数学検定　案内

● 概要

「数学検定」と「算数検定」は正式名称を「実用数学技能検定」といい，それぞれ 1 ～ 5 級と 6 ～ 11 級,「かず，かたち検定」の階級に相当します。数学・算数の実用的な技能（計算・作図・表現・測定・整理・統計・証明）を測る検定で，公益財団法人日本数学検定協会が実施している全国レベルの実力・絶対評価システムです。

● 階級の構成

	実用数学技能検定													
	算数検定							数学検定						
階級	かず・かたち検定	11級	10級	9級	8級	7級	6級	5級	4級	3級	準2級	2級	準1級	1級
目安となる学年	幼児	小学校1年程度	小学校2年程度	小学校3年程度	小学校4年程度	小学校5年程度	小学校6年程度	中学校1年程度	中学校2年程度	中学校3年程度	高校1年程度	高校2年程度	高校3年程度	大学程度・一般

1 ～ 5 級には，「1 次：計算技能検定」と「2 次：数理技能検定」があり，1 次も 2 次も同じ日に行います。はじめて受検するときは 1 次・2 次両方を受検します。

※6 ～ 11 級、「かず・かたち検定」には 1 次・2 次の区分はありません。同一検定日に同一の階級や複数の階級を志願することはできません。

● 受検資格

原則として受検資格は問いません。

● 受検方法

個人受検または団体受検のいずれかの方法で受検できます。個人受検は，全国の主要都市に設ける検定会場で 4 月・7 月・11 月（または 10 月）の年 3 回実施します。

当日の持ち物　※階級によって持ち物が異なります。

持ち物＼階級	1〜5級	6〜8級	9〜11級	かず・かたち検定
筆記用具	必須	必須	必須	必須
ものさし（定規）	2次検定のみ必須	必須	必須	
コンパス	2次検定のみ必須	必須		
分度器	2次検定のみ必須	必須		
電卓（算盤）	2次検定のみ持参してもよい			

2次：数理技能検定で使用できる電卓の種類　○一般的な電卓　○関数電卓　○グラフ電卓

※通信機能や印刷機能をもつ電卓は使用できません。また，携帯電話・電子辞書・パソコン等の電卓機能も使用できません。

● 合格基準

1〜5級の1次は全問題の70%程度、2次は全問題の60%程度です。

● 合格証

検定日から約40日後を目安に，受検者あてに合否結果を郵送します。

		送られる合格証
1〜5級	1次・2次検定ともに合格	**実用数学技能検定合格証**
	1次：計算技能検定のみに合格	**計算技能検定合格証**
	2次：数理技能検定のみに合格	**数理技能検定合格証**

● 各階級の詳細（準2級以上）

	階級	検定時間	出題数	目安となる学年	検定料
数学検定	1級	1次：60分 2次：120分	1次：7問 2次：2題必須・5題より2題選択	大学程度・一般	5,000円
	準1級			高校3年程度 （数学III程度）	4,500円
	2級	1次：60分 2次：90分	1次：15問 2次：2題必須・5題より3題選択	高校2年程度 （数学II・数学B程度）	4,000円
	準2級		1次：15問 2次：10問	高校1年程度 （数学I・数学A程度）	3,500円

目　次

■装幀　岡　孝治

本書のねらいと構成

本書は数学検定1級のなかでも，まずは1次検定（計算技能検定）に合格することにねらいを絞った対策本である。1次検定は必須問題7問を60分の試験時間内に解かねばならず，また，解答用紙には計算の過程は記さずに答えのみを書くから部分点は期待できない。正確で速い計算力が求められるだけでなく，定理や公式を正しく理解していることが重要である。

分野別に確実に力をつけるために，各章は次のように3段階構成になっている。

Step1　重要事項

重要な概念や定義，定理などを簡潔にまとめた。既習事項の再確認や本番直前の復習に役立ててほしい。

Step2　基本例題

基本的な例題とその解き方を示した。1次検定の試験本番では（答）だけを書くが，計算過程を理解せずにたどりつくことは不可能であるからしっかり理解してほしい。計算過程はできる限り省略せず示すようにしたが，脚註で補足したところもある。また，定理や公式などの式変形の根拠も脚註で解説した。

Step3　過去問題

実際に過去の数学検定で出題された問題を掲載した。力だめしとして，そして計算スピードも少し意識しながら挑戦してみてほしい。

付　録

巻末に過去問題1回分（1次・2次）を掲載した。特に初めて受検するときは1次と2次の両方を受ける必要があるので，受検前に問題の特徴や違いを把握しておくのが望ましい。

第0章 計算テクニック

1 高次方程式

Step1 重要事項

高次方程式 $P(x)=0$ を解くには，主に次の3つの手法を用いる．

a. 因数分解の公式を利用する
b. （x の2次式）$=X$ の形に置き換えて次数を下げる
c. 因数定理を用いて，$P(x)$ を1次または2次の積に直す

因数定理

整式 $P(x)$ が $x-a$ を因数にもつ $\iff P(a)=0$

整式 $P(x)$ が1次式 $ax-b$ を因数にもつ $\iff P\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$

例 $P(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ を解いてみよう．

解 1つの有理数解 $x=\dfrac{b}{a}$（a と b は互いに素で，a は自然数，b は整数）を見い出すには，$x=\pm\dfrac{P(x)\text{の定数項の正の約数}}{P(x)\text{の最高次の係数の正の約数}}$ の中から探せばよい．

$x=\pm\dfrac{5\text{の正の約数}}{2\text{の正の約数}}=\pm\dfrac{1,5}{1,2}$ より $x=\pm1,\pm5,\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{5}{2}$ を考えて

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)-7\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=-2-3+5=0$$

これにより

$$\begin{array}{r|rrrr} -\dfrac{1}{2} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 2 & -8 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 10)$$
$$= (2x + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

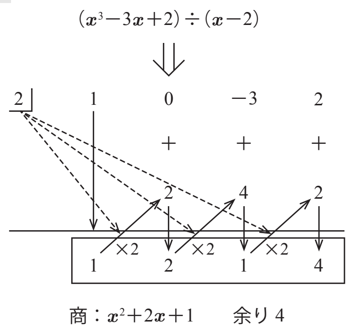
よって，$x = -\dfrac{1}{2}$，$2 \pm i$

右上の計算は，x の整式を 1 次式 $x - \alpha$ で割ったときの商と余りを求める方法で，「組立除法」と呼ばれる．たとえば，「$(x^3 - 3x + 2) \div (x - 2)$ の商と余りは？」ならば，割る数 $x - 2$ が 0 となる $x = 2$ と整数の係数 $1 \quad 0 \quad -3 \quad 2$ を

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}$$

と書き並べるところから始める．左から順に

1. 1 を下ろす ⇒ $\boxed{1}$
2. $\boxed{1} \times 2 \Rightarrow 2$
3. $0 + 2 \Rightarrow \boxed{2}$
4. $\boxed{2} \times 2 \Rightarrow 4$
5. $(-3) + 4 \Rightarrow \boxed{1}$
6. $\boxed{1} \times 2 \Rightarrow 2$
7. $2 + 2 \Rightarrow \boxed{4}$（余り）



のように計算すると，商と余りを簡単に求めることができる．高次方程式 $P(x) = 0$ を解く際，$P(\alpha) = 0$ となる α を見出して，組立除法を用いると，$P(x) = (x - \alpha)P_1(x) = 0$ と変形することができ，次数を下げられる．

Step 2　基本例題

例題　次の高次方程式を解け．

(1)　$2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$　　(2)　$3x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$

(3)　$x^4 - 4x + 3 = 0$

解答　方程式の左辺を $P(x)$ とおく．

(1)　$P(-2) = -16 - 4 + 26 - 6 = 0$ ㋐

$P(x)$ を $x + 2$ で割ると，商は $2x^2 - 5x - 3$

$$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x - 3) = (x + 2)(2x + 1)(x - 3) = 0$$

㋐ 有理数解の候補は $x = \pm\dfrac{-6 \text{ の正の約数}}{2 \text{ の正の約数}} = \pm\dfrac{1, 2, 3, 6}{1, 2}$

よって，$x=-2,-\dfrac{1}{2},3$ ……(答)

(2) $P\left(-\dfrac{2}{3}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{8}{27}\right)-4\cdot\dfrac{4}{9}+2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+4=0$

