数学検定　案内

● 概要

「数学検定」と「算数検定」は正式名称を「実用数学技能検定」といい，それぞれ 1 〜 5 級と 6 〜 11 級，「かず，かたち検定」の階級に相当します。数学・算数の実用的な技能（計算・作図・表現・測定・整理・統計・証明）を測る検定で，公益財団法人日本数学検定協会が実施している全国レベルの実力・絶対評価システムです。

● 階級の構成

	実用数学技能検定											
	算数検定							数学検定					
階級	かず・かたち検定	11級	10級	9級	8級	7級	6級	5級	4級	3級	準2級	2級	準1級	1級
目安となる学年	幼児	小学校1年程度	小学校2年程度	小学校3年程度	小学校4年程度	小学校5年程度	小学校6年程度	中学校1年程度	中学校2年程度	中学校3年程度	高校1年程度	高校2年程度	高校3年程度	大学程度・一般

1 〜 5 級には，「1 次：計算技能検定」と「2 次：数理技能検定」があり，1 次も 2 次も同じ日に行います。はじめて受検するときは 1 次・2 次両方を受検します。

※6 〜 11 級、「かず・かたち検定」には 1 次・2 次の区分はありません。同一検定日に同一の階級や複数の階級を志願することはできません。

● 受検資格

原則として受検資格は問いません。

● 受検方法

個人受検または団体受検のいずれかの方法で受検できます。個人受検は，全国の主要都市に設ける検定会場で 4 月・7 月・11 月（または 10 月）の年 3 回実施します。

当日の持ち物　※階級によって持ち物が異なります。

持ち物＼階級	1～5級	6～8級	9～11級	かず・かたち検定
筆記用具	必須	必須	必須	必須
ものさし（定規）	2次検定のみ必須	必須	必須	
コンパス	2次検定のみ必須	必須		
分度器	2次検定のみ必須	必須		
電卓（算盤）	2次検定のみ持参してもよい			

2次：数理技能検定で使用できる電卓の種類　○一般的な電卓　○関数電卓　○グラフ電卓

※通信機能や印刷機能をもつ電卓は使用できません。また，携帯電話・電子辞書・パソコン等の電卓機能も使用できません。

● 合格基準

1～5級の1次は全問題の70%程度、2次は全問題の60%程度です。

● 合格証

検定日から約40日後を目安に，受検者あてに合否結果を郵送します。

		送られる合格証
1～5級	1次・2次検定ともに合格	**実用数学技能検定合格証**
	1次：計算技能検定のみに合格	**計算技能検定合格証**
	2次：数理技能検定のみに合格	**数理技能検定合格証**

● 各階級の詳細（準2級以上）

	階級	検定時間	出題数	目安となる学年	検定料
数学検定	1級	1次：60分 2次：120分	1次：7問 2次：2題必須・5題より2題選択	大学程度・一般	5,000円
	準1級			高校3年程度（数学III程度）	4,500円
	2級	1次：60分 2次：90分	1次：15問 2次：2題必須・5題より3題選択	高校2年程度（数学II・数学B程度）	4,000円
	準2級		1次：15問 2次：10問	高校1年程度（数学I・数学A程度）	3,500円

目　次

■装幀　岡　孝治

本書のねらいと構成

本書は数学検定1級のなかでも，まずは1次検定（計算技能検定）に合格することにねらいを絞った対策本である。1次検定は必須問題7問を60分の試験時間内に解かねばならず，また，解答用紙には計算の過程は記さずに答えのみを書くから部分点は期待できない。正確で速い計算力が求められるだけでなく，定理や公式を正しく理解していることが重要である。

分野別に確実に力をつけるために，各章は次のように3段階構成になっている。

Step1　重要事項

重要な概念や定義，定理などを簡潔にまとめた。既習事項の再確認や本番直前の復習に役立ててほしい。

Step2　基本例題

基本的な例題とその解き方を示した。1次検定の試験本番では（答）だけを書くが，計算過程を理解せずにたどりつくことは不可能であるからしっかり理解してほしい。計算過程はできる限り省略せず示すようにしたが，脚註で補足したところもある。また，定理や公式などの式変形の根拠も脚註で解説した。

Step3　過去問題

実際に過去の数学検定で出題された問題を掲載した。力だめしとして，そして計算スピードも少し意識しながら挑戦してみてほしい。

付　録

巻末に過去問題1回分（1次・2次）を掲載した。特に初めて受検するときは1次と2次の両方を受ける必要があるので，受検前に問題の特徴や違いを把握しておくのが望ましい。

第 0 章 ○○○○○○○

1 ○○○○

Step1 重要事項

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

a. ○○○○
b. ○○○○
c. ○○○○

○○○○

○○○○○○○○○ $\iff P(a)=0$

○○ $P(x)$ ○○ $ax-b$ ○○ $\iff P\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$

例　$P(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ ○○○○○○○○○.

解　○○ $x=\dfrac{b}{a}$（a ○ b ○○○○○○○○○，a ○○○○○○，b ○○）○○○○○○○，$x=\pm\dfrac{P(x)\text{ ○○○○○○○○○}}{P(x)\text{ ○○○○○○○○○○○○○}}$ ○○○○○○○○○.

