



Curso Métodos y Modelos

Profesora:
Karen Ballesteros-González PhD.

1. Introducción a Modelado y Simulación

¿Qué es un modelo?

Representación simplificada física, matemática o representación lógica de un sistema real (realidad) para entender, analizar y predecir fenómenos.

¿Qué es la simulación?

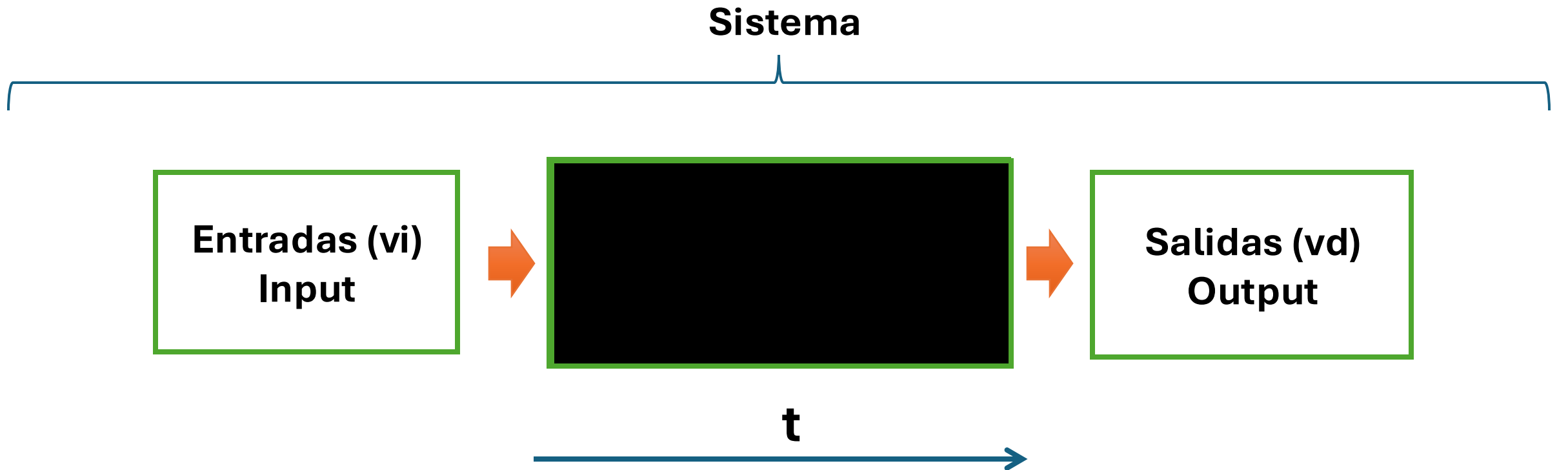
Uso de modelos para replicar el comportamiento de sistemas en el tiempo, para entender, analizar, predecir, fenómenos.

- 
- **Solución problema**
 - **Toma de decisiones**

1. Introducción a Modelado y Simulación

Representación general de un modelo.

- Modelo de caja Negra
- Volumen de control

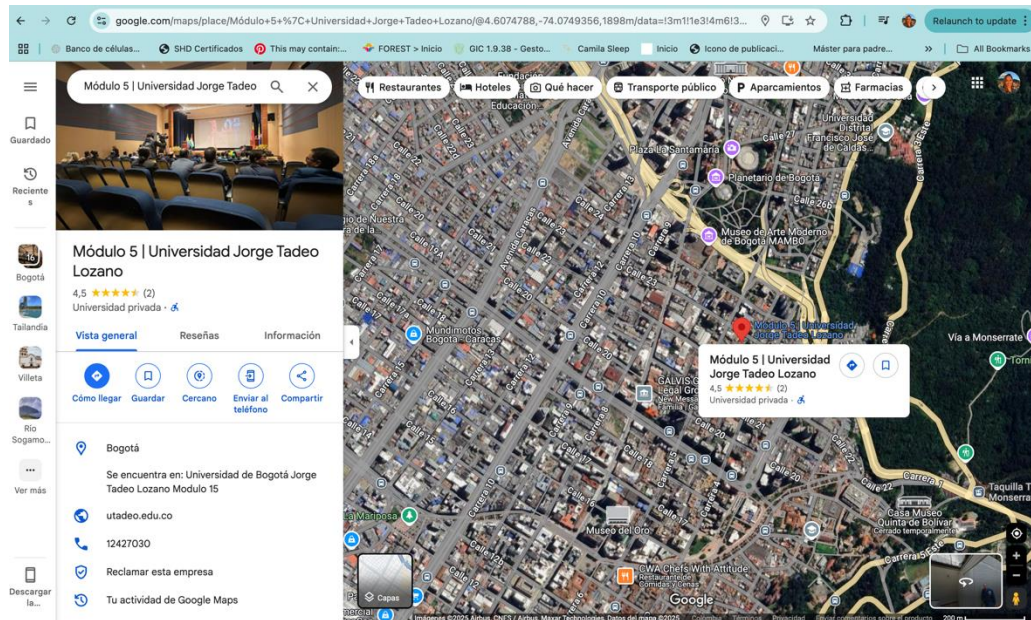


La variable dependiente (vd) resulta de la interacción entre variables independientes (vi) y los parámetros (p).

Ejemplos de un modelo

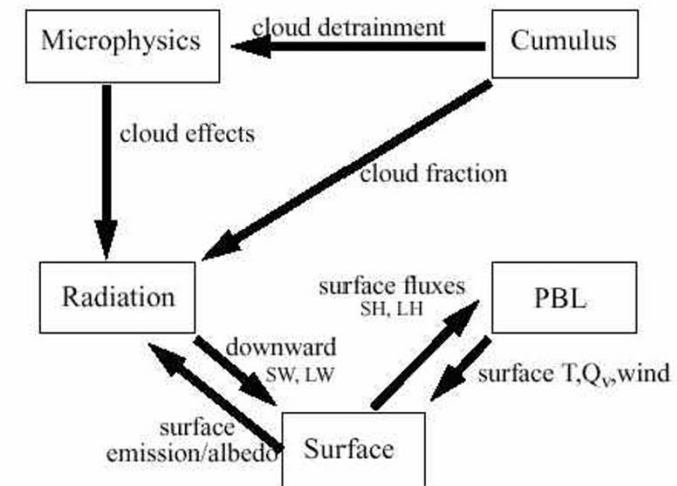
✓ Ejemplo 1: Mapa de una ciudad

- No es la ciudad real, pero nos ayuda a ubicarnos y planificar rutas.
- Ignora detalles innecesarios y se enfoca en calles y lugares clave.



✓ Ejemplo 2: Modelo del Clima

- Usa ecuaciones matemáticas para predecir lluvias, temperaturas y vientos.
- No es perfecto, pero nos permite anticipar eventos climáticos.

