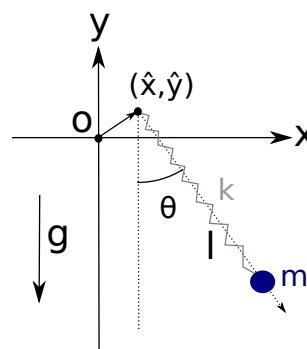


Physique Numérique I – Exercice 3

à rendre jusqu'au **20 Novembre 2019 à 23h55** sur le site
<http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=835969>

3 Système pendule ressort

On étudiera la dynamique d'une masse m , charge électrique q , de position $(x(t), y(t))$, attachée à l'extrémité d'un ressort de longueur au repos l_0 et de constante k , lui-même fixé par son autre extrémité au point $(x, y) = (0, 0)$. La masse m se trouve initialement au point (x_0, y_0) avec une vitesse nulle. Elle est soumise à la force de pesanteur $\mathbf{P} = -mg\hat{\mathbf{e}}_y$, à la force de rappel du ressort $\mathbf{F}_k = -k(l - l_0)\hat{\mathbf{e}}_l$ avec l = la longueur du ressort et l_0 une constante donnée, une force d'excitation oscillante $\mathbf{F}_E = q[E_x \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x + E_y \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y]$, avec E_x , E_y les composantes données du champ électrique (Vm^{-1}) et ω une fréquence donnée, et à une force de frottement $\mathbf{F}_T = -\nu\mathbf{v}$ avec ν une constante donnée (kg/s). Pour l'ensemble de l'exercice, on prendra $m = 1.5\text{kg}$, $k = 4.5\text{N/m}$, $l_0 = 1.1\text{m}$, $q = 10^{-4}\text{C}$ et $g = 9.81\text{m/s}^2$. Pour simplifier, on prendra le point d'attache (\hat{x}, \hat{y}) en $(0, 0)$.



3.1 Calculs analytiques

[8pts]

- Écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse, en coordonnées cartésiennes.
- Trouver les positions d'équilibre $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ lorsque $E_x = E_y = 0$ et $\nu = 0$.
- Écrire l'expression de l'énergie mécanique E_{mec} .
- Écrire l'expression de la puissance des forces non-conservatives P_{nc} .
- Résoudre l'équation obtenue en (a) dans l'approximation des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre stable et trouver les deux fréquences propres du système : ω_1 (ressort) et ω_2 (pendule).

3.2 Implémentation dans le code C++

En vous basant sur le code fourni dans **Exercice3.zip** (Moodle), implémenter le schéma de Verlet, Eq. (2.72) du cours, pour l'intégration des équations du mouvement. Voir aussi les indications données au cours pour modifier le schéma de Verlet dans le cas d'une force dépendant de la vitesse. Implémenter aussi les expressions de l'énergie mécanique et de la puissance des forces non-conservatives.

3.3 Simulations numériques

- (a) [6pts] En prenant $E_x = E_y = \nu = 0$, simulez les **petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre stable** dans les deux cas suivants : choisir (i) une position initiale $(x_{eq} + \delta, y_{eq})$; (ii) une position initiale $(x_{eq}, y_{eq} + \delta)$; avec $\delta = 10^{-6}\text{m}$. Simuler 5 périodes avec environ 100 pas de temps par période. Comparer les résultats numériques avec les solutions analytiques et effectuer des études de convergence avec Δt .
- (b) [8pts] **Excitation résonante.** Toujours en prenant $\nu = 0$, on place le pendule à sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale nulle. Observer comment l'énergie mécanique du système évolue au cours du temps lorsque l'on excite le pendule (i) verticalement ($E_x = 0, E_y = 1\text{V/m}, \omega = \omega_1$) puis (ii) horizontalement ($E_x = 1\text{V/m}, E_y = 0, \omega = \omega_2$) avec dans les deux cas $t_{fin} = 1000\text{s}$.

On effectue ensuite une série de simulations pour des fréquences différentes. Plus précisément, dans le cas (i) (resp. (ii)), choisir une plage de fréquences ω proche de ω_1 (resp. ω_2). Pour chaque simulation, on mesure le maximum de l'énergie mécanique E^{\max} obtenu. On représente ensuite graphiquement ces résultats en traçant E^{\max} en fonction de ω .

Note : Vous pouvez utiliser le fichier `ParameterScan.m`, en le modifiant selon vos besoins, pour lancer une série de simulations avec des fréquences ω différentes et en extraire l'information pertinente.

