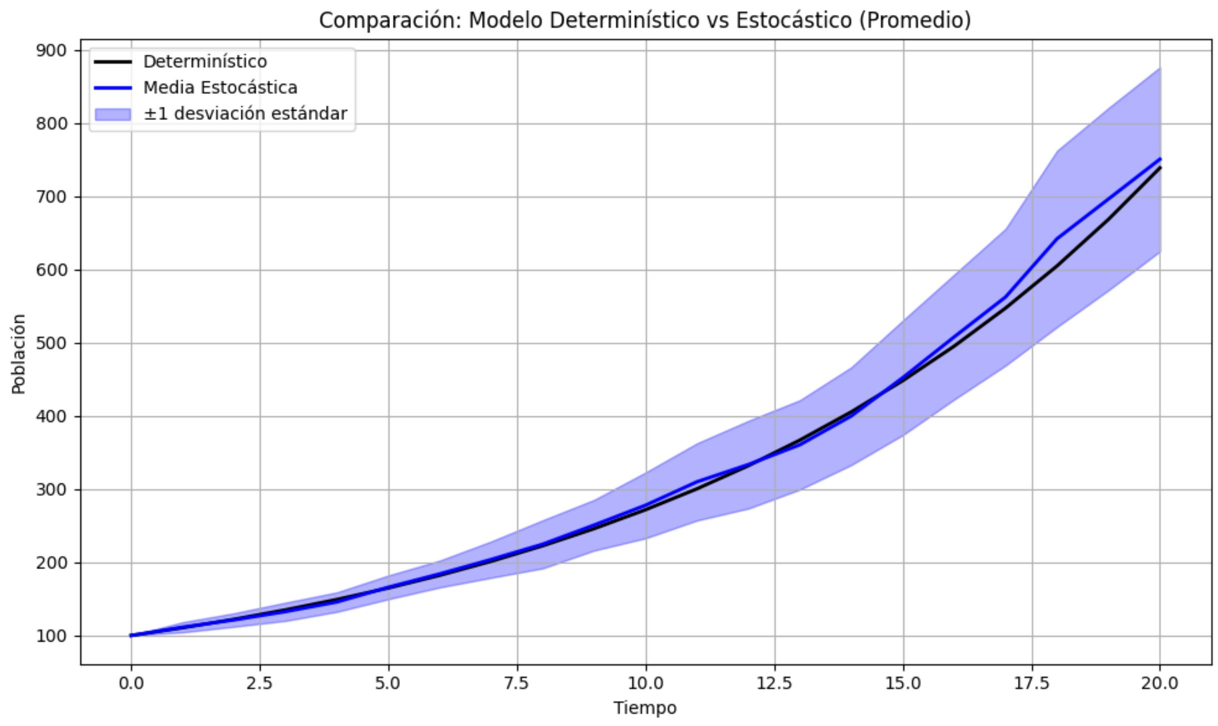
$$P(t + \Delta t) = P(t) e^{(r + \epsilon_t)\Delta t}$$

ϵ_t: Ruido aleatorio.

Cada simulación puede dar un resultado diferente, como ocurre en la vida real con nacimientos, migraciones, enfermedades, etc.

Ejemplo: Crecimiento poblacional





Modelos Determinísticos

Modelos Determinísticos: ***Ecuaciones Diferenciales***

¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

Son **ecuaciones que involucran derivadas** de una o más funciones desconocidas. Estas derivadas representan tasas de cambio, así que las ecuaciones diferenciales **modelan fenómenos dinámicos** como crecimiento poblacional, movimiento, intercambio de calor, dinámica de fluidos, reacciones químicas, etc.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Ecuación diferencial de primer orden. Está diciendo:

"La razón de cambio de y con respecto a x (es decir, la derivada de y) es proporcional al valor de y misma."