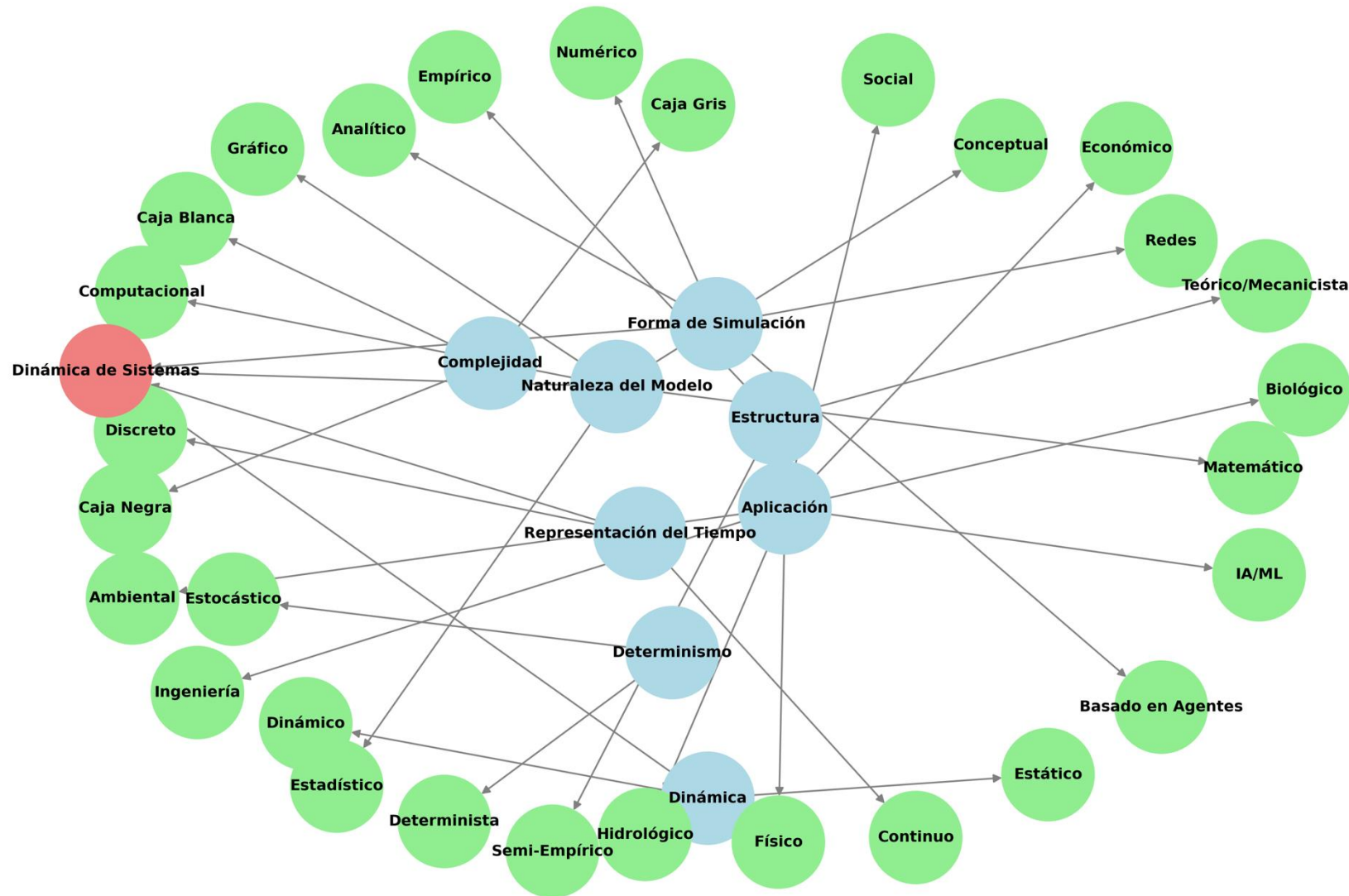


- Conservación del momento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \rho g_i - 2 \rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad (6.3)$$

donde μ es la viscosidad molecular del aire
 g_i es el vector aceleración de la gravedad (0,0,-g)
 Ω_j es el vector de la velocidad angular de la Tierra
 δ_{ij} es la delta de Kronecher
 ε_{ijk} es el tensor de Levi-Civita

Clasificación de los Modelos



Clasificación de los Modelos

1. Según la Naturaleza de los Modelos

- **Modelos Matemáticos:** Representan fenómenos mediante ecuaciones matemáticas (diferenciales, algebraicas, etc.).
- **Modelos Estadísticos:** Basados en datos y probabilidades para hacer inferencias o predicciones.
- **Modelos Computacionales:** Utilizan algoritmos y simulaciones para resolver problemas complejos.
- **Modelos Conceptuales:** Describen sistemas de manera cualitativa sin necesidad de ecuaciones formales.
- **Modelos Gráficos:** Representan procesos o relaciones mediante diagramas, mapas conceptuales o redes.

2. Según el Nivel de Determinismo

- **Modelos Deterministas:** No incluyen aleatoriedad; un mismo conjunto de condiciones iniciales siempre produce el mismo resultado (ej. ecuaciones diferenciales en dinámica de fluidos).
- **Modelos Estocásticos:** Incorporan variabilidad y procesos aleatorios, como los modelos de Monte Carlo o series de tiempo con ruido.

3. Según la Dinámica del Modelo

- **Modelos Estáticos:** No cambian con el tiempo, representan estados de equilibrio (ej. balances de masa y energía en sistemas físicos).
- **Modelos Dinámicos:** Evolucionan con el tiempo, pueden ser deterministas o estocásticos (ej. modelos de crecimiento poblacional).

4. Según la Representación del Tiempo

- **Modelos Discretos:** Representan el sistema en pasos de tiempo definidos (ej. modelos de autómatas celulares, simulaciones en redes).
- **Modelos Continuos:** Representan el sistema en un flujo de tiempo sin interrupciones, usando ecuaciones diferenciales (ej. modelos de difusión de contaminantes en ríos).