$x=\pm\dfrac{5\text{ ○○○○○}}{2\text{ ○○○○○}}=\pm\dfrac{1,5}{1,2}$ ○○ $x=\pm1,\pm5,\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{5}{2}$ ○○○○

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)-7\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=-2-3+5=0$$

○○○○○

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 2 & -8 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 10)$$
$$= (2x+1)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

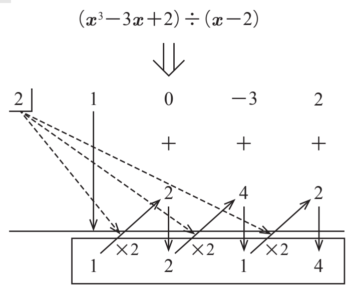
○○○，$x = -\frac{1}{2},\ 2 \pm i$

○○○○○○，x ○○○○ 1 ○○ $x - \alpha$ ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○，「○○○○」○○○○○．○○○○，「$(x^3 - 3x + 2) \div (x - 2)$ ○○○○○○？」○○○，○○○ $x - 2$ ○ 0 ○○○ $x = 2$ ○○○○○○ 1　0　-3　2 ○

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}$$

○○○○○○○○○○○○○○．○○○○○

1. 1 ○○○○ ⇒ 1
2. 1　× 2 ⇒ 2
3. 0 + 2 ⇒ 2
4. 2　× 2 ⇒ 4
5. (− 3) + 4 ⇒ 1
6. 1　× 2 ⇒2
7. 2 + 2 ⇒ 4　(○○)



商：x^2+2x+1　　余り 4

○○○○○○○○○，○○○○○○○○○○○○○○○○○○．○○○○○ $P(x) = 0$ ○○○○，$P(\alpha) = 0$ ○○○ α ○○○○○，○○○○○○○○○，$P(x) = (x - \alpha)P_1(x) = 0$ ○○○○○○○○○○○，○○○○○○○○．

Step 2　基本例題

例題　○○○○○○○○○○○．

(1)　$2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$　　　(2)　$3x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$

(3)　$x^4 - 4x + 3 = 0$

解答　○○○○○○○ $P(x)$ ○○○．

(1)　$P(-2) = -16 - 4 + 26 - 6 = 0$ ㋐

$P(x)$ ○ $x + 2$ ○○○○，○○ $2x^2 - 5x - 3$

$$P(x) = (x+2)(2x^2 - 5x - 3) = (x+2)(2x+1)(x-3) = 0$$

㋐ ○○○○○○○○○ $x = \pm\dfrac{-6\text{ ○○○○○}}{2\text{ ○○○○○}} = \pm\dfrac{1, 2, 3, 6}{1, 2}$

○○○，$x = -2, -\dfrac{1}{2}, 3$ ……(答)

(2) $P\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\dfrac{8}{27}\right) - 4 \cdot \dfrac{4}{9} + 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 4 = 0$

$P(x)$ ○ $3x + 2$ ○○○○，○○ $x^2 - 2x + 2$

$$P(x) = (3x + 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

○○○，$x = -\dfrac{2}{3}, 1 \pm i$ ……(答)

(3) $P(1) = 1 - 4 + 3 = 0$

$P(x)$ ○ $x - 1$ ○○○○，○○ $Q(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3)$$

○○○ $Q(1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$ ○○○

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$$

○○○○○

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$$

○○○，$x = 1$ (2 ○○)，$-1 \pm \sqrt{2}i$ ……(答)

(1)
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -1 & -13 & -6 \\ & & -4 & 10 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$
○ $2x^2 - 5x - 3$

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 3 & -4 & 2 & 4 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 3 & -6 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$
○ $x^2 - 2x + 2$

(3)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$
○ x^2+2x+3

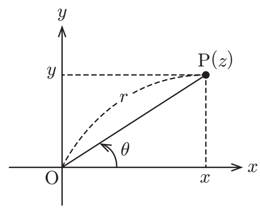
2 ○○○

Step1 重要事項

○○○○○○，0 ○○○○○○ $z = x + yi$ ○○○○○ P ○○，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ ○○○○○○○○○○○○○○○○ θ, $\overline{\mathrm{OP}} = |z| = r$ ○○○○

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

○○○○，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r > 0)$ ……①



〇〇〇〇〇．①〇〇〇〇〇〇〇〇〇，〇〇〇 z 〇〇〇〇〇〇〇．r 〇 z 〇〇〇〇，θ 〇 z 〇〇〇〇〇〇，$\arg z$ 〇〇〇．arg 〇 argument 〇〇〇〇〇．

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z$$

[1]　〇〇　〇〇〇 z 〇〇〇〇，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇，〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇．θ 〇 z 〇 1 〇〇〇〇〇〇

$$\theta + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

〇〇〇〇 z 〇〇〇〇〇〇〇，〇〇，z 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇．

〇〇，$z = 0$ 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇，$\arg 0$ 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇．〇〇〇，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 〇〇〇

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$

〇〇〇　$|\overline{z}| = |z|$　〇〇　$\arg\overline{z} = -\arg z$

2 〇〇〇〇〇 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ……②

〇〇〇　$z_1 = z_2 \iff r_2 = r_1$ 〇〇 $\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

[2]　〇〇〇〇〇〇・〇〇　②〇〇〇〇 2 〇〇〇〇〇 z_1，z_2 〇〇〇〇

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \end{aligned}$$

〇〇　$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

〇〇〇〇　$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ……③

〇〇〇〇〇　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$　〇〇〇〇〇．

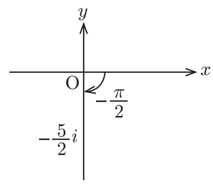
Step 2　基本例題

例題　〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇.

(1)　$z=-\dfrac{5}{2}i$　　　(2)　$z=\dfrac{-5+i}{2-3i}$

解答　(1)　$z=-\dfrac{5}{2}i$

$=\dfrac{5}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$　……(答)



(2)　$z=\dfrac{-5+i}{2-3i}=\dfrac{(-5+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$

$=\dfrac{-13-13i}{13}=-1-i$

〇〇〇，$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$　……(答)

3　$\boldsymbol{n}$〇〇

Step 1　重要事項

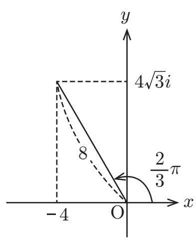
n〇〇〇〇〇〇〇〇〇．〇〇〇 $\alpha\,(\neq 0)$ 〇〇〇〇　$z^n=\alpha$　……①

〇〇〇〇〇〇〇 z 〇 α 〇 $\boldsymbol{n}$〇〇〇〇〇.