Modelos Determinísticos

Tipos de ecuaciones diferenciales

Se pueden clasificar de varias formas, estas son algunas de las principales:

1. Por el número de variables dependientes e independientes.
2. Por el orden de la ecuación.
3. Por la linealidad.
4. Homogéneas vs. no homogéneas (en el caso de EDOs lineales).

Ecuaciones Diferenciales: 1. Por el número de variables

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

Solo tienen derivadas respecto a una sola variable independiente.

Ejemplo: $dy/dx = -2y$

Ecuaciones en derivadas parciales (EDP):

Involucran derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes.

Ejemplo: $\partial u/\partial t = D\ \partial^2 u/\partial x^2$ (ecuación de difusión)

Ecuaciones Diferenciales: 2. Por el orden de la ecuación

Se refiere al orden de la derivada más alta que aparece.

- Primer orden: $dy/dx + y = x$
- Segundo orden: $d^2y/dx^2 + 3dy/dx + 2y = 0$

Ecuaciones Diferenciales: 3. Por la linealidad

Lineales

Las funciones desconocidas y sus derivadas aparecen en forma lineal.

Ejemplo: $y'' + 4y' + y = 0$

No lineales

Incluyen productos, potencias, funciones trigonométricas, etc.

Ejemplo: $y' = y^2 - x$

Ecuaciones Diferenciales: 4. Homogéneas vs. no homogéneas

Homogénea:

La parte derecha de la ecuación es cero.

Ejemplo: $y'' + 3y' + 2y = 0$

No homogénea:

Hay un término independiente.

Ejemplo: $y'' + 3y' + 2y = \sin(x)$

Modelos Determinísticos: ***Ecuaciones Diferenciales***

Aplicación: Reproducción de bacterias

Si se tiene 100 bacterias hoy, y cada una se divide al cabo de un día, entonces al día siguiente se tendrán 200, luego 400, 800, etc. El cambio en cada paso de tiempo depende **de cuántas hay actualmente**.

Modelos de Optimización

Modelos de Optimización

Los **modelos de optimización** se usan para encontrar la mejor solución posible a un problema, dado un conjunto de condiciones o restricciones. En estos modelos, generalmente se busca **maximizar** o **minimizar** una función objetivo (como beneficios, costos, tiempo, uso de recursos, etc.).

Tipo de Métodos	Características principales	Variables	Métodos de solución principales	Aplicaciones comunes
Programación Lineal (PL)	Función objetivo y restricciones lineales	Continuas	Simplex, gráfico, Solver (Excel/Python)	Producción, mezcla de insumos, planificación
Programación Entera (PE)	Variables deben ser enteras (0,1,2...)	Enteras	Branch & Bound, Cutting Planes	Ubicación de plantas, logística, decisiones binarias
Programación Mixta (MILP)	Mezcla de variables continuas y enteras	Mixtas	MLP con simplex + ramificación	Logística, planificación financiera, energía
Programación No Lineal (PNL)	Función objetivo o restricciones no lineales	Continuas/mixtas	Métodos de gradiente, Newton, algoritmos evolutivos	Ingeniería, economía, optimización energética
Programación Dinámica	Decisiones secuenciales en el tiempo (etapas)	Discretas o continuas	Programación recursiva, principio de Bellman	Rutas óptimas, inventarios, decisiones multietapa
Modelos Estocásticos	Hay incertidumbre en parámetros (demanda, precios, etc.)	Variadas	Simulación, escenarios, optimización robusta	Finanzas, energía, clima, logística bajo riesgo
Metaheurísticas	Problemas grandes/complejos donde no se puede garantizar solución óptima	Cualquiera	Algoritmos genéticos, recocido simulado, colonia de hormigas	Diseño de redes, logística compleja, bioinformática