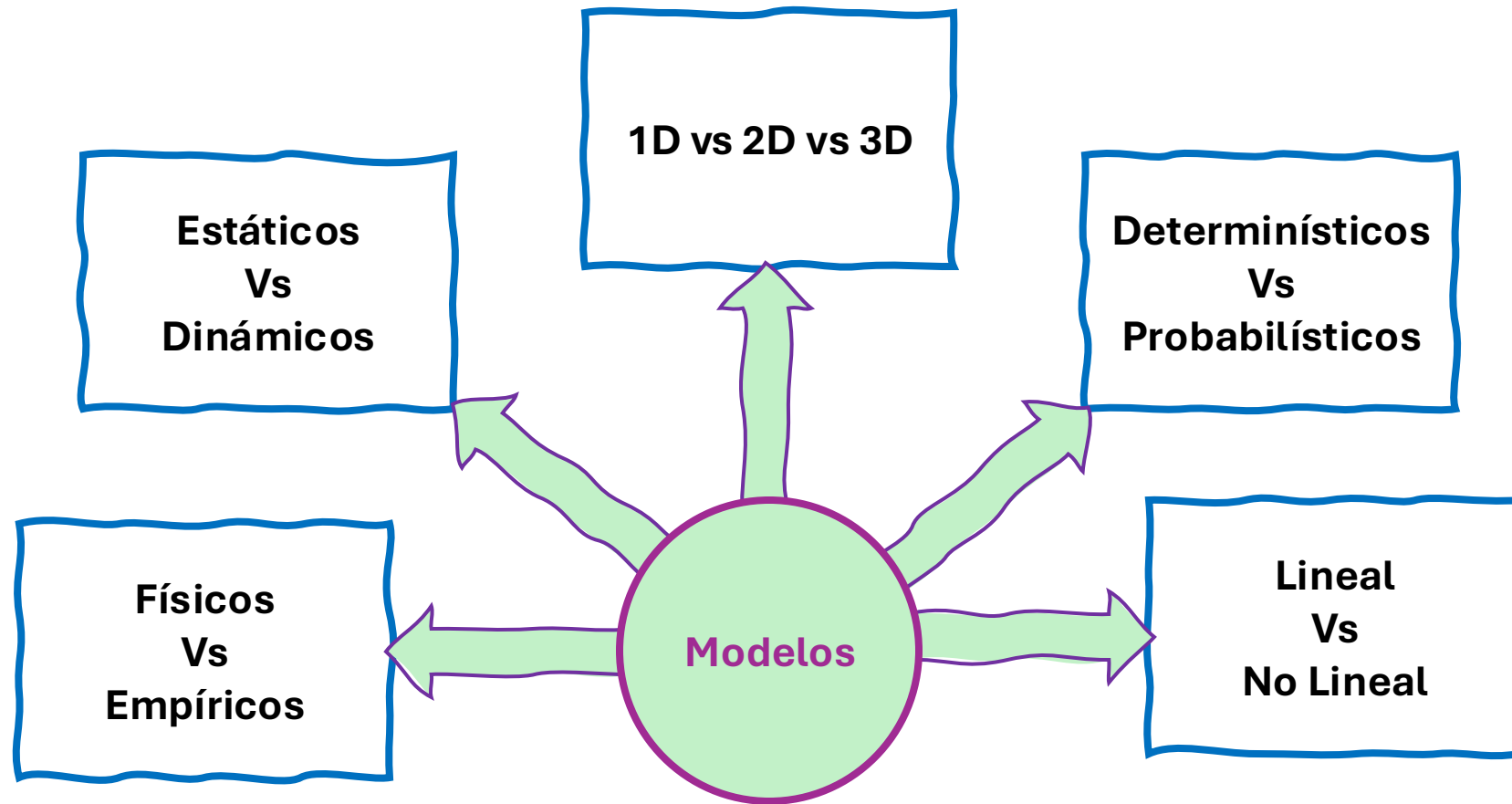
5. Según la Estructura del Modelo

- **Modelos Empíricos:** Basados en datos observacionales sin una estructura teórica clara (ej. modelos de regresión).
- **Modelos Teóricos o Mecanicistas:** Basados en principios fundamentales y leyes científicas (ej. ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos).
- **Modelos Semi-Empíricos o Híbridos:** Combinan teoría con datos observacionales para mejorar predicciones (ej. modelos de calidad del aire que combinan meteorología y observaciones).

6. Según la Complejidad del Modelo

- **Modelos Simplificados o de Caja Negra:** Solo consideran entradas y salidas sin conocer los procesos internos (ej. redes neuronales).
- **Modelos de Caja Blanca:** Se conoce toda la estructura del modelo y sus relaciones internas (ej. modelos físicos basados en ecuaciones).
- **Modelos de Caja Gris:** Combinan aspectos de caja negra y blanca, con conocimiento parcial de los procesos internos.

Clasificación de los Modelos



Campos de aplicación

Ciencias Naturales y Ambiente

- **Meteorología y Climatología:** Modelos numéricos para pronósticos del tiempo y cambio climático. Ejemplo: modelos WRF y GFS.
- **Hidrología:** Simulación de cuencas hidrográficas, predicción de caudales y calidad del agua. Ejemplo: SWAT, HEC-HMS.
- **Ecología:** Modelado de ecosistemas y dinámica de poblaciones. Ejemplo: modelos de nicho ecológico.
- **Contaminación Atmosférica:** Simulación de dispersión de contaminantes. Ejemplo: AERMOD, CALPUFF.

Ingeniería

- **Ingeniería Civil:** Simulación de estructuras y materiales bajo diferentes condiciones. Ejemplo: Modelos de elementos finitos.
- **Ingeniería Hidráulica:** Modelado de flujos en ríos y presas. Ejemplo: HEC-RAS.
- **Ingeniería Mecánica:** Modelos de dinámica de fluidos computacional (CFD) para aerodinámica y transferencia de calor.
- **Ingeniería de Tránsito:** Simulación del tráfico urbano y optimización de redes viales.

Sistemas y Tecnología

- **Inteligencia Artificial y Machine Learning:** Modelado de redes neuronales y algoritmos predictivos.
- **Simulación de Redes de Computadores:** Modelos de comunicación y rendimiento de redes. Ejemplo: NS3.
- **Realidad Virtual y Simulación 3D:** Simulación de entornos virtuales para entrenamiento y diseño.

Ciencias Sociales y Economía

- **Economía y Finanzas:** Modelos de predicción de mercados y simulación de crisis económicas. Ejemplo: Modelos de series de tiempo y agentes económicos.
- **Psicología y Ciencias del Comportamiento:** Modelado de toma de decisiones y comportamiento humano. Ejemplo: Modelos basados en agentes.
- **Urbanismo y Planificación:** Simulación del crecimiento de ciudades y uso del suelo.

Medicina y Biología

- **Epidemiología:** Modelado de la propagación de enfermedades. Ejemplo: modelos SIR y SEIR para COVID-19.
- **Farmacología:** Modelos de interacción de fármacos y simulaciones de pruebas clínicas.
- **Biología Computacional:** Simulación de procesos biológicos, como la evolución y la genética.