$z^3=-4+4\sqrt{3}i$ 〇〇〇〇〇〇〇 z 〇〇〇〇〇〇〇.

$$|-4+4\sqrt{3}i|=\sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})^2}=8$$

$$\arg(-4+4\sqrt{3}i)=\frac{2}{3}\pi+2n\pi$$



〇〇〇　$-4+4\sqrt{3}i=8\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ 〇〇〇〇，

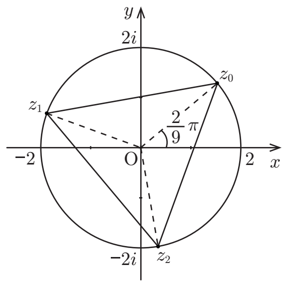
〇・〇〇〇〇〇〇〇〇〇，〇〇〇〇

$$r^3(\cos 3\theta+i\ \sin 3\ \theta)=8\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

○○○○○○○○○○○○○○○○

$$r^3 = 8, \quad 3\theta = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$$

$$\therefore \quad r = 2, \quad \theta = \frac{2}{9}\pi + \frac{2n}{3}\pi$$



$0 \leq \theta < 2\pi$ ○○　$\theta = \frac{2}{9}\pi,\ \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi$

○○○　$z_0 = 2\left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right),$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{8}{9}\pi + i\sin\frac{8}{9}\pi\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{14}{9}\pi + i\sin\frac{14}{9}\pi\right)$$

○○○○ 3 ○○○，○○○○○○○○ O(0) ○○○○○，○○ $\sqrt[3]{8} = 2$ ○○○○ 3 ○○○○○ (○○ 2 ○○○○○○○○○ 3 ○○○ 3 ○○) ○○○．○○○，

$\alpha = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ ○○○，①○○○○ n ○○ z ○ n ○○○

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left\{\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

○○○．○○○○○○，○ $z_k\ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ ○○ O(0) ○○○○○，○○ $\sqrt[n]{r_0}$ ○○○○ n ○○○○○○○○○．

Step 2　基本例題

例題　○○○○○○○○○．

(1)　i ○○○○　　(2)　$-2 + 2\sqrt{3}i$ ○ 4 ○○

解答　(1)　$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$z^2 = i$ ○○○○ z ○ 2 ○○○

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad (k = 0, 1)$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$z_1 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$ ……(答)

(2) $-2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$z^4=-2+2\sqrt{3}i$ ○○○○ z ○ 4 ○○○

$$z_0=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_2=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$ ……(答)

4 3○○○○○○○○○○○

Step1 重要事項

○○○○，3 ○○○○ $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0\ (a_0\neq 0)$ ……①
○○○○○○．○○○（○○○）○○○○○．

①○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○．①○○○○ a_0 ○○○○

$$x^3+ax^2+bx+c=0\ \left(a=\frac{a_1}{a_0},\quad b=\frac{a_2}{a_0},\quad c=\frac{a_3}{a_0}\right)$$

○○○○○○，x^2 ○○○○○○○○○○○，$x=y-\frac{a}{3}$ ○○○○，

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

○○○○○○，$p=-\frac{a^2}{3}+b$，$q=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$ ○○○○

$$y^3+py+q=0$$ ……②

○○○．○○○，$y=u+v$ ○○○○ $(u+v)^3+p(u+v)+q=0$

$$u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)=0$$

○○○○○ $\begin{cases}u^3+v^3+q=0 & \text{……③}\\ 3uv+p=0 & \text{……④}\end{cases}$

○○○○ u ○ v ○○○○○○○○○○○○○○，$y = u + v$ ○○ y, ○○○ $x = y - \dfrac{a}{3}$ ○○①○○ x ○○○○○．○○○ u, v ○③，④○○○○○○

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$$

○○○○○，u^3 ○ v^3 ○ t ○ 2 ○○○○ $(t - u^3)(t - v^3) = 0$ ○○，○○○○

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

○○○○○○○○○○．⑤○①○○○○○○○○○○．○○，⑤○○○○

$$t = \frac{1}{2}\left(-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right) = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

○○○○○，$\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = r$ ○○○○，$u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{r}, \quad v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{r}$
○○○，$u^3 = A^3$ (A ○○○) ○○○○

$$(u - A)(u^2 + Au + A^2) = 0 \quad ○○，u = A, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}A$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \overset{○○○}{\omega}\ ○○○○，\quad \omega^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\ ○○○○○$$

$u^3 = A^3$ ○ 3 ○○ $u = A,\ \omega A,\ \omega^2 A$ ○○○．

○○○○○，$1 + \omega + \omega^2 = 0$ ○○○○○○ ③, ④○○○○ u, v ○○○

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}}, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}}$$

$$u = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}}, \qquad v = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}}$$

$$u = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}}, \qquad v = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}}$$

○ 3 ○○○○．○○○ $y = u + v$ ○○○○○○，○○○○○ 3 ○○ y, ○○○ ○②○ 3 ○○○○○，①○ 3 ○○○○○○○．

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \\ y_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \\ y_3 = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{r}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{r}} \end{cases}$$

Step 2 基本例題

例題 ○○3○○○○○○○○.

(1) $x^3+6x+2=0$　　　(2) $x^3+3x^2-3=0$

解答 (1) $x=u+v$ ○○○㋐ ○

$$(u+v)^3+6(u+v)+2=0$$

$$u^3+v^3+2+(u+v)(3uv+6)=0$$

$$\begin{cases} u^3+v^3+2=0 \\ 3uv+6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3+v^3=-2 \\ uv=-2 \end{cases} \implies \begin{cases} u^3+v^3=-2 \\ u^3v^3=(-2)^3=-8 \end{cases}$$

○○○○ u^3 ○ v^3 ○ $t^2+2t-8=0$ ○2○○○○.

$$(t-2)(t+4)=0 \quad ○○,\ t=2,-4$$

○○○○○，1○○ u,v ○

$$u=\sqrt[3]{2},\ v=\sqrt[3]{-4}=-\sqrt[3]{4}$$

○○○，○○○○ $x=x_i\ (i=1,2,3)$ ○

$$\begin{cases} x_1=u+v=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4} \\ x_2=\omega u+\omega^2 v=\sqrt[3]{2}\omega-\sqrt[3]{4}\omega^2 \\ x_3=\omega^2 u+\omega v=\sqrt[3]{2}\omega^2-\sqrt[3]{4}\omega \end{cases} \left(○○○, \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) $x=y-1$ ○○○㋑ ○，$(y-1)^3+3(y-1)^2-3=0$ ○○，$y^3-3y-1=0$

$y=u+v$ ○○○○，$(u+v)^3-3(u+v)-1=0$

$$u^3+v^3-1+(u+v)(3uv-3)=0$$

$$\begin{cases} u^3+v^3-1=0 \\ 3uv-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3+v^3=1 \\ uv=1 \end{cases} \implies \begin{cases} u^3+v^3=1 \\ u^3v^3=1 \end{cases}$$

○○○○ u^3 ○ v^3 ○，$t^2-t+1=0$ ○○○○

$$t=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \qquad (○○○○)$$

㋐ x^2 ○○○○○○○，○○○○ $x=u+v$ ○○○○.
㋑ x^2 ○○○○○○○○○，$x=y-1$ ○○○.

○○○

$$u^3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\qquad v^3=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

○○○○○○ 1 ○○ u, v ○，○・○○○○○○○○○○

$$u=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9},\ v=\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$$

○○，○○○ y ○○○

$$\begin{aligned}
y_1&=u+v=2\cos\frac{\pi}{9}\\
y_2&=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\\
&\quad+\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right\}\\
&=\cos\frac{7}{9}\pi+i\sin\frac{7}{9}\pi+\cos\left(-\frac{7}{9}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{9}\pi\right)\\
&=2\cos\frac{7}{9}\pi
\end{aligned}$$

○○○，$y_3=\omega^2u+\omega v=2\cos\dfrac{13}{9}\pi$

○○○，

$$x_1=2\cos\frac{\pi}{9}-1,\quad x_2=2\cos\frac{7}{9}\pi-1,\quad x_3=2\cos\frac{13}{9}\pi-1\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

5　○○○○

Step1　重要事項

2 ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○，○○○○○○○○○○○○.

○○○○

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\qquad\cdots\cdots①$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\qquad\cdots\cdots②$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\qquad\cdots\cdots③$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\qquad\cdots\cdots④$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad\cdots\cdots⑤$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \cdots\cdots⑥$$

①，③，⑤〇 $\alpha=\beta=\theta$ 〇〇〇〇，〇〇 2 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇.

2 〇〇〇〇〇

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \quad \cdots\cdots⑦\\ \tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

〇〇，$\tan\theta=m$ 〇〇〇〇〇，〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇.

$$\begin{cases}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\tan\theta\cdot\cos^2\theta=2\tan\theta\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2m}{1+m^2}\\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}-1=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}\end{cases}$$

〇〇〇 2 〇〇〇〇〇⑦〇〇，〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇.
$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ 〇，θ 〇〇〇〇〇 $\dfrac{\theta}{2}$ 〇〇〇〇 $\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$ 〇〇〇，$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

〇〇〇〇〇

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2},\qquad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\qquad \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

〇〇〇，$3\theta=2\theta+\theta$ 〇〇〇〇，〇〇 3 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇.

3 〇〇〇〇〇

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,\qquad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

例

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

$$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

○○，①＋②，①－②，③＋④，③－④ ○○○○○○○○○○，○○○○○○.

○○○・○○○○○○○

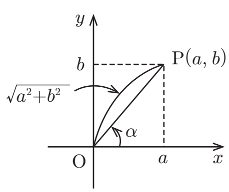
$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} &\cdots\cdots ⑧\\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\end{aligned}$$

○・○○○○○○○○

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} &\cdots\cdots ⑨\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

例　⑧○○ $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$A+B=\alpha, A-B=\beta$ ○○○○ $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}, B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ○○○，⑨ ○○○○○.



○○○○ $a\sin\theta+b\cos\theta$ ○，○ $\mathrm{P}(a,\ b)$ ○ xy ○○○○○○○，$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ ○○○ x ○○○○○○○○ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)$ ○○○○○○○○○○ α ○○○○○○，

$$\begin{aligned}&a\sin\theta+b\cos\theta\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)\end{aligned}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \qquad \left(\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

○○○○○，○○○○○○○○○○○○.

Step 2 基本例題

例題 1 x, y ○○○○○○

$$\begin{cases} 13\ \cos x + \sqrt{3}\sin x &= y\cos x \\ \sqrt{3}\ \cos x + 11\sin x &= y\sin x \end{cases}$$

○ 2 ○○○○ (x_1, y_1), (x_2, y_2)（○○○，$0 \leqq x_1 \leqq x_2 < \pi$）○○○○○，$x_1$, y_1, x_2, y_2 ○○○○○○.

解答 $\begin{cases} 13\ \cos x + \sqrt{3}\sin x &= y\cos x \\ \sqrt{3}\ \cos x + 11\sin x &= y\sin x \end{cases}$ ……① ……②

$\boxed{① \times \sin x - ② \times \cos x}$ ㋐ ○○

$$\sin x(13\cos x + \sqrt{3}\sin x) - \cos x(\sqrt{3}\cos x + 11\sin x) = 0$$

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0 \qquad \therefore\quad \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \sqrt{3}$$

$0 \leqq x < \pi$ ○○○ $0 \leqq 2x < 2\pi$ ○○○

$$2x = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi \qquad \therefore\quad x = \frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi$$

①，②○○，$0 \leqq x_1 < x_2 < \pi$ ○○○

$$x_1 = \frac{\pi}{6},\ y_1 = 14,\ x_2 = \frac{2}{3}\pi,\ y_2 = 10$$ ……(答)

例題 2 ○○ x, y ○ $x^2 + 4xy + 5y^2 - 3 = 0$ ○○○○○○○．○○○○，$2x^2 + xy + 3y^2$ ○○○○○○○○○○○○○.

解答 $2x^2 + xy + 3y^2 = P$ ○○○○

$$8x^2 + 4xy + 12y^2 \overset{㋑}{=} 4P$$ ……①

㋐ ○○○○○○○○○ x, y ○○○，○○○○○○○○ y ○○○.

〇〇，〇〇〇〇

$$x^2 + 4xy + 5y^2 = 3 \qquad \cdots\cdots②$$

〇〇〇．① − ②〇〇，$7x^2 + 7y^2 = 4P - 3$, 〇〇〇〇

$$7(x^2 + y^2) = 4P - 3 \qquad \cdots\cdots③$$

〇〇〇，〇〇〇 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ 〇〇〇〇②〇〇〇〇〇〇〇

$$(r\cos\theta)^2 + 4(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 5(r\sin\theta)^2 = 3$$

$$(\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta)r^2 = 3$$

〇〇〇，

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{3}{\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta} \\ &\overset{ⓤ}{=} \frac{3}{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\sin 2\theta + 5\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} \\ &= \frac{3}{3 + 2(\sin 2\theta - \cos 2\theta)} \overset{ⓔ}{=} \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 〇〇〇，$-1 \leq \sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ 〇〇〇

$$\frac{3}{3 + 2\sqrt{2}} \leq r^2 \leq \frac{3}{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad 3(3 - 2\sqrt{2}) \leq r^2 \leq 3(3 + 2\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots④$$

③〇〇，$7r^2 = 4P - 3$ 〇〇〇，　$P = \dfrac{7r^2 + 3}{4}$

〇〇〇，④〇〇

$$\frac{3(11 - 7\sqrt{2})}{2} \leq P \leq \frac{3(11 + 7\sqrt{2})}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

〇〇　〇〇〇 $C_1 : x^2 + 4xy + 5y^2 - 3 = 0$〇，〇〇〇〇〇〇〇〇〇 $C_2 : 2x^2 + xy + 3y^2 = P$ 〇〇〇〇〇 $x,\ y$ 〇〇〇〇〇 2 〇〇〇〇〇〇，〇〇〇〇〇〇〇〇〇 $(x,\ y)$ 〇〇〇〇〇〇〇 2 〇〇〇[オ]

[イ] 〇〇〇 $x^2 + 4xy + 5y^2 = 3$ 〇 xy 〇〇〇 4 〇〇〇〇〇，$4P$ 〇〇〇〇．

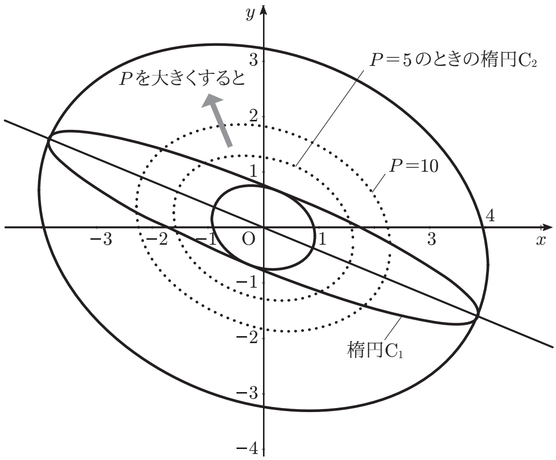
[ウ] 2 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇．

[エ] 〇〇〇〇〇〇．

[オ] 2 〇〇〇〇〇〇〇〇〇，〇〇〇『〇〇〇〇！　〇〇〇〇 1 〇 1 〇 〇〇〇〇』〇〇〇〇〇〇．〇〇〇〇 2 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇．

○○○．2 ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○，○○○ C_1，C_2 ○○○○○○○○○○○○○○○○○○．○○○○○ C_2 ○ P ○○○○○○○，○○○○ $P = 5, 10$ ○○○○○○○○○○．(○○○○○○○○○○○○○，) P ○○○○○○○○○ C_2 ○○○○○○．

○○○○○，○ $(x,\ y)$ ○○○○○○○○○○○○○○○○○，P ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○．○○○○○○，○○ C_1 ○○○ C_2 ○○○○○○○○○○○○○○○ P ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○．○○○○○○ P ○○○○○○○○○○○○，○○○○○○○○○ C_2 ○○○ C_1 ○○○，○○○○○○○○○○○○○○．



○○，　$P = \dfrac{3(11 \pm 7\sqrt{2})}{2}$ ○○○

$$r^2 = 3(3 \pm 2\sqrt{2}) \quad ○○ \quad \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \mp 1 \quad (○○○○)$$

6　○○○ (1)

Step1　重要事項

○○ $\{a_n\}$ ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○，○○○○○○○○○○○○，○○○○○○○○○○○○○○○○○．

○○○○，○○○○○○○○○○○

○○○○：$a_{n+1} - a_n = d \quad (n \geq 1,\ d$ ○○○$)$

○○○○：$a_{n+1} = ra_n \quad (n \geq 1,\ r$ ○○○$)$

○○○○○（○○○）○○○○，○○○○○○○○○○○○○○. ○○○○○○○○○○.

2 ○○○○○○

a.　$a_{n+1} = a_n + f(n) \quad (n \geq 1)$　　(○○○)

○○○○ n ○ $1, 2, \ldots, n-1$ ○○○○○，○々○○○○

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

b.　$a_{n+1} = pa_n + q \qquad (n \geq 1,\ p \neq 0, 1,\ q \neq 0)$

a_n，a_{n+1} ○ t ○○○○，$\boxed{t = pt + q}$[㋐] ○○○○，$t = \dfrac{q}{1-p}$

○○ t ○○○○○○○○○○○○○○　$a_{n+1} - \dfrac{q}{1-p} = p\left(a_n - \dfrac{q}{1-p}\right)$

$$a_n - \frac{q}{1-p} = \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} \qquad \therefore \quad a_n = \frac{q}{1-p} + \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

c.　$a_{n+1} = pa_n + f(n) \qquad (n \geq 1,\ p \neq 0, 1)$

○○○ p^{n+1} ○○○○

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{f(n)}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + g(n) \qquad \left(g(n) = \frac{f(n)}{p^{n+1}} \text{ ○○○}\right)$$

$\dfrac{a_n}{p^n} = b_n$ ○○○○ $b_{n+1} = b_n + g(n)$ ○○○，○○○ a. ○○○○○.

[㋐] ○○○○○○○○○○○.

d.　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}\quad(n\geqq 1,\ q\neq 0,\ r\neq 0,\ ps-qr\neq 0)$

a_n, a_{n+1} ○ t ○○○○，$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ ○○○．○○○○○ t ○○○○○ 2 ○○○○ $rt^2+(s-p)t-q=0\ (r\neq 0)$ ○○○，○○○○○○○○ 2 ○○○○ α,β ○○○．

(i) $\alpha\neq\beta$ ○○○;

○○○○○○○○ α ○○○○

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha=\frac{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}{ra_n+s}$$

$r\alpha^2+(s-p)\alpha-q=0$ ○○ $q-s\alpha=-\alpha(p-r\alpha)$ ○○○○○

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{ra_n+s}\qquad\cdots\cdots①$$

○○○，

$$a_{n+1}-\beta=\frac{(p-r\beta)(a_n-\beta)}{ra_n+s}\qquad\cdots\cdots②$$

①÷②○○ $\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$

○○○○○，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=b_n$ ○○○○，$b_{n+1}=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}b_n$ ○○○，○○ $\{b_n\}$ ○○○○○○○○．○○○○○○○○○○○，$\{a_n\}$ ○○○○○○○○○．

(ii) $\alpha=\beta$ ○○○;

①，②○○○○○．①○○○○○○○○○○○ $\dfrac{1}{a_n-\alpha}=c_n$ ○○○○○○○○，○○ $\{c_n\}$ ○○○○○○○○○．

Step 2　基本例題

例題　○○ $\{a_n\}$ ○○○○，○○○○○○○○○，○○○○○○○○○○○○．

(1)　$a_1=2,\ a_n=a_{n-1}+n(n-1)\quad(n\geqq 2)$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}\quad(n\geqq 1)$

(3)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}\quad(n\geqq 1)$

解答　(1) 〇〇〇〇〇 $a_{n+1}-a_n=n(n+1)$ 〇，$n \geqq 2$ 〇〇〇

$$\boxed{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)}^{㋑} \overset{㋒}{=} 2+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$=\frac{n^3-n+6}{3}=\frac{1}{3}(n+2)(n^2-2n+3)$$

$a_1=2$ 〇〇〇，〇〇〇〇 $n=1$ 〇〇〇〇〇〇．〇〇〇，

$$a_n=\frac{1}{3}(n+2)(n^2-2n+3) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{a_n}=1+\frac{3}{a_n}$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ 〇〇〇〇　$b_{n+1}=3b_n+1$

$$\boxed{b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)}^{㋓}$$

〇〇〇〇〇，〇〇 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 〇〇〇 $b_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}=1$，〇〇〇3〇〇〇〇〇〇〇〇

$$b_n+\frac{1}{2}=1\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore \quad b_n=\frac{2\cdot 3^{n-1}-1}{2}$$

〇〇〇，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{2\cdot 3^{n-1}-1}$ ……(答)

(3) 〇〇〇〇〇 $t=\dfrac{t+2}{2t+1}$ 〇〇〇〇，$t^2=1$ 〇〇 $t=\pm 1$．〇〇〇〇

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}-1=-\frac{a_n-1}{2a_n+1}$$

$$a_{n+1}+1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}+1=\frac{3(a_n+1)}{2a_n+1}$$

㋑ $a_n-a_{n-1}=n(n-1)$ 〇〇 $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)$ 〇〇〇〇〇〇〇〇．

㋒ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 〇〇〇〇．

㋓ 〇〇〇〇〇 $t=3t+1$ 〇〇〇〇 $t=-\dfrac{1}{2}$

○○○○○，$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$

$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ ○○○○　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n$

$b_1=\dfrac{a_1-1}{a_1+1}=\dfrac{1}{3}$ ○○　$b_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

○○○，$a_n \overset{㋔}{=} \dfrac{1+b_n}{1-b_n}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{3^n-(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$　……(答)

7　○○○ (2)

Step1　重要事項

3 ○○○○○○

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\ (p\neq 0,\ q\neq 0)$$

○○○○ a_{n+2}，a_{n+1}，a_n ○○○○○ $t^2, t, 1$ ○○○○○○ t ○ 2 ○○○○ $t^2-pt-q=0$ ○○○○．○○○○○○○○ 2 ○○ α，β ○○○○，○○○○○○○○○ $\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$ ○○○，○○○ a_n ○○○○○○○○○○○○．

(i) $\alpha\neq\beta$○○○，$a_n=A\cdot\alpha^{n-1}+B\cdot\beta^{n-1}$
(ii) $\alpha=\beta$○○○，$a_n=(An+B)\cdot\alpha^{n-1}$
$(A,\ B$ ○○○$)$

(i)　$\alpha\neq\beta$ ○○○

$$\begin{aligned}a_{n+2}-\alpha a_{n+1}&=pa_{n+1}+qa_n-\alpha a_{n+1}=(p-\alpha)a_{n+1}+qa_n\\&=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\end{aligned}$$

○○○○，$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$　……①

○○○，$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$　……②

① − ② ○○，$(\beta-\alpha)a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$

○○○，$a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\}$

㋔ $(a_n+1)b_n=a_n-1$ ○ a_n ○○○○○○○○．

(ii)　$\alpha = \beta$ ○○○
①, ②○○○○, $a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}$ ○○○○○, ○○○ $\alpha^{n+1} (\neq 0)$ ○○○○○○○○ a_n ○○○○○○○○○○.

○○○○○

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

$\{a_n\}$ ○○○○○○○ 3 ○○○○○○○○○○, ○○○○○○○.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= pa_{n+1} + qb_{n+1} = pa_{n+1} + q(ra_n + sb_n) \\ &= pa_{n+1} + qra_n + s(a_{n+1} - pa_n) = (p+s)a_{n+1} - (ps - qr)a_n \end{aligned}$$

○○○○, ○○ $\{a_n + \alpha b_n\}$ ○○○ β ○○○○○○○○○○○○○○○○○○.
$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ ○○

$$(pa_n + qb_n) + \alpha(ra_n + sb_n) = \beta(a_n + \alpha b_n)$$
$$(p + \alpha r)a_n + (q + \alpha s)b_n = \beta a_n + \alpha\beta b_n$$

○○○○, $p + \alpha r = \beta$ ○○ $q + \alpha s = \alpha\beta$ ○○ α, β ○○○○○○.

Step 2　基本例題

例題　(1) ○○ $\{a_n\}$ ○ $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \ (n \geq 1), a_1 = 1, a_2 = 8$ ○○○○○○○○, ○○○ a_n ○○○○.
(2) 2 ○○○○ $\{x_n\}, \{y_n\}$ ○○○○

$$x_1 = 11, \quad y_1 = 1, \quad x_{n+1} = 6x_n + 5y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n \ (n \geq 1)$$

○○○○○○○○○, ○○○ x_n, y_n ○○○○.

解答　(1) ○○○○○ $t^2 - 4t + 4 = 0$ ○○○○, $(t-2)^2 = 0$ ○○ $t = 2$（2 ○○).
○○○○, $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$
○○○○○, ○○ $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ ○○○ $a_2 - 2a_1 = 8 - 2 \cdot 1 = 6$, ○○ 2 ○○○○○○○○○

$$a_{n+1} - 2a_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$$

○○○ 2^{n+1} ○○○○ $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{3}{2}}$ ㋐

○○ $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ ○○○ $\dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$，○○ $\dfrac{3}{2}$ ○○○○○○○○，

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{3}{2} = \frac{3n-2}{2}$$

○○○，$a_n = (3n-2)\cdot 2^{n-1}$ ……(答)

(2)　$x_{n+1} = 6x_n + 5y_n$，$y_{n+1} = x_n + 2y_n$

y_n ○○○○○ x_n ○○○○○○○○○○

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 6x_{n+1} + 5y_{n+1} = 6x_{n+1} + 5(x_n + 2y_n) \\ &= 6x_{n+1} + 5x_n + 2(x_{n+1} - 6x_n) = 8x_{n+1} - 7x_n \end{aligned}$$

○○○○，$x_{n+2} = 8x_{n+1} - 7x_n$

○○○○○ $t^2 = 8t - 7$ ○○○○，$t = 1, 7$

○○○○○○○○○○○，

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 7(x_{n+1} - x_n) \quad \cdots\cdots①$$

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} = x_{n+1} - 7x_n \quad \cdots\cdots②$$

①○○，○○ $\{x_{n+1} - x_n\}$ ○○○ $x_2 - x_1 = 71 - 11 = 60$，○○ 7 ○○○○ ○○○○

$$x_{n+1} - x_n = 60\cdot 7^{n-1} \quad \cdots\cdots③$$

②○○，○○ $\{x_{n+1} - 7x_n\}$ ○○○ $x_2 - 7x_1 = 71 - 77 = -6$ ○○○○○○○ ○

$$x_{n+1} - 7x_n = -6 \quad \cdots\cdots④$$

③ − ④ ○○ $6x_n = 60\cdot 7^{n-1} + 6$. ○○○，$x_n = 10\cdot 7^{n-1} + 1$

○○○○○

$$\begin{aligned} 5y_n &= x_{n+1} - 6x_n \\ &= (10\cdot 7^n + 1) - 6(10\cdot 7^{n-1} + 1) = 10\cdot 7^{n-1} - 5 \end{aligned}$$

○○○，$y_n = 2\cdot 7^{n-1} - 1$

○○○○，

$$x_n = 10\cdot 7^{n-1} + 1, \qquad y_n = 2\cdot 7^{n-1} - 1$$ ……(答)

㋐ $\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ ○○○○ $b_{n+1} - b_n = \dfrac{3}{2}$ (=○○)

8　○○○○

Step1　重要事項

○○○○

○○○○○○ n ○○○○,

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n\end{aligned}$$

○○○○○○○○○○ ${}_n\mathrm{C}_r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ○○○○○○○○○．${}_n\mathrm{C}_r$ ○ $\dbinom{n}{r}$ ○○○○○○○○○．○○○ n ○○○○○○ r ○○○○○○○○○○○○○○．○○，○○○○○○○○ $(r+1)$ ○○○○ ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ ○，$(a+b)^n$ ○○○○○○○○○○○○．○○，

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \qquad \cdots\cdots①$$

○○○，○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○．

$x = 1$ ○○○○ ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

$x = -1$ ○○○○ ${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$

①○○○○ x ○○○○○

$$n(1+x)^{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 x + 3{}_n\mathrm{C}_3 x^2 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n x^{n-1}$$

$x = 1$ ○○○○ ${}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n = n \cdot 2^{n-1}$

Step2　基本例題

例題　(1)　$\dfrac{1 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_3 + \cdots + 10 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_{10}}{{}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 + {}_{10}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10}}$ ○○○○○○．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x+2)^k$ ○○○○○○○○○ x ○○○○○○○．

解答　(1)　k ○○○○○○○

$$k \cdot {}_{10}\mathrm{C}_k = k \cdot \frac{10!}{k!(10-k)!} = \frac{10 \cdot 9!}{(k-1)!\{9-(k-1)\}!} = 10 \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-1}$$

$$\text{○○} = \sum_{k=1}^{10} k \cdot {}_{10}\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{10} 10 \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-1}$$

$$= 10({}_9\mathrm{C}_0 + {}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_9\mathrm{C}_9)$$

$$= 10(1+1)^9 = 10 \cdot 2^9 = 5 \cdot 2^{10}$$

○○，$\text{○○} = (1+1)^{10} = 2^{10}$

○○○，$\text{○○} = \dfrac{5 \cdot 2^{10}}{2^{10}} = 5$ ……(答)

(2)　$(x+2)^k = {}_k\mathrm{C}_0 \cdot 2^k + {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 2^{k-1}x + {}_k\mathrm{C}_2 \cdot 2^{k-2}x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x+2)^k$ ○○○○○○○○ x ○○○○，

$$\sum_{k=1}^{n} {}_k\mathrm{C}_1 \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} \left(\boxed{= S_n\text{○○○}}^{㋐}\right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \\ 2S_n &= \phantom{1 + {}} 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \end{aligned}$$

○々○○○○，

$$-S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n = -(n-1) \cdot 2^n - 1$$

○○○，○○○ x ○○○○

$$S_n = (n-1) \cdot 2^n + 1 \quad \cdots\cdots\ (\text{○})$$

Step 3　過去問題

問題 1　○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○．

$$\begin{cases} x^3 + xy + y^3 = 11 \\ x^3 - xy + y^3 = 7 \end{cases}$$

㋐ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot r^{k-1}$ $(r \neq 0,\ 1)$ ○ $S_n - rS_n$ ○○○○○○○○○○○○．

解答

$$\begin{cases} x^3+xy+y^3=11 & \cdots\cdots① \\ x^3-xy+y^3=7 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

○○○.

①＋②○○ $2x^3+2y^3=18$，○○○○ $x^3+y^3=9$ ……③

(①－②)÷2 ○○ $xy=2$，○○○○ $x^3y^3=8$ ……④

③，④○○ x^3, y^3○○○○○ 2 ○○○○○ $t^2-9t+8=0$

○○○○○○ $t=1,8$

○○○ $(x^3,y^3)=(1,8)$，$(8,1)$

$(x^3,y^3)=(1,8)$ ○○○，○○○○○ $x^3=1$, $xy=2$ ○○○○

$$(x,y)=(1,2), \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, -1\mp\sqrt{3}i\right) \qquad (○○○○)$$

$(x^3,y^3)=(8,1)$ ○○○，○○○○○ $x^3=8$, $xy=2$ ○○○○

$$(x,y)=(2,1), \left(-1\pm\sqrt{3}i, \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right) \qquad (○○○○)$$

○○○○

$$(x,y)=(1,2),(2,1),\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},-1\mp\sqrt{3}i\right),\left(-1\pm\sqrt{3}i,\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)$$

(○○○○)　……(答)

解説　○○○○○○，○○ x^3, y^3○○○○○○○.

○○○○○○○　2 ○○○○ $ax^2+bx+c=0$ ○ 2 ○○○○ α,β ○○○○○

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

問題 2　$(1+x)^n$ ○○○○○ $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ ○○○○○，○○○○○○○○○.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{c_k}{k+1}$$

解答　○○○○○ $\dbinom{n}{k}\left(=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right)$ ○○○○

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{c_k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \times \frac{k+1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1}$$

$$= -\frac{1}{n+1} \left\{ \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1} - \binom{n+1}{0} \right\}$$

……①

○○○

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$$= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}$$

○ $x = -1$ ○○○○○

$$0 = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^{k+1}$$

○○○

$$①= -\frac{1}{n+1} \times \left\{ -\binom{n+1}{0} \right\} = \frac{1}{n+1}$$

……(答)

解説 ○○○○○○○○○○○○.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k y^{n-k} \quad \left(c_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \right)$$

($\binom{n}{k}$ ○○○○○○○○○)

○○○○○○○○，○○○○○○.

$$\binom{n}{k} = \frac{k+1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$