Modelos de Optimización

Ejemplo de modelo de optimización: Producción

Una empresa manufacturera produce dos tipos de productos: Producto A y Producto B Ambos requieren tiempo de procesamiento en dos máquinas diferentes: Máquina 1 (M1) y Máquina 2 (M2). Cada producto genera una ganancia específica por unidad vendida (A=$40 y B=$30), y el objetivo de la empresa es maximizar la ganancia total (Z) utilizando eficientemente el tiempo disponible en ambas máquinas durante una semana. Sin embargo, las horas disponibles en cada máquina son limitadas: 100 horas para M1 M2 (A=**2 hora;** B=**1hora)** y 80 horas para M2 (A=**1 hora;** B=**2hora)** . La empresa necesita decidir cuántas unidades de cada producto fabricar, respetando las restricciones de tiempo en las máquinas, y garantizando que no se produzcan cantidades negativas.

Variables:

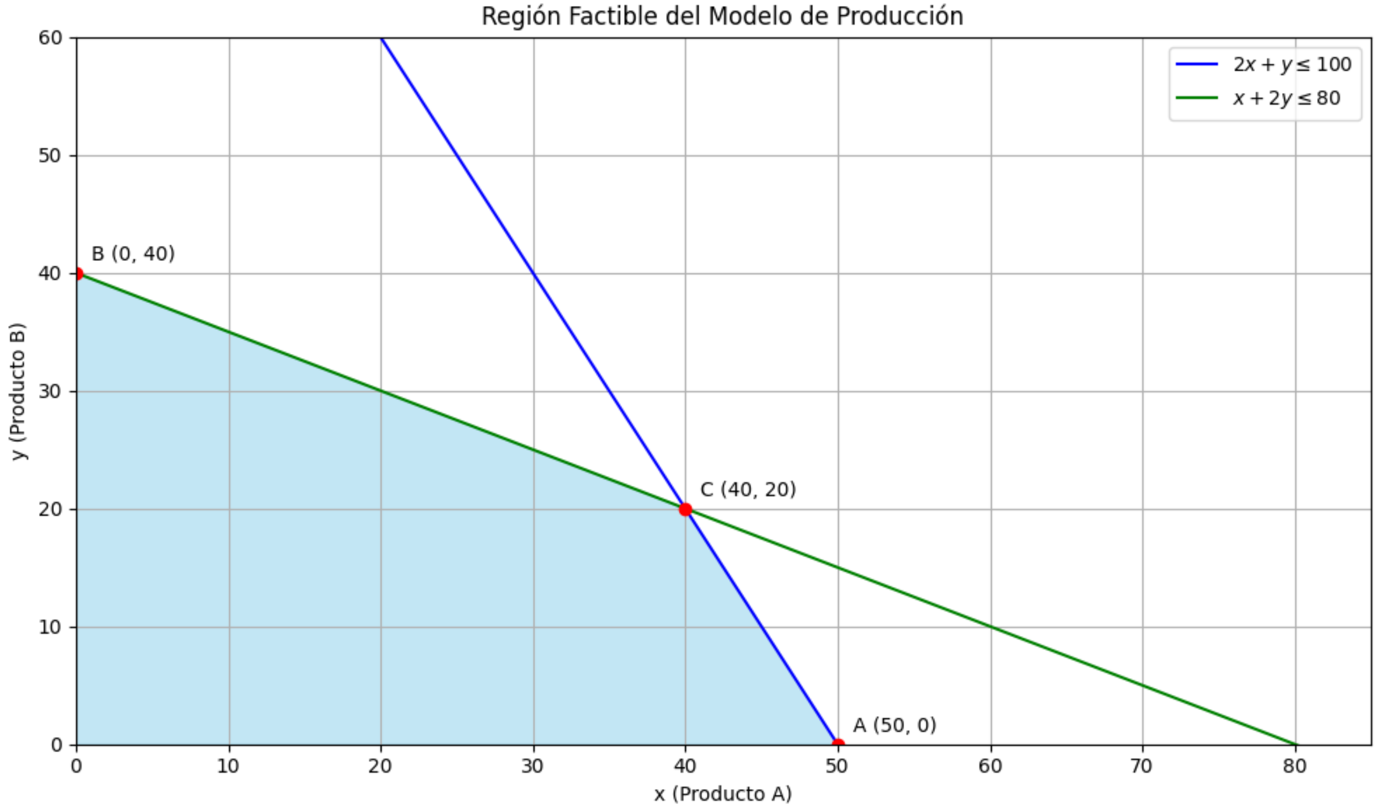
x = unidades del producto A a fabricar

y = unidades del producto B a fabricar

Modelos de Optimización

Ejemplo de modelo de optimización: Producción

Una empresa manufacturera produce dos tipos de productos: Producto A y Producto B Ambos requieren tiempo de procesamiento en dos máquinas diferentes: Máquina 1 (M1) y Máquina 2 (M2). Cada producto genera una ganancia específica por unidad vendida (A=$40 y B=$30), y el objetivo de la empresa es maximizar la ganancia total (Z) utilizando eficientemente el tiempo disponible en ambas máquinas durante una semana. Sin embargo, las horas disponibles en cada máquina son limitadas: 100 horas para M1 M2 (A=**2 hora;** B=**1hora)** y 80 horas para M2 (A=**1 hora;** B=**2hora)** . La empresa necesita decidir cuántas unidades de cada producto fabricar, respetando las restricciones de tiempo en las máquinas, y garantizando que no se produzcan cantidades negativas.