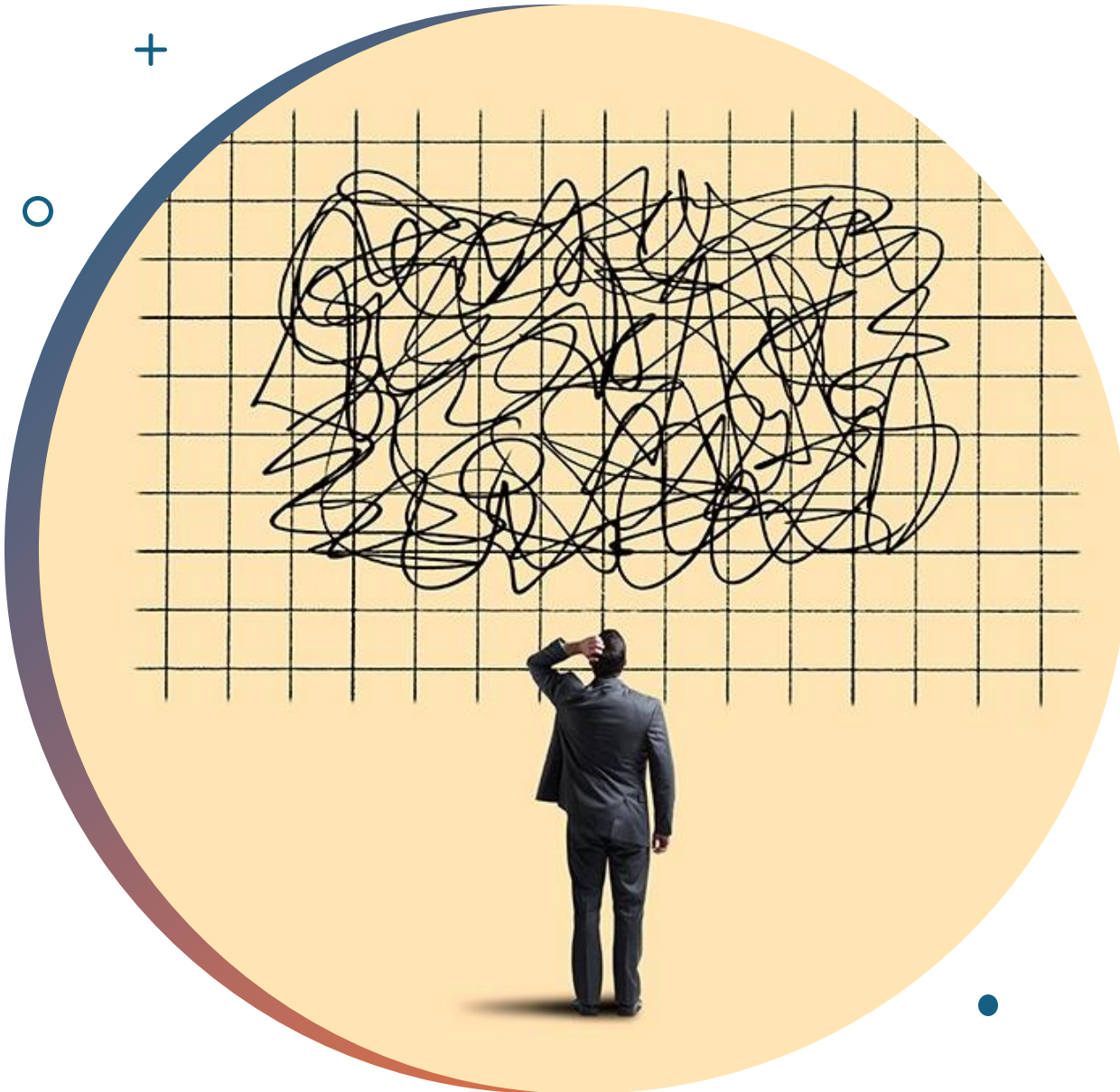
Manufactura y Producción

- **Optimización de Procesos Industriales:** Modelos para mejorar la producción y reducir costos.
- **Simulación de Logística y Cadena de Suministro:** Modelos de distribución y transporte de mercancías.

¿Para qué se usan los modelos?

1. *Comparison of control policy options;*
2. *Education and training;*
3. *Engineering design;*
4. *Evaluation of decision or action alternatives;*
5. *Evaluation of strategies for transformation or change;*
6. *Forecasting;*
7. *Performance evaluation;*
8. *Prototyping and concept evaluation;*
9. *Risk/safety assessment;*
10. *Sensitivity analysis;*
11. *Support for acquisition/procurement decisions;*
12. *Uncertainty reduction in decision-making.*





Características del Modelado

- **Simplificación:** No incluye todos los detalles, solo los esenciales.
- **Abstracción:** Representa lo importante de un fenómeno real.
- **Generalización:** Permite hacer predicciones o análisis en distintos escenarios.

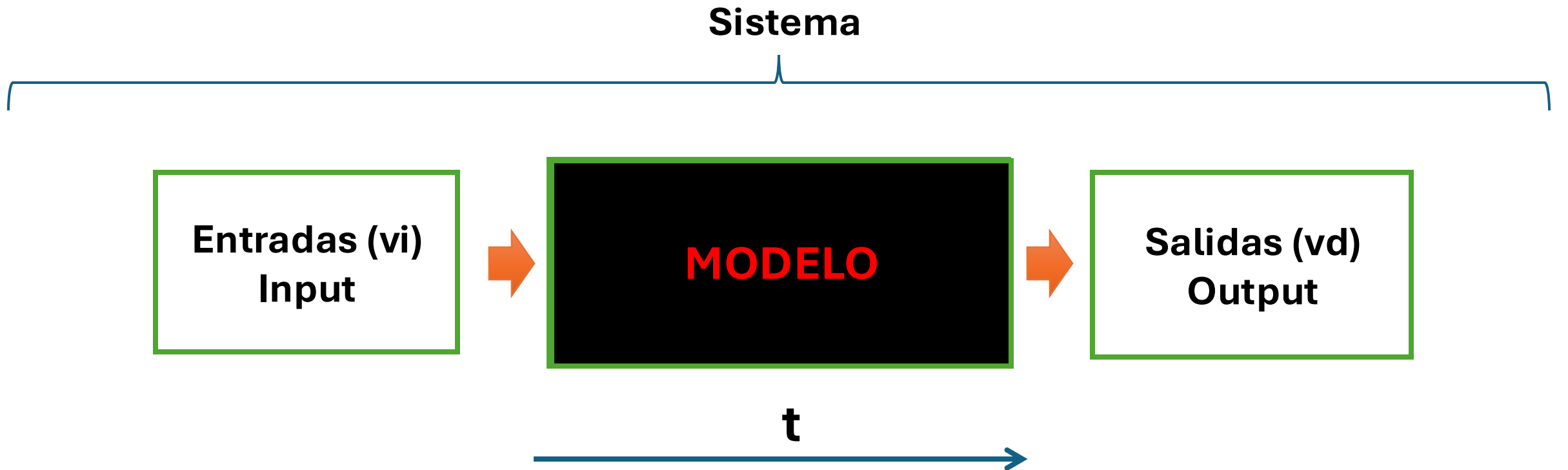
Abstracción de la realidad =

No hay un modelo que sea capaz de explicar cada detalle de un fenómeno.

3. Variable, Modelo, Sistema y Simulación

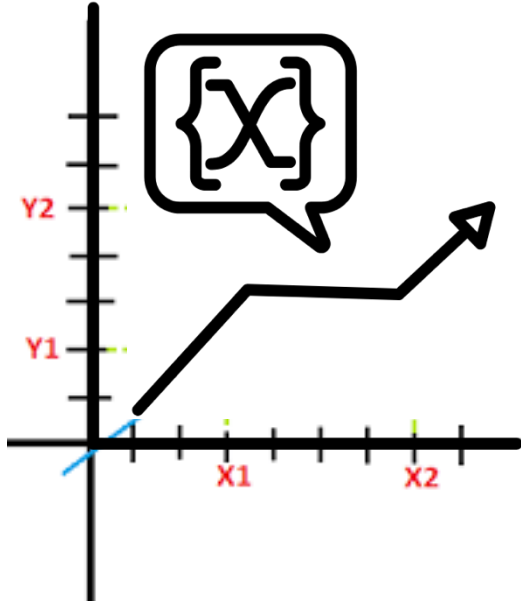
Representación general de un modelo.