- (c) [4pts] **Grands mouvements sans amortissement ni excitation.** Toujours avec $\nu = 0$, choisir une position initiale $x_0 = x_{eq} + \delta, y_0 = y_{eq} + \delta$. Effectuer une série de simulations ($\Delta t = 0.01\text{s}, t_{fin} = 200\text{s}$) pour des valeurs de δ de plus en plus grandes $0 < \delta \leq 5\text{m}$. Illustrer quelques orbites dans les plans (x, y) , (x, v_x) , (y, v_y) et (v_x, v_y) . Dans un cas, vérifier la conservation de l'énergie mécanique et faire une étude de convergence en Δt .
- (d) [9pts] **Grands mouvements sans amortissement, avec excitation. Théorème de l'énergie mécanique. Sections de Poincaré.** Toujours avec $\nu = 0$, on considère une excitation avec un champ électrique oblique, $E_x = 5 \times 10^3\text{V/m}, E_y = 5 \times 10^3\text{V/m}$ et une fréquence $\omega = 1.65\text{s}^{-1}$. Choisir le pas de temps Δt tel que $\Delta t = T/N$ avec N un entier et $T = 2\pi/\omega$. On définit les positions initiales des simulations ci-dessous avec $x_0 = x_{eq} + \delta, y_0 = y_{eq} + \delta$.
- (i) Pour $\delta = 2\text{m}$, et $t_{fin} = 200\text{s}$, vérifier le **théorème de l'énergie mécanique** : $dE_{mec}/dt = P_{nc}$, où P_{nc} est la puissance des forces non-conservatives. *Indication : on prendra la dérivée temporelle de E_{mec} par différences finies. On peut le faire dans Matlab (ou python).*
 - (ii) **Sections de Poincaré.** Pour $\delta = 1\text{m}$, faire une très longue simulation ($t_{fin} = 20000\text{s}$), avec 1000 pas de temps par période ($N = 1000$) et un sampling de 1000. Ce qui veut dire que l'output contiendra un point par période : c'est ce qu'on appelle une section de Poincaré. La représenter dans les plans (x, y) , (x, v_x) , (y, v_y) et (v_x, v_y) . Refaire de telles simulations pour des conditions initiales (valeurs de δ) différentes et observer les sections de Poincaré.
 - (iii) **Sensitivité aux conditions initiales.** Faire une paire de simulations avec $t_{fin} = 800$ et un sampling de 1, avec des conditions initiales voisines de $\sim 10^{-9}$ l'une de l'autre, avec $\delta \sim 1\text{m}$. Représenter la distance entre les deux orbites en fonction du temps :

$$d(t) = \sqrt{(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t))^2 + (\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))^2/\omega^2}. \quad (1)$$

Refaire une autre paire de simulations, comme ci-dessus, mais cette fois avec des conditions initiales $\delta \sim 2.5\text{m}$. Observer la divergence exponentielle des trajectoires en représentant $d(t)$ sur une échelle semi-logarithmique, alors qu'une telle divergence exponentielle ne devrait pas être présente pour le cas $\delta \sim 1\text{m}$. Observer la différence qualitative entre les sections de Poincaré obtenues comme en (ii) avec $\delta = 1\text{m}$ et $\delta = 2.5\text{m}$, respectivement.

- (e) [10pts] **Grands mouvements avec amortissement et excitation : chaos et attracteurs étranges.** On considère un amortissement $\nu = 0.01\text{kg/s}$, et une excitation avec un champ électrique oblique, $E_x = 5 \times 10^3\text{V/m}$, $E_y = 5 \times 10^3\text{V/m}$ avec une fréquence $\omega = \omega_1$, la fréquence du mode propre du ressort trouvée en 3.1(e). Choisir un Δt tel que $\Delta t = T/N$ avec N un entier et $T = 2\pi/\omega$.

- (i) Pour $\delta = 2.5\text{m}$, et $t_{fin} = 200\text{s}$, vérifier le **théorème de l'énergie mécanique** : $dE_{mec}/dt = P_{nc}$, où P_{nc} est la puissance des forces non-conservatives. *Indication : on prendra la dérivée temporelle de E_{mec} par différences finies. On peut le faire dans Matlab (ou python).*
- (ii) **Signature du chaos : sensibilité aux conditions initiales.** Effectuer deux simulations jusqu'à $t_{fin} = 2000\text{s}$ avec des positions initiales éloignées d'environ 10^{-9}m l'une de l'autre, et représenter la distance entre les deux orbites

$$d(t) = \sqrt{(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t))^2 + (\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))^2/\omega^2} \quad (2)$$

au cours du temps. Observer la divergence exponentielle des trajectoires en représentant $d(t)$ sur une échelle semi-logarithmique.

- (iii) **Section de Poincaré :** Faire une très longue simulation ($t_{fin} = 20000\text{s}$), avec 1000 pas de temps par période ($N = 1000$) et un sampling de 1000. Ce qui veut dire que l'output contiendra un point par période, donc la section de Poincaré. La représenter dans les plans (x, y) , (x, v_x) , (y, v_y) et (v_x, v_y) .
- (iv) **Attracteur étrange.** Montrer que quelle que soit la condition initiale, la section de Poincaré présente une image similaire. N.B. : c'est de là que vient le nom d'*attracteur* : toute condition initiale est comme "attirée" par l'attracteur.
- (f) [5pts] **Facultatif** (quelques idées) :
- Inclure une force oscillante résultant de l'application d'un couple, $\mathbf{F}_C = (c/l)\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\theta$ avec c un couple donné (Nm). Amusez-vous avec le pendule et essayez de trouver d'autres attracteurs étranges intéressants.
 - Introduisez et programmez un schéma d'Euler implicite (vous pouvez utiliser la méthodes des itérations de Newton pour résoudre le problème implicite). Etudiez l'évolution de l'énergie mécanique du pendule dans le cas sans frottement ni excitation en fonction du pas de temps avec $T_{fin} = 200\text{s}$. Que pouvez-vous dire sur la stabilité du schéma ?

3.4 Soumission du rapport et du code C++

- (a) Préparer le fichier du rapport en format pdf portant le nom `RapportPendule_Nom1_Nom2.pdf`, ainsi que le fichier source L^AT_EX `RapportPendule_Nom1_Nom2.tex`.
- (b) Préparer le fichier source C++ `Exercice3_Nom1_Nom2.cpp`.
- (c) Préparer le fichier script Matlab `Exercice3_Nom1_Nom2.m`.
- (d) Le lien de soumission se trouve dans la section du premier exercice sur notre site "Moodle" et peut directement être atteint en cliquant [ici](#).