Modelos de Optimización

Ejercicio de clase - Producción:

Se tiene el siguiente problema de **optimización determinística**, en el que se busca maximizar la ganancia total de una empresa que fabrica tres productos (A, B y C). Cada producto requiere de ciertos **recursos limitados** (mano de obra, uso de máquinas y material), y se deben cumplir con **restricciones mínimas de producción**. Los datos de la empresa son los siguientes:

- La **ganancia** por unidad de cada producto.
- Los **requerimientos de recursos** por cada unidad fabricada.
- Las **restricciones de disponibilidad** de recursos (mano de obra, máquinas y material).

El objetivo es **maximizar la ganancia** total semanal de la empresa, teniendo en cuenta las restricciones de recursos disponibles.

Nota: Los datos adicionales del problema se encuentran en el cuaderno de Colab* ***ProgrLineal_EjProduccion.ipynb*

Modelos de Optimización

Ejercicio de clase - Planeación del uso sostenible del suelo:

Una alcaldía local desea asignar el uso de **500 hectáreas de tierra rural** para tres fines diferentes:

1. Agricultura sostenible
2. Reforestación
3. Desarrollo urbano planificado

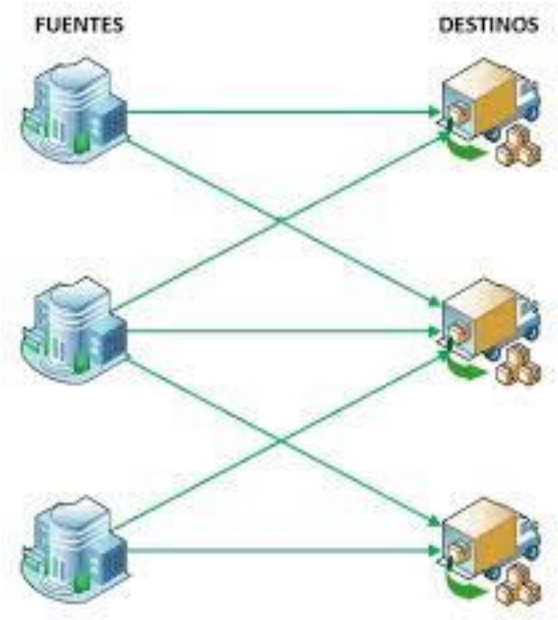
La meta es **maximizar el beneficio ambiental total**, medido en puntos de sostenibilidad (valor ponderado de impactos positivos: captura de CO_2, biodiversidad, control de erosión, servicios ecosistémicos).