- Modelo de caja Negra
- Volumen de control

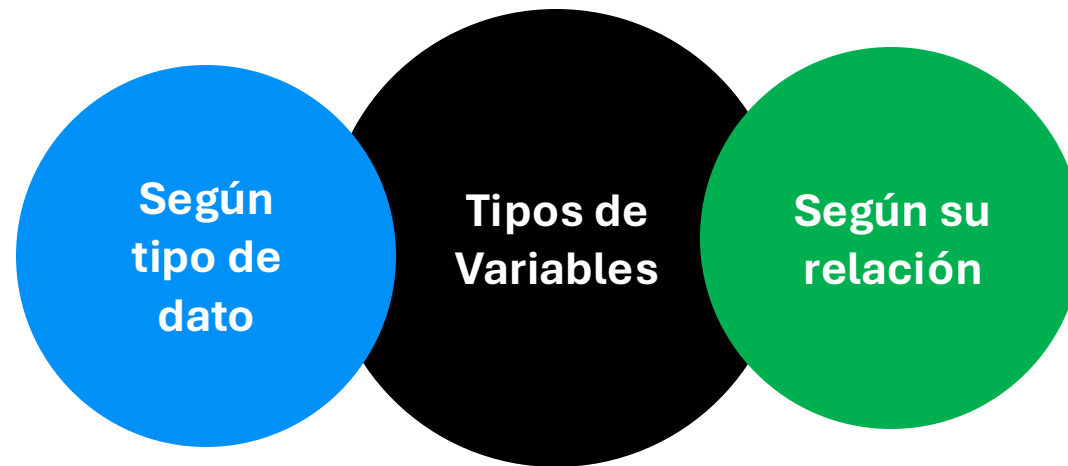


La variable dependiente (vd) resulta de la interacción entre variables independientes (vi) y los parámetros (p).

Concepto de Variable en Modelación



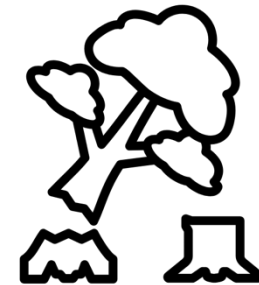
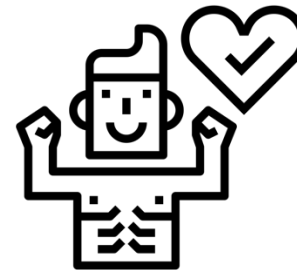
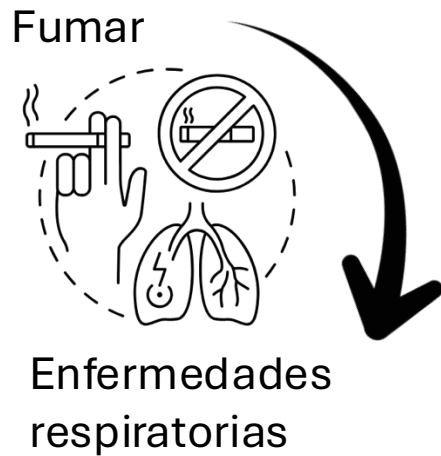
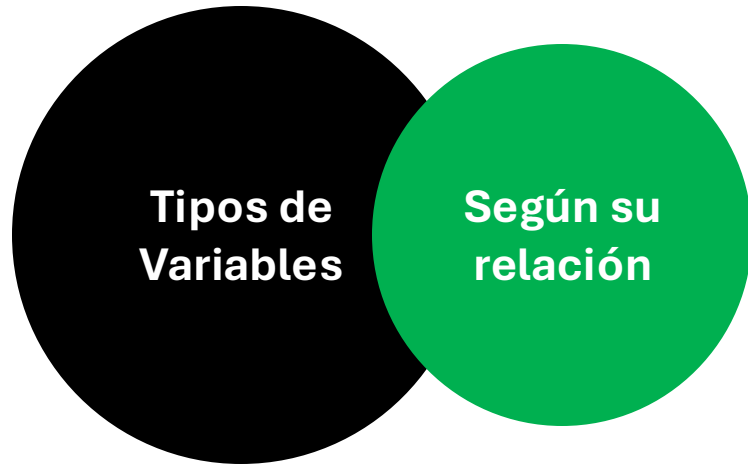
Una **variable** es un elemento medible o categórico que puede cambiar dentro de un modelo y que influye en el comportamiento de un sistema.



Concepto de Variable en Modelación

1 Según su relación con otras variables:

- **Variable Independiente:** Se controla o manipula para observar su efecto en otras variables.
 - *Ejemplo:* En un modelo de dispersión de contaminantes, la **velocidad del viento** es una variable independiente.
- **Variable Dependiente:** Su valor depende de los cambios en las variables independientes.
 - *Ejemplo:* La **concentración de contaminantes en el aire** cambia según la velocidad del viento.

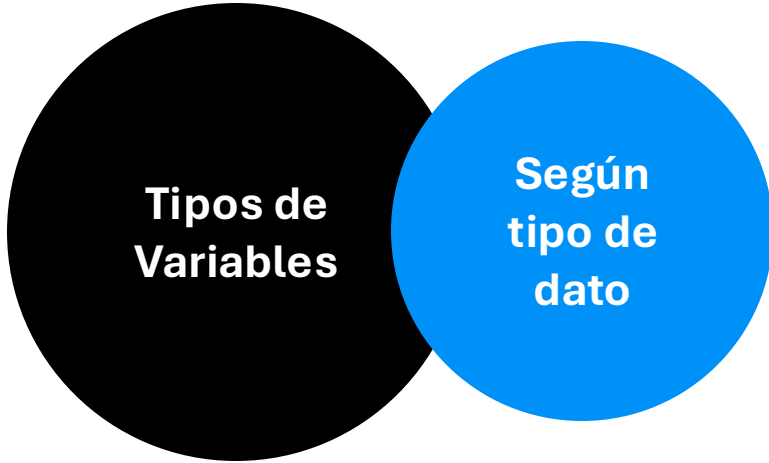


Created by San D
from Noun Project

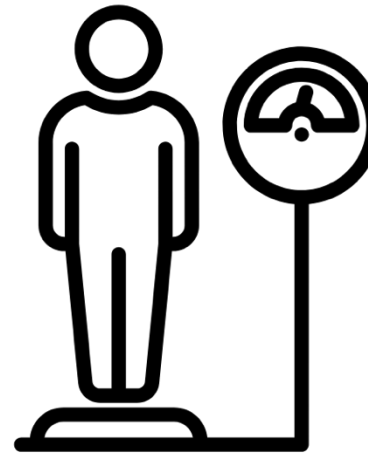
Concepto de Variable en Modelación

2 Según su tipo de datos:

- **Variable Cualitativa:** Representa características o categorías sin valores numéricos.
 - *Ejemplo:* Tipo de suelo en un modelo de erosión (arenoso, arcilloso, franco).
- **Variable Cuantitativa:** Se expresa con valores numéricos.
 - *Ejemplo:* Temperatura en un modelo climático (°C).