$P(x)$ を $3x+2$ で割ると，商は x^2-2x+2

$$P(x)=(3x+2)(x^2-2x+2)=0$$

よって，$x=-\dfrac{2}{3},1\pm i$ ……(答)

(3) $P(1)=1-4+3=0$

$P(x)$ を $x-1$ で割ると，商は $Q(x)=x^3+x^2+x-3$

$$P(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$$

さらに $Q(1)=1+1+1-3=0$ だから

$$Q(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$$

したがって

$$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$$

よって，$x=1$ (2 重解), $-1\pm\sqrt{2}i$ ……(答)

(1)
$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 2 & -1 & -13 & -6 \\
 & & -4 & 10 & 6 \\
\hline
 & 2 & -5 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$
商　$2x^2-5x-3$

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{2}{3} & 3 & -4 & 2 & 4 \\
 & & -2 & 4 & -4 \\
\hline
 & 3 & -6 & 6 & \boxed{0}
\end{array}$$
商　x^2-2x+2

(3)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\
 & & 1 & 1 & 1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$
商　x^2+2x+3

2　極形式

Step 1　重要事項

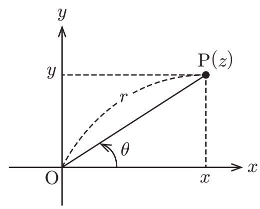
複素平面上で，0 でない複素数 $z=x+yi$ を表す点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と実軸の正の向きとのなす角を θ, $\overline{\mathrm{OP}}=|z|=r$ とすると

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

すなわち，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0)$ ……①

と表される．①のような表し方を，複素数 z の**極形式**という．r を z の絶対値，θ を z の**偏角**といい，$\arg z$ で表す．arg は argument の略である．

$$r=|z|,\quad \theta=\arg z$$



[1]　偏角　複素数 z の偏角は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が実軸の正の向きとなすどのような角でもよく，一般角で考えることもある．θ が z の 1 つの偏角なら

$$\theta+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

はすべて z の偏角であり，逆に，z のどの偏角もこの形で表せる．

　また，$z=0$ のとき偏角は定まらないので，$\arg 0$ は考えないことにする．さらに，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

だから　　$|\overline{z}|=|z|$　かつ　$\arg\overline{z}=-\arg z$

2 つの複素数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\, z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 　……②

のとき　$z_1=z_2 \iff r_2=r_1$ かつ $\theta_2=\theta_1+2n\pi\quad(n\in\mathbb{Z})$

[2]　極形式と乗法・除法　②をみたす 2 つの複素数 $z_1,\, z_2$ について

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\end{aligned}$$

より　　$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

すなわち　　$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$ 　……③

同様にして　　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$　　が成り立つ．

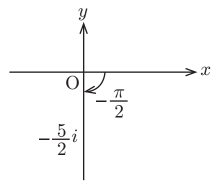
Step 2　基本例題

例題　次の複素数を極形式で表せ.

(1)　$z=-\dfrac{5}{2}i$　　　　(2)　$z=\dfrac{-5+i}{2-3i}$

解答　(1)　$z=-\dfrac{5}{2}i$

$=\dfrac{5}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$　　……(答)



(2)　$z=\dfrac{-5+i}{2-3i}=\dfrac{(-5+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$

$$=\frac{-13-13i}{13}=-1-i$$

よって，$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$　　……(答)

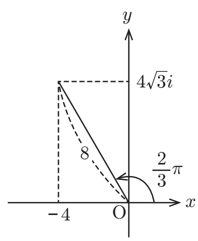
3　$\boldsymbol{n}$ 乗根

Step 1　重要事項

n を正の整数とする．複素数 $\alpha\,(\neq 0)$ に対して　　$z^n=\alpha$　　……①

をみたす複素数 z を α の **$\boldsymbol{n}$ 乗根**という．

$z^3=-4+4\sqrt{3}i$ をみたす複素数 z を求めてみよう．



$$|-4+4\sqrt{3}i|=\sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})^2}=8$$

$$\arg(-4+4\sqrt{3}i)=\frac{2}{3}\pi+2n\pi$$

だから　$-4+4\sqrt{3}i=8\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

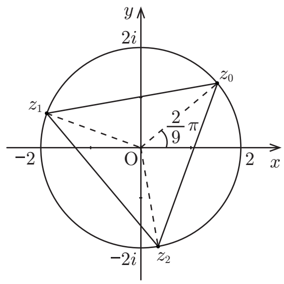
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ とおくと，
ド・モアブルの定理から，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta+i\ \sin 3\ \theta)=8\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値および偏角を比べて

$$r^3 = 8, \quad 3\theta = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$$

$$\therefore \quad r = 2, \quad \theta = \frac{2}{9}\pi + \frac{2n}{3}\pi$$



$0 \leq \theta < 2\pi$ では　$\theta = \frac{2}{9}\pi,\ \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi$

よって　$z_0 = 2\left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right),$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{8}{9}\pi + i\sin\frac{8}{9}\pi\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{14}{9}\pi + i\sin\frac{14}{9}\pi\right)$$

これらの3乗根は，複素平面上で点 O(0) を中心とし，半径 $\sqrt[3]{8} = 2$ の円周を3等分した点 (半径2の円に内接する正3角形の3頂点) になる．同様に，

$\alpha = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ のとき，①をみたす n 乗根 z は n 個あり

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left\{\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

となる．複素平面上で，点 z_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ は点 O(0) を中心とし，半径 $\sqrt[n]{r_0}$ の円周を n 等分した点になる．

Step 2　基本例題

例題　次の複素数を求めよ．

(1)　i の平方根　　　(2)　$-2 + 2\sqrt{3}i$ の4乗根

解答　(1)　$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$z^2 = i$ をみたす z は2個あり

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad (k = 0, 1)$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$z_1 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$ ……(答)

(2)　$-2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$z^4=-2+2\sqrt{3}i$ をみたす z は4個あり

$$z_0=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_2=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$ ……(答)

4　3次方程式の一般的解法

Step1　重要事項

ここでは，3次方程式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0\ (a_0\neq 0)$ ……①

について学ぶ．係数は（最初は）整数とする．

①が有理数の解をもたないときを考える．①の両辺を a_0 で割って

$$x^3+ax^2+bx+c=0\ \left(a=\frac{a_1}{a_0},\quad b=\frac{a_2}{a_0},\quad c=\frac{a_3}{a_0}\right)$$

の形になるが，x^2 の項を消去するために，$x=y-\dfrac{a}{3}$ とおくと，

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

これを整理し，$p=-\dfrac{a^2}{3}+b,\ q=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{ab}{3}+c$ とおくと

$$y^3+py+q=0$$ ……②

となる．さらに，$y=u+v$ とおくと　$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$

$$u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)=0$$

となるので $\begin{cases} u^3+v^3+q=0 & \cdots\cdots③ \\ 3uv+p=0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$

を満たす u と v の値を求めることができれば，$y=u+v$ から y, さらに $x=y-\dfrac{a}{3}$ から①の解 x が得られる．実際に u,v は③，④からそれぞれ

$$u^3+v^3=-q, \qquad u^3v^3=(uv)^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3=-\frac{p^3}{27}$$

となるので，u^3 と v^3 は t の2次方程式 $(t-u^3)(t-v^3)=0$ の解，すなわち

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

の解として得られる．⑤を①の**分解方程式**と呼ぶ．さて，⑤を解くと

$$t=\frac{1}{2}\left(-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right)=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

となるので，$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=r$ とすると，$u^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{r},\quad v^3=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{r}$

ここで，$u^3=A^3$ (A は定数) を解くと

$$(u-A)(u^2+Au+A^2)=0 \quad \text{から，} u=A,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}A$$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\overset{\text{オメガ}}{\omega}$ とおくと，$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となるので $u^3=A^3$ の3解は $u=A,\ \omega A,\ \omega^2 A$ となる．

したがって，$1+\omega+\omega^2=0$ に注意すると ③, ④を満たす u,v の値は

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{r}}, \qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{r}}$$

$$u=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{r}}, \qquad v=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{r}}$$

$$u=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{r}}, \qquad v=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{r}}$$

の3組となる．これを $y=u+v$ に代入すると，下に示した3組の y, すなわち②の3解が得られ，①の3解が求められる．

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{r}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{r}} \\ y_2 = \omega\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{r}} + \omega^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{r}} \\ y_3 = \omega^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{r}} + \omega\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{r}} \end{cases}$$

Step 2　基本例題

例題　次の3次方程式を解け．

(1)　$x^3+6x+2=0$　　　(2)　$x^3+3x^2-3=0$

解答　(1)　$\boxed{x=u+v\text{ とおく}}$ ㋐ と

$$(u+v)^3+6(u+v)+2=0$$

$$u^3+v^3+2+(u+v)(3uv+6)=0$$

$$\begin{cases} u^3+v^3+2=0 \\ 3uv+6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3+v^3=-2 \\ uv=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=-2 \\ u^3v^3=(-2)^3=-8 \end{cases}$$

を満たす u^3 と v^3 は $t^2+2t-8=0$ の2解である．

$$(t-2)(t+4)=0 \quad \text{から，} \quad t=2,-4$$

したがって，1組の u,v は

$$u=\sqrt[3]{2},\ v=\sqrt[3]{-4}=-\sqrt[3]{4}$$

よって，求める解 $x=x_i\ (i=1,2,3)$ は

$$\begin{cases} x_1=u+v=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4} \\ x_2=\omega u+\omega^2 v=\sqrt[3]{2}\omega-\sqrt[3]{4}\omega^2 \\ x_3=\omega^2 u+\omega v=\sqrt[3]{2}\omega^2-\sqrt[3]{4}\omega \end{cases} \left(\text{ただし},\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$\boxed{x=y-1\text{ とおく}}$ ㋑ と，$(y-1)^3+3(y-1)^2-3=0$ から，$y^3-3y-1=0$

$y=u+v$ とおくと，$(u+v)^3-3(u+v)-1=0$

$$u^3+v^3-1+(u+v)(3uv-3)=0$$

$$\begin{cases} u^3+v^3-1=0 \\ 3uv-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3+v^3=1 \\ uv=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=1 \\ u^3v^3=1 \end{cases}$$

を満たす u^3 と v^3 は，$t^2-t+1=0$ を解いて

$$t=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \qquad (\text{複号同順})$$

㋐ x^2 の項はないので，このまま $x=u+v$ とおける．
㋑ x^2 の項をなくすために，$x=y-1$ とおく．

よって

$$u^3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \qquad v^3 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

これを満たす1組の u, v は，ド・モアブルの定理から

$$u = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9},\ v = \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$$

より，求める y の値は

$$\begin{aligned}
y_1 &= u + v = 2\cos\frac{\pi}{9} \\
y_2 &= \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) \\
&\quad + \left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right\} \\
&= \cos\frac{7}{9}\pi + i\sin\frac{7}{9}\pi + \cos\left(-\frac{7}{9}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{9}\pi\right) \\
&= 2\cos\frac{7}{9}\pi
\end{aligned}$$

同様に，$y_3 = \omega^2 u + \omega v = 2\cos\dfrac{13}{9}\pi$

よって，

$$x_1 = 2\cos\frac{\pi}{9} - 1, \quad x_2 = 2\cos\frac{7}{9}\pi - 1, \quad x_3 = 2\cos\frac{13}{9}\pi - 1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

5　三角関数

Step1　重要事項

2つの角の和または差の三角関数の値を求めるには，次の加法定理を用いる．

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ④$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cdots\cdots⑥$$

①，③，⑤で $\alpha=\beta=\theta$ とおくと，次の 2 倍角の公式が得られる．

2 倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \qquad \cdots\cdots⑦\\ \tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

特に，$\tan\theta=m$ とおくとき，次は公式として覚えておくとよい．

$$\begin{cases}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\tan\theta\cdot\cos^2\theta=2\tan\theta\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2m}{1+m^2}\\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}-1=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}\end{cases}$$

余弦の 2 倍角の公式⑦から，次のようにして半角の公式が得られる．

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ で，θ の代わりに $\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$

よって，$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

半角の公式

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2},\qquad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\qquad \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

さらに，$3\theta=2\theta+\theta$ を用いて，次の 3 倍角の公式が得られる．

3 倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,\qquad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

例

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

$$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

次に，①＋②，①－②，③＋④，③－④ を考えることにより，次が得られる．

積を和・差に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \quad \cdots\cdots ⑧$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

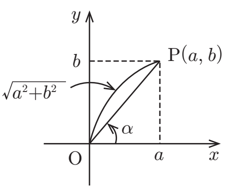
和・差を積に直す公式

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \cdots\cdots ⑨$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

例　⑧から $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$A+B=\alpha, A-B=\beta$ とおくと $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ であり，⑨ が導かれる．

　三角関数 $a\sin\theta+b\cos\theta$ は，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を xy 座標平面にとり，$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ および x 軸の正の向きから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)$ に向かって測った角 α に着目すると，



$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \qquad \left(\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

この公式を，三角関数の**合成公式**という．

Step 2　基本例題

例題 1　x, y の連立方程式

$$\begin{cases} 13\ \cos x+\sqrt{3}\sin x\ = y\cos x \\ \sqrt{3}\ \cos x+11\sin x\ = y\sin x \end{cases}$$

の 2 組の解を (x_1, y_1), (x_2, y_2)（ただし，$0 \leqq x_1 \leqq x_2 < \pi$）とするとき，$x_1$, y_1, x_2, y_2 の値を求めよ．

解答

$$\begin{cases} 13\ \cos x+\sqrt{3}\sin x\ = y\cos x & \cdots\cdots① \\ \sqrt{3}\ \cos x+11\sin x\ = y\sin x & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$① \times \sin x - ② \times \cos x$ ㋐ より

$$\sin x(13\cos x+\sqrt{3}\sin x)-\cos x(\sqrt{3}\cos x+11\sin x)=0$$

$$2\sin x\cos x-\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=0 \qquad \therefore\quad \tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\sqrt{3}$$

$0 \leqq x < \pi$ のとき $0 \leqq 2x < 2\pi$ だから

$$2x=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi \qquad \therefore\quad x=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi$$

①，②より，$0 \leqq x_1 < x_2 < \pi$ だから

$$x_1=\frac{\pi}{6},\ y_1=14,\ x_2=\frac{2}{3}\pi,\ y_2=10 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

例題 2　実数 x, y が $x^2+4xy+5y^2-3=0$ を満たしている．このとき，$2x^2+xy+3y^2$ のとりうる値の範囲を求めよ．

解答　$2x^2+xy+3y^2=P$ とおくと

$$8x^2+4xy+12y^2 \overset{㋑}{=} 4P \qquad \cdots\cdots①$$

㋐ 連立方程式の未知数 x, y のうち，簡単に消去できる y を消去．

一方，条件式を

$$x^2+4xy+5y^2=3 \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく．① − ②から，$7x^2+7y^2=4P-3$, すなわち

$$7(x^2+y^2)=4P-3 \qquad \cdots\cdots ③$$

ここで，極座標 $(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて②上の点を表すと

$$(r\cos\theta)^2+4(r\cos\theta)(r\sin\theta)+5(r\sin\theta)^2=3$$

$$(\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta)r^2=3$$

よって，

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{3}{\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta} \\ &\overset{ウ}{=} \frac{3}{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+2\sin 2\theta+5\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} \\ &= \frac{3}{3+2(\sin 2\theta-\cos 2\theta)} \overset{エ}{=} \frac{3}{3+2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ だから

$$\frac{3}{3+2\sqrt{2}}\leqq r^2\leqq\frac{3}{3-2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad 3(3-2\sqrt{2})\leqq r^2\leqq 3(3+2\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots ④$$

③から，$7r^2=4P-3$ だから，　$P=\dfrac{7r^2+3}{4}$

よって，④から

$$\frac{3(11-7\sqrt{2})}{2}\leqq P\leqq\frac{3(11+7\sqrt{2})}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

参考　条件式 C_1：$x^2+4xy+5y^2-3=0$ も，値の範囲を考えた C_2：$2x^2+xy+3y^2=P$ もいずれも x, y についての2次式であり，これらを満たす点 $(x,\ y)$ が描く図形は 2次曲線[オ]

[イ] 条件式 $x^2+4xy+5y^2=3$ の xy の係数4に着目して，$4P$ を考える．

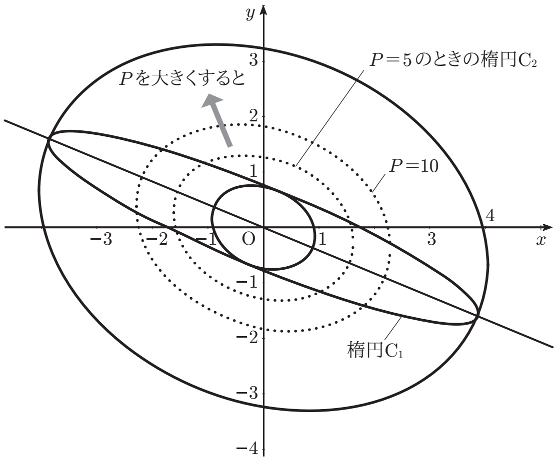
[ウ] 2倍角および半角公式より．

[エ] 合成公式より．

[オ] 2次曲線については，姉妹書『合格ナビ！　数学検定1級1次 線形代数』で詳しく学ぶ．ここでは2次曲線の描き方を既知として解説する．

である．2 次曲線には放物線や双曲線も含まれるが，本問の C_1, C_2 はいずれも下図のような楕円である．ここで楕円 C_2 の P は定数とみなし，例として $P = 5, 10$ の場合を点線で描いた．（容易に推測できると思うが,）P が大きくなると楕円 C_2 も大きくなる．

さて本問は，点 $(x,\ y)$ が条件を満たしながら変化するとき，P の値がどのような範囲を動くかを求める問題であった．言い換えると，楕円 C_1 と楕円 C_2 が共有点をもつような範囲内で P が最大あるいは最小になるときを考えることにほかならない．下図において P の値を変化させてみると，それはそれぞれ楕円 C_2 が楕円 C_1 に外接，内接するときであるとわかる．



また，　$P = \dfrac{3(11 \pm 7\sqrt{2})}{2}$ のとき

$$r^2 = 3(3 \pm 2\sqrt{2}) \quad \text{かつ} \quad \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \mp 1 \quad (\text{複号同順})$$

6　漸化式 (1)

Step 1　重要事項

数列 $\{a_n\}$ を隣りあったいくつかの項の間に成り立つ関係式で定義したものを，**数列の帰納的定義**といい，その関係式を数列の**漸化式**という．

等差数列，等比数列の帰納的定義

等差数列：$a_{n+1}-a_n=d\quad(n\geqq 1,\ d$ は定数$)$
等比数列：$a_{n+1}=ra_n\quad(n\geqq 1,\ r$ は定数$)$

漸化式の型（タイプ）によって，一般式への変形の方法は異なる．主なものを次に挙げる．

2項間の漸化式

a.　$a_{n+1}=a_n+f(n)\quad(n\geqq 1)$　　(階差型)

この式の n に $1,2,\ldots,n-1$ を代入して，辺々加えると

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq 2)$$

b.　$a_{n+1}=pa_n+q\qquad(n\geqq 1,\ p\neq 0,1,\ q\neq 0)$

a_n，a_{n+1} を t とおいて，$\boxed{t=pt+q}$ [ア] を解くと，$t=\dfrac{q}{1-p}$

この t の値を漸化式の両辺から引くと　$a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p}=p\left(a_n-\dfrac{q}{1-p}\right)$

$$a_n-\frac{q}{1-p}=\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}\qquad\therefore\quad a_n=\frac{q}{1-p}+\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

c.　$a_{n+1}=pa_n+f(n)\qquad(n\geqq 1,\ p\neq 0,1)$

両辺を p^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+g(n)\qquad\left(g(n)=\frac{f(n)}{p^{n+1}}\ \text{とおく}\right)$$

$\dfrac{a_n}{p^n}=b_n$ とおくと $b_{n+1}=b_n+g(n)$ となり，タイプa.に帰着する．

[ア] これを特性方程式という．

d.　$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$　$(n \geqq 1,\ q \neq 0,\ r \neq 0,\ ps - qr \neq 0)$

a_n, a_{n+1} を t とおいて，$t = \dfrac{pt+q}{rt+s}$ を解く．整理すると t についての 2 次方程式 $rt^2 + (s-p)t - q = 0\ (r \neq 0)$ となり，この特性方程式の 2 つの解を α, β とする．

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき;

漸化式の両辺から α を引いて

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \alpha = \frac{(p - r\alpha)a_n + q - s\alpha}{ra_n + s}$$

$r\alpha^2 + (s-p)\alpha - q = 0$ から $q - s\alpha = -\alpha(p - r\alpha)$ であるから

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{(p - r\alpha)(a_n - \alpha)}{ra_n + s} \qquad \cdots\cdots①$$

同様に，

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(p - r\beta)(a_n - \beta)}{ra_n + s} \qquad \cdots\cdots②$$

①÷②から $\dfrac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = \dfrac{p - r\alpha}{p - r\beta} \cdot \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$

したがって，$\dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = \dfrac{p - r\alpha}{p - r\beta} b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は等比数列となる．これの一般式を求めれば，$\{a_n\}$ の一般式も得られる．

(ii) $\alpha = \beta$ のとき;

①，②は一致する．①の両辺の逆数をとって $\dfrac{1}{a_n - \alpha} = c_n$ とおくことにより，数列 $\{c_n\}$ の漸化式にもち込む．

Step 2　基本例題

例題　数列 $\{a_n\}$ において，次の関係があるとき，それぞれの一般項を求めよ．

(1)　$a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + n(n-1)$　$(n \geqq 2)$

(2)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 3}$　$(n \geqq 1)$

(3)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{2a_n + 1}$　$(n \geqq 1)$

解答 (1) 条件式から $a_{n+1}-a_n=n(n+1)$ で，$n \geqq 2$ のとき

$$\boxed{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)}^{㋑} \overset{㋒}{=} 2+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$=\frac{n^3-n+6}{3}=\frac{1}{3}(n+2)(n^2-2n+3)$$

$a_1=2$ だから，この式は $n=1$ でも成り立つ．よって，

$$a_n=\frac{1}{3}(n+2)(n^2-2n+3) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{a_n}=1+\frac{3}{a_n}$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+1$

$$\boxed{b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)}^{㋓}$$

したがって，数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $b_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}=1$，公比が3の等比数列だから

$$b_n+\frac{1}{2}=1\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore \quad b_n=\frac{2\cdot 3^{n-1}-1}{2}$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{2\cdot 3^{n-1}-1}$ $\qquad \cdots\cdots(答)$

(3) 特性方程式 $t=\dfrac{t+2}{2t+1}$ を解くと，$t^2=1$ より $t=\pm 1$．これより

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}-1=-\frac{a_n-1}{2a_n+1}$$

$$a_{n+1}+1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}+1=\frac{3(a_n+1)}{2a_n+1}$$

㋑ $a_n-a_{n-1}=n(n-1)$ から $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)$ としてはいけない．

㋒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ を用いた．

㋓ 特性方程式 $t=3t+1$ を解いて $t=-\dfrac{1}{2}$

したがって，$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$

$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n$

$b_1=\dfrac{a_1-1}{a_1+1}=\dfrac{1}{3}$ より　$b_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

よって，$a_n \overset{㋔}{=} \dfrac{1+b_n}{1-b_n}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{3^n-(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$　……(答)

7　漸化式 (2)

Step1　重要事項

3 項間の漸化式

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\ (p\neq 0,\ q\neq 0)$$

漸化式の a_{n+2}，a_{n+1}，a_n をそれぞれ $t^2, t, 1$ におきかえた t の 2 次方程式 $t^2-pt-q=0$ を考える．この特性方程式の 2 解を α，β とすると，解と係数の関係から $\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$ であり，一般項 a_n は次のいずれかの形になる．

(i) $\alpha\neq\beta$のとき，$a_n=A\cdot\alpha^{n-1}+B\cdot\beta^{n-1}$

(ii) $\alpha=\beta$のとき，$a_n=(An+B)\cdot\alpha^{n-1}$

（A，B は定数）

(i)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+2}-\alpha a_{n+1}&=pa_{n+1}+qa_n-\alpha a_{n+1}=(p-\alpha)a_{n+1}+qa_n\\&=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\end{aligned}$$

これより，$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$　……①

同様に，　$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$　……②

① − ② から，$(\beta-\alpha)a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$

よって，$a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\}$

㋔ $(a_n+1)b_n=a_n-1$ を a_n について整理した．

(ii)　$\alpha = \beta$ のとき

①，②は一致し，$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}$ となるので，両辺を $\alpha^{n+1} (\neq 0)$ で割ることにより a_n を求めることができる．

連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

$\{a_n\}$ だけについての3項間の漸化式を導くと，次のようになる．

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= pa_{n+1} + qb_{n+1} = pa_{n+1} + q(ra_n + sb_n) \\ &= pa_{n+1} + qra_n + s(a_{n+1} - pa_n) = (p+s)a_{n+1} - (ps - qr)a_n \end{aligned}$$

あるいは，数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が公比 β の等比数列になるように考えてもよい．

$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ から

$$\begin{aligned} (pa_n + qb_n) + \alpha(ra_n + sb_n) &= \beta(a_n + \alpha b_n) \\ (p + \alpha r)a_n + (q + \alpha s)b_n &= \beta a_n + \alpha\beta b_n \end{aligned}$$

これより，$p + \alpha r = \beta$ かつ $q + \alpha s = \alpha\beta$ から α, β の値を求める．

Step 2　基本例題

例題　(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \ (n \geq 1), a_1 = 1, a_2 = 8$ で定義されるとき，一般項 a_n を求めよ．

(2) 2つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が関係式

$$x_1 = 11, \quad y_1 = 1, \quad x_{n+1} = 6x_n + 5y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n \ (n \geq 1)$$

で定められるとき，一般項 x_n, y_n を求めよ．

解答　(1) 特性方程式 $t^2 - 4t + 4 = 0$ を解くと，$(t-2)^2 = 0$ より $t = 2$（2重解）．

これより，$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 8 - 2 \cdot 1 = 6$，公比2の等比数列だから

$$a_{n+1} - 2a_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{3}{2}}$ ㋐

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列だから，

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{3}{2} = \frac{3n-2}{2}$$

よって，$a_n = (3n-2)\cdot 2^{n-1}$ ……(答)

(2)　$x_{n+1} = 6x_n + 5y_n$，$y_{n+1} = x_n + 2y_n$

y_n を消去して x_n だけの漸化式を導くと

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 6x_{n+1} + 5y_{n+1} = 6x_{n+1} + 5(x_n + 2y_n) \\ &= 6x_{n+1} + 5x_n + 2(x_{n+1} - 6x_n) = 8x_{n+1} - 7x_n \end{aligned}$$

すなわち，$x_{n+2} = 8x_{n+1} - 7x_n$

特性方程式 $t^2 = 8t - 7$ を解いて，$t = 1, 7$

これを用いて変形すると，

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 7(x_{n+1} - x_n) \quad \cdots\cdots ①$$

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} = x_{n+1} - 7x_n \quad \cdots\cdots ②$$

①から，数列 $\{x_{n+1} - x_n\}$ は初項 $x_2 - x_1 = 71 - 11 = 60$，公比 7 の等比数列だから

$$x_{n+1} - x_n = 60\cdot 7^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

②から，数列 $\{x_{n+1} - 7x_n\}$ は初項 $x_2 - 7x_1 = 71 - 77 = -6$ の定数数列だから

$$x_{n+1} - 7x_n = -6 \quad \cdots\cdots ④$$

③ − ④ から $6x_n = 60\cdot 7^{n-1} + 6$. よって，$x_n = 10\cdot 7^{n-1} + 1$

関係式より

$$\begin{aligned} 5y_n &= x_{n+1} - 6x_n \\ &= (10\cdot 7^n + 1) - 6(10\cdot 7^{n-1} + 1) = 10\cdot 7^{n-1} - 5 \end{aligned}$$

よって，$y_n = 2\cdot 7^{n-1} - 1$

以上より，

$$x_n = 10\cdot 7^{n-1} + 1, \qquad y_n = 2\cdot 7^{n-1} - 1$$ ……(答)

㋐ $\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} - b_n = \dfrac{3}{2}$（=一定）

8 二項定理

Step1 重要事項

二項定理

任意の自然数 n に対して，

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$$
$$= {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

展開式の各項の係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ を二項係数という．${}_n\mathrm{C}_r$ を $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ と書くこともある．これは n 個のものから r 個をとる組合せの数に等しい．また，展開式における $(r+1)$ 番目の項 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**という．特に，

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \qquad \cdots\cdots①$$

からは，いろいろな有用な等式を導くことができる．

$x = 1$ とおくと ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

$x = -1$ とおくと ${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$

①の両辺を x で微分して

$$n(1+x)^{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 x + 3{}_n\mathrm{C}_3 x^2 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n x^{n-1}$$

$x = 1$ とおくと ${}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n = n \cdot 2^{n-1}$

Step2 基本例題

例題 (1) $\dfrac{1 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_3 + \cdots + 10 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_{10}}{{}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 + {}_{10}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10}}$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x+2)^k$ を展開したときの x の係数を求めよ．

解答 (1) k が自然数のとき

$$k \cdot {}_{10}\mathrm{C}_k = k \cdot \frac{10!}{k!(10-k)!} = \frac{10 \cdot 9!}{(k-1)!\{9-(k-1)\}!} = 10 \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-1}$$

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot {}_{10}\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{10} 10 \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-1} \\
&= 10({}_9\mathrm{C}_0 + {}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_9\mathrm{C}_9) \\
&= 10(1+1)^9 = 10 \cdot 2^9 = 5 \cdot 2^{10}
\end{aligned}
$$

また，分母 $= (1+1)^{10} = 2^{10}$

よって，与式 $= \dfrac{5 \cdot 2^{10}}{2^{10}} = 5$ ……(答)

(2)　$(x+2)^k = {}_k\mathrm{C}_0 \cdot 2^k + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 2^{k-1}x + {}_k\mathrm{C}_2 \cdot 2^{k-2}x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x+2)^k$ の展開式における x の係数は，

$$
\sum_{k=1}^{n} {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}\ (\boxed{= S_n\text{とおく}}^{㋐})
$$

$$
\begin{array}{rllllll}
S_n & = 1 + 2\cdot & 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots & & + n \cdot 2^{n-1} & \\
2S_n & = & 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots & + (n-1) \cdot 2^{n-1} & & + n \cdot 2^n
\end{array}
$$

辺々を引くと，

$$
\begin{aligned}
-S_n &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n \\
&= \frac{2^n - 1}{2-1} - n \cdot 2^n = -(n-1) \cdot 2^n - 1
\end{aligned}
$$

よって，求める x の係数は

$$
S_n = (n-1) \cdot 2^n + 1 \qquad \cdots\cdots\ (\text{答})
$$

Step 3　過去問題

問題 1　次の連立方程式を複素数の範囲で解きなさい．

$$
\begin{cases}
x^3 + xy + y^3 = 11 \\
x^3 - xy + y^3 = 7
\end{cases}
$$

㋐ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot r^{k-1}\ (r \neq 0,\ 1)$ は $S_n - rS_n$ を考えることにより求める．

解答

$$\begin{cases} x^3+xy+y^3=11 & \cdots\cdots① \\ x^3-xy+y^3=7 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

とする．

①＋②より $2x^3+2y^3=18$，すなわち $x^3+y^3=9$　……③

(①－②)÷2 より $xy=2$，すなわち $x^3y^3=8$　……④

③，④より x^3, y^3を解にもつ2次方程式は $t^2-9t+8=0$

これを解くと $t=1,8$

よって $(x^3,y^3)=(1,8)$，$(8,1)$

$(x^3,y^3)=(1,8)$ のとき，連立方程式 $x^3=1$, $xy=2$ を解いて

$$(x,y)=(1,2), \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, -1\mp\sqrt{3}i\right) \qquad \text{（複号同順）}$$

$(x^3,y^3)=(8,1)$ のとき，連立方程式 $x^3=8$, $xy=2$ を解いて

$$(x,y)=(2,1), \left(-1\pm\sqrt{3}i, \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right) \qquad \text{（複号同順）}$$

以上より

$$(x,y)=(1,2),(2,1),\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},-1\mp\sqrt{3}i\right),\left(-1\pm\sqrt{3}i,\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)$$

（複号同順）　……（答）

解説　次を利用して，まず x^3, y^3の値を求める．

解と係数の関係　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α,β とするとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

問題 2　$(1+x)^n$ の展開式を $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ とするとき，次の値を求めなさい．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{c_k}{k+1}$$

解答　二項係数を $\dbinom{n}{k}\left(=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right)$ で表すと

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{c_k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\times\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^{k+1}$$

$$=-\frac{1}{n+1}\left\{\binom{n+1}{0}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^{k+1}-\binom{n+1}{0}\right\}$$

……①

ここで

$$(1+x)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k=\binom{n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k$$

$$=\binom{n+1}{0}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^{k+1}$$

に $x=-1$ を代入して

$$0=\binom{n+1}{0}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^{k+1}$$

よって

$$①=-\frac{1}{n+1}\times\left\{-\binom{n+1}{0}\right\}=\frac{1}{n+1}$$

……（答）

解説　次に示す**二項定理**を用いる．

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}c_kx^ky^{n-k}\qquad\left(c_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)$$

（$\binom{n}{k}$ を**二項係数**という）

二項係数について，次が成り立つ．

$$\binom{n}{k}=\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

第 1 章 極限

1 数列の極限

Step1 重要事項

無限数列 $\{a_n\}$ において，n が限りなく大きくなるとき，その極限は次のいずれかになる．

a. 収束　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　(一定の値 α に収束)

b. 発散
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty & \text{(正の無限大に発散)} \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty & \text{(負の無限大に発散)} \\ \text{振動} & \text{(極限はない)} \end{cases}$$

数列の極限値の性質

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$（$c$ は定数）

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$（複号同順）

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$（$\beta \neq 0$）

さらに，数列の極限と大小関係については，次の性質が成り立つ．

- 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ において，$a_n \leq b_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \Longrightarrow \alpha \leq \beta$$

- 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ において，$a_n \leq b_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ において，$a_n \leq b_n \leq c_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \Longrightarrow \{b_n\} \text{ は収束して } \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

重要な無限数列についてまとめておこう．

a.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k\ (k \neq 0)$

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 0 & (k < 0) \end{cases}$$

b.　無限等比数列 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & (|r| < 1) \\ \text{振動（極限はない）} & (r \leq -1) \end{cases}$$

c.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n$

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = \begin{cases} \infty & (r \geq 1) \\ 0 & (|r| < 1) \\ \text{振動（極限はない）} & (r \leq -1) \end{cases}$$

Step 2　基本例題

例題　次の極限を調べよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2+8}{5n^2-3n+1}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2-n}{3+\sqrt{n}}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-4)^n-3}{2^n+1}$　　(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 3n}{n}$

解答　(1) $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+8}{5n^2-3n+1}}$ ㋐ $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{8}{n^2}}{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\frac{3}{5}$ ……(答)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{3+\sqrt{n}}=\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\frac{3}{\sqrt{n}}+1}}$ ㋑ $=-\infty$ ……(答)

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n-3}{2^n+1}=\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$ ㋒

よって，振動する ……(答)

(4) $|\sin 3n|\leq 1$ であるから　$-\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{\sin 3n}{n}\leq\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ であるから ……(答)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 3n}{n}=0^{㋓}$$

2　無限級数

Step1　重要事項

無限数列 $\{a_n\}$ の各項を，記号 $+$ で結んだもの

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

を**無限級数**（または単に**級数**）といい，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ または $\sum a_n$ と書く．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

㋐ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の極限 $\Longrightarrow$ 分母の最高次の項で分子・分母を割る．

㋑ $n\to\infty$ のとき，分子 $\to-\infty$，分母 $\to 1$．

㋒ $n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0$，$(-2)^n$ は振動．

㋓ はさみうちの原理．

を無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 部分和という．

無限級数の収束・発散

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$（有限確定値）のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ と書く．収束しない級数は発散するという．

2 つの無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束し，和がそれぞれ α, β であるとき，定数 p, q について

$$\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n + qb_n) = p\sum_{n=1}^{\infty} a_n + q\sum_{n=1}^{\infty} b_n = p\alpha + q\beta\ (\text{収束})$$

また，次は無限級数の収束・発散について重要である．

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$（収束するための必要条件）
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

特に，無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられた無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + \cdots$$

を初項 a，公比 r の**無限等比級数**という．

無限等比級数の収束・発散

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a \neq 0)$ は，

- $|r| < 1$ のとき収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散する

Step 2　基本例題

例題　次の級数の収束・発散を調べ，収束するものについては和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$

解答　(1) $\displaystyle\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\overset{\text{㋐}}{=}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

よって，収束し，和は $\dfrac{1}{6}$　　……(答)

(2) $\displaystyle\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}$ ㋑ $\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

初項 $-\dfrac{1}{2}$, 公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数である．$|\,公比\,|=\dfrac{1}{4}<1$ であるから収束し，和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{2}{3}$$

……(答)

㋐ 部分分数へ分解した．

㋑ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^5+\cdots$．初項は $-\dfrac{1}{2}$, 公比は $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

(3)
$$S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$$
$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

辺々を引いて

$$\frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$
$$= \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$ かつ $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0}$ ㋒ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}S_n = 2 \qquad \lim_{n\to\infty}S_n = 4$$

よって，収束し，和は 4　……(答)

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$

よって，発散する．　……(答)

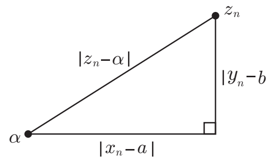
3　複素数列の極限と無限級数

Step1　重要事項

複素数を項とする数列 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ について考える．

[1] 数列の極限

複素数を項とする無限数列 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ を**複素数列**という．これを $\{z_n\}$ で表す．数列 $\{z_n\}$ において，n を十分に大きくするとき，z_n が 1 つの定まった複素数 α に限りなく近づくとき，数列 $\{z_n\}$ は α に**収束する**といい，これを $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n = \alpha$ あるいは $z_n \to \alpha\ (n\to\infty)$ のように表す．z_n が α に限りなく近づくという



㋒ 数列 $\{2^n\}$ は初項 2, 公比 2 の等比数列である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形であるが，2^n の方が n よりも無限大に発散する速度が圧倒的に大きいため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ と理解しよう．

のは，点 z_n と α の距離 $|z_n-\alpha|$ が限りなく0に近づくことである．すなわち $\lim_{n\to\infty}|z_n-\alpha|=0$ である．$z_n=x_n+y_ni,\ \alpha=a+bi$ とするときは

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}z_n=\alpha &\iff \lim_{n\to\infty}(x_n+y_ni)=a+bi\\ &\iff \lim_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim_{n\to\infty}y_n=b\end{aligned}$$

である．また，数列 $\{z_n\}$ が収束しないとき，$\{z_n\}$ は**発散する**という．

特に，発散する数列 $\{z_n\}$ について $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ であるとき，$\{z_n\}$ は ∞ **に発散する**といい，$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$ あるいは $z_n\to\infty\ (n\to\infty)$ と表す．

[2] 無限級数

複素数を項とする無限数列 $\{z_n\}$ についても実数列と同様に，「部分和」「無限級数」「無限級数の収束・発散」の意味を定める．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ において，$z_n=x_n+y_ni$ とすると，次が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=a+bi \iff \sum_{n=1}^{\infty}x_n=a,\ \sum_{n=1}^{\infty}y_n=b$$

Step 2　基本例題

例題　(1) $r>1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\cos x+i\sin x}{r}\right)^k$ を求めよ．

(2) $r>1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{r^k}$ を求めよ．

解答　(1) $z=\dfrac{\cos x+i\sin x}{r}$ とおくと，数列 $\{z^k\}\ (k=0,1,2,\ldots)$ の第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\quad(n\geqq 1)$$

$r>1$ であるから $|z|\overset{㋐}{=}\dfrac{1}{r}<1$

したがって　$S_n=\dfrac{1-z^n}{1-z}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n-\frac{1}{1-z}\right|\overset{㋑}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^n}{|1-z|}=0$$

㋐ $|z|=\dfrac{|\cos x+i\ \sin x|}{|r|}=\dfrac{1}{r}$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} = \frac{r}{(r-\cos x) - i\sin x}$$

$$= \frac{r\{(r-\cos x)+i\sin x\}}{\{(r-\cos x)-i\sin x\}\{(r-\cos x)+i\sin x\}}$$

$$\overset{㋒}{=} \frac{r(r-\cos x)+ir\sin x}{r^2-2r\cos x+1}$$

すなわち，求める和は

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{r(r-\cos x)}{r^2-2r\cos x+1} + i\frac{r\sin x}{r^2-2r\cos x+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k \overset{㋓}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{r^k} + i\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{r^k}\right)$$

であるから，(1) の結果から

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{r^k} = \frac{r(r-\cos x)}{r^2-2r\cos x+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

4　関数の不定形の極限

Step1　重要事項

一般に，$\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ であるとき

a. $\lim_{x\to a} kf(x) = kb$　（k は定数）

b. $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\} = b\pm c$　（複号同順）

c. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$

d. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$　（ただし，$g(x)\neq 0$, $c\neq 0$）

㋑ $\left|S_n - \dfrac{1}{1-z}\right| = \left|\dfrac{-z^n}{1-z}\right| = \dfrac{|z^n|}{|1-z|} = \dfrac{|z|^n}{|1-z|}$

㋒（1 行上の分母）$= (r-\cos x)^2 + \sin^2 x$

㋓ ド・モアブルの定理 $(\cos x + i\sin x)^k = \cos kx + i\sin kx$

が成り立つ．$x \to a$ の代わりに $x \to \infty$，$x \to -\infty$ としても同様に成立する．

しかし，$\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x}{3x^2-x+2}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$ などは，形式的には，$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$ と表せるが，このままでは実際の極限値は不明である．このような形を**不定形**と呼ぶが，いろいろな工夫を施して不定形ではないようにする必要がある．不定形の極限は，上記のほかに $0\times\infty$，∞^0，1^∞，0^0 などの形があるが，代表的なものの処理のコツを次に示す．

a.	$\dfrac{0}{0}$ の形	有理式の場合，約分する
		無理式の場合，分母または分子を有理化する
b.	$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形	分数式の場合，分母の最高次の項で分母・分子を割る
c.	$\infty-\infty$ の形	整式の場合，最高次の項でくくり出す
		無理式の場合，有理化する $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\right)$

Step 2　基本例題

例題　次の極限をそれぞれ求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4+3x-8}{2x^3-5x^2+7}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3x-1})$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{2x+1})$

解答　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

$$=\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-3x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1})}{(4x+1-5x+1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}}\ ㋐$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1})}{-(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}} = \frac{2(3+3)}{2+2} = 3 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$\boxed{x=-t}$ ㋑ とおくと，$x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+3x-8}{2x^3-5x^2+7}$$

$$= \boxed{\lim_{t \to \infty} \frac{t^4-3t-8}{-2t^3-5t^2+7}}\text{㋒} = \lim_{t \to \infty} \frac{t-\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{8}{t^3}}{-2-\dfrac{5}{t}+\dfrac{7}{t^3}} = -\infty \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$\boxed{\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3x-1})}$ ㋓

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2-x+1)-(x^2+3x-1)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-4x+2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$\overset{㋔}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　$\lim_{x \to \infty}(x-\sqrt{2x+1})$

$$\overset{㋕}{=} \lim_{x \to \infty} x\left(1-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x\left(1-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) \overset{㋖}{=} \infty \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

㋐ 分母・分子がともに無理式で，$\dfrac{0}{0}$ の不定形の場合，分母・分子の両方を有理化する．

㋑ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ は $x=-t$ とおいて，$\lim_{t \to \infty} g(t)$ の形に帰着させる．

㋒ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形である．分母の最高次の項で分母・分子を割る．

㋓ 無理式で $\infty-\infty$ の不定形である．与式 $= \dfrac{\sqrt{}-\sqrt{}}{1}$ と考えて，分子を有理化する．

㋔ 分母・分子を $\sqrt{x^2}=x$ で割った．

㋕ $\infty-\infty$ の不定形で無理式だから有理化をしそうであるが，x と $\sqrt{2x+1}$ では x のほうが高次だから x でくくった．

㋖ $\infty \times 1$ より極限は ∞.

5　重要な極限 (1)

Step1　重要事項

三角関数についての $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

三角関数の不定形の極限では，次の2つの公式に帰着させて考えるのが原則である．

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$$ （ただし，θ は弧度法で表されている）

たとえば，$ab \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin a\theta}{b\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin a\theta}{a\theta} \cdot \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．この2つの結果は公式として覚えておくとよい．

さらに，$a \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\frac{a}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin at}{t} = a \quad \left(x = \frac{1}{t} \text{とおいた}\right)$$

となる．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x}$ は $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ から $0 \leqq \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$ となり，はさみうちの原理から与式 $= 0$ となる．

Step2　基本例題

例題　次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x^2}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan^3 x - \sin^3 x}{x^5}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(1-\sin x)}{\cos^4 x}$

解答　(1)

$$\cos 7x-\cos 3x \overset{\text{㋐}}{=} -2\sin\frac{7x+3x}{2}\sin\frac{7x-3x}{2}$$

$$=-2\sin 5x\sin 2x \quad \text{から}$$

$$\text{与式}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}(-2)\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 10$$

$$=(-2)\cdot 1\cdot 1\cdot 10=-20$$

……(答)

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x-\sin^3 x}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x(1-\cos^3 x)}{x^5\cos^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^5\cos^3 x}$$

$$\overset{\text{㋑}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x\sin^2 x(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^5(1+\cos x)\cos^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5\cdot\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)\cos^3 x}=1\cdot\frac{3}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$$

……(答)

(3) $\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

$$1-\sin x=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=1-\cos t\overset{\text{㋒}}{=}2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\text{与式}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)}{\sin^4 t}\overset{\text{㋓}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)}{\sin^4 t}$$

$$=\lim_{t\to 0}2\left(\frac{t}{\sin t}\right)^4\cdot\boxed{\left\{\frac{\sin\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}\right\}^2}^{\text{㋔}}\cdot\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^4\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$=2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{8}$$

……(答)

㋐ 和積の公式 $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ より．

㋑ 分母・分子に $1+\cos x$ を掛けた．あるいは $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ を用いてもよい．

㋒ 半角の公式より．

㋓ 分子に再び半角の公式を用いた．

㋔ $t\to 0$ のとき $\sin^2\dfrac{t}{2}\to 0$ より，$\sin^2\dfrac{t}{2}=\theta$ とすると $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ となる．

6　重要な極限(2)

Step1　重要事項

次の定義はきわめて重要である．

$$\lim_{ⓗ\to 0}(1+ⓗ)^{\frac{1}{ⓗ}} = e \quad (e = 2.71828\cdots)$$

e は**自然対数の底**と呼ばれる無理数である．これより次の公式が導かれる．

指数関数・対数関数に関する極限

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \log_e\frac{a}{b}$ $(a>0,\ b>0)$

証明　(1) $x=\dfrac{1}{h}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to\pm 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

(2) $e^x-1=h$ とおくと $x=\log_e(1+h)$ で $h\to 0$ だから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{\log_e(1+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\log_e(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{\log_e e} = 1$$

(3) $a>0,\ b>0$ のとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{b^x\{(\frac{a}{b})^x-1\}}{x} = \lim_{x\to 0}b^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{a}{b})^x-1}{x}$$
$$= 1\cdot\log_e\frac{a}{b} = \log_e\frac{a}{b}$$

$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x} = 0$

証明　$x\to\infty$ より，十分大きな自然数 n に対して $n\leqq x<n+1$ として考えると，$a^x\geqq a^n\ (>0)$ だから

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{n+1}{a^n}$$

$a>1$ のとき $a=1+h\,(h>0)$ とおけるから，2項定理により $n\geqq 2$ のとき

$$a^n = (1+h)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\,h + {}_n\mathrm{C}_2\,h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,h^n$$

$$> {}_n\mathrm{C}_2\, h^2 = \frac{n(n-1)}{2}h^2\,(>0)$$

ゆえに

$$\frac{n+1}{a^n} < \frac{n+1}{\frac{n(n-1)}{2}h^2} = \frac{2(n+1)}{n(n-1)h^2} = \frac{2(1+\frac{1}{n})}{(n-1)h^2}$$

ここに，$x \to \infty$ のとき $n \to \infty$ であるから，

$$0 \leq \lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})}{(n-1)h^2} = 0$$

よって，はさみうちの原理から

$a>1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}=0$ （証明終）

Step 2 基本例題

例題 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(a+3x)-\log_2 a}{x}$ $(a>0)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-e^{-2x}}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2$

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(a+3x)-\log_2 a}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{3x}{a}\right)}{x} \overset{㋐}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{3x}{a}\right)}{\frac{3x}{a}}\cdot\frac{3}{a}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{a}\log_2\left(1+\frac{3x}{a}\right)^{\frac{1}{\frac{3x}{a}}} = \frac{3}{a}\log_2 e$$ ……(答)

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-e^{-2x}}{x} \overset{㋑}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1-(e^{-2x}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3+\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\cdot 2\right)$$

$$=1\cdot 1\cdot 3+1\cdot 2=5$$ ……(答)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x$ において，$x=\dfrac{1}{y}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to 0$

したがって，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y+y^2)^{\frac{1}{y}}$$

㋐ $\displaystyle\lim_{f(x)\to 0}\{1+f(x)\}^{\frac{1}{f(x)}}=e$ を用いるために，分母を $\dfrac{3x}{a}$ に直した．

㋑ $\displaystyle\lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$ を用いるために，分子を変形した．

さらに $\boxed{y+y^2=z\text{ とおく}}$ [ウ] と，$y \to 0$ のとき $z \to 0$ であり

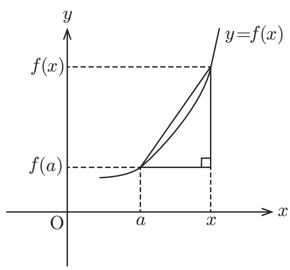
$$\lim_{y\to 0}(1+y+y^2)^{\frac{1}{y}} = \lim_{\substack{y\to 0\\ z\to 0}}(1+z)^{\frac{1}{y}} = \lim_{\substack{y\to 0\\ z\to 0}}\{(1+z)^{\frac{1}{z}}\}^{\frac{z}{y}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{z}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y+y^2}{y} = \lim_{y\to 0}(1+y) = 1$

よって，与式 $= e^1 = e$ ……(答)

7　微分係数の定義

Step1　重要事項



連続関数 $y=f(x)$ の定義域内の 2 点 a，x に対して $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$，すなわち，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在して有限確定ならば，$x=a$ において**微分可能**といい，この極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**あるいは，**微係数**といい，$f'(a)$ と表す．また，

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{すなわち} \quad \lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{すなわち} \quad \lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在して有限確定ならば，それぞれ $x=a$ において**右側微分可能**，**左側微分可能**といい，これらの極限値を $f'_+(a)$，$f'_-(a)$ と表し，関数 $f(x)$ の $x=a$ における**右側微分係数**，**左側微分係数**という．

$$\boxed{f(x)\text{ が }x=a\text{ で微分可能} \iff f'_+(a)=f'_-(a)}$$

[ウ] $y\to 0$ のとき $y+y^2 \to 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=1$ を用いることができるのではないかと予想して $y+y^2=z$ とおいた．

さて，微分可能な関数 $f(x)$ は連続である．

証明　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=f'(a)\cdot 0=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ となり，$f(x)$ は $x=a$ で連続である．　（証明終）

Step 2　基本例題

例題　次の関数の与えられた点における微分係数を定義により求めよ．

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}\quad(x=a\neq 0)$　　(2)　$f(x)=\sqrt[3]{x}\quad(x=a)$

(3)　$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}\quad(x=0)$

解答　(1)　$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(a+h)a}=-\frac{1}{a^2}\qquad\cdots\cdots(答)$$

〔別解〕　$f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

(2)　(i)　$a\neq 0$ のとき

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}\overset{㋐}{=}\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(ii)　$a=0$ のとき

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty\qquad\cdots\cdots(答)$$

㋐ 最初から $a\neq 0$ と $a=0$ の場合分けには気づかないかもしれないが，㋐の所で場合分けに気づくことになる．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

$x>0$ において，$\sin\dfrac{1}{x}=0$ となるのは $\dfrac{1}{x}=n\pi$ より $x=\dfrac{1}{n\pi}$ $(n=1,2,\ldots)$ のときである．

また，$\sin\dfrac{1}{x}=1$ となるのは $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}+2(n-1)\pi=\dfrac{4n-3}{2}\pi$ より $x=\dfrac{1}{(4n-3)\pi}$ $(n=1,2,\ldots)$ のときである．

したがって，$x=\dfrac{1}{\pi},\dfrac{1}{2\pi},\ldots,\dfrac{1}{n\pi},\ldots$ の値をとりながら x が限りなく 0 に近づくとき，$\sin\dfrac{1}{x}$ の値はつねに 0 となる．

また，$x=\dfrac{2}{\pi},\dfrac{2}{5\pi},\ldots,\dfrac{1}{(4n-3)\pi},\ldots$ の値をとりながら x が限りなく 0 に近づくとき，$\sin\dfrac{1}{x}$ の値はつねに 1 となる．

これらの結果から $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しない．

よって，$f'(0)$ は存在しない．　……(答)

Step 3　過去問題

問題 1　正の整数 n に対して，$1\times 3\times\cdots\times(2n-1)=(2n-1)!!$ と表すことにします．このとき，次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$$

解答　自然対数をとって考える．$(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}$ より

$$\log_e\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}=\log_e\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)!!}}$$

$$=\log_e\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\times\frac{n}{4}\times\cdots\times\frac{n}{2n}\right)\times\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{2n}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\log_e\frac{n}{2k}+\sum_{k=1}^{2n}\log_e\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\log_e\left(2\cdot\frac{k}{n}\right)\right\}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log_e\frac{k}{n}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\log_e\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\log_e\left(2\cdot\frac{k}{n}\right)\right\} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log_e\frac{k}{n}$$
$$= -\int_0^1 \log_e 2x\,dx + \int_0^2 \log_e x\,dx$$
$$= -[x\log_e 2x - x]_0^1 + [x\log_e x - x]_0^2 = \log_e\frac{2}{e}$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$$ ……(答)

解説　区分求積法[ア] を用いる．なお次も有用である．

スターリングの公式

$n\to\infty$ のとき（両辺の比 $\to 1$ という意味で）

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (e\text{ は自然対数の底})$$

これを用いると，$n\to\infty$ のとき，次のようにも求められる．

$$\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^n\times n!}} \sim \frac{1}{2n}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi\times 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\div\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$
$$= \frac{1}{2n}\sqrt[n]{\sqrt{2}\times 2^{2n}\times\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{2n}\times\frac{n}{e}\times 4\times\sqrt[2n]{2} = \frac{2}{e}\times\sqrt[2n]{2} \sim \frac{2}{e}$$

問題 2　$f(x)$ は C^n級[イ] の関数（$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$：$n$ 次までの導関数が連続な関数）とし，しかも $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ と仮定します．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)\cdot\sin x}{f^{(n-1)}(x)} = 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{f(x)}(\sin x)^n$ を求めなさい．

解答

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f(x)}(\sin x)^n = \frac{f^{(n)}(x)\sin x}{f^{(n-1)}(x)}\times\frac{f^{(n-1)}(x)\sin x}{f^{(n-2)}(x)}\times\cdots\times\frac{f^{(1)}(x)\sin x}{f(x)}$$

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)\sin x}{f^{(n-2)}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\{f^{(n-1)}(x)\cdot\sin x\}'}{\{f^{(n-2)}(x)\}'}$$

[ア] 第 3 章 9 節で学ぶ．
[イ] 第 2 章で学ぶ．

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)\sin x + f^{(n-1)}(x)\cos x}{f^{(n-1)}(x)}$$
$$= 1 + \lim_{x\to 0} \cos x = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-2)}(x)\sin x}{f^{(n-3)}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\{f^{(n-2)}(x)\sin x\}'}{\{f^{(n-3)}(x)\}'}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)\sin x + f^{(n-2)}(x)\cos x}{f^{(n-2)}(x)}$$
$$= 2 + \lim_{x\to 0} \cos x = 3$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-k+1)}(x)\sin x}{f^{(n-k)}(x)} = k \quad (k \text{ は実数，} 1 \leqq k \leqq n)$$

よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} (\sin x)^n$$
$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{f^{(n)}(x)\sin x}{f^{(n-1)}(x)} \times \frac{f^{(n-1)}(x)\sin x}{f^{(n-2)}(x)} \times \cdots \times \frac{f^{(1)}(x)\sin x}{f(x)} \right\}$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!$$
……(答)

解説　次の定理を用いて不定形の極限を求める．

ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ が $x = a$ を含む区間で連続かつ $x = a$ 以外で微分可能で

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

とするとき

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在するならば } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$