

Curso Métodos y Modelos

Profesora: Karen Ballesteros-González PhD.

Modelos Matemáticos Clásicos

7. Diferencias entre modelos determinísticos y estocásticos

Modelos Determinísticos

- i. Ecuaciones diferenciales (Ej. crecimiento poblacional de Malthus)
- ii. Modelos de optimización (Ej. programación lineal para maximizar beneficios, modelo de transporte)

Modelos Estocásticos - Probabilísticos

- ii. Modelos de Monte Carlo (Ej. simulación de precios en mercados financieros; Procesos de colas en redes de telecomunicaciones)
- i. Cadenas de Markov (Ej. predicción de estados en sistemas dinámicos)

Modelos Matemáticos Clásicos - Diferencias entre modelos determinísticos y estocásticos

Modelo Determinístico

- Definición: No incluye componentes aleatorios. Los resultados son completamente determinados por las condiciones iniciales y los parámetros del modelo.
- **Resultado:** Siempre da el mismo resultado si se repiten las condiciones iniciales.
- Ejemplos:
 - Ecuaciones diferenciales que modelan el crecimiento poblacional sin variabilidad (como el modelo logístico clásico).
 - Simulación de trayectorias de partículas sin turbulencia.

Modelo Estocástico

- Definición: Incluye variables aleatorias o procesos probabilísticos. Reconoce la incertidumbre inherente en muchos sistemas reales.
- **Resultado:** Puede dar diferentes resultados aun con las mismas condiciones iniciales.
- Ejemplos:
 - Modelos de crecimiento poblacional con eventos aleatorios como nacimientos o muertes.
 - Dispersión de contaminantes con influencia de la turbulencia atmosférica.

Modelos Matemáticos Clásicos - Diferencias entre modelos determinísticos y estocásticos

Característica	Determinístico	Estocástico
¿Usa probabilidad?	No-	Sí
¿Resultados repetibles?	Siempre los mismos	Pueden variar entre ejecuciones
¿Captura incertidumbre?	No	Sí
Aplicación típica	Sistemas físicos o técnicos controlados	Procesos naturales o sociales variables
Complejidad computacional	Generalmente menor	Puede requerir simulaciones múltiples

Ejemplo: Crecimiento poblacional

Modelo Determinístico

Usamos el clásico modelo exponencial:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

 P_0 : Población Inicial

r: Tasa de cremiento

t: Tiempo

Este modelo **siempre da el mismo resultado** si usamos los mismos parámetros.

Modelo Estocástico

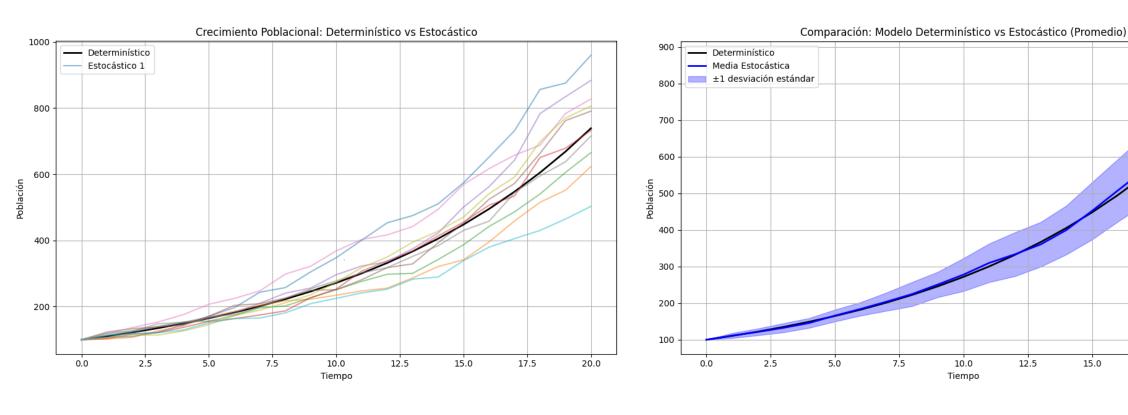
Agregamos una componente aleatoria a la tasa de crecimiento:

$$P(t + \Delta t) = P(t)e^{(r+\epsilon_t)\Delta t}$$

 \in_t : Ruido aleatorio.

Cada simulación puede dar un resultado diferente, como ocurre en la vida real con nacimientos, migraciones, enfermedades, etc.

Ejemplo: Crecimiento poblacional



15.0

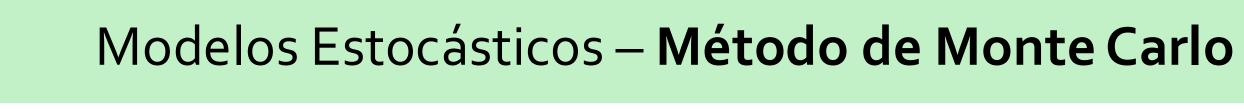
17.5

Modelos Matemáticos Clásicos - Modelos Estocásticos

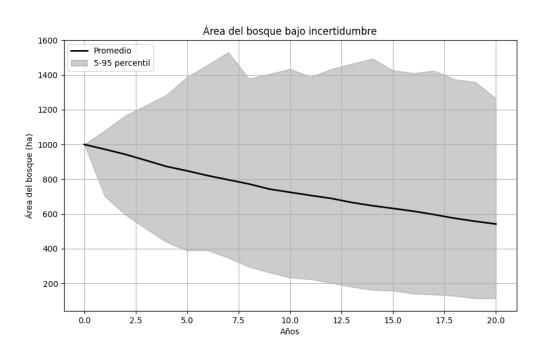
Un modelo estocástico es un modelo matemático que incluye elementos de azar o incertidumbre.

A diferencia de los modelos determinísticos (donde una misma condición inicial siempre da el mismo resultado), en los modelos estocásticos los resultados pueden variar, incluso si las condiciones iniciales son iguales.

- ¿Para qué se usan los modelos estocásticos?
- 1. Predecir comportamientos futuros en sistemas inciertos.
- 2.Simular posibles escenarios cuando no se puede determinar un único resultado.
- 3. Estimar riesgos y probabilidades en procesos naturales, sociales o técnicos.



- El método de Monte Carlo es una técnica de simulación que utiliza números aleatorios para resolver problemas que, de otra forma, serían muy difíciles o imposibles de abordar analíticamente.
- Este método permite modelar procesos inciertos y estimar resultados probables repitiendo muchas veces una simulación con diferentes variables aleatorias.
- Se basa en la idea que, si se repite un experimento muchas veces con pequeñas variaciones aleatorias, los resultados se acercarán al comportamiento real del sistema.



¿Para qué se usa?

- Para analizar sistemas complejos en los que hay incertidumbre.
- Para tomar decisiones basadas en el comportamiento más probable del sistema.
- Para visualizar riesgos y variabilidad en procesos ambientales, financieros, industriales, etc.

Algunos Ejemplos:

1. Sostenibilidad del agua

Simular diferentes escenarios de disponibilidad hídrica en una cuenca, considerando la variabilidad de lluvias, consumo humano y efectos del cambio climático. El método Monte Carlo permite estimar cuántas veces al año podría haber escasez de agua.

2. Riesgo de incendios forestales

Dado que los incendios dependen de múltiples factores (temperatura, humedad, viento, actividad humana), se pueden simular miles de trayectorias posibles para estimar la **probabilidad de ocurrencia** de incendios y su intensidad.

3. Dispersión de contaminantes en el aire

Simular miles de trayectorias de partículas contaminantes en la atmósfera (p. ej., con HYSPLIT), variando condiciones meteorológicas, para estimar las áreas más afectadas en distintos escenarios.

4. Evaluación de impacto ambiental

Simular escenarios futuros con diferentes combinaciones de variables como crecimiento poblacional, deforestación o emisiones industriales, y así evaluar el impacto potencial sobre la calidad del aire o del agua.

5. Estimación de π

Uno de los ejemplos más clásicos: lanzar puntos al azar sobre un cuadrado que contiene un círculo inscrito, y usar la proporción de puntos dentro del círculo para estimar el valor de π.

Ventajas del método

Simplicidad conceptual: fácil de entender y aplicar, incluso en sistemas muy complejos.

Flexible: puede adaptarse a una gran variedad de problemas y disciplinas (ingeniería, finanzas, medio ambiente, etc.).

Permite modelar incertidumbre: ideal para sistemas donde hay muchas variables aleatorias o poca información precisa.

No requiere soluciones analíticas: útil cuando los modelos matemáticos no se pueden resolver de forma exacta.

Escalable con poder computacional: se puede obtener mayor precisión aumentando el número de simulaciones.

Desventajas del método

Requiere muchos cálculos: para obtener resultados estables, se necesitan miles o millones de simulaciones.

Lento si no se optimiza: especialmente en modelos complejos o de alta dimensión.

No siempre garantiza precisión: aunque se acerque al resultado real, puede haber error si las distribuciones de entrada están mal definidas.

Dependiente de buenos datos de entrada: si los supuestos o probabilidades no están bien fundamentados, los resultados pueden ser engañosos.

Ejercicio: Modelo Estocástico de Reforestación y Captura de Carbono

Este ejercicio simula el crecimiento del área de un bosque reforestado durante 20 años, considerando la posibilidad de eventos aleatorios que afectan dicho crecimiento.

Descripción del modelo

Cada año, el área del bosque puede crecer o reducirse dependiendo de un evento aleatorio:

- Incendio (probabilidad = 0.2): reduce el área en un 30%.
- Plaga (probabilidad = 0.1): reduce el área en un 15%.
- Protección (probabilidad = 0.3): aumenta la tasa de crecimiento a 8%.
- Sin evento (probabilidad = 0.4): el crecimiento se mantiene en 5%.

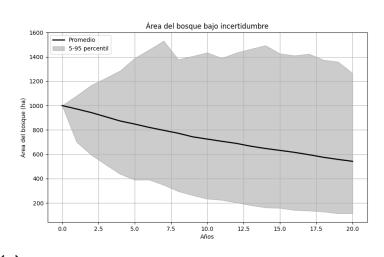
La ecuación básica de crecimiento de bosque es:

$$A_t = A_{t-1} \times (1 + r_t)$$

Donde:

 A_t : área del bosque en el año (t)

 r_t : tasa de crecimiento o decrecimiento, según el evento ocurrido en el año (t)



Ejercicio Monte Carlo – Sostenibilidad del Agua en una Cuenca

Objetivo

Simular cómo evoluciona el **almacenamiento de agua** de una cuenca durante 20 años, considerando incertidumbre en la precipitación, demanda y políticas de conservación.

Contexto del problema

Una cuenca tiene una capacidad promedio de recarga hídrica anual estimada a partir de la precipitación y la escorrentía. Sin embargo, la precipitación es variable de año a año. Además, el consumo de agua también varía según el crecimiento poblacional y hábitos de consumo.



$$\Delta S_t = O_t - D_t$$

Capacidad de almacenamiento:

 $S_{t+1} = \max(S_t + \Delta S_t, 0)$ - <u>Se usa para evitar que se retornen valores negativos.</u>



Ejercicio Monte Carlo – Sostenibilidad del Agua en una Cuenca

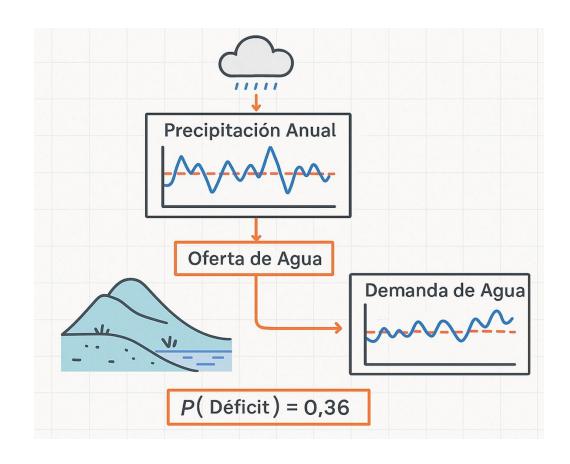
- Precipitación anual (P): Distribución normal con media 1200 mm y desviación estándar 200 mm.
- **Eficiencia de escorrentía** (e): 0.3 (30% de la precipitación se convierte en agua utilizable).
- **Demanda poblacional anual de agua** (D): Distribución normal con media 300 millones de m³ y desviación estándar 50 millones de m³.
- Superficie de la cuenca (A): 500 km².

Oferta de agua:

$$O = P \cdot e \cdot A.$$
para que Oferta este en $m^3(\frac{10^6}{1000})$

Evaluación del balance:

Déficit si: D > 0



Capacidad de almacenamiento:

 $S_{t+1} = max(S_t + \Delta S_t, 0)$ - Se usa para evitar que se retornen valores negativos.

Ejemplo:

- Comienza el año con 100 millones de m³ en el embalse.
- Hay un déficit este año de 150 millones de m³

Entonces:

- $S_{t+1} = \max(100 150, 0) = \max(-50, 0) = 0$
- Resultado realista: el sistema se queda sin agua, pero no entra en negativo.

¿Qué es un percentil?

Un *percentil* es un valor que divide un conjunto de datos ordenados. Indica el punto debajo del cual se encuentra un cierto porcentaje de los datos.

Ejemplos comunes:

- P5: 5% de los datos están por debajo de este valor.
- P95: 95% de los datos están por debajo de este valor.
- **P50:** Es la *mediana* (50% de los datos por debajo y 50% por encima).

¿Cómo se calcula un percentil?

Fórmula general:

$$i = \frac{k}{100} \times (n+1)$$

- k es el percentil deseado (por ejemplo, 5 para el percentil 5).
- n es el número total de datos ordenados.
- Si i es un entero, el percentil está en la posición i.
- Si no lo es, se interpola entre los dos valores más cercanos.

Ejemplo:

Para el percentil 5 con n = 10 datos:

•
$$i = \frac{5}{100} \times (10 + 1) = 0.55$$

• Se interpola usando el primer dato.

Ejemplo con altura de niños

Altura de 10 niños (ordenados):

$$Alturas = [90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135]$$

- $P(5) \approx 90 \text{ cm}$
- P(50) (mediana) = 112.5 cm (entre 110 y 115)
- $P(95) \approx 135 \text{ cm}$
- Intervalo [P5 P95] = 90% de los datos.

Este rango muestra lo que es "típico", excluyendo los valores más extremos.

Percentiles en Simulación Monte Carlo

- En modelos estocásticos se hacen muchas simulaciones (ej. 1000 trayectorias).
- En cada instante de tiempo, se calcula P(5) y P(95) del conjunto de trayectorias.
- El área entre P(5) y P(95) forma una banda de incertidumbre del 90%.
- Esa banda muestra el rango donde se espera que caigan la mayoría de los escenarios posibles.

¿Por qué usar percentiles?

- Permiten visualizar la variabilidad de los datos.
- No dependen de la distribución (no suponen normalidad).
- Identifican valores típicos y extremos.
- Útiles para el análisis de riesgo y escenarios posibles.
- En simulaciones Monte Carlo, usar el intervalo [P(5) P(95)] ayuda a mostrar el rango más probable de resultados esperados.



 Una de las herramientas más conocidas dentro del modelado estocástico es la Cadena de Markov. Este modelo describe un proceso en el que el estado futuro depende <u>únicamente</u> <u>del estado</u> <u>presente</u>, y no de cómo se llegó a él. Esto se conoce como la propiedad de Markov o memoria corta.

Definición básica:

Una Cadena de Markov es un modelo matemático que consiste en:

- Un conjunto finito (o numerable) de **estados**.
- Una matriz de transición de probabilidades, donde cada elemento P_{ij} representa la probabilidad de pasar del estado i al estado j.

Ejemplo:

Imaginemos el clima de una ciudad donde solo hay dos posibles estados:



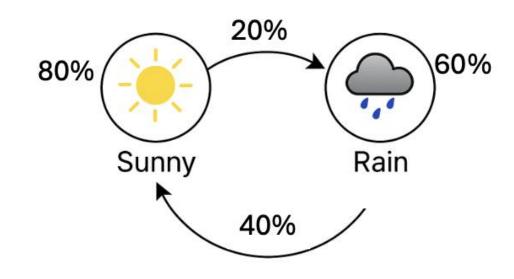
Si hoy está soleado, hay un 80% de probabilidad de que mañana también lo esté, y un 20% de que llueva. Si hoy llueve, hay un 60% de probabilidad de que mañana también llueva, y 40% de que esté soleado.

Esta información se puede representar con la siguiente **matriz de transición**:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Donde las filas representan el estado actual y las columnas el estado futuro.

Meteorology



Partes fundamentales de una Cadena de Markov

1. Conjunto de estados

Es el conjunto de **posibles situaciones** en las que el sistema puede estar.

2. Matriz de transición P

Es una matriz cuadrada que contiene las **probabilidades de pasar de un estado a otro** en un solo paso.

Cada fila **suma 1** (porque representa una distribución de probabilidad).

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

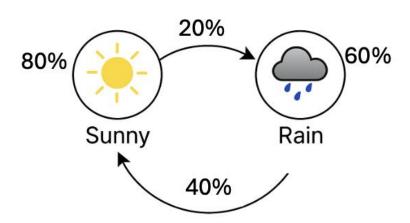
3. Es un vector fila

Que indica en qué estado comienza el sistema (o con qué probabilidad comienza en cada estado).

Por ejemplo, si el sistema empieza con certeza en el estado 1:

v0=[1,0]

Meteorology



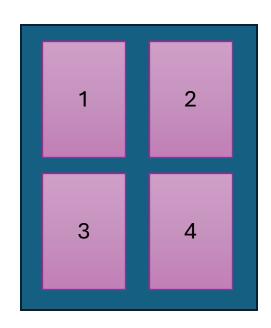
¿Para qué se usan las Cadenas de Markov?

Las Cadenas de Markov son herramientas fundamentales para modelar sistemas que evolucionan en el tiempo y cuyos cambios de estado son *probabilísticos*, pero dependen únicamente del estado actual (no del historial completo). Esta característica las hace muy útiles para predecir comportamientos en una amplia variedad de disciplinas.

El objetivo principal de las Cadenas de Markov es **estimar la evolución futura de un sistema** con base en su comportamiento actual.

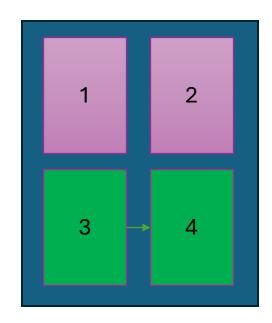
Se usan cuando:

- Los eventos ocurren de forma secuencial.
- Existe incertidumbre (aleatoriedad) en la transición entre estados.
- No se necesita memoria del pasado: solo importa el estado actual.



¿Cuál es el objetivo de este modelo? - Entender la evolución del Sistema

El modelo describe cómo **cambia un sistema a lo largo del tiempo** cuando hay transiciones entre estados que ocurren de forma probabilística (por ejemplo: clima, comportamiento de usuarios, procesos biológicos, etc.).



¿Queremos saber cual es la probabilidad que entre 2 juegos te toque jugar el partido 4 si hoy nos tocó jugar en la cancha 3.

Ejemplo: Preferencias de clientes entre 3 marcas de gaseosas

Imaginemos que los clientes pueden elegir entre tres marcas de productos similares y queremos saber ¿Cuál será el comportamiento future de preferencias de Bebidas de acuerdo a los estados actuales?:

Coca-Cola: Marca A

Pepsi: Marca B

Colombiana: Marca C

¿Para qué se usan las Cadenas de Markov?

Los eventos ocurren de forma secuencial

Es decir, el sistema cambia de estado con el tiempo (día a día, hora a hora, etc.).

Ejemplos:

1. Evolución del clima

- Si hoy está soleado, mañana puede llover o seguir soleado.
- Se modela como una cadena donde cada día depende del estado del día anterior.
- Utilizado en meteorología para predicción climática simplificada.

2. Etapas de una enfermedad

- Un paciente puede pasar de sano → infectado → hospitalizado → recuperado.
- Cada transición ocurre en secuencia y puede predecirse usando una matriz de probabilidades.
- Útil en **epidemiología** para modelar progresión de enfermedades (como COVID-19).

Existe incertidumbre (aleatoriedad) en la transición entre estados

No siempre ocurre lo mismo: la transición de un estado a otro es **probabilística**, no determinista.

Ejemplos:

1. Navegación de un usuario en una página web

Un usuario puede pasar de la página de inicio a productos, a contacto, o abandonar el sitio. Las transiciones entre páginas se modelan con probabilidades observadas históricamente.

Se usa en **analítica web y diseño de UX** para mejorar rutas de navegación.

2. Cambios en el mercado financiero Un activo puede tener probabilidades de subir, bajar o mantenerse.

Se simula con cadenas de Markov para evaluar escenarios futuros.

Aplicado en **finanzas cuantitativas y gestión de riesgo**.

No se necesita memoria del pasado: solo importa el estado actual

El sistema no recuerda cómo llegó al estado actual. Solo el estado presente afecta las decisiones futuras.

Ejemplos:

- 1. Mantenimiento de maquinaria
- Una máquina puede estar en estado "funcional", "fallando", o "en reparación".
- Las probabilidades de pasar a otro estado dependen solo del estado actual.
- Muy utilizado en ingeniería de confiabilidad y mantenimiento predictivo.

2. Comportamiento del consumidor

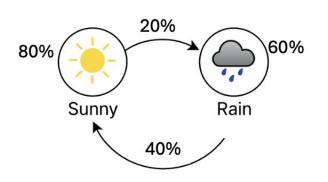
- Un cliente puede estar "activo", "interesado", "comprador", o "inactivo".
- La probabilidad de transición a otro estado depende únicamente de su estado actual.
- Utilizado en marketing y modelos de fidelización de clientes.

1. Meteorología:

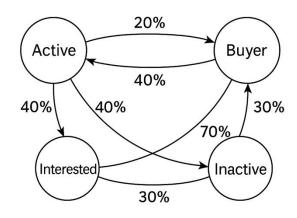
Para predecir el clima a partir del estado del día anterior.

Ejemplo: si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana llueva puede ser distinta a si hoy está soleado. Se construye una matriz de transición entre estados climáticos (soleado, nublado, lluvioso).

Meteorology



Consumer Behavior



2. Comportamiento del consumidor:

En marketing, se puede modelar la transición entre diferentes estados de consumo: interesado, comprador, recurrente, inactivo.

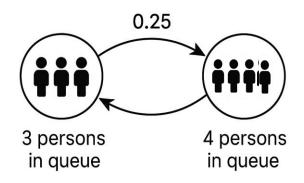
Ejemplo: entender la probabilidad de que un cliente activo se vuelva inactivo en el próximo mes.

3. Sistemas de colas (teoría de colas):

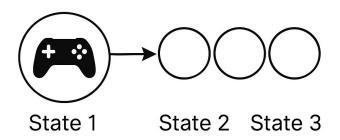
Para estudiar el comportamiento de personas o paquetes esperando en sistemas de servicio (bancos, servidores, call centers).

Ejemplo: modelar la probabilidad de pasar de un sistema con 3 personas en cola a uno con 4 en el siguiente minuto.

Queueing Systems



Games and Sequential Decisions



4. Juegos y decisiones secuenciales:

Modelar decisiones en entornos donde cada acción lleva a un nuevo estado y se requiere estimar el mejor curso de acción.

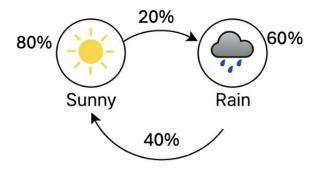
Ejemplo: en inteligencia artificial para videojuegos o procesos de decisión de agentes autónomos.

Pasos para Resolver un Modelo de Cadenas de Markov

Ejercicio:

Si hoy está soleado, hay un 80% de probabilidad de que mañana también lo esté, y un 20% de que llueva. Si hoy llueve, hay un 60% de probabilidad de que mañana también llueva, y 40% de que esté soleado.

Meteorology



Propiedades de la Matriz de Transición de una Cadena de Markov

1. Matriz cuadrada

- Si hay n estados posibles en el sistema, la matriz de transición P será de tamaño $n \times n$.
- Cada fila y cada columna representa un estado del sistema.

2. Todos los elementos están entre 0 y 1

$$0 \le P_{ij} \le 1$$
 para todo i, j

- Cada elemento P_{ij} representa la probabilidad de pasar del estado i al estado j en un solo paso.
- Como son probabilidades, nunca pueden ser negativas ni mayores que 1.

4. Puede ser estocásticamente homogénea o no homogénea

- Si la matriz *P* no cambia con el tiempo, se llama Cadena de Markov homogénea.
- Si la matriz cambia en cada paso (por ejemplo, $P^{(t)}$), entonces la cadena es no homogénea.

6. Puede tener estados absorbents

Un estado es absorbente si una vez que se entra en él, no se puede salir:

$$P_{ij} = 1 \ y \ P_{ij} = 0 \ para \ j \neq i$$

- Algunos ejemplos estados como:
 - "muerte",
 - "fallo irreversible",
 - "abandono del sistema".

3. La suma de cada fila es 1

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad para \ todo \ i$$

- Esto garantiza que el sistema debe pasar a algún estado en el siguiente paso (puede ser el mismo).
- La fila *i* representa una distribución de probabilidad sobre los posibles estados futuros.

5. Puede alcanzar un estado estacionario (en muchos casos)

• Con el tiempo, muchas cadenas convergen a una distribución estacionaria π tal que:

$$\pi \cdot P = \pi$$

 Es decir, el sistema alcanza un equilibrio en la distribución de probabilidades entre estados.

7. Propiedad de Chapman-Kolmogorov

- La probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos se puede calcular con: $P^{(n)} = P^n$
- Es decir, **elevando la matriz P** a la potencia n se obtienen las probabilidades de transición a nnn pasos.

Ejercicio: Cadenas de Markov y Probabilidad de Sismos

IECOS

Revista del Instituto de Investigaciones
FIEECS UNI

115

Cadenas de Markov para la identificación de zonas de mayor riesgo de ocurrencia de sismos en Lima-Ica 2019

Carlos Álvaro Risco Franco

RESUMEN

En este estudio se aplicó el modelo de cadenas de Markov para identificar zonas de mayor riesgo de ocurrencia de sismos en el área geográfica de Lima-Ica, la cual es considerada una de las zonas sísmicas más activas del Perú. Existen pocos trabajos de investigación con aplicación de modelos probabilísticos a sismos en el Perú. En el presente estudio hemos usado la información de los sismos que han ocurrido en Lima- Ica del 2017 al 2019 (IGP) y hemos hallado que la zona de Lima-Oeste, es la que presenta mayor riesgo de ocurrencia de sismos, aproximándose este resultado, para el caso de Lima, con el resultado hallado por otros autores, con métodos diferentes.

Palabras clave: Sismos, cadenas de Markov, CTIP.

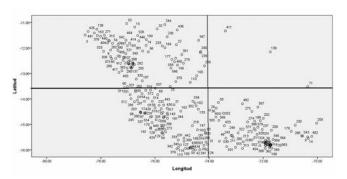


Figura 4. El área geográfica de Lima - Ica dividida en 4 zonas Elaboración propia

Tabla 10
La matriz de frecuencias de sismos en las zonas geográficas Lima-Ica

Estados	Ica Oeste	Lima Oeste	Ica Este	Lima Este	Total	Prop
Ica Oeste	21	23	13	0	57	0.24
Lima Oeste	22	51	26	6	105	0.44
Ica Este	12	27	28	1	68	0.29
Lima Este	2	3	2	1	8	0.03
Total	57	104	69	8	238	1

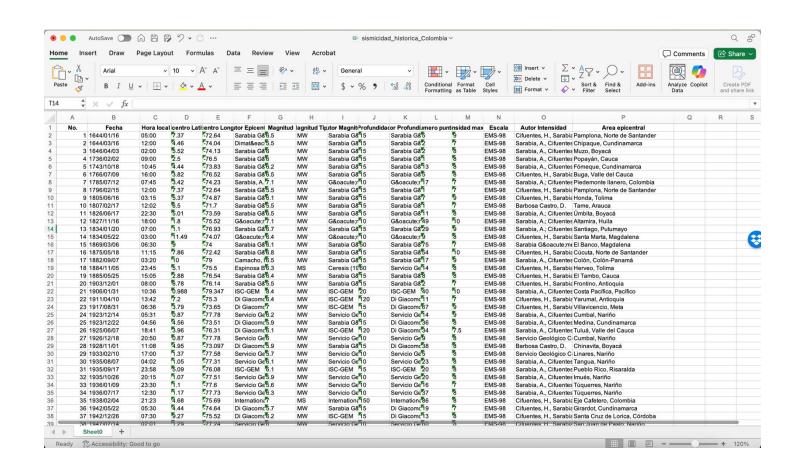
Elaboración propia

Tabla 11
La matriz de probabilidades de transición para las zonas geográficas Lima-Ica

	Ica Oeste	Lima Oeste	Ica Este	Lima Este
Ica Oeste	0.368	0.404	0.228	0.000
Lima Oeste	0.21	0.486	0.248	0.057
Ica Este	0.176	0.397	0.412	0.015
Lima Este	0.25	0.375	0.250	0.125

Elaboración propia

Ejercicio: Cadenas de Markov y Probabilidad de Sismos





https://sish.sgc.gov.co/visor/sesionServlet?metodo=irAEpice ntrosTodos&idDepartamento=&idMunicipio=&cuadranteXMin =&cuadranteXMax=&cuadranteYMin=&cuadranteYMax=