- El sexo (masculino o femenino)
- El color de ojos
- El color del Cabello
- El estado civil (soltero, casado, divorciado, viudo)
- El país de Nacimiento
- El sabor de los alimentos
- El giro de negocio de una compañía
- La marca de celular que usamos
- El deporte favorito
- El lugar de nacimiento



- Edad
- Peso
- Estatura
- Ingresos
- Presión
- Humedad
- Cantidad de Hermanos
- Número de quejas de clientes
- Proporción de clientes elegibles para un reembolso
- Peso de llenado de una caja de cereales

Concepto de Variable en Modelación



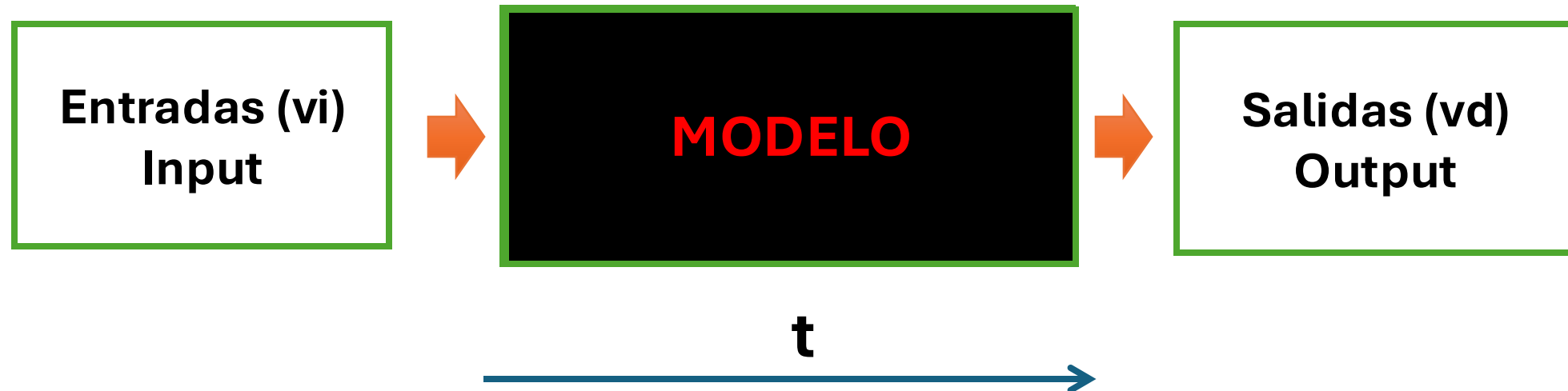
Modelo	Variable Independiente	Variable Dependiente	Cualitativa	Cuantitativa
Hidrológico	Precipitación	Caudal del río	Tipo de cuenca	Nivel del agua
Calidad del aire	Emisiones industriales	Concentración de NO ₂	Tipo de Fuente de emisión	Índice de calidad del aire (ICA)
Climático	Radiación solar	Temperatura	Tipo de suelo	Humedad relativa (%)

3. Variable, Modelo, Sistema y Simulación

Representación general de un modelo.

- Modelo de caja Negra
- Volumen de control

Sistema



La variable dependiente (vd) resulta de la interacción entre variables independientes (vi) y los parámetros (p).

Ejemplos de Sistemas






Sistema	Entradas	Procesos	Salidas	Retroalimentación
Hidrológico	Precipitación, temperatura	Infiltración, escorrentía	Nivel del agua en ríos	Cambio en patrones de precipitación
Calidad del aire	Emisiones, condiciones meteorológicas	Dispersión, reacciones químicas	Niveles de contaminantes	Políticas ambientales
Energético	Combustibles, viento, sol	Generación de energía	Electricidad	Regulación de consumo
Ecosistema	Radiación solar, CO ₂ , agua	Fotosíntesis, cadenas tróficas	Biomasa, oxígeno	Cambio climático

¿Qué es la Simulación?

La **simulación** es una técnica que imita el comportamiento de un sistema real a través de modelos matemáticos y computacionales.

- Permite analizar escenarios sin afectar el sistema real.
- Se utiliza en diversas disciplinas como ingeniería, economía, meteorología, y transporte.
- Puede ser **determinística** (siempre da el mismo resultado con las mismas condiciones) o **estocástica** (incluye elementos aleatorios).

Ejemplos de Simulación en Diferentes Áreas

Área	Ejemplo de Simulación	Aplicación
 Climática	Modelos de cambio climático	Predicción de temperaturas y fenómenos extremos
 Tráfico y Transporte	Simulación de flujo vehicular	Diseño de semáforos y reducción de congestión
 Financiera	Modelos de predicción de inversiones	Análisis de riesgos y estrategias económicas
 Industrial	Simulación de procesos de manufactura	Optimización de producción y reducción de desperdicios
 Ambiental	Modelos de dispersión de contaminantes	Evaluación de impacto ambiental

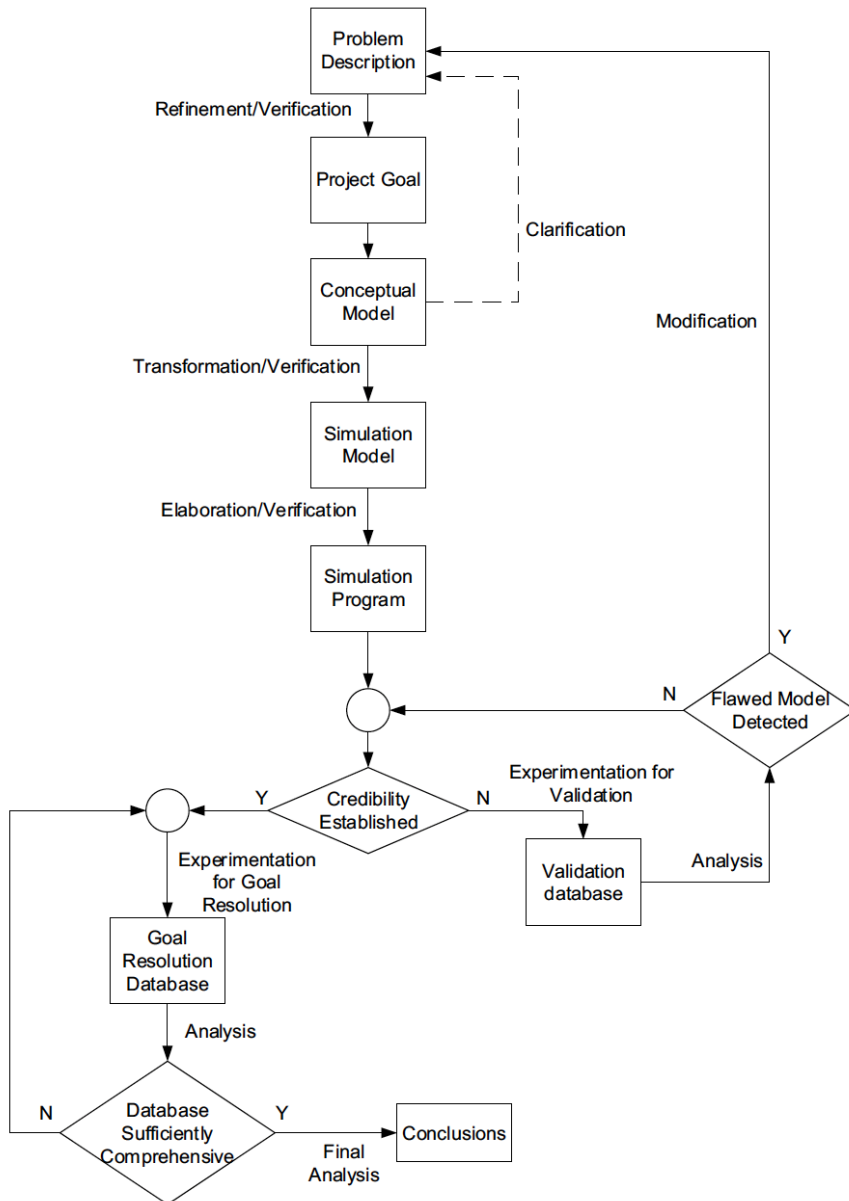
¿Qué otros sistemas conocen en su entorno?

Sistema	Variables	Entradas	Procesos	Salidas	Retroalimentación	Ejemplos de Simulación	Aplicación
Calidad del Aire	Independiente: Emisiones Dependiente: Concentración de PM2.5 Cualitativa: Tipo de Fuente de emisión Cuantitativa: Flujo de emisión total diario.	Emisiones, condiciones meteorológicas	Dispersión, reacciones químicas	Niveles de contaminantes	Políticas ambientales	Simular la dispersión de contaminantes en una ciudad Modelos de Concentración de Contaminantes	<ul style="list-style-type: none">- Evaluación de Impacto Ambiental- Determinar Alertas ambientales por Calidad del aire.

Actividad en Clase:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1TUPITN89v8EqqwOZTDuG-9Bt6Di7hF7HYnU_dZa3WVg/edit?gid=0#gid=0

Marco formal para el modelado y la simulación



1. Definición del problema

- Identificar el sistema a modelar.
- Definir los objetivos del modelo y las preguntas a responder.

2. Conceptualización del modelo

- Crear una representación simplificada del sistema.
- Identificar variables clave, relaciones y supuestos.

3. Formulación matemática o computacional

- Expresar el modelo en ecuaciones matemáticas, reglas lógicas o algoritmos computacionales.

4. Implementación y simulación

- Codificar el modelo en software o herramientas computacionales.
- Ejecutar simulaciones con distintos escenarios.

5. Validación y verificación

- Comparar los resultados del modelo con datos reales para asegurar su precisión.
- Ajustar parámetros y corregir errores.

6. Análisis e interpretación de resultados

- Evaluar los escenarios simulados y extraer conclusiones.
- Usar los resultados para la toma de decisiones.

Vamos a la practica: Aplicaciones de Modelos



Considere la siguiente situación:

- Suponga que una compañía de bungee-jumping lo contrata para que estime la velocidad de la persona que salta como una función del tiempo durante la porción del salto que corresponde a la caída libre.

Esta información servirá como parte de un análisis más completo para determinar la longitud y resistencia de la cuerda para personas de diferentes pesos.

Modelo del Bungee Jumping



La formulación matemática de un **modelo de caída en Bungee Jumping** se basa en la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m * a$$

y considera fuerzas como la gravedad, la resistencia del aire y la fuerza elástica de la cuerda. Se puede modelar como un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

Modelo del Bungee Jumping

Primer Planteamiento: Modelo Básico con Solo la Gravedad

Primero, consideremos que el único factor que afecta al saltador es la gravedad. Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$F_g = ma$$

F = Fuerza de arrastre

m = Peso del saltador

a = aceleración por la fuerza de gravedad (g)

Cómo la fuerza es constante, la aceleración también lo será:

$$a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Primer Planteamiento: Modelo Básico con Solo la Gravedad

Modelo del Bungee Jumping

Primer Planteamiento: Modelo Básico con Solo la Gravedad

1. Según la Naturaleza del Modelo

Modelo Determinístico

- Las ecuaciones no incluyen incertidumbre ni variabilidad aleatoria.
- Dado un conjunto de condiciones iniciales (y_0, v_0), el resultado siempre será el mismo.
- La ecuación diferencial $dv/dt = g$ tiene una solución única.

Modelo Continuo

- La evolución del sistema se describe mediante **ecuaciones diferenciales continuas** en el tiempo.
- El tiempo y las variables del sistema toman valores en un dominio continuo

Modelo Analítico

- Como el sistema es relativamente simple (sin términos no lineales), **tiene solución analítica** con integración directa:

$$v(t) = gt$$
$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

2. Según el Tipo de Fenómeno Físico Modelado

Modelo Mecánico

- Es un modelo basado en **las leyes del movimiento de Newton**.
- Modela el comportamiento de un objeto en caída libre bajo la influencia de una fuerza externa (gravedad).

Modelo Dinámico

- Describe la **evolución de las variables en el tiempo**.
- La posición y la velocidad cambian con el tiempo, por lo que no es un sistema estático.

Modelo de Movimiento Vertical

- Específico para el estudio de la **cinemática y dinámica de un objeto en caída libre**.

3. Según la Complejidad y Nivel de Aproximación

Modelo Simplificado

- Solo considera la **fuerza gravitacional**.
- No tiene resistencia del aire ni efectos adicionales (como elasticidad o interacción con el entorno).

Modelo Base

- Se usa como **punto de partida** para incrementar la complejidad (por ejemplo, luego agregaremos resistencia del aire y la fuerza elástica de la cuerda).
- Ideal para una primera aproximación antes de refinar el modelo.

Modelo del Bungee Jumping

Segundo Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

En caída libre con resistencia del aire, tenemos dos fuerzas actuando sobre el objeto:

El peso del objeto, que siempre apunta hacia abajo:

$$F_g = mg$$

La resistencia del aire, que siempre se opone al movimiento y depende de la velocidad:

$$F_a = cv^2$$

Donde:

C:

coeficiente de resistencia aerodinámica (depende de la forma del objeto y del aire).

v²:

se usa porque la resistencia del aire crece con el cuadrado de la velocidad.

Segundo Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

Modelo del Bungee Jumping

Segundo Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

Coeficiente de arrastre – C

Es un valor que depende de la forma y tamaño del objeto, así como de la densidad del aire. Y se calcula de la siguiente manera:

$$c = \frac{1}{2} C_d \rho A$$

Donde:

A : Área frontal del cuerpo expuesta al viento.

ρ : Densidad del aire $\approx 1.225 \text{ kg/m}^3$ al nivel del mar.

C_d : Coeficiente de forma aerodinámica coeficiente de arrastre, que varía según si el cuerpo es esférico, cilíndrico, plano, etc., típicamente entre 0.5 y 1.5 para un humano en caída libre.

Modelo del Bungee Jumping

Segundo Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

¿Por qué $v|v|$ y no solo v^2 ?

- La resistencia del aire depende del cuadrado de la velocidad (v^2), lo que significa que aumenta rápidamente a medida que el cuerpo se mueve más rápido.
- El término $v|v|$ nos ayuda a mantener el signo correcto en la ecuación:
- Si el saltador **baja** ($v > 0$), $v|v| = v^2$ y la resistencia del aire es negativa (opuesta a la caída).
- Si el saltador **sube** ($v < 0$), $v|v| = -v^2$ y la resistencia del aire es positiva (opuesta al ascenso).

Esto nos asegura que la fuerza siempre se opone al movimiento, sin importar la dirección.

Modelo del Bungee Jumping

Segundo Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

1. Según la Naturaleza del Modelo

Modelo Determinístico

- No hay **aleatoriedad** en la ecuación.
- Dado un conjunto de condiciones iniciales (y_0, v_0) , el comportamiento es siempre el mismo.

Modelo Continuo

- La velocidad y la posición **cambian de manera continua en el tiempo**.
- Se usa una ecuación diferencial para describir la evolución del sistema.

Modelo Numérico

- Aunque la ecuación se puede escribir en forma analítica, al incluir la resistencia del aire **no siempre tiene solución exacta en forma cerrada**.
- Por eso, usamos el método de integración numérica **Runge-Kutta de 4to orden (RK45)** para resolverla.

Modelo No Lineal

- La ecuación de la aceleración incluye el término $v|v|$, que hace que el sistema **no sea lineal**.
- Esta no linealidad introduce una dinámica más realista y compleja.

2. Según el Tipo de Fenómeno Físico

Modelo Mecánico

- Se basa en las leyes del movimiento de Newton.
- Modela la dinámica de un cuerpo en caída sometido a fuerzas físicas.

Modelo Dinámico

- Describe cómo cambian las variables con el tiempo (posición y velocidad).
- Es un sistema donde la evolución depende de la velocidad actual.

Modelo de Movimiento Vertical con Resistencia

- Específico para el estudio de la cinemática y dinámica vertical con influencia del aire.

3. Según la Complejidad y Nivel de Aproximación

Modelo Intermedio

- Este modelo es más realista que la caída libre, pero aún no incluye la elasticidad de la cuerda.
- Es una buena aproximación para un paracaidista antes de abrir el paracaídas o un bungee jumper antes de que la cuerda se tense.

Modelo de Velocidad Terminal

- Como la resistencia del aire aumenta con la velocidad, el saltador eventualmente alcanza una velocidad terminal (v_t), donde la aceleración neta es cero:

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

- Esto significa que después de un tiempo, la velocidad deja de aumentar y el movimiento se estabiliza.

Tercer Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire + Fuerza elástica de la cuerda

Primer planteamiento: Modelo básico con solo la gravedad:

$$F_g = mg$$

Segundo planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

$$F_g = mg$$

$$F_a = cv^2$$

Tercer planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire + Fuerza elástica de la cuerda.

Fuerza elástica de la cuerda – Siguiendo la ley de Hooke:

$$F_e = -k(y - L)H(y - L)$$

Donde:

k : es la constante elástica de la cuerda.

L : es la longitud natural de la cuerda (antes de estirarse).

$H(y - L)$: es la función de Heaviside, que asegura que la fuerza elástica solo actúe cuando la cuerda está estirada ($y > L$).

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2 - \frac{k}{m}(y - L)H(y - L)$$

Antes de que la cuerda se tense ($y \leq L$):

- Solo actúan la gravedad y la resistencia del aire.

Cuando la cuerda se estira ($y > L$):

- La fuerza elástica empieza a actuar y jala al saltador hacia arriba.
- El sistema ahora es un oscilador amortiguado.
- El saltador oscila varias veces antes de detenerse debido a la resistencia del aire.

Tercer Planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire + Fuerza elástica de la cuerda

Primer planteamiento: Modelo básico con solo la gravedad:

$$F_g = mg$$

Segundo planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire

$$F_g = mg$$

$$F_a = cv^2$$

Tercer planteamiento: Gravedad + Resistencia del Aire + Fuerza elástica de la cuerda.

Fuerza elástica de la cuerda – Siguiendo la ley de Hooke:

$$F_e = -k(y - L)H(y - L)$$

Donde:

k : es la constante elástica de la cuerda.

L : es la longitud natural de la cuerda (antes de estirarse).

$H(y - L)$: es la función de Heaviside, que asegura que la fuerza elástica solo actúe cuando la cuerda está estirada ($y > L$).

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2 - \frac{k}{m}(y - L)H(y - L)$$

Conclusiones del Ejercicio del Bungee Jumper:

- **Primer Modelo:** Solo caída libre con gravedad (modelo determinístico, continuo, analítico).
- **Segundo Modelo:** Se agrega la resistencia del aire (modelo no lineal, numérico, más realista).
- **Tercer Modelo:** Se agrega la **fuerza elástica de la cuerda**, lo que convierte el modelo en un **sistema oscilatorio amortiguado** (Modelo determinista, dinámico y continuo).
 - **Determinista:**
Porque no hay elementos de azar o incertidumbre. Dado un conjunto de condiciones iniciales, el resultado del modelo es siempre el mismo.
 - **Dinámico:**
Porque describe cómo cambia el sistema con el tiempo. El movimiento del saltador varía con el tiempo según las fuerzas que actúan sobre él.
 - **Continuo:**
Porque las variables (posición, velocidad, etc.) cambian de manera continua a lo largo del tiempo, y el modelo se describe con **ecuaciones diferenciales**.

Mensaje para llevar a casa:

- **Todo modelo parte de una pregunta concreta:** El punto de partida es siempre el problema: ¿cómo se comporta el salto? ¿Qué queremos predecir o entender?
- **Modelar es simplificar la realidad para entenderla mejor:** No necesitamos todos los detalles del mundo real, solo los que afectan el comportamiento que nos interesa.
- **Las leyes físicas (como la gravedad o la fuerza elástica) nos permiten construir modelos que se pueden resolver matemáticamente:** La física se convierte en ecuaciones, y esas ecuaciones nos permiten simular el mundo.
- **Los supuestos del modelo determinan sus límites:** ¿Qué pasa si ignoramos la resistencia del aire? ¿Y si asumimos que la cuerda es perfecta? Cada decisión tiene consecuencias.
- **Un modelo no es la realidad, pero puede acercarse mucho si está bien construido:** La calidad del modelo se mide por qué tan útil es para predecir, no por qué tan complejo sea.
- **El pensamiento matemático permite hacer predicciones incluso antes de probar en la realidad:** Podemos “ver el salto” con números y fórmulas antes de que alguien se amarre la cuerda.
- **Modelar también es una forma de contar historias, con ecuaciones como lenguaje:** ¿Qué historia cuenta nuestro modelo del salto? ¿Es creíble, útil, precisa?