Nota: Los datos adicionales del problema se encuentran en el cuaderno de Colab* ***ProgrLineal_EjProduccion.ipynb*

Modelos de Optimización: Modelo de Transporte

¿Qué es?

El modelo de transporte es un caso específico de programación lineal diseñado para minimizar el costo total de envío de un producto desde varios orígenes (fuentes de oferta) hacia varios destinos (lugares donde hay demanda).



Objetivo:

Minimizar el costo total de transporte, cumpliendo con la oferta de cada origen y la demanda de cada destino.

Componente del Modelo:	Descripción
Orígenes	Puntos donde se produce o almacena el producto (fábricas, bodegas, centros de acopio).
Destinos	Lugares donde se requiere el producto (clientes, centros de distribución, tiendas).
Oferta	Cantidad disponible para enviar desde cada origen.
Demanda	Cantidad requerida en cada destino.
Costos	Costo por unidad de producto transportada de cada origen a cada destino.

Modelos de Optimización: Modelo de Transporte

Formulación matemática: Supongamos que hay m orígenes y n destinos:

c_{ij}: costo de transporte por unidad del origen i al destino j
x_{ij}: cantidad de unidades transportadas del origen i al destino j
s_i: oferta en el origen i
d_j: demanda en el destino j

Función objetivo

$$Minimizar\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

Sujeto a:
Restricciones de oferta (en cada origen)

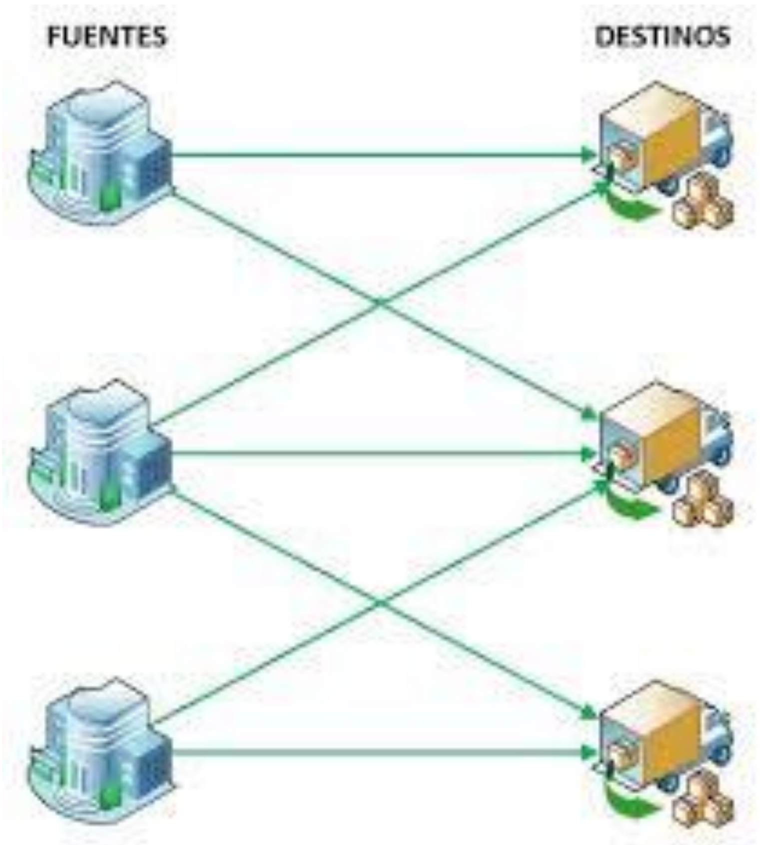
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i$$

Restricciones de demanda (en cada destino)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j$$

No negatividad

$$x_{ij} \geq 0$$



Modelos de Optimización: Modelo de Transporte

Ejercicio practico: