目　次

第1章 ベルヌーイ一家

1.1 ベルヌーイ・ファミリーと'バーゼル組'

スイス観光というとマッターホルン、ユングフラウ、モンブラン、都市と云えば首都ベルン、経済の中心チューリッヒ、美しいルツェルンが思い浮かぶ。しかし、経済学者、文学者ならジュネーブ、そして数学者なら、……もちろんバーゼルである。今日の微積分学の体系の発想も元をいえば'バーゼル産'である。バーゼルにはこれらの学問的事績を記念して「ベルヌーイ通り」(Bernoullistrasse) も「オイラー通り」(Eulerstrasse) がある。長らく解けない問題であった無限級数が、オイラーによって

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

として解けた[1)] が、問題は象徴的に「バーゼル問題」と呼ばれている。微分積分学はライプニッツとニュートンによって育まれたが、これから述べるベルヌーイ家およびオイラーの'バーゼル組'によって体系的、技術的に編成され、骨格がおおむね完成した。それどころか、高校の数学でもレベルを上げて

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^4$$

1) オイラーの最初の'代数的解法'を含めて方法は今日まで 3，4 通りある。

ついでに

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + \cdots + n^{10}$$

はどうだろうか。これらも‘バーゼル産’の公式で解ける。

バーゼルはスイス第●の都会である。チューリッヒには日本から直行便はあるが、バーゼルへはドイツのフランクフルトなどを経由する。列車旅行を楽しみたければパリ・リヨン駅からでもよい。このバーゼルの中心街の一角 Freie Strasse 20 番地に、「ベルヌーイ薬局」(屋号 Goldene Apotheke M.Bernoulli) が店を構えている。「ベルヌーイ家」（●●）は学者の天才家系としてつとに知られているが、家業は代々薬種商でその末孫である。天才家系の最初のバッターであるヤコブ・ベルヌーイが生まれたのは、ちょうどあの有名なパスカル＝フェルマーの確率論の往復書簡の 1654 年というから、本年は 361 年目になるが、薬種商は以前よりだから実際にはさらに長い。

「薬種商」(英 apothecary, 独 Apotheke) とは専門薬剤師のいる「薬局」である。もっとも'pharmacy', 'chemist' との制度上の違いはよくわからないが、とにかく数学・物理学の専門以外に医学、生理学、植物学が副専門であったのもそのかかわりであろう。専門職エリートであることに加え、おそらくは薬種商の付加価値は大きく、かつこれだけの老舗であれば商工会議所の有力者でもあったことも想像に難くない。歴史上多くの数学者・物理学者が生活に汲々としあるいは大学ポストで苦労したこととくらべると、まさに余裕の生活で内輪ケンカや仲違いの余地さえあったわけである。逆に言えば、富貴に淫せず多数の世界史級の学者を輩出し、家業をかくの長きに渉り守り続けたのは偉業という他ない[2)]。

さて、数学や物理学を学んでいて、この‘ベルヌーイ’の名に出会わないことはないだろう。たとえば

2) もとより日本の養子制度はなかったことに注意する。

- ベルヌーイ試行、ベルヌーイの二項分布
- ベルヌーイ数
- ベルヌーイの微分方程式
- ベルヌーイの定理
- 「セント・ペテルブルクの逆説」のベルヌーイによる解決

などは、みなベルヌーイ家の学者たちの名前を冠している。まず、ヤコブ・ベルヌーイ（●●)、その弟ヨハン・ベルヌーイ（●●)、その子ダニエル・ベルヌーイの 3 人を挙げなくてはならない。次いで、ダニエルの従兄弟ニコラウス (II)・ベルヌーイ（●●）も挙げておこう。その後学者の伝統は引き継がれ医学、哲学、神学あるいは建築学などの各分野に活躍する人材が輩出し、現在に至っている。女性もドイツの文学者ヘルマン・ヘッセ夫人などを輩出している。この華麗な学者家系は、音楽家バッハ家と並んで遺伝学のテキストにも出現する。

では、天才家系の遺伝を統計的に分析した名著 F. ゴルトン『遺伝的天才』(Heredetary Genius, ●●) にあるベルヌーイ家評を見てみよう。ただし、家柄[3] の連続に注目し、解説も世俗評中心で学問的には不十分、不均衡な点があるが、性格描写に踏み込んでいる点は（客観性はとにかくも）注目を引く。

何か入りますか？

ヤコブ・ベルヌーイ　後の代に並外れた数の高名な数学者と科学者たちを生んだスイスの家系のうち、名声の最初を飾る。一家は全面的にけんか早くかつ互いに仲が悪かった。長命なる者多く、80 歳を超えた 3 人を数える。ヤコブは教会聖職者の予定なるも、早くから数学に専心するがその動機はもとは偶然であった。その気性は胆汁質（ヒポクラテスの 4 体液分類説で、激情的で怒りっぽく攻撃的）で憂鬱型である。着実だが行動はむしろ遅い。弟を教えるがその尊大な態度は

[3] 中心人物から見て、B は兄弟、N は甥などを表す。

極度に長く続く。けんかと対抗心は必然。数学者としてのオリジナリティーと才能は最高レベル。フランスのアカデミー会員。

B **ヨハン・ベルヌーイ**　当初は商業の道の予定であったが、進路を変更し［自然］科学と化学に進む。フランス・アカデミー会員（ダランベールによる故人賛辞あり）。以下 5 人の祖となる。［注：純粋数学の業績は関心の対象から外れている。］

N. **ニコラス・ベルヌーイ**（享年 31 歳）　やはり多大な数学的才能に恵まれるが、セント・ペテルブルグにて夭折。当地の新興アカデミーに光彩を与えた一人。

N. **ダニエル・ベルヌーイ**　内科医、植物学者、解剖学者で、流体力学の有名著書がある。非常に早熟。5 回の受賞があるが、1 回は父ヨハンが競い、子の成功に嫉妬し許さず。フランス・アカデミー会員（コンドルセによる故人賛辞あり）。　(以下略)。

〈系図〉〈写真〉

1.2 家業は薬種商、そして流れる精神は改革派

ベルヌーイ家のそもそものルーツは、遡れる限りでは、17 世紀のベルギー（当時としてはスペイン領ネーデルランド）のアントワープ在の薬種商であった（それより以前に、オランダのアムステルダム出

身との消息もあるが、確かでない)。当時珍重された香料はヨーロッパでは産出されず、東洋貿易由来の末端価格はきわめて高く付加価値も大きかった。銀と良い比率で有利に等価交換されていたくらいである。

家業が薬種商であった背後には、世界史の教科書にも出てくるヨーロッパと東洋との香料貿易の歴史があった。世界史で学ぶように、1453 年ビザンチン帝国（東ローマ帝国）の首都コンスタンチノープルがイスラムの支配に陥落し、オスマン・トルコ帝国が東洋との交易路の間に入った結果、東洋貿易は地中海中心から新航路を開発独占したスペイン、ポルトガルの手に移った。当地アントワープにはオーストリアおよびスペインの有名なハプスブルク家が君臨していたから、アントワープはその貿易集積地として繁栄を謳歌した。

「ハプスブルグ家」といえば、時代は下るがあのマリー・アントワネットを生み、またモーツァルト、ベートーベン、シューベルトの交響曲、ヨハン・シュトラウスのワルツを連想するあの華やかなウィーンを思いつくが、当時ハプスブルグ帝国の支配は広範かつ強大で、中世以来中部ヨーロッパの大封建領主ブルゴーニュ候との婚姻を通じて、このオランダ・ベルギーの地域までをも領有していたのである。そこへ、すでに前世紀に始まった宗教改革は、宗教、政治、社会、文化に大きな影響をもたらした。ことに、オランダ、ベルギーおよびドイツでは、中世以来のローマ・カトリック教（旧教）に対抗して改革派プロテスタント（新教）の浸透は大きく、人々の精神の覚醒を通じて、下から政治、社会を動かすエネルギーとなっていた。これに対してハプスブルク家の代々君主たちはローマ・カトリックの護教者を任じて、さまざまな圧迫を加えたのである。

ベルヌーイ家は新教徒として改革的な進取の気象を持っていたから、当地の支配者による新教（カルヴァン派）圧迫は強圧的、専制的と感じられた。すでに一大宗教争乱「三十年戦争」(1618–1648）は終息し宗教地図は一応の安定を見ていたので、ベルヌーイ家もこの 17

世紀以降スイスのバーゼルに新しい安住の地を見出した。スイスは中世以来の長い独立の戦いの末、三十年戦争の講和（ウェストファリア条約）後独立を勝ちとった誇り高くかつれっきとした新教国であった。よく知られるようにスイスの永世中立はこれ以降今日まで一度も失われたことはない。

バーゼル市政においてもベルヌーイ家は重きをなし、中心の市街名にも「ベルヌーイ通り」(Bernoullistrasse) があることはすでに述べた。スイスを本拠とした宗教改革者カルヴァンも一時バーゼルを活躍の地の一つとしたが、そのバーゼルの知的、精神的伝統は新教徒ベルヌーイ家にはふさわしいものであった。カルヴァンの禁欲的な改革主義は相当に苛烈で、「寛容」の精神を以て対抗したエラスムスは世に「カルヴァン対エラスムス」の対決でも知られるが、同じくバーゼルで生涯を過した。このように重層をなす神学的雰囲気の中で若き日に修練を積んだのがベルヌーイ家の人々であり、これは終生変わることなくこの人々の精神の背骨となった。

< 国別人名集 >

1.3 なぜ $dx=0$ ではないのか

本書の目的ではないが、バーゼルのもう一人のビッグ・ネームはオ

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

イラーである。オイラーは少年時代からベルヌーイ家に出入りし、ダニエル・ベルヌーイとはそれこそ‘竹馬の友’であった。ヨハンを家庭教師とし、ダニエルと机を並べた。同家に連なる者としてオイラーは終生思慮深く純朴と云われるほど信仰に篤い敬けんな人であった。『キリスト教人名辞典』にも「オイラー」の項がある。

人の宗教上の信念は学問にも影響を与える。無限小 dx は本来ライプニッツゆずりであった。数学史家下村寅太郎はライプニッツの数学を「神的数学」と評したが、しかし、例のイギリスの観念的経験主義哲学者バークリーに云わせるなら、無限に小さい dx とはどう考えても結局 0 に他ならないのではないか。ことに二階導関数 $d(dx)$ つまり $(dx)^2$ とは何かと喰い下がるバークリーをオイラーは少しも騒がず（論争にもならず）神学的に退けている。人の有限思考で「無限」まで完全に押切ることはできない。無限小の概念には人間の観念思考からは近付き難い神的深遠さが秘められている。たしかに人間の観念による有限思考に従うならバークリーは正しく、$dx = 0$ となって、高校の数学の先生が避けたい場面のみならず、現在の微分積分学はのっけから破綻してしまう。オイラー研究者はその不可思議にますます魅入られるだろう。全微分積分学を神学的支点のみで救済したオイラーの力量には驚嘆する。人の有限思考に合理的な判断停止を命じる宗教は一般に考えられるほど不合理なものではない。

1.4 モーペルテュイ

ベルヌーイ家と親好がありオイラーにも影響を与えたのは、いく分玄人的になるが、同じくバーゼルの物理学者、数学者で「最小作用の原理」のモーペルテュイである。モーペルテュイは、ガリレイ、ホイヘンス、ニュートン、ライプニッツ、ベルヌーイ家、オイラーに共通に見られる時代思想を典型的に体現した人で、神は「摂理」として世界を最善、最良の状態に創造したと規定した（ラウエ『物理学史』も

参照)。実際、これが変分法の思想的原型となった。その発想はあまりにも神秘的で、歴史的には忘却されがちである。実際、力学のテキストにも一部を除きもはや出現しないが、大きな発想の始まりはあいまいではっきりしないことがしばしばである。ヨハン・ベルヌーイは最初の変分法問題の一つとして「最速降下線」の課題を与えその解の導出に貢献したが、いまだ一特殊問題とはいえ、モーペルテュイ、そしてベルヌーイ家、オイラーのバーゼル組によって始まった変分法はラグランジュに受け継がれ、解析力学や力学系の研究として物理学の全分野での有力な方法として、さらには数理経済学において時間最適化の標準的理論として現在に至っている。

しかし、「ラグランジュ関数」、「ハミルトン関数」が今や主役になった解析力学では、本家最小作用の原理は一定理まで落とされる悲哀を味わっている。一説には、ラグランジュがモーペルテュイを嫌ったからとも伝えられるが、そればかりではなかろう。モーペルテュイの晩年の住居もまたは今日もバーゼルの中心市街の一角に現存する。

〈バーゼル写真〉〈地図〉

1.5 ベルヌーイ家を生み出したもの

元があってものごとは生じる。筆者は数学の使用者であり愛好者で

あるが、数学をめぐるいい雰囲気や楽しさが薄れてきた感じがするのは、僭越であるが、由って来るところが忘れられているからではないかと感じる。戦後数学の指導的地位にあった弥永昌吉が『現代数学の基礎概念』(1944) に述べているところを紹介しよう。

> —概念の形式的説明を与えるのではなく、その由って来るところ、その数学全体における在りかを示し、延いては「学問」におけるその地位をも明らかにするのに役立つのが目標である。それは少なくとも数学そのものの歴史を省みながらなされなければならない。歴史の反省は煩瑣な閑事業では決してない。学問の本質の把握のためにむしろ必然的な手段である。かつは古典において創建者の言に接するのは心楽しき業である。—

数学者でなくとも自分の関心を強く引く創建者の言に接するのは楽しい。創建者たちの時代にはその時代特有の雰囲気がありその中に創建者たちがいたことには、奥ゆかしい気持ちがする。

では、ベルヌーイ家の人々やオイラーを包んでいた雰囲気はどのようなものであったろうか。

—教会が一般に干渉を止めたとしても研究者の宗教的見解は何時の世でも彼らの物理学上の活動に影響を与えた。もちろん研究者個人の見解は公式の教会の教義とはたしかに別個のものであり、むしろ哲学的に影響されたとみるべきものであろう。ケプラー、デカルト、ライプニッツ、ニュートンはみなこの事実を腹蔵なく述べている。それは18世紀に(モーペルテュイの)最小作用の原理のおり役割を演じた。この時期にカントの哲学が科学的認識と宗教的信仰の完全な独立性を宣言した(『純粋理性批判』は科学者のために書かれた面を否定できない)。それでこの時代より後になると物理学の著作の中に宗教的なものは全然見当たらなくなる。

だからといって決して後世の自然科学者の研究活動が心の奥深く彼

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

らの宗教心と結びついていなかったという結論にはならない。学問上の真理の体験が何ら化の意味において theoria すなわち「神の摂理」であるという命題は、まさにそれらのなかに**最高のものに対する心からの呼びかけ**に違いない。知識に向かってそれが応用されるとかを考慮することなしに、ひたむきに努力することは「何千年を通じて人間の本質的傾向であり、人間の高貴な本来性質の象徴」（K. ヤスパース）である（v. ラウエ[4]『物理学史』)。

1.6 それは始まりなく始まる（バレンボイム）

そうは云っても、偉大なことがらの始まりはしばしばハッキリしない。ものごとの形成は形があるようでいてそれとはわからない。始まりの不完全さが却ってこれから起こることの偉大さを仄めかしている。

ベートーベンの交響曲（シンフォニー）がすべて第 5 番『運命』のように‘ド、ド、ド、ドーン’という序を持つわけではない。第 9 番『合唱付き』mit Schlusschor の冒頭では、どこからともなく、荘厳でかすかな、にもかかわらず耳をすませばはっきりと精ちに有機的に交響する弦のさざめきで、今何かが始まっているきざしが神秘的にほのめかされる。It begins without beginning.　ある指揮者はそう語る。

作曲家であり評論家でもあった諸井三郎の評：

> —第一主題の呈示に先立って現れる序は、第一主題に対しきわめて有機的関連を持ち、かつまた序的な性格を巧みに表現している点においてすぐれたものである。それはまず A 音

4) 1953 年 Watson, Crick があの核酸の二重らせんの構造を発見したとき X 線結晶学 Xray- Crystallography の大きな助けがあったが、この X 線結晶学は 1914 年ラウエの研究を以て始まる。ラウエが物理学史を「もう一度現代の見解のもとに」しあげたのが『物理学史』(1947) であるが、ここに述べられた科学者の精神はベルヌーイ家にも見出される。

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

> とE音との作る完全五度によって始められるが和音として第三音を欠いているためにはなはだ不安定な（したがって序的な）気分を作り出している。この五度音程がピアニシモでなっているうちに、第一主題冒頭の最も重要な音形が導入されてくる。—

楽譜

ほんとうをいえば、微積分の歴史はベルヌーイ家を以て始まり、ほどなく出身のオイラーがそれを引き取った。ニュートンとライプニッツ—どちらであるかはとにかくも— で、とにかくも微積分が始まったことは研究の歴史年表上の事実ではあるが、それを文字通りの「始まり」と見るにはあまりにも異相であり、期待とはかけ離れている。ニュートンの『プリンキピア・マテマティカ』は微積分学の旧約聖書「創世記」とも言えようが、しかしながらデカルトの革命的な代数記法つまり「数式」はまだほぼ皆無、著作者本人の勤厳実直、狷介なキャラクターを示すかのように『幾何学原本』の論証流儀をそのまま踏襲している。原文はラテン語、普通人にとうてい読めるものではなく、それだけに微積分学テキストというものではない。作品はむしろ荘厳性に満ちており、ハレー（その名の付いた慧星の発見者）による「故人賛辞」に見るように、神の創造の秩序、その摂理と経倫を体するも

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

のとして、歴史上さん然と輝いている。

他方、ニュートンに対し優先性を争うライプニッツも『●●』によって微積分学の到来を予告をした。だが、作品は全体として明確性を欠き、理論の形をなすには継承者（●●）ベルヌーイ、オイラーの才能を持たねばならなかった。当初、ベルヌーイにとっては「何かなぞのようなもの」に見えたという。にもかかわらず、現代の微積分につながる線としては、積分（実は和）記号 $\int$[5] の導入（ライプニッツ）、用語「積分」の導入（ベルヌーイ）、微分方程式の求積（同）、体系『無限小解析』の完成（オイラー）によって、成形としては明白に‘ライプニッツの線’の上に現代があるといってよい。

学者のパーソナリティーも多少の波乱要素だが、多くは偉大な始まりの中ではエピソードどまりである。ニュートンも相当「性格が悪い人」で（ホーキング）、「遂に心臓を破った」（ニュートン。ライプニッツ歿の折）などはおやおやとさえ思わせる。そのニュートンを、「イギリス人の助けは必要としない」としたベルヌーイ家はどうか。たがいの嫉妬と敵対的な対抗心と内輪ケンカも結果的には語り草にすぎない。時代が下れば、ベルヌーイとニュートンの間にも交信や訪問があったようで、やはり学者の世事はふつう人の関係からは推し量れず、それでいて表面上よりは分け隔てがない点は、学者という人類のありがたい特典である。実際、学者も苦労は多いが、この幸福がなければ偉大な事績は残せない。

5) sの変形。ラテン語表記のsは上下に異常に長く伸び、fとの見分けが困難であった。

第2章 ヤコブ・ベルヌーイ

2.1 ヤコブ・ベルヌーイ

ヤコブ・ベルヌーイ（●●）を以て、ベルヌーイ家の天才歴は始まる。父ニコラス・ベルヌーイ（●●）はヤコブに神学者になることを望んでいた。「神学」（theology）は日本人には想像できないが、「神」についての学、ことにキリスト教の教養、歴史、教義、信仰生活の論理につき組織的に研究する学問である。キリスト教は古代、中世以来、長くヨーロッパの精神、文化の基盤であったから、学問の体系においてもすべての学問の筆頭格の重さと権威を持っていた。聖職者も民衆の信仰の良き導き手、守り手として尊敬を集め、社会的威信にも高いものがあり、職業としても安定した選択であった。近代初頭の多くの数学者は青年時代に神学の修練を受け、その宇宙論は発想の基礎教養となった例は多い。ことに親が神学聖職者のキャリアを望んで学資を与え、しかしながら本人の関心がふくらみ神学に満足できないという進路がお決まりであった。もっとも数学者となってからも神学論文の著作を残したのはオイラー、そしてほぼ同時代の確率論のベイズ（●●）であった。特にベイズは自身が新教（プロテスタント）の牧師であり、オイラーも牧師の子であって終生信仰深い人生を送った。ヤコブは聖職者よりも数学の道を選ぶ。

さて、ヤコブ・ベルヌーイといえば「アルス・コンイェクタンディ」Ars Conjectandi（訳して『推測術』）が今日知る人ぞ知る確率論の一

大古典だが、その大作およびその第 II 部に含まれる神秘的で—そうは見えないが— 今なお数学のそこかしこに姿を見せる「ベルヌーイ数」は後でまとめてゆっくり述べることにし、ここでは、ヤコブ・ベルヌーイの広汎な業績紹介の一端として、彼の発想を以て始まり弟ヨハン、さらにオイラー、ラグランジュに受け継がれて今日の「変分法」となった、最初の課題「最速（短）降下線（ブラキストクローネ）」をさしあたり見ておこう。

変分法は現在は「解析力学」「力学系」を支える数学的方法となっているが、最初は幾何学の曲線論として出発した。その誕生には次のような幾何光学の前史がある。

> —光は物質 A 中の点 P(0, 1) から出発して A の中を右下に進み、物質 B との境界 x 軸上の点 $(x, 0)$ で物質 B へ入射し、物質 B 中では屈折して点 Q(1, −1) へ達するものとする。いま、境界へ入射する角（入射角）を i、境界から屈折して出て行く角（屈折角）を r、光の A 中、B 中での速さをそれぞれ $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ とするとき、光の進路 P → X → Q を決定せよ—

この X（すなわち x）を定める法則は幾何光学で「スネルの法則」といわれ、

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}$$

である。たとえば $v_{\mathrm{A}} > v_{\mathrm{B}}$ のときは図の如く直線 PQ より上側に屈曲する（$v_{\mathrm{A}} < v_{\mathrm{B}}$ のときは、逆に経路は下側へ屈曲する）

＜＊2＞

要約すると、光は速さの大きい方向へ屈曲し、かつ、経路の方向（角 i, r）の sin は速さに比例している。

ホイヘンスとフェルマーはスネルの法則は経路 $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ の到達時間

$$\frac{\mathrm{PX}}{v_{\mathrm{A}}} + \frac{\mathrm{XQ}}{v_{\mathrm{B}}}$$

が最短となるように $\mathrm{P} \to \mathrm{X} \to \mathrm{Q}$ が決まるとすれば、導かれることを示した。実際、上式を x で

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{v_{\mathrm{A}}} + \frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{v_{\mathrm{B}}}$$

と表わし、これを x で微分すると

$$\frac{x}{v_{\mathrm{A}}\sqrt{1+x^2}} - \frac{1-x}{v_{\mathrm{B}}\sqrt{1+(1-x)^2}} = 0$$

から、たしかに

$$\frac{\sin i}{v_{\mathrm{A}}} - \frac{\sin r}{v_{\mathrm{B}}} = 0$$

が出る。

たとえば A が空気、B が水なら $v_{\mathrm{A}} : v_{\mathrm{B}} = 1.333 : 1$ であって、

$$x =$$

$$\sin i = \qquad (i = \qquad)$$
$$\sin r = \qquad (r = \qquad)$$

このように、ある基準によって経路（あるいは関数のグラフ）を定める方法が「変分法」である。この例では、基準は経路にかかる時間である。J・ベルヌーイはこの光の進路決定に関するホイヘンスとフェルマーの結果にヒントを得て、物体がある曲線に沿って落下するときの「最短時間の問題」を解いた。

最短時間の問題は従前より円弧のような誤った解（ガリレオ）が出されていた問題である。たしかに光の屈曲において、経路が速さの大きい方へ屈曲することで、経過時間を短くすることができるように—ちょうど、道路で運転するとき、多少距離的に遠回りでも高速道路—ハイウェイとかターンパイクなどと云われる— に乗ることで、時間を短縮できるように— 物体落下の幾何学においても、重力加速度によって下方における速さが大きいので、落下経路として斜めに線形に落下するよりも、さらに下方に屈曲することで、落下時間を最短にできる。あらためて、この最短時間の曲線である「最短降下線」を正しく求めることが課題となる。

問題は、弟ヨハン・ベルヌーイが主催した‘コンペ方式’で研究されたが（兄に対する挑戦の内心の意図があった）、ヤコブもヨハンも正しい解に達していた。この最短降下線の歴史的問題を現代風に解いてみよう。フェルマーの原理のアナロジーから、無限に薄い無限個の屈折層があると考えると、

＜＊7，図＞　Vanner p.165

$$\frac{v}{\sin\alpha} = K$$

となっている。α は曲線の方向（鉛直となす角）、v はその点での速さである。落体の力学から、g を重力加速度として

$$v = \sqrt{2gy} \qquad (y \text{ は垂直落下距離})$$

また、y' を微分係数とすると、

$$\sin\alpha = 1\Big/\sqrt{1+y'^2}$$

したがって

$$\sqrt{1+y'^2}\cdot\sqrt{2gy} = K$$

これから、$y' = dy/dx$ を解き出すと、微分方程式

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}}dy \qquad \left(c = \frac{K^2}{2g}\right)$$

を得るが、$\sqrt{\ }$ 内の分母を処理するため

$$y = c\cdot\sin^2 s = (c/2)(1-\cos^2 s)$$

と変換すると、容易に積分（微分方程式の解）は求められて

$$x - x_0 = cs - (c/2)\sin^2 s$$

となる。s を助変数とする点 $(c(s),\, y(s))$ の軌跡は「サイクロイド」（cycloid）とよばれ、これが最短降下線の解である。この「サイクロイド」は‘擬円’（"-oid"は擬〜）を意味する。実際 $x_0 \equiv 0$ なら、

$$(n-cs)^2 + (y-c/2)^2 = (c/2)^2$$

から、$(x(s),\, y(s))$ は中心が $c/2$ の高さを時間とともに速さ c で水平に平行移動する円周上の点であって自転車の輪に反射板を付け、これを

動画として撮影すると得られる。X に移動項 cs がなければ円になる。これを円と見間違えたガリレイの結論も全く的外れではなかった。

実は、兄ヤコブも当初同じ誤りをしており、ヨハンの挑戦によって再度の試みでこの正解に達したものである。実際ここに述べた天才的解法は弟ヨハンによるもので、弟ヨハンの着想による解が兄よりまさっていたベルヌーイ兄弟間の嫉妬と競争心がここにもあらわれている。変分法についてはこの段階ではここまでとし、後に発展を述べることにしよう。

2.2 『推測術』の世界

ヤコブ・ベルヌーイ (Jacob Bernoulli, 1654–1705) といえば、何よりもこの‘Ars Conjectandi’(1713) の大作をあげなくてはならない。Ars は英語の (art) すなわち「術」、conjectandi[1] は of conjecturing すなわち「予測の」である。もっとも、純粋数学では‘conjecture’は「予想」といっている。いずれにせよ「予測術」とも訳しうるが、つまりは「確率論」の嚆矢である。

この大作は著者の死後（1705 没）の出版であり、故人の原稿を持っていた甥のニコラス・ベルヌーイが周囲から勧められ、兄弟の微妙な関係の中でその労をとったとまえがきに述べられている。もっとも、大作であることは間違いないものの、分野の最初の大作であることには異論もあり、出版時期が近かったモンモール (●●) の『偶然のゲーム分析理論』のレベルの高さを指摘する説もある。またそれほど時を経ずして出版されたド・モアブルの‘The Doctrine of Chances’(『偶然論……』) は構成内容の詳細、精密さにおいて、一歩進んでいるが、それだけに Ars Conjectandi の先駆性はむしろいっそう強調されるであろう。この 4 部から成る著作が、先立つホイヘンスの『偶然のゲームにおける計算について』De Ratiociniis In Ludo Aleae に触

1) conjectandi について註、入る？

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

発されてはいるが、その後の確率論の発展の礎石となる重要概念を扱っていることは、強調しすぎることはないだろう。

1. 「期待値」の概念を導いた
2. さいころを題材に、「組み合わせ数学」combinatorics による数理の基礎を作った
3. 「ベルヌーイ数」を定義した
4. 今日でいう「大数の（弱）法則」を最初に導いた
5. 社会的、経済的な実際の分析

2.3 『推測術』第 I 部

まずは、4 部作の筆頭であり、原題は文字通り次の通り：

> —ホイヘンスの論文『偶然のゲームにおける計算について』を含む第 I 部、ヤコブ・ベルヌーイによる注釈つき complectens Tractatum Hugenii De Ratiociniis In Ludo Aleae, Cum Annotationibus, Jacobi Bernoullj—

ludo は「ゲーム」、alea は文字通り「さいころ」(aleae はその属格、第二格で「さいころの」) であるが、ここでは「さいころ」は「偶然」と実質的には—カードもある— 同義で、実際フランス語 aleatoire は「偶然的」「確率的」という邦訳が定着している。確率論の思想的ルーツとして知っておくべきであろう。ついでながら、「ゲーム」は今日の von Neumann 流のいわゆる戦略的「ゲーム理論」の内容は含まず、ほぼその確率数理の面を指す。de は前置詞（奪格支配）で多義であるが学問題名では「〜について、関して」を意味し、しばしば「〜論」[2] と訳出される。ratiocinium（ここでは奪格）は ratio と同じく「計算」だが、むしろ広く「考察」「論究」の面を含む。

[2] これは数学、自然科学に限った状況ではなく、人文、社会科学の分野でも……。

表紙写真

この第I部は先輩格の天才ホイヘンスが解いたゲームの計算を紹介し（compectens「含む」)、そのうえで‘私ならこうする’と解いたスマートで技巧的解法を呈示した章で、ゲーム問題解決法集である。先駆者パスカルとフェルマーの問題より一段とレベルは高く、解法も進歩しかつ系統的になっている。各問題にはそれぞれ確定的に確率が比の形式で答として与えられる点からして、たしかに「予測」の名に恥じない内容である。以下、項目だけ掲げる。

命題I 期待値の代数式（a, b 同等に可能なとき）
命題II 期待値の代数式（a, b, c 同等に可能なとき）
命題III 期待値の代数式（a, b 各 p, q の同等に可能性のとき）

以上は商人の流儀による勘定で、公平性から自然に導かれ、今日のテキストにあるような天下りの定義ではない所が興味深い。また「可能性」も $p:q$ のように比で与えられ、今日の1に規格化された確率の概念は一般的ではなかった。

命題IV 3ゲーム先取で勝つルールで、各2勝、1勝でゲームが中断するときの公平な賭け金分配の方法
命題V 第1のプレーヤーは1ゲーム、第2は3ゲームを要する場合

命題 VI 第 1 のプレーヤーは 2 ゲーム、第 2 のプレーヤーは 3 ゲームを要する場合

命題 VII 第 1 のプレーヤーは 2 ゲーム、第 2 のプレーヤーは 4 ゲームを要する場合

これはあまりにも有名なパスカル＝フェルマーの往復書簡で論じられた「分配問題」（あるいは「賭けの中断問題」）である。ここでもやはり分配の公平性がキーワードとなっている。商人間の取引では最大の利害関心であったのだろう。

この機会に一つのエピソードを述べておこう。パスカル＝フェルマーの書簡は 1654 年のことであったが、ちょうどこの年にヤコブ・ベルヌーイは生れている。

以降はさいころ[3] のゲームである。

命題 VIII 第 1、第 2 のプレーヤーは 1 ゲーム、第 3 のプレーヤーは 2 ゲームを要する場合

命題 IX 第 1、第 2 のプレーヤーはベストで 1 あるいは 2 ゲームを要し、第 3 のプレーヤーは 5 までのゲームを要する場合

これはここまでの一般化である以外、とり立ててコメントすべき題材はない。

[3] なお、「さいころ」を外来のように「サイコロ」と書くのは奨められない。これは本来日本語であり「賽（さい）」に由来する。日本の古代の末期白河上皇が賀茂川の水、双六の賽、山法師を天下の三大不如意とした挿話はよく知られている。

表 1.(2 つ)

命題 X 賭け金 a は、さいころを投げ続け初めて 6 が出たときに取得できる。さいころの各回までに取得できる額を求める（実際には、1, 2, 3, 4 回目まで）

命題 XI 同じく、2 個のさいころを投げ続け初めて和 12（6–6 のペア）が出たとき、とする

命題 XII さいころで 2 回の 6 を得るために［それに賭けることが有利、すなわち確率が 1/2 以上で］必要な回数

命題 XIII 2 個のさいころを投げ、2 人のプレーヤーが和がそれぞれ 7, 10 のとき賭け金を得、それ以外は平等配分する

命題 XIV 相手が先手で、相手は先に 6 を出したとき、こちらは先に 7 を出したとき、賭け金を得る

問題 I A, B は 2 つのさいころでプレーし、和が 6 なら A の勝ち、7 なら B の勝ちとする。まず A が投げ、次に B が続けて 2 回投げる。

ついで、A が 2 回投げ、以下同様とし、前者あるいは後者が勝者となるまで続ける。A の見込み対 B の見込みの比はどうなるか。答：10,577 対 12,276。

問題 II 3 人のプレーヤーが、12 枚のトークンを持ち、うち 4 枚は白、8 枚は黒であり、次の条件でプレーする：そのうち誰でも目隠しをしたまま白を選んだ者を勝ちとして、まず、最初に A、2 番目に B、3 番目に C が引く。3 人の見込みはどうなるか。

問題 III A は B と競っていて、それぞれ 10 枚のカードの 4 通りの組 47 枚から、それぞれ 1 枚を 4 枚選ぶことを宣言している。A の見込みと B の見込みの比は 1000 対 8139 と計算される。

問題 IV 以前と同様、白 4 枚、黒 8 枚のトークン 12 枚を持ち、A は B に対し、目隠しをして 7 枚のトークンのうち 3 枚が白であるように選ぶことを賭けている。A の見込みは B の見込みに対し何ほどの比となるか。

問題 V A と B はそれぞれ 12 枚のコインを持ち、3 個のさいころで和が 11 ならば A は B にコイン 1 枚を渡し、14 なら B が A にコイン 1 枚を渡す条件でプレーする。すべてのコインを得た方が勝つ。A の見込みと B の見込みの比は

$$244,\ 140,\ 625 \text{ 対 } 282,\ 429,\ 536,\ 481$$

と計算される。

これらは、ホイヘンスが補章とした問題をベルヌーイが自らの方法で解を与えたものである。

2.4 『推測術』第 II 部

セカンド・パートは、正式題名は

—順列と組み合わせの諸理論を含む第 II 部 Doctrinam De Permutationibus & Combinationibus—

である。この第 II 部は、第 I 部の発展というよりむしろ逆に、予測の基礎としての‘順列と組み合わせ’の基礎諸理論の解説である。実際、正面から「諸理論」doctrinam（doctrina の複数対格）と銘打っていて、まずは正しく正確に数えることから発展して、いわゆる順列（P)、組み合わせ（C）の平板的説明を超え、図形数、パスカルの算術三角形、自然数の累乗和、ベルヌーイ数など数学者には興味深い一段と掘り下げた題材が並ぶ。技巧的というよりその基礎的内容は、ド・モアブル（中心極限定理)、ラプラス（確率の定義、条件付確率、母関数）が縦横に活躍する場を設定するものとして高い評価が与えられる。もっとも、それは数理的面の今日的評価であって、もともと作者の最終目的は社会をも視野に入れた方法革命であった。残念ながら、それは作者の死によって道半ばに終わった（生前出版ではない一理由と推測される)。

さて、まず一見‘確率論’的には見えないが、数えあげの基礎として、自然数の列から始める。

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots \tag{2.1}$$

から、順次、部分和

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \tag{2.2}$$

さらにこの部分和

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots \tag{2.3}$$

を作り、これを同様に

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots \tag{2.4}$$

$$1, 5, 15, 35, 70, 126, \ldots \tag{2.5}$$

. . . .

のようにくり返す。第 6 段以下は略方が 2、これらは

$$\text{第}\, n+1\, \text{段の第}\, k\, \text{項} = \text{第}\, n\, \text{段の第}\, k\, \text{項までの和}$$

のように並ぶ。ベルヌーイは、これらを縦に、かつ順次ずらして

図挿入

. . . .

のように三角形に並べる。これは、まさに「パスカルの算術三角形」に他ならず、別名「二項係数」あるいは組み合わせの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ の表である。そして、先の部分和の関係は、こんどは

$$\text{第}\, n+1\, \text{列の第}\, k+1\, \text{項} = \text{第}\, n\, \text{列の第}\, k\, \text{項までの部分和}$$

となっている。あるいは ${}_n\mathrm{C}_r$ では、これは実は等式

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} = {}_k\mathrm{C}_k + {}_{k+1}\mathrm{C}_k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k$$

であり、$n=5,\ k=3$ なら

$$20 = 1+3+6+10$$

のごとくである。

この等式の証明は難しくない。

$$a = \mathrm{dummy}$$

$$b = \mathrm{dummy}$$

$$c = \mathrm{dummy}$$

$$d = \mathrm{dummy}$$

このように関数を用いて係数を発生させる方法は一般に「母関数」generating function といわれ、今後‘飛道具として’よく用いられる（例えば、ラプラス）。

各列 I, II, III, IV, ... は図形的にもうまい関係となっている。II の数を次々と付け加えていくと、三角形の列

＜＊12＞　(III)

が生成されるので、III は「三角数」とよばれる。

これら三角数（III）を次々と1段、2段、3段、4段の‘ピラミッド’状に立体的に積んで行くと、当然、〇が3次元で

＜研究 I＞ この公式は高校数学的にも難なく導ける。よく知られた関係式

$${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$$

を変形した、差分（漸化式）の関係

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} - {}_n\mathrm{C}_{k+1} = {}_n\mathrm{C}_k$$

を利用する。ここで、$n \to n-1,\ n+1 \to n$ の添字下げを順次 $n = k$ となるまで繰り返し（ただし ${}_k\mathrm{C}_{k+1} = \circ$ とする)、これらをすべて辺々加えると

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} = {}_n\mathrm{C}_k + {}_{n-1}\mathrm{C}_k + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k$$

を得る。

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35, \ldots \text{（個）} \tag{2.6}$$

積み上がった正四面体が順次生成される。よって IV は「四面体数」「ピラミッド数」と呼ばれる。次に四面体数 IV の積み上げで、V が生成されるが、これらは純数理的なもので、直観的に認識はできない。

これら全体として、I, II, III, IV,. . . を各次数の「図形数」(figurate numbers) という。図形数は古来から知られるが、ベルヌーイもこれらが図形数であることを指摘している。すなわち、「パスカルの三角形」のある方向には図形数が神秘的に隠されている。いずれにせよ、図形数 V, VI,. . . は空間的に生成できないので、名称も一定しない。

	通常の名称
I	（定数）
II	自然数（等差数列）
III	三角数
IV	四面体数（ピラミッド数）
V	ピラミッド的四面体数

以上の構成から数列、その和としての性質もある。II は等差数列であるから、その和はよく知られるように、‘俵積みの公式’

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

であって、この公式は文字通り三角数（俵積み式）に他ならない。他方 ${}_{n+1}\mathrm{C}_2$ であるから先の部分和関係から

$${}_{n+1}\mathrm{C}_3 + {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_2 \quad (n \geqq 2)$$

つまり、恒等式

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \sum_1^n \frac{k(k-1)}{2}$$

が出て、左辺の操作から $\sum k^2$ が

$$\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

が '一発で' 導出される。ベルヌーイはこの要領で順次 $p = 3, 4, 5, \ldots$ に対して、関係式

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{p+1} = {}_{p}\mathrm{C}_{p} + {}_{p+1}\mathrm{C}_{p} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{p} \quad (n \geqq p)$$

の左辺

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}$$

を分解し、自然数の累乗和 s_p の一般式

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = (n\,\text{の}\,p+1\,\text{次の多項式})$$

に達した。以下はその結果である。

表 2.1　多項式 ψ の係数

次数 p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	(1/2)*	(1/2)									
2	(1/6)*	(1/2)	(1/3)								
3		(1/4)	(1/2)	(1/4)							
4	(−1/30)*		(1/3)	(1/2)	(1/5)						
5		(−1/12)		(5/12)	(1/2)	(1/6)					
6	(1/42)*		(−1/6)		(1/2)	(1/2)	(1/7)				
7		(1/12)		(−7/24)		(7/12)	(1/2)	(1/8)			
8	(−1/30)*		(2/9)		(−7/15)		(2/3)	(1/2)	(1/9)		
9		(−3/20)**		(1/2)		(−7/10)		(3/4)	(1/2)	(1/10)	
10	(5/66)*		(−1/2)		1		−1		(5/6)	(1/2)	(1/11)

* : ベルヌーイ数、　　** : 誤り訂正

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(2n+1)n(n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{(2n+1)n(n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}$$

実は、ベルヌーイの計算には誤りがある。いくつかのチェック・ポイントは

1. n までの累乗和であるから、$n=1$ に対しては 1
2. 導出の上で、$n(n+1)$ はいつも維持されるから、式は $n(n+1)$ を因数として含む。したがって $n=-1$ で 0
3. 下記の隣接比のパターン以上から、$p=9$ で一カ所の誤りを検出した。

2.5 しま模様のフォルムの不思議

この係数の表には著しい特徴と重要な数学的真理（ベルヌーイ数、リーマンの ζ 関数など）が隠されている。まず一見してわかることは；

n までの p 乗和 s_p は

(1) n の $p+1$ 次多項式であり
(2) 最高次 $p+1$ 次の係数は $1/(p+1)$、p 次の係数はつねに $1/2$
(3) $p-1$ 次の項も欠けない

これら $p+1,\, p,\, p-1$ 次の 3 項がまとまりを作るパターンとなっている。これに次ぐ低次の項は

(4) $p-2,\, p-4,\, p-6, \ldots$ 次の項が欠落
(5) $p-3,\, p-5,\, p-7, \ldots$ 次の項は残る帯状のスッキリした‘しま模様’のフォルムとなっている。

さて、各係数について検討する。対角線には $1/2$ が p 次の項として並び、その一段上は最高の $(p+1)$ 次の項が $1/2,\, 1/3,\, 1/4, \ldots$ として並ぶが、この隣接する項の比は

$$2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ \ldots$$

となっている。念のため対角線の $1/2$ の項の隣接項の比は、もちろん

$$1,\ 1,\ 1, \ldots$$

である。次に、対角線の一段下の $p-1$ 次の項の並びでは、隣接項の比は、こんどは

$$3/2,\ 4/3,\ 5/4,\ \ldots$$

となっていることに気づくだろう。さて想定される $4/2\,(=2),\, 5/3,\, 6/4, \ldots$ に相当する $p-2$ 次の項は欠け、次段の $p-3$ 次へ行くと、隣接項の比

$$5/2,\ 6/3,\ 7/4, \ldots$$

が表われる。次の $6/2\,(=3),\, 7/3,\, 8/4, \ldots$ の比は欠けるが、一段下では $p-5$ 次の

$$7/2,\ 8/3,\ 9/4, \ldots$$

が見えて来る。

2.6 ベルヌーイ数の由来

　このように左上から右下へ係数の並びをフォローして行くと、著しいしかも単純な隣接比のパターンが見えてくる。したがって、各並びにおいてこれら隣接比を次々と連乗し、かつ初項を与えればこれらの係数は完全に決定される。

＜例＞ $p-3$ 次の係数の並び（対角線の 3 段下）を見よう。隣接比 $5/2, 6/3, 7/4, \ldots$ の 4 番目までの連乗は

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{5}$$

これに初項 $-1/20$ を乗じて首尾よく $-7/15\,(p=8)$ を得る。同様に $p-1$ 次についても確かめるとよい。

　一般に $p-3$ 次の係数は、初項を $B=-1/30$ として

$$B\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

であり、同様に $p-5$ 次の項の係数は、初項を $B=1/42$ として

$$C\cdot\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$$

などで、以下、同様である。なお、これらのルールは、対角線の直下段の $p-1$ 次の係数にも通じ、簡単に、$A=1/6$ を初項として

$$A\cdot\frac{p}{2}$$

で与えられる。このように、係数を左上から右下に並べたときの隣接比にルールがある以上、これら係数を決定するのは、係数表の第 1 列に並んだ

$$A=1/6,\ B=-1/20,\ C=1/42,\ D=-1/30,\ E=5/66,\ldots$$

（実は $F=691/2730,\ G=7/6,\ldots$）であることがわかる。これらを—そして、ベルヌーイによれば、これらの数だけを符号を含めて—

「ベルヌーイ数」という。最初の例外を除いて、偶数の p に対応してのみ定義される。

$$
\begin{aligned}
1^p + 2^p + \cdots + n^p =& \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{p}{2}An^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot3\cdot4}Bn^{p-3} \\
&+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}Cn^{p-5} + \cdots
\end{aligned}
$$

オイラーが計算した分だけ、このベルヌーイ数をあげておくと、

$$
\begin{aligned}
&B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \text{(以上はオイラーによる)} \\
&B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \\
&B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{6}{7}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{18} = \frac{43867}{798}, \\
&B_{20} = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22} = \frac{854513}{138}, \quad B_{24} = -\frac{236364091}{2730}, \\
&B_{26} = \frac{8553103}{6}, \quad B_{28} = -\frac{23749461029}{870}, \quad B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}
\end{aligned}
$$

＜研究 II ＞

ベルヌーイ数は、無理数（実際、超越数）である π, e などと異なり有理数であることが特徴であるから、まずその分母、分子には特別の関心が向けられる。ことに分子について

（式が入る？）

が知られている。

ベルヌーイ数の不思議な威力（魅力）は、解析学（微分積分）、整数論に出現することで、そのほんの一端は、先にも紹介した

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{（バーゼル問題）}$$

で、この $1/6$ が最初のベルヌーイ数 A である。それ以外でも

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{2q}}$（一般の正偶数）
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{s}}$（$s =$ 複素数）［リーマン ζ 関数］
3. 逆三角関数 arctan などの級数展開
4. オイラー＝マクローリンの和公式

などで大活躍するが、スペースの都合で本章では扱わない。

ベルヌーイ数は当初ベルヌーイの定義よりずっと重要な数であって数学の舞台をしっかりとささえている。「アルス・コンイェクタンディ」はふつう確率論の書とされているが、数学の歴史的基本書でもあり、それもヤコブ・ベルヌーイの大きな功績である。バーゼルにおいて、少年時代からベルヌーイ家に出入していたオイラーの蔭にややもすれば隠れがちであるが、オイラーの肩を後から押したのはベルヌーイ・ファミリーの人々である。東洋のことわざのごとく「元ありて末あり」である。

さて、ベルヌーイ数を生成するルールはどのようなものであろうか。オイラーの計算では、すでに述べたように

$$\mathit{1},\ -\mathit{1}/\mathit{2},\ 1/6,\ -1/30,\ 0,\ 1/42,\ 0,\ -1/30,\ \ldots$$

であって、ベルヌーイの定義は第 3 項以下、1, $-1/2$ はオイラーによるものである。いずれにせよ、特別に「ベルヌーイ数」とはいうものの有理数であること、符号が交代することなどを著しい特色とする。もっとも、今日のテキストには、符号を省いたり、奇数項の 0 をカットして付番する表し方もあり、多少の混乱を招いている。そこで一応、以下では高木貞治『解析概論』にしたがう。

見かけによらず重要なのは第 2 項の $-1/2$ である。この $-1/2$ を軸として大展開が起るので、ベルヌーイのオリジナルの定義は第 3 項以下だからどうでもいいものの、これを $1/2$ とするのではドラマは見られない。

’枠のみ4行分’

2.7 ベルヌーイ数の生成

ベルヌーイ数は累乗和 $s_p = \sum k^p$ の表式から由来するが、これらが生成する直接的関係式はどのようなものか。それがわかれば、めんどうな累乗和の式に苦労することはないが、実は、ベルヌーイ数を生成する母関数はある。ただ、それを導き出すことはなかなか—できそうで—うまくできない。『解析概論』が手際よく説明を与えている（第64章）。ただし、高木は符号を除いたものを B、入れたものを b と表記している。以下では、b を B と表記することとする。

そこで、多少天下り的だが、次のような左辺の関数を級数展開して $B_0, B_1, B_2, \ldots$ が得られたとしよう。

$$(\sharp) \qquad \frac{z}{e^z - 1} = B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots$$

$e^z - 1$ を展開し、等式

$$\left(z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right) \times \left(B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots\right) = z$$

に持ち込み、z、ついで $z^2, z^3, \ldots$ と係数を合わせて行けば、実際に

$$B_1 = 1,\ B_2 = -1/2,\ B_3 = 1/3,\ B_4 = -1/30,\ B_5 = 1,\ B_6 = -1/42, \ldots$$

が順次得られる。これら $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ が

$$\sum k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

を生成することを証明しよう。（なお、母関数の展開は、もっぱら代数的処理の目的のためであって、その収束は問わないのが通常である。少なくとも、ラプラスまではそうであった。収束を厳密に要求したのはコーシー、ワイエルシュトラスからであって、その後は複素関数論の中へ収容されることとなった。またそうであってこそ、「ζ 関数」においてベルヌーイ数に重要な役割が与えられるのである。）

したがって、この $(\sharp)$ を「ベルヌーイ数の母関数」という。（第一段）

これを証明するために、この母関数を拡張した（x を含む）次の新たな母関数を考えよう。$B_0, B_1, B_2, \ldots$ は、当然、定数でなく x の関数となる。すなわち

$$\begin{aligned}\frac{ze^{zx}}{e^z-1} =&B_0(x)+B_1(x)z+\frac{B_2(x)}{2!}z^2\\ &+\frac{B_3(x)}{3!}z^3+\cdots\end{aligned}$$

これら $B_0(x), B_2(x), B_3(x), \ldots$ を「ベルヌーイ多項式」という。明らかに、$x=0$ とおくことで、ベルヌーイ数が $B_0(0)=B_0,\ B_1(0)=B_1,\ B_2(0)=B_2,\ B_3(0)=B_3, \ldots$ として求められる。

この左辺は

$$\begin{aligned}&\left(B_0+B_1z+\frac{B_2}{2!}z^2+\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots\right)\\ &\times\left(1+xz+\frac{x^2}{2!}z^2+\frac{x^3}{3!}z^3+\cdots\right)\end{aligned}$$

で、これを右辺に等しいとおくと、一般に

$$B_n(x)=B_0x^n+B_1\binom{n}{1}x^{n-1}+B_2\binom{n}{2}x^{n-2}+\cdots+B_n$$

たとえば

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-1/2, \ldots$$

などが出る。（第二段）

ところで

$$\frac{ze^{z(x+1)}}{e^z-1} = \frac{ze^{zx}\cdot e^z}{e^z-1} = \frac{ze^{zx}}{e^z-1} + z\cdot e^{zx}$$

より、z^p の項を比較して

$$B_p(x+1) - B_p(x) = px^{p-1}$$

ここで p を $p+1$ として、'きれいな関係'

$$B_{p\,+\,1}(x+1) - B_{p\,+\,1}(x) = (p+1)x^p$$

が得られた。ここまで来れば、あとは $x = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n$ として加えればよい。すなわち、

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p = \frac{1}{p+1}\{B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\} + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \binom{p}{1}\frac{B_1}{2}n^{p-1} - \binom{p}{3}\frac{B_3}{4}n^{p-3} + \cdots$$

となり、首尾よくベルヌーイの与えた式に到達した。(証明終)

以上、「ベルヌーイ数」を拡張した「ベルヌーイの多項式」を経由する形となったが、巧妙な多項式運用が含まれている点、この多項式なしで結果に達することは否定的と思われる。また、ベルヌーイ数をいきなり母関数で与えたことにも多少の引け目が感じられる。とはいえ、以上の証明を最近のテキスト中に見出すのは稀なので、これをやさしく解説することには一端の価値はあるであろう。

2.8 ものいい

ここまでは「ベルヌーイ数」を天下り式に母関数によって定義し、これから累乗和を導き出した。実際、ほとんどのテキストがベルヌー

イ数を母関数で定義している。しかし、本来は「ベルヌーイ数」はむしろ累乗和によって定義されたから、これでは逆で相当に違和感が残る。そこで、（本来の）ベルヌーイ数が、その母関数を自然に導くことを示そう。

$(k+1)^{p+1}$ の二項展開より

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j$$

ここで $k = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1$ を代入して加えると

$$(\sharp) \qquad (n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} s_j$$

ただし、s_j は j 乗の和で

$$s_j = \sum_{k=1}^{n} k^j \qquad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ p)$$

を得る。s_j は n の多項式で、$s_0 = n$、さらに $s_1 = n(n+1)/2,\ s_2 = n(n+1) \times (2n+1)/6, \ldots$ は既に見た。ここで # の n の一次の項に着目すると、その係数 B_j につき

$$p + 1 = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j$$

ここで $B_0 = 1,\ B_1 = 1/2$ であり、また $B_2,\ B_3, \ldots$ は（ベルヌーイの定義による）ベルヌーイ数である。左辺を右辺の $j = 1$ の項に繰り入れ $B_1 - 1 = -1/2$ をあらたにおくと

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j = 0 \qquad (B_j = -1/2)$$

後日、差し替えページあり

2.9 ベルヌーイの独壇場

「リーマン予想」であまねく知られる「ζ 関数」

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

が Γ 関数で

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

として表わされることはよく知られている。実はこれがベルヌーイ数の活躍の場を開くのであるが、まずこれを示しておこう。

これは意外に順当で、まず

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= k^s \int_0^{\infty} e^{-ku} u^{s-1} du \qquad (t = ku)\end{aligned}$$

であるから、これを使って

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{N} e^{-ku} \cdot u^{s-1} du$$

を得る。この積分中の等比数列の和は、もちろん

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-ku} = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{e^{-Nu}}{e^u - 1}$$

となる。故に、積分を 2 つに分かれ

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du - \int_0^{\infty} \frac{e^{-Nu}}{e^u - 1} u^{s-1} du$$

で、結果はもう見えているが、第 2 項は、$e^{-Nu} \to 0\,(N \to \infty)$ に着目すると、$N \to \infty$ のとき $\to 0$ となる。■

ただし、この議論は本来は $\mathrm{Re}(s) > 1$ の元で厳密な議論を必要とするのだが、大まかな結果でお許し願いたい[4)]。

4) 高橋礼司『複素解析』東京大学出版会など参照。

２ページ分後日差し替え

２ページ分後日差し替え

「コタン」の世界はベルヌーイ数と深く通じている。すでに見た所である。実は「コタンの世界」はゼータ関数 $\zeta(s)$ とも通じていて、これがここで示したい最初のことがらであり、これから「リーマン予想」に出現する有名な「リーマンの関数等式」が導かれる。

ここではさすがに「リーマン予想」の本論まで入ることはしないが、コタンの世界を通じて、実は今までにもまして本格的な意味において ζ 関数がベルヌーイ数に根を下していること、「ζ 関数の零点」というリーマン仮説の玄関口まで行ってみよう。

＜＊38＞

まず、留数解析から

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_n}\frac{\cot\pi z}{z^s}dz=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$$

ただし、Γ_n は領域

$$G_n:\,|z|\leqq n+\frac{1}{2},\,\mathrm{Re}(z)>a\,(0<a<1)\text{ の境界}$$

を示すことができる。実際、被積分関数は $z=1,\,2,\,\ldots,\,n$ に一位の極をもつ有理型関数で、$z=k$ における留数は $1/k^s$ ある。

ここで、「n は円弧部分 k_n と区間 $[a-iy_n,\,a+iy_n]$ から成るが、$\int k_n\to 0\,(n\to\infty)$ を示すことができる。

＜＊41＞図

ゆえに

$$\frac{1}{2i}\int_{a+iy_n}^{a-iy_n}\frac{\cot\pi z}{z^s}dz = -\frac{1}{2i}\int_a^{a+iy_n}\frac{\cot\pi z}{z^s}dz + \frac{1}{2i}\int_a^{a-iy_n}\frac{\cot\pi z}{z^s}dz$$

を扱おう。右辺の積分においてはそれぞれ

$$\frac{\cot\pi z}{z^s} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}$$

であるから、最初の積分は

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2i}\int_a^{a+iy_n}\frac{\cot\pi z}{z^s}dz &= \int_a^{a+iy_n}\left(\frac{z^{-s}}{2} + \frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}\right)dz \\ &= \frac{1}{2}\frac{a^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{(a+iy_n)^{1-s}}{1-s} + \int_a^{a+iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz\end{aligned}$$

となる。ここで $1-\mathrm{Re}(s) < 0$ だから 第 2 項 $\to 0\,(n\to\infty)$。

2 番目も同様であり、2 つを併せて、$n\to\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} \\ &= \frac{a^{1-s}}{s-1} + \int_a^{a+iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz + \int_a^{a-iy_n}\frac{z^{-s}}{e^{2\pi iz}-1}dz + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

を得た。以上、複素領域での積分だが、意味する所はおおむね順当に理解できよう。

$0<a<1$ である限り a は無関係だから $a\to 0$ として

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{a-i\infty}\frac{z^{-s}}{e^{2\pi iz}-1}dz = i\int_0^{-\infty}\frac{|y|^{-s}e^{i\pi s/2}}{e^{-2\pi y}-1}dy$$

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{a+i\infty}\frac{z^{-s}}{e^{-2\pi iz}-1}dz = i\int_0^{\infty}\frac{y^{-s}e^{-i\pi s/2}}{e^{2\pi y}-1}dy$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= ie^{-i\pi s/2}\int_0^{\infty}\frac{y^{-s}}{e^{2\pi y}-1}dy + ie^{i\pi s/2}\int_0^{-\infty}\frac{|y|^{-s}}{e^{-2\pi y}-1}dy \\
&= \frac{1}{i}(e^{i\pi s/2}-e^{-i\pi s/2})\int_0^{\infty}\frac{y^{-s}}{e^{2\pi y}-1}dy \\
&= 2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^{\infty}\frac{y^{-s}}{e^{2\pi y}-1}dy \\
&= 2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{-s}}{e^{x}-1}dx
\end{aligned}
$$

とここまではよいが、最後の積分が難物である。ここで工夫がある。すなわち、すでに知っている

＜＊47’＞図

$$
\zeta(1-s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{-s}}{e^{x}-1}dx
$$

を利用すれば、問題の積分を消去することができ

$$
\zeta(1-s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)}\frac{\zeta(s)}{2(2\pi)^{s-1}\sin\dfrac{\pi s}{2}}
$$

すなわち、われわれの求める ζ 関数の関係式

$$
\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)
$$

を得た。これがよく知られる「リーマンの関数等式」(die Riemanische Funktional gleichnung) である。

2.10 バーゼル問題 I

ところで当時の「バーゼル問題」とは、無限級数

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

を求める問題であった。

この背景にはこれより容易な無限級数

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

は有限な和を持たないことが明らかにされていたことがある。実際、この和は $\log n$ に関係し

＜＊ 51 ＞が入る

であって、γ はいわゆる「オイラー定数」（$\gamma = \cdots$）である。γ は e, ●と並んでよく知られる重要定数であるが、その性質についてはほとんどわかっていない。ちなみに、「オイラー＝マクローリンの和公式」によると

＜＊ 52 ＞が入る

で、$n \to \infty$ での発散はきわめて遅いが、それでも和は発散である（だまされてはいけない）。

さて、本題の $\zeta(2)$ は有限で < 2 であることはわかっていた。すなわち、この時代においてすでに無限級数の和の有限、無限の区別は十分に意識されていた。この課題に対し、オイラーの解は‘ド肝を抜く’解決で、こんなことが許されるのか、という後世からのネガティブな評価（18 世紀の数学は「厳密」でない）さえ招いたものである。$\sin x$ は x の多項式（無限であると見なし、方程式 $\sin x = 0$ の次の）解は

$$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \ldots$$

であるから、x 以外に因数分解

$$\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \qquad (\sharp)$$

をもつはずである。他方

$$\sin x/x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \cdots$$

であるから、根と関数の関係から

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{6}$$

これから、所望の

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

を得ることになるのである。この結果のみならず、($\sharp$) は $\sin x/x$ の「無限乗積展開」といわれ、実際正しい。

これは正しかったというだけでなく、18 世紀の数学は厳密でなかった、という批判は、必ずしも正しくないという反論は数学史家の問いもある。それどころか、高校数学と大学数学の間の内容の著しいギャップは、本来、数学の中で 18 世紀の数学に対する適切な理解が欠落しているからであろう。数学の 3K 化の回避する戦略を考える上でこの認識は重要である。

もっとも、オイラーはさすがに気になったらしく、少しも騒ぐことなく

＜＊55’＞が入る

を考える別解を与えていて、これも天才の余裕の面目躍如たる所である。

では余勢をかって、次は $p \geqq 3$ に対し

$$\zeta(p) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

はどうなるかという課題がある。われわれはベルヌーイ数 B_1 を用いて $\zeta(2) = B_1\pi^2$ を得たが、一般に偶数の $p = 2m$ に対しても、再びベルヌーイ数が

$$\zeta(2m) = \mathrm{dummy}$$

という解決を与えてくれる。すなわち、バーゼル問題の一般化

＜＊ 59 ＞が入る

に行き着いた。

実はベルヌーイ数の活躍はこれどころではない。これについては本文に述べることとしよう。

2.11 バーゼル問題 II

オイラーの、'清水の舞台から飛び降りて見せる' ような方法で

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

を示す替りに、大学の微積分のクラス・ルームにふさわしい 'ふつう' のやり方もある。多くのテキストに所収されているフーリエ級数の方法で、その技法に従い、周期関数

$$f(x) = \mathrm{dummy}$$

を三角級数に展開しよう。フーリエ係数は

$$a_n = \mathrm{dummy}$$
$$b_n = \mathrm{dummy}$$

であるから、フーリエ級数は

＜＊ 63 ＞が入る

となる。これがはたして収束しかつ $f(x)$ に等しくなるかはまた別問題である。収束の位相（平均収束、一様収束）の確認、項別積分の保証が求められ、「リーマン＝ルベーグの定理」がそこでは役割を果すが、ここではふれないこととし、フーリエ級数は $f(x)$ に収束することが言えるから、ここで $x = \cdots$ とおくと、

＜＊64＞が入る

を得て終る。多くの人々にとって、このやり方で $\pi^2/6$ を得る方法がまずは平易であろう。

＜＊65＞ 図

2.12 なぜ‘リーマンの’ ζ関数か

ζ 関数は

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

と定義されているが、この定義はリーマンによるもので、オイラーの原定理はこれと異なっていた。上の定義で例えば

$$(\sharp) \qquad 120^{-s} = (2^{-s})^3 \cdots 3^{-s} \cdot 5^{-s}$$

は、展開式

$$\frac{1}{1-2^{-s}} = 1 + 2^{-s} + (2^{-s})^2 + (2^{-s})^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-3^{-s}} = 1 + 3^{-s} + (3^{-s})^2 + (3^{-s})^3 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-5^{-s}} = 1 + 5^{-s} + (5^{-s})^2 + (5^{-s})^3 + \cdots$$

の種にただ一度だけ出現する。このことから、オイラーによれば無限乗積

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdots$$
$$\text{（以下 (素数)}^{-s}\text{による乗積）}$$

が ζ 関数（名称は別として）の定義である。ζ 関数が素数に深いかかわりがあることは、今後さらにはっきりするだろう。

2.13 解析的延長ないしは解析接続のフシギ

「カイセキ・セツゾク」は関数論—正しくは解析関数論—の最も切味の鋭い有用な定理である。実変数の微積分では出会わない思いがけない帰結は‘どうしてそんなことが言えるの？’というとまどいを与え、かえってその凄い内容がわからなくなるくらいである。

たとえば、$s > 0$（実は複素数でもよく $\mathrm{Re}(s) > 0$）に対し

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad \text{（ガンマ関数）}$$

が、関数等式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s > 0$$

を満すことはよく知られるが、この関数等式を‘逆用’した漸化関係

$$(\sharp) \qquad \Gamma(s) = \Gamma(s+1)/s$$

は全然別の働きがある。すなわち $s+1 > 0$ で成り立つから、$0 > s > -1$ に対しても左辺は定義される。

今や本式 $(\sharp)$ が定義式となり、もはや積分による定義は用いられない。実際、これらの s に対しては何と $\Gamma(s) < 0$ である。$\Gamma(\cdot)$ の定義域が $0 > s > -1$ まで延長されたので、$(\sharp)$ で $0 > s+1 > -1$ でよく、よって定義域は $-1 > s > -2$ までさらに延長される。このように Γ 関数は負の整数を除くすべての s に対して定義されることになる。

それだけではない。当初 $s > 0$ に対して積分で定義された Γ 関数はその定義を超えてすべての s に対して定義されたが、実はこの延長はすべての複素数 s（複素平面）まで至ることが証明できる。

その折、当初の定義は形を留めないので、一瞬とまどいないしは混乱も生じる。延長は関数等式によって行われるが、それだけではない。「解析的延長」というように複素数 s の関数として

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

が解析関数であることが強く効いている。ちなみにその値をいくつか与えておこう。

＜＊71＞（数字）（図）

2.14 ζ 関数の解析的延長

ζ 関数 $\zeta(s)$ も当初

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

で定義された。$\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(3) = \cdots$, $\zeta(4) = \cdots$ などが知られていて、$\zeta(2m)$ はベルヌーイ数であらわされた。しかし、$\zeta(-1)$, $\zeta(-2)$, ... はどうだろうか。一見して定義に合わないどころかナンセンスということになる。しかし、それは当初の定義だけとして（その限りで、忘れ）、リーマンの関数等式

＜＊73＞が入る

を別の新しい定義式として—ただし、当初の定義とは $\mathrm{Re}(s) > 1$ では一致し—解析的延長を行う。このときは当初の $\zeta(s)$ の定義は適用されないことに注意しよう。

では計算してみよう。当然ここでもベルヌーイ数があらわれ

$$\begin{aligned}\zeta(1-2m) &= 2(2\pi)^{-2m}\text{判読不能}\frac{\pi(1-2m)}{2}\Gamma(2m)\zeta(2m) \\ &= 2(2\pi)^{-2m}(-1)^m(2m-1)!\frac{(2\pi)^{2m}B_m}{2\cdot(2m)!} \\ &= \frac{(-1)^m B_m}{2m}, \qquad m \geqq 1,\end{aligned}$$

などで、目立つのは負の偶数 $-2m$ に対しては、関数等式から

$$\zeta(-2m) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

であることである。これらを ζ 関数の「自明な零点」という。複素平面の左半平面の零点はこれらに限る。

通用しないとはいえ、$\zeta(s)$ の定義式で 0 になるとは想像もできない所だが、そこが実変数の微積分とは別世界—しかし、そこから延長し隣り合った（接続した）世界—たるゆえんである。ところで、自明な零点以外で

$$\zeta(s) = 0$$

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

となる s はないだろうか。それはあって、複素平面の直線

$$s = \frac{1}{2} + ti \quad (t \text{ は実数})$$

つまりコンピュータ・サーチで $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ の上に極めて多く見出されることがわかっている。だからと言って、‘$\mathrm{Re}(s) = 1/2$ の s に限られる’とは結論できず、あくまで「予想」にとどまる。これを「リーマン予想」（Riemann's hypothesis）というが、直訳すれば「リーマン仮説」である。リーマン仮説はいまだ証明されていない現代数学の一大難問である。

リーマン仮説が証明されれば、素数の分布関数

$$\pi(x) = x \text{ までの素数の個数}$$

に大きな進歩を与える。ζ 関数が素数の分布に関係することは、リーマンよりもむしろオイラーの（素数を用いた）定義からも納得できる所であろう。

とはいえ、ζ 関数の知られたおもな値はベルヌーイ数と π で表わされていることは知っておいた方がよい。‘ゼータの世界はベルヌーイ数で敷きつめられている’とさえいうことができよう。

2.15 ベルヌーイ数の世界は続く

ヤコブ・ベルヌーイは自分の創出した数がこれほど巨大な存在になるとは思ってもみなかったであろう。しかも、超越数 π や e とは違ってベルヌーイ数は有理数であり、それがかえってフシギである。その計算も続く、著者が読んだ『解析概論』（19 ●●年版）には、●●番目まで計算され分子は…桁、分母は…桁、と記している。今ではさらに先まで続いているであろう。ここでは解説しきれない。

その理論的射程もまだ先があるが、たとえば、「フェルマーの最終定理」の証明の中に出現する（結局は証明はできなかったが）「クン

マーの理想数」は、ベルヌーイ数をかなりハードに利用する。また、位相幾何学においても、ベルヌーイ数の活用があるようだが、魅力があるトピックであり、著者も関心を寄せている。

そういうと、ベルヌーイ数はかなり縁遠いムズカシイ異星人のオハナシと思うかも知れない。しかし、「オイラー＝マクローリンの和公式」のように、微積分のクラス・ルームで説明してもいい有用な公式にもベルヌーイ数やベルヌーイ多項式が出現する。この公式はよく知られるマクローリン展開（テイラー展開）の変形であるが、むしろ応用としては別物と考えた方がよい。まず、

＜∗ 76 ＞が入る

であるが、f' のところにこの式自体を入れ子のように使い、かつ係数の積み重なりを勘定すると、まず

＜∗ 77 ＞が入る

が得られる。この形でもかなりの効用があるが、実は出来としては生煮えで、おかしな結果を防ぎ切れない。たとえば

＜∗ 78 ＞が入る

である。オイラー自身も「⋯⋯」（ラテン語で⋯⋯）と注意して、これに剰余項をしっかりと付け

＜∗ 79 ＞が入る

のように作り上げている。これが正式の公式である。

応用として

＜∗ 80 ＞が入る

などが考えられる。

2.16 さいころに潜むベルヌーイアン・スピリット

歴史的にはすべてはさいころに始まると云っても言い過ぎではない。ベルヌーイがさいころの目の和の公式

N 個のさいころについて

$$n\text{ 個のさいころの目の和} = k$$

の確率分布（実際には場合の数）をうまく計算したことから、他の業績も含めて、いくぶんひいき目もあるが、18 世紀の多くの数学上の発展も始まり、それが水面の波紋のように波及した。実際、よく数えている。しかしながら、確率論にとって肝要であるにもかかわらず意外と解析的に詰められていない。ベルヌーイは $n = 10$ まで示すものの最後の方は部分的である。ド・モアブル (de Moivre)、今日のフェラー (W. Feller) は指針は示すが、結果まで達していない。問題自体は簡単だが、母関数、重複組み合わせ、図形数、ベルヌーイ数、包除原理を用いる式処理が必要である。その結果

(1) いかなる n に対しても最初の 6 項 $k = n,\ n+1,\ \ldots,\ n+6$ については何ら難しいものはなく、1, 1, 1, 1, ... から和を重畳的に積みあげた（n 重和分）いわゆる「図形数」

（式が入る？）

となる。ただし「図形数」figurate numbers については種々の呼称がある。

(2) 一般の k については、n 個のさいころの目の 和 $= k$ となる場合の数は、母関数

$$(t^1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)^n = t^n \cdot (1 - t^6)^n \times (1 - t)^{-n}$$

の $t^k\ (k = n,\ n+1,\ \ldots,\ 6n)$ の係数である。この母関数は

1. $(1 - t)^{-n}$ ◇

2.　$t^n \cdot (1-t^6)^n$ ◇

の 2 因子から成り、1. は n 重和分の母関数によって図形数が漸化的に累積する演算で、組み合わせ論的に「重複組み合わせの数」${}_n\mathrm{H}_r$（ある種の二項係数）で表現され、2. は、後半は 1. に対する修正で、

（式が入る？）

から、$\Delta k = 6$ 毎に、1. による図形数をあたかも包除原理で算入あるいは差し引く演算を（母関数で）表している。なお t^n はさいころの目の和の分布の最小（最初）$= n$ を示すことで、分布の左側ヘッダーの位置を決める。以上の結果から、二項係数以上から、最終的な計算の解析的表式は

（式が入る？）

となる。

〈例〉　$n = 16$ のケース

〈例〉　一般の場合

2.17 『推測術』第 III 部

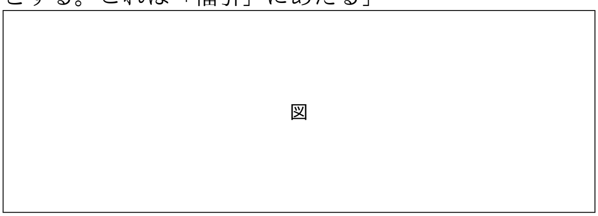
第 III 部は、実践・応用面でさらに進み、賭けにおける確率による公平な分配法、期待額の計算へと展開する。正式題名も

> —さまざまな賭けの分配および偶然のゲームに関する前述の理論の応用を解説する第 III 部 Usum Praecedentis Doctrinae In Variis Sortitionibus & Ludis Aleae—

である。sortitio は sors「賭け」の分配を意味する。そのため、第 II 部の組み合わせ数学から再び確率の課題へ戻って、第 III 部は次の 24 問から成る。きわめて詳細であるが、難を云えば、今日のデカルト流の代数的式記法の発達が十分でないため、冗長の印象が否定できない。また、複数参加者が順次プレーする局面も今日のゲーム理論でいう「展開形ゲーム」の形式であり、いわゆる「ツリー」の表示を用いればより明確になる。もっとも、それは本質的ではないだろう。

ここでは最初の 10 問のみを紹介する。

問 I 第 I 部命題 11 の特別ケース［白、黒のトークン[5] 各 1 枚が入っているつぼから、3 人が順次非復元で抽出し、白を引いた者を勝ちとする。これは「福引」にあたる］



問 II 同、3 人とも白を引かない場合は獲得額［本来ハウスに属する］は 3 人に分配される.

問 III 消去法［勝ち抜き］が適用される。A, B, C, D, E, F のうち、ま

5) 一種の代用硬貨。今日では、購入の後交通機関の利用料金の支払いなどに使われる。

ずA, Bの勝者がCと対戦、その勝者がDと対戦、……とする。

問IV 同、勝者にはその都度2倍の勝ケースが割り当てられる［$1:1$, $2:1$, $4:1$, ...のように勝率が高進する］

答：

図

問V ホイヘンスの付章第3問で第I部にあるが、順列（？）で解く。

問VI 同第4問。

問VII Iと同、ただし絵札1枚を含むカード・デックから引く。［題意ではカードの枚数には定めがなく、必要に応じて「カード・ゲーム」のカードを何セットも用意する。］

問VIII 同、絵札は複数枚とする。

問IX 同、絵札の最大枚数を得た者を勝ちとし、タイの場合は平等分割する。下位枚数には分配しない。［分配は場合の数を分配するものとする。］

問X A,B,C,D4人に、絵札16枚それ以外のカード36枚を含むカードをこの順番に配る。23枚配り終わった時点で、A, B, C, Dはおのおの4, 3, 2, 1枚の絵札を得た。Dは断念して、その権利をA, B, Cのいずれかに売るものとする。その価格はいくらになるか。勝ちの確率はどうなるか。

2.18 『推測術』第IV部

作者が真にめざす究極目的が標榜されている最終部であり、題名も文字通り

—社会的､精神的､経済的(ことがら)に関する前述の理論の応用を教える第 IV 部　Usum & Applicationem Praecedentis Doctorina　In Civilibus, Moralibus & Oeconomicis—

とここまでとかなり響きが異なる。しかも、動詞は「教える」で内容が社会的な有用性をもつことを示唆している。

数学理論はキチンとやるが、それだけが目的だけではない。実際、civilus（ここでは奪格）は「公共」「国家」「社会」「市民」を意味する。当時は、統一された国家の形がようやく形成されつつあった近代の入り口の時代で、その気運が「社会的」「市民的」（その限りで「全体的」）ということばに込められている。向かう先は「文系」なのである。moralia も現在の「倫理的」とは相当異なり—はっきり、別物と考えてよい— 「物質的」でないという意味で「精神的」「心理的」、より今日風には「認知的」といえようか。economicus ももとは（家計の）切り盛り、やりくりであることは多くの知るところであろう。それが社会大になって「経済」economics になった。ここでは「経済の計算」といっておこう。

このように第 IV 部がめざす所は社会の「グランド・セオリー」であり、しかも大言壮語ではなく、その方法の基礎も究極の堅固さを誇る。その一番手が「大数の法則」で、これだけでも偉大な法則であるが、作者はその先を行く前に没した。今日の統計学は『推測術』の基本精神の復興である。

この第 IV 部は 5 章に分かれて周到に準備された雄大な作品で、まず社会における「確率」のコトバ使いから始められている。

第 I 章　ことがらの確実性、確からしさ、必然性および蓋然性についてのいくつかの基本要素

Praeliminaria Quaedam De Certitudine, Probabilitate, Necessitate &　Contingentia Rerum

表 2.2　日本語、英語、原文ラテン語による「確率」関連語彙

確からしい［確からしさ］	probable	probabile
より確からしいこと	more probable	
可能	possible	possibile
認識上確実	morally certain	moraliter certum
認識上不可能	morally impossible	moraliter impossibile
必然［的］	necessary	necessitate
物理上必然	physically necessary	necessitate vel physica
仮説上必然	hypothetically necessary	necessitate vel hypothetica
契約上、制度上必然	contractually, institutionally necessary	necessitate pacti seu institu
蓋然［的］	contingent	contingens
		liberum, fortuitum, casuale
［任意［的］あるいは 僥倖［的］、偶然的］	free	

第 II 章　知識と推側について、推測術について、推側術の議論について、関連するいくつかの一般的公理

De Scieintia & Conjectura, De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata Quaedam Generalia Huc Pertinentia

現代社会でも十分に通用する意思決定の準則が無駄なく適切に述べられており、そこにはストア主義的な倫理を感じさせる。

1. 結論に到達できる場合は推測の余地はない

2. あれこれの議論の重要度［ウェイト[6)]］を（それぞれ）評価するのみでは不十分で、それらを総合して知識を得ことがらの証拠とすべきである。

3. 順方向の議論のみならず反対方向の議論も考慮すべきであって、

6) 今日的意味における可能性の確率（たとえば 0.6 など）を考えればよい。

これらの重要度を正しく量ればどちらの議論が優るか確かになるであろう。

4. 普遍的なことがらに関する判断には間接的で普遍的な議論で十分であるが、個別に関する推測には直接的で個別的な議論が、可能な範囲内で、必要である。

5. 不確実で疑問があることがらについては情報が得られるまで判断を保留すべきであるが、猶予が許されない場合においては、二者のうちどちらも積極的に良くない場合であっても、やはりより適切で、安全で、思慮深く、確からしい行為を選択すべきである。

6. 益がなくとも害のない決定が望ましい。

7. 結果のみで人間の行為を判断してはならない。

8. 付与すべき重要度［ウェイト］の評価を誤ってはならない。相対的に確実を絶対的と誤ってはならないし、これを他人に主張してはならない。

9. すべての意味と必要性と有用性において完全な確実性を得ることは稀である以上、認識上［心の中でこれは］確実を絶対的確実と定めるがよい。

第 III 章 さまざまな議論法およびことがらの確からしさを算出するための重要度が評価される方法について

De Variis Argumentorum Generibus & Quomodo Eorum Pondera Aestimentur Ad Supputandas Rerum Probabilitates

ここから数理的段階に入る実践的準備がなされる。quomodo は「いかにして」の意で現代的には how to と考えればよい。以下は各項要約である。

1. 偶然的に存在するがそれに必然性が伴うことがらの計算［以下計算略］
2. 必然的に存在するがそれに偶然性が伴うことがらの計算
3. 1, 2 を総合した計算
4. 同一のことがらにつき、複数のことがらが存在する場合への一

般化

5. 同、それぞれの議論がすべて異なることがらの場合
6. 同、それぞれの議論に 4,5 が併存する場合
7. 証拠、反対証拠が併存するとき、それぞれの確からしさの計算

第 IV 章 場合の数を見出す二つの方法について。それについて何を知るべきか。観察に基づき何が定められるか。その方法に関する特別の課題。

De Duplici Modo Investigandi Numeros Casuum.Quid Sentiendum De Illo, Qui Instituitur Per Experimenta. Problema Singulare Eam In Rem Propositum, & c.

構想が始めて具体的に明らかにされる。20 年来温めてきた構想であるという。

人の死を考えてみよう。無数の原因によって人は死ぬからその原因から人の死の「確率」を知ることは決してできない。しかし、ここに今一つの方法がある。観察によって数える方法で、それは別段新しいものではない[7]。今まで神秘的だった「確率」は観察から思考によって測ることができる。

それを理解するために次の実験を考えてみよう。

一つぼがあって、そこに白のトークン［色の付いた硬貨は考えられないので］3000 枚と黒のトークン 2000 枚が入っている。さいころと違ってここでは単純に白か黒かの 2 通りしかない。ここから 1 枚ずつとり出す。白か黒かを観察したあと記録し、トークンはもとへ戻す。よって、つぼのなかのトークンの枚数は不変に保たれる。これを多数回くり返すと、白、黒の数の観察記録が得られる。—

ここで注意したい。この白、黒の率が確率になるわけではない。すでに確率はすでに定まっていて、得られた白、黒の観察された比率は

---

7) ポール・ロワイヤル論理学の指導者 A. アルノーの『思考術』Ars Cognitandi。実際、ベルヌーイの『推論術』Ars Conjectandi はこの書名に倣ったと云われている。

それに近く、それよりわずかに大きい数とそれよりわずかに小さい数との間に存在する、ことを確認したいのである。しかも、とり出す枚数が増えると、この間の間隔は狭くなり、この外側に存在することはますます起こりにくくなる。

たとえば、白の枚数が

500 枚の時点で、　299 枚と 301 枚の間

1000 枚の時点で、　2999 枚と 3001 枚の間

となって[8)] いずれももとの比 $3:2$ に近く、この比よりわずかに大きい比と小さい比の間に入る。すなわち、3:2 の比があらわれることが確からしくなり、しかも観察枚数が大きくなるにしたがい、ますますこの確からしさは大きくなる。

このようにすれば、社会的、精神的、経済的問題を動かしている「確率」を見事に促えることができるではないか。それがヤコブ・ベルヌーイの誇りとした内容だったのである。ヤコブはこれを長く暖めていたが、完全を期して出版する機会なく世を去った。

トークンの実験道具

第 V 章　前章の課題の解法　Solutio Problematis Praecedentis

さて、いよいよ「大数の法則」(Law of large numbers) の証明を示そう。

ある確率事象は 1, 0 の 2 ケースが起こり得て, その確率は r 対 s とする。観察を n 回繰り返すとき、その n 回中で $1, 0$ の回数 x, y $(x+y=n)$ は、

8) コンピュータ・シミュレーションでは実際にはこれほど正確にはならないが、論としては成立する。

1. ちょうど r, s の比

（式が入る？）

となる確率が最大となって、その比近くに集中し

2. 集中は観察回数 n が大きいほど精確になる。

ちなみに、正しい硬貨を1000回投げるとき、表、裏の回数の割合が1対1 ●●●（何か入る？）（各500回）となる確率が最大となるのみならず、精確にそうでなくともおおむね1対1のごく近辺に集中する。このあまりにも経験的に明白な事実が歴史上はじめて証明されたのである。

証明であるが、まず、フェルマー、パスカル、ベルヌーイの古典確率論の初期には、「確率」は今日の1に規格化された $p,\, q\,(p+q=1)$ ではなく、賭けにおけるように2数 $r,\, s$ の比で表示されたので（$2:1$ のように正整数の比が多い）$r+s=t\neq 1$ で、式の表示は見かけ上不必要に込みいった形になっている[9]。以下では、理解の必要に応じて、$r,\, s$ を $p,\, q$ のように規格化して読み替え $t=1$ とする。

ベルヌーイは、まず最大確率は、1. のように

（式が入る？）

であることを示した。これは今日的には、$r,\, s$ を $p,\, q$ に読み替えて、二項分布（x の二項確率）の最大項が

（式が入る？）

であることを云う。($np,\, nq=$ 整数 のように n がとられていると仮定)。実際、x の二項確率

（式が入る？）

[9] ラプラスが、確率を n/N のように分数で表示されるとした公理（実際、第一の公理）は、以後の確率論史の展開に決定的に大きな役割を果たした。

を $x-1$ のそれで割り、$\geqq 1$ とおいて比較すると、不等式を満たす最大の x は

$$x = np$$

であって、この x が二項確率の最大を与えることが示される。

続いて、ベルヌーイは

（式が入る？）

と続け、最終的に

（式が入る？）

に達するのである。

＜＊142＞写真

であるから、苦心の作であったこの結果はベルヌーイにとっては最終的ではなく、「法則」よりはむしろ、確率は現象から測定可能でありそれを「推測」(● conjectand) に有意義に生かしたいというものであったらしい。実際、「大数の法則」という名付けは 100 年以上も後 la loi des grands nombres とした S. ポアソン（1837）によるものである。しかも、今日「大数の法則」の発展は著しく、この「弱法則」と 20 世紀になってからロシアのヒンチン[10]（Александ

10） ＊アレクサンドル・ヤコブレビッチ・ヒンチン：ロシア、ソ連の数学者。これらの業績はコルモゴロフの公理的確率論 (1935 年) よりも早い。

р Яковлевич Хинчин）による「強法則」（重複対数につき1924年）がある。その証明は現在では「確率変数」を用いて当時よりはスマートかつストレートになっており、ことに強法則は「エルゴード理論」の特殊ケースとして実関数論の定理ともいえよう。ベルヌーイによるものは、往時の確率論の素朴さを残し味わい深い風格がある。

2.19 これが言いたかった

兄ヤコブが問題を思いつきそれを弟ヨハンにもちかける、あるいは弟が兄は何かを解こうとしていると知り自分ならうまく解けるだろうとか、ひょっとしたら兄は解けないのではないかとか、天才兄弟間はおおむねこのような間柄であった。おおむね軍配は弟に上り、対戦成績は相撲的にいえば弟の9勝6敗、弟の方が数学的にはbrilliant（優秀）だったというのが、筆者の印象である。

しかし、考えようでは兄が一枚上という判断もありうる。なぜなら、この第IV部は最終的にcivil, moral and economic problem、つまり社会的、精神的、経済的な難問に挑んでいるからで、さいころの「確率」どころではなく、社会全体の確率を扱おうとしている。ベイズ、ラプラス、ガウス、など偉大な学者はすべてこれに挑んでいる。そもそも社会に「確率」はあるのか。あると考えるなら‘実際、その確率はいくつか。その証明は出来るのか’と挑まれたその答が第IV部なのである。

第3章 ヨハン・ベルヌーイ

3.1 微積分学の第三の旗手ヨハン・ベルヌーイ

さて、いよいよヨハン・ベルヌーイの登場である。ヨハン Johann（英語で John、フランス語で Jean）はヤコブ・ベルヌーイの弟、後述するダニエル・ベルヌーイの父である。幼な友達オイラーより 7 才（？）上で、学問の継承のラインは

ライプニッツ $\Longrightarrow$ ヤコブ、ヨハン・ベルヌーイ $\Longrightarrow$ オイラー

と続いていく。ついでながら、年代的にその前は、

ガリレイ $\Longrightarrow$ ホイヘンス $\Longrightarrow$ ニュートン

で[1)]、ニュートンとライプニッツはほぼ同時代である。このことからも、ホイヘンスとライプニッツの学識がベルヌーイ家の学問の発展の下地を与えたことは十分に理解できるであろう。『推測術』の第 I 部はホイヘンスの結果を基にしている。

したがって、ヨハン・ベルヌーイは微積分学の発展のくろるとして、ニュートン、ホイヘンスに続く第三の人となった人である。兄と重なる部分は多いが、業績として

1.　微分の逆としての「積分」の創案

1) ガリレイは 1640 年没で同年にニュートンが生まれ、ホイヘンスは 1629 年生まれで年代的に両者の中間である。

2.　それを用いた曲線論の幾何学（1. の応用）
3.　変分法の発想（1.、2. の応用）と最小最大化
4.　級数論
5.　求積法のリスト（1.、2. の発展）

は微積分学の中心部分であり、現代用語としては 1. はいわゆる「微分積分学の基本定理」、2. は「微分方程式」で、この用語は当時は見当らず、また‘解く’といわず‘積分する’（求積法）と言った。3. は一般解法はオイラー、ラグランジュでモーペルテュイの発想から力学に軸足を置いたが、ベルヌーイはその前駆段階としてある基準によっていくつかの曲線（関数でもあるが）を幾何学として定める範型を示した 4. は、付属的取扱いの現代と異なり、この現代にあっては展開のツールとして重用、‘愛用’された。一般二項定理（ニュートン）をはじめ、数々の級数展開や和の公式が理論の主役を担った。ベルヌーイにもいくつかの級数展開による定積分がある。5. は今日の「常微分方程式の解法」といわれる公式のリストになっている。このように、ヨハン・ベルヌーイが範型を示し、オイラーはこれを体系化して適用範囲を拡大し縦横無尽にその天才的能力を発揮したのである。

前後するが、ヨハン・ベルヌーイは 1667 年バーゼルに生まれる。兄ヤコブより 13 歳下であった。当初父より医学の道を指示されるが親しめず、兄について数学を学ぶ。1694 年結婚後間もなくオランダのグローニンゲン大学に数学の職を得るが、本来望んでいたバーゼル大学の職を兄が絶対に譲らなかったためと云われる。1705 年バーゼル大学のギリシャ語の教授として赴任の帰途に兄が結核で病没との報を受け、その後任として数学教授となる。すでにグローニンゲン時代に本格的に等周問題を解くなど多くの歴史的業績をあげていたが、その後も精力的に業績をあげる勢いは衰えなかった。その間子ダニエル、並んで若きオイラーに数学を個人指導で仕込んだことはよく知られている。

天才肌の学者を多数輩出したベルヌーイ家であるが、とりわけこの

ヨハンの攻撃的ともいえる功名心と自信とねたみ（しっと心）は特筆される。最初は穏健な兄ヤコブ、後年息子のダニエルに向けられた。とはいえ、変人、奇人が少くないとされている数学者の中では許容範囲内と思われ、結局は競いつつ協力の結果となったことで、一家のその偉大な業績が歴史に残ることになったのであろう。

3.2 dx, dy はミステリアス

高校の数学のクラス・ルームでは、$\Delta x, \Delta y$ は小さな差（変化量）として教えられている。しかしながら、dx, dy 自体は教えないし、教えられない。ただ dx/dy とか積分記号の中に符牒として出てくるのを頭から認めよ、という具合になっている。実はこれでいいのである。

dx（dy も）は‘無限に小さい量’つまり‘$\Delta x \to 0$’の Δx を表わす、と説明される。しかし、明らかに、無限に小さければ文字通り $dx \equiv 0$ となって意味をなさない。イギリスの神学者バークリー司教はことに高階微分を批判した。もっともである。ところで、量ではなく‘無限に小さくする操作’であって、しかも dx, dy をそのような操作として、商 dy/dx 自体は（今度は）実体をもつことがあるとすれば、この批判は当面回避され、それが微分である。

では、単純に dx, dy と書してはいけないかという疑問が生れる。オイラーの答えは、さすがに無限の哲学的・神学的見識からであろう、結論は敢然としていて、「無限に小さい」ままでよい、とした。オイラーと同時代でオイラーの地位（ベルリン・アカデミー）を固辞したダランベールは知的洞察力にすぐれ、オイラーと意見を同じにした。このように、ベルヌーイの周辺つまりライプニッツから連なる線の周辺では無限小は受け入れられており、それがオイラーの『無限小解析』に実を結んだのである。

ラグランジュは無限小 dx をめぐるこの論議には中立を保って困難から身を引き、「微分」というより、新しい関数がそこに導かれたと

いう意味で「導関数」derivative（デリバティブ）、もとの関数を「原始関数」とよんだ。なかなかいい解決法であるが、この考え方にいたく反撥したのが 19 世紀解析学のエース、コーシーであり、]‘大学生を苦しめる’ϵ–δ 論法をはじめとして、関数論の正則関数、コーシーの積分定理、積分公式などの精ち厳密な世界ができ上ったのである。

3.3 1690 年、いよいよ「積分」が登場

Sed exiis quae in method tangentium exposui, patet este d, 1/2 $xx = xdx$; ergo contra 1/2 $xx = \int xdx$ (ut enim potestates & radices in vulgaribus calculis, sic nobis summae & differentiae seu $\int$ & d. reciprocae sunt．p.130

＜邦訳、入る＞

ライプニッツには差（あるいは差分……）および和（summa）という用語しかなかった。差の記法は d だが、和の記法‘s’は当時の印刷流儀では f と見分けがつかなかった[2]。そこで意味はそのままで‘s’は上下に拡大して‘$\int$’とされ、それが現在まで使われている。なお融通むげに $\int$ の替りに $\sum$ も使われた。これは s の対応

＜＊81＞図

さて、本論に行くと、和は極限ではもちろん‘積分’となるのだが、これは単なる和ではないから、ヨハン・ベルヌーイはこの和に「積分」という正式用語（vocabulum integralis）を与えたのである[3]。積分

[2] もちろんラテン語だからというのでなく英語でもそうであり、それさえ注意深く判読すれば、18 世紀英語文献でも読める。いい例はベイズの文献である。

[3] 正式に用いられたのは 1690 年。

は実体として面積、体積、……を意味するが、これらの実体ならばアルキメデスを始めとして、カヴリエリ、フェルマーなど、長く古い計算法の伝統があった。微積分における面積計算はこれらを超越して驚くべきものである。それは、直観的には無関係と思われる二問題だが面積計算（積分）は微分の逆演算であるというものであって、今では「え？」ということなく高校生でも知っているアタリマエのことがらである。われわれは世紀の大発見にもはや無感動になっているのである。

ヤコブ・ベルヌーイはあるとき曲線の問題を考えていた。

> —物体がある曲線 $y(x)$（x の関数）に沿って滑り落ちて行くとき、その鉛直方向の速度 dy/dt がどこでも与えられた速度 $-b$ になるように曲線を定めよ（ライプニッツ）—

力学の教える所から—当時もガリレイによって確かめられていたように— $v=\sqrt{-2gy}$ であるから、v^2 を x, y 方向に分解して

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=-2gy$$

これを $(dy/dt)^2=b^2$ で割って dt を消し、dx/dy を逆数にとれば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{-1-2gy/b^2}}$$

を得る。もちろんこれは現代風で、当時ベルヌーイはむしろ

$$dx=-\sqrt{-1-\frac{2gy}{b^2}}\,dy$$

と見ていた。これら dx, dy を元にして

> それ故、これらの（x および y の）積分は等しい
> Ergo & horum integralia aequantur

とした[4)]。これが歴史上はじめて「積分」が用語としてかつ本来の意味について使われた最初で 1690 年のことである。「積分は〜」というところが本質的で、現代風には「解は〜」というのだろうが、手続化された「微分方程式」は未分化だった時代である。この述語をヤコブ、ヨハン・ベルヌーイの文献に見出すのは難しいが、ダニエルの中にははっきりとあらわれる。

求める y はむしろ逆関数として

$$x = \frac{b^2}{3g}\left(-1 - \frac{2gy}{b^2}\right)^{3/2}$$

であり、ライプニッツによって‘3/2 乗の放物線’と名付けられている。かくして、1690 年が微分積分学における「積分」の元年と考えることができよう。

3.4 曲線、ことに現代交通における「曲率」について

今日、鉄道や高速道路は市街地をぬって走っており、大都市内高速道路では次々と目前に迫るカーブの連続の処理に大わらわで、近郊から来る人であってもとても行先案内標識など見るヒマはないという。特に東京の都心環状線はカーブだらけでほとんど直線部分がない。大阪でも同様であろう。不思議議に、2 点間の最短距離である{ 直線 }というのは、長い道路では珍しいのである。

[4)] ergo = それゆえ, horum(hoc) = これらの, aequantur(aequo) = 等しい とされる

＜＊86＞写真

さて、曲線の本格的研究は近代に入ってからのもので、当初は円錐曲線（楕円、双曲線、放物線）から、デカルトによく幾何学と微積分の発展により、サイクロイド、カテカリー（懸垂線)、らせん（スパイラル）などに研究が及んだ。ヤコブ、ヨハン・ベルヌーイ兄弟はさまざまな曲線の研究がある。ことにヤコブ・ベルヌーイは多くの課題の提示者であり、弟ヨハンは「兄」に協力したり競ったり出し抜いたりで、兄を過剰に意識していた。

ベルヌーイ兄弟の曲線論を述べる前に 1. 包絡線、2. 曲率円、曲率中心、曲率半径、曲率、3. 縮閉線、伸開線を述べておこう。

≪曲率≫　山道を運転していて「急カーブ、スピード落せ」とか「次のカーブで $R = \cdots$」などの運転者への注意、警告の標識を見ることがあるだろう。どのような曲線も細かく見れば円で近似されるから円の半径 R でカーブのきつさを表わすことができる。R が大きいほどカーブは緩く、小さいほどきつい。

車を運転しなくても身近なケースがある。東京山手線でカーブの半径を挙げると

大崎・品川間のカーブ $R =$

東京・有楽町のカーブで $R =$

もちろん電車運転士はこの R による速度規制をきちんと守らなければ脱線転覆の危険を大きくすることはいうまでもない。鉄道ファンなら知っているが、鉄道レールはすべての地点で、運行のための里程標、公配標、曲率半径（R）、バーニア（傾斜）などのデータ情報の表示がある。

写真２つ

山陽新幹線も比較的カーブが多く、平均 $R = \cdots$ であるという。新幹線の場合、高速であるためのカーブは R を大きくしなければ危険であるが、R を大きくすることは、立地計画に大きな制約がかかることになり建設業にも影響が出る。

このようにふつう、曲線の曲率はそれに 2 次まで接する円の半径（曲率半径）R の逆数 $1/R$ で定義されている。たとえば、原点を中心とする半径 R の円

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

を $x = 0$ で 2 次まで展開すると、近似的に放物線

$$f(x) = R - x^2/2R + \cdots$$

で、たしかに

$$f''(0) = -1/R$$

となり、このことから曲線の頂点での曲率はその2階導関数 f'' になるとの想像がつく。また曲線の凹凸の様子は2階導関数になると教えられている。これは正確な定義ではない。実際、そうなると、半径 R の円で $x=0$ 以外では曲率が必ずしも $1/R$ ではなくなる。曲線の曲率の定義はもう少し一般的なものであり、正式の定義には一階導関数も現われる。

曲線 $f(x)$ の $x=c$ での曲率とは、その点での接線の傾きを x 軸の正方向となす角度 θ として、方向 θ の曲線の弧長 s に対する瞬間的変化率（瞬間的回転速度）

$$d\theta/ds$$

をいう。

つまり、その曲線に沿って進むとどれだけ方向が回るかを表す。これは、$\theta = \arctan f'(x)$ とおいて

$$d\theta/d\,\mathrm{x} = d\theta/ds \cdot ds/dx$$

から、

（式が入る？）

および

（式が入る？）

から容易に求められ

（式が入る？）

を得る。したがって、極大点、極小点では●●となる。

例 円では

（式が入る？）

となって、たしかにいたるところ曲率は $1/R$ である。

このことから、曲率半径は

（式が入る？）

また、曲率中心は点 (x_0, y_0) の法線上でその点から距離●●だけいった点

（式が入る？）

である。この曲率中心を中心とし曲率半径で円を描くと、その円周は (x_0, y_0) においてその曲線に接する。

　また、しばしばあることだが、曲線がある一次元パラメータで、

（式が入る？）

のように表示されている場合は、曲率、曲率半径は

（式が入る？）

となる。

　≪縮閉線≫　曲線上の点に対する曲率中心は、その見えない点を中心に、その曲線がだんだんと「巻き込まれて」回り込んでいくような点で、曲線上で点を移動すると曲率中心も移動しその軌跡は一つの曲線を作るが、この曲線を「縮閉線」とよぶ。

　縮閉線にはもう一通りのストレートな求め方がある。それは

（式が入る？）

となる。

例　逆に、縮閉線から元の曲線も復元できるわけで、元の曲線を縮閉線にたいして「伸開線」という。

　≪包絡線≫　直観的には、曲線族（曲線の集まり）が覆っている領域の境界になっている曲線で、そのイメージから‘包み含む線’であるが、正確にはその曲線族の曲線すべてに接する曲線である。たとえば、原点 O から一定距離 d にある直線群

$$\ell_\alpha : x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$$

（αはパラメータで、原点からの垂線の方向角）

の包絡線はもちろん原点を中心とする半径dの円C：$x^2+y^2=d^2$である。これはℓ_αの式

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-d=0 \tag{3.1}$$

をそのαでの微分

$$x(-\sin\alpha)+y\cos\alpha=0 \tag{3.2}$$

と連立させαを消去すれば得られる。(1)のdを移項後、両式を平方して加えればCを得る。

一般に曲線族C_α（αはパラメータ）の包絡線はC_αの式とそのαでの微分（偏微分）$=$ Oからαを消去して得られる。一例として

—内側が凹面鏡であるような上に開いた半球（半径$=1$）に、上部から平行に一平面内で入射する光線群の、反射後の光線群の包絡線—

中心から$a\,(0\leqq a<1)$だけ離れた入射光の反射光の方程式は

$$\ell_\alpha :y=-b+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{9}-\frac{a}{b}\right)(x-a),$$

bは反射点までの垂直到達距離（$a=0$なら$b=1$,

$a=1/2$なら$b=1/2$, $a\to 1$なら$b\to 0$ etc.）

これと

$$\partial y/\partial\alpha=0$$

を連立して、aを消すと

$$y=-\left(x^{2/3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x^{2/3}},\qquad -1\leqq x\leqq 1$$

が得られる（ヨハン・ベルヌーイ，1691,2)。

—大砲が砲弾をあらゆる角度で初速$v_0=1$で打ち上げるときのすべての弾道放物線の包絡線—

大砲の公配を a とすると、弾道の放物線は

$$\mathrm{C}_a : y = ax - \frac{1+a^2}{2}x^2$$

この式を a で偏微分して O とおき、上式と連立して a を消去すれば、包絡線

$$y = (1-x^2)/2$$

を得る（ヨハン・ベルヌーイ)。砲弾は空中での落下物として一般化されるから花火を考えることもできよう。

—正の x 切片 $+$ y 切片 が定数 13 に等しい直線群の包絡線—

直線群

$$\ell_a : y = \frac{a-13}{a}(x-a)$$

の方程式を a で微分して O とおき、ℓ_α と連立して a を消去すれば

$$(y-x-13)^2 = 52x$$

となる。回転した座標

$$u = (x+y)/\sqrt{2}, \quad v = (x-y)/\sqrt{2}$$

を導入する。x, y について解き代入すれば、

$$2v^2 = 26\sqrt{2}u - 169$$

で、u 軸を中心軸とする放物線である。

包絡線は一般に美形の印象を与え、花火、噴水、絵画の構図などに多く見出される。

≪曲率円、曲率中心、曲率半径、曲率≫

☆☆☆重複調整予定☆☆☆

式＜＊95－105＞が入る

≪縮閉線、伸開線≫

☆☆☆重複調整予定☆☆☆

一般にどのような道路あるいは鉄道のカーブでも単純でなく、さまざまな曲率（曲率半径）のカーブが変化しながら連なっている。当然のことながらドライバーあるいは運転士はこの変化に合わせて運転しなくてはならない。曲線の幾何学として言うと、曲率円とその曲率中心も刻々と移動するが、曲率中心の動いた軌跡を「縮閉線」(evolute)という。

カーブから脱出していくとき、曲率半径は大きくなり曲率中心も徐々に外れて展開して行くから、英語では‘外へ転がる’（evolute の語感）となる。これに対し、日本語訳はカーブへ進入するイメージで、曲率半径は小さく曲率中心も曲線自体に近寄りつつ動きは鈍くなって‘縮閉’の語がふさわしくなる。

☆☆☆以降、修正予定☆☆☆（楕円積分も）

3.5 ベルヌーイ兄弟の曲線論

ベルヌーイ兄弟は、摩擦、対立しつつ、全体的結果として、曲線の研究において、微分積分学の基礎概念の確立、微分学の彫琢とその応

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

用、最大最小問題、変分法の理念の発進など数々の業績を後世に残した。そのいくつかをレビューしてみよう。

≪等速降下曲線　iso chrone, 1690≫

iso = 等しい, chrone = 時間 であるが、'時間' を速さに転義している。この分析はすでに解説した。

≪懸垂線　catenary, 1691≫

catena = 鎖、vel funicularis で、正式には linea catenaria(e) 釣り下げられた鎖あるいはロープの形を言う。当初ガリレイはこれは放物線と主張したが、ホイヘンスはこれは誤りと見抜き、メルセンス神父は誤りを証明している。

＜＊106＞が入る。調査中

これから

$$c\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx$$

両辺を積分すると（再び、両辺の積分は等しいので）

$$\operatorname{arc\,sinh}(p) = \frac{x-x_0}{c}$$

ただし、$\operatorname{arc\,sinh}(\,\cdot\,)$ は双曲正弦関数

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

の逆関数である。したがって

$$p = \sinh\left(\frac{x-x_0}{c}\right),$$

で、$p = dy/dx$ だから結局

$$y = c\cdot\cosh\left(\frac{x-x_0}{c}\right) + y_0 \quad (y_0 : \text{積分定数}),$$

となる。（ライプニッツ、ヨハン・ベルヌーイ, 1691）

なお

$$\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = 1 + u^2 + \cdots$$

であるから、懸垂線は最下点周辺では放物線と酷似する。

≪最短降下線 Brachistochrone, 1696≫

これについては既に解説した。再び強調しておくと、課題は 基準 = 時間 として最適化しており、課題としては特殊ではあるが、これが変分法の発想の歴史的起点であることを注意しておこう。

≪等周問題 isoperimetry≫

史上始めての本格的な変分学の課題であるが、日本では古典的な南雲道夫『変分学』あるいは Courant-Hilbert にはベルヌーイへの言及はない。二つの文献によればヤコブが課題を提示し、ヨハンが解決したのが事実であって、これは旧版岩波『数学辞典』(弥永昌吉編) にも反映されている。一般に本辞典の「ベルヌイ家」の項は微積分学の成長への一番の貢献など目配りよく客観公平にかけている。

いわゆる「特殊等周問題」とは

> —平面上において与えられた長さ (L) の閉曲線でその囲む面積 (F) を最大にせよ—

であり、制約と目的関数を一般化すれば「一般等周問題」となる。

閉曲線の方程式を

$$x = x(t),\ y = y(t),\ 0 \leqq t \leqq 1,$$
$$x(0) = x(1),\ y(0) = y(1)$$

とすれば、d/dt を $'$ として

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \text{一定}$$

の条件下で

$$F = \int_0^1 (xy' - x'y)dt/2$$

を最大化する問題となる。これについては、有名は「等周不等式」

$$L^2 \geqq 4\pi F$$

が知られているが、直観的な解はもちろん円で、半径 r として両辺とも $4\pi^2 r^2$ に等しい。

ここで等周問題を一般的に解くことはレベルが高いことから他書に譲るが、オイラーさらにはラグランジュによる一般解法がある[5)]。

変分法は当初曲線の関数を決定する幾何学の問題からスタートし、オイラー、ラグランジュの研究を経て、ハミルトン、ヤコビによって解析力学の中心的方法として確立した。ただし、工学、経済学における数理的方法の導入により、最適関数の決定の有力な方法としてふたたび重要な役割を果している。

変分問題は多くの極値問題に直接的に適用される。そこでそのいくつかを紹介しよう（小松）。

1. 測地線

（式・未）

2. 光路

（式）

3. 最速降下線

（式）

4. 最小表面積の回転曲面

（式）

5. 最小なアフィン的長さの曲線

（式）

5) 筆者は前掲南雲を持っているが既に絶版である。なお Courant-Hilbert は Hurwitz による解を具体的に解説している。

6. 最小作用の原理

（式）

7. 特殊等周問題

（式）

8. 糸の平衡

（式）

9. ディリクレ問題

（式）

10. 極小局面（プラトー問題）

（式）

3.6 超めずらしい関数の積分も級数で

二項定理

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

のべき指数 n はもちろん正整数だが、これが負整数あるいは非整数となった

$$(1+x)^{-2}, \quad (1+x)^{2/3}, \text{ etc.}$$

は「一般二項定理」といわれ、実数 α に対し

$$(1+x)^{\alpha} = \text{dummy}$$

として知られている。

$\alpha = n$（正整数）でなければ、これは無限級数となるが、コンピュータのない時代にこの無限級数が広く計算法として重宝されたことはもちろん、この無限級数自体が当時発展中であった微積分の中で重い理

論的役割を果していたことは想像以上である。実際、ニュートンが一般二項定理を

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$$

の積分計算に用いたことはよく知られている。とはいえ、一般二項定理もより広く、テイラーあるいはマクローリン展開の一例であるから、一般の無限級数への理論ニーズが高かったというべきかもしれない。

そのような中でベルヌーイの人々が特に無限級数論で特記すべき結果を多くあげたという事実はないが、それでもいくつか面白い結果を得ている。その一つは

$$y = x^x$$

というかなりめずらしい関数の積分

$$S = \int_o^1 x^x \, dx$$

である。$x \log x \to 0 \, (x \to 0)$ から $0^0 \equiv 1$ と規約すれば、被積分関数は連続かつ積分区間で有界だから、有限な積分値をもつ。ところで○○○…○○○であり、ここに e^u の展開式を用い、かつ $x^n (\log x)^n$ に対し、$\log x$ を微分側におく部分積分を行うと

$$\int_o^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots$$

というこれまためずらしい結果を得る。実際、右辺は交代級数の判定条件により収束する。（ヨハン・ベルヌーイ，1697）

3.7 微分方程式を解くとは

かつて高校の数学の先生と話したとき「微分はもちろんいいが‘微分方程式’はカリキュラム外でダメなんです」といわれ（余談だが、

x^3 の微分はいいが x^4 はダメだそうでした)、すいぶんカリキュラム審議会の方々は訳のわからない御仁だと（私は）嘆いたものである。

だが、今はそう考えていない。歴史を調べてみると微分方程式は「積分」に包摂され（ヤコブ・ベルヌーイ，1690）とり立てて「微分方程式」を「解く」とはいわなかった。調べている範囲では「微分方程式」というタームにも出会わない。そうなると、いわゆる「求積法」という便利な用語も reclundant（余計なもの）となるのだろうか。私が昔隅まで愛読した一松信『解析学序説』の索引には表れず、『解析概論』にも出現しない。

もっとも「求積法」は一松では本文内に使われており、

> 方程式の変形、変数変換、不定積分を有限回くり返して解くこと

と明確に定められ、また他方「積分という語を解の意味に使う習慣もあるが、これは区別すべき術語である」ともしている。そうなればいろいろと大変である。

本書はベルヌーイ家の数学的事蹟を調べることが目的であるので、諸概念がこのように現代的意味に分化する範囲に踏みこむことはしない。未分化であっても、ベルヌーイ兄弟およびダニエル・ベルヌーイを中心に、必要最小限でオイラー、ラグランジュまでをカバーするにとどめるものとする。（Γ 関数、ζ 関数はベルヌーイ数が深く貫入しているので、その限りで触れることとした。）そこで、この辺でヤコブ・ベルヌーイが言うように‘それゆえ、これらの積分は相等しい’という限りで解ける微分方程式を順次紹介して行こう[6]。

≪変数分離形≫　$y' = f(x) \cdot g(y)$

これはよく知られるように、純‘ベルヌーイ的に’

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

6) ハイラーとヴァンナー『解析教程』に従う。

として解ける。

≪線形斉次方程式≫ $y' = f(x) \cdot y$

上記で $g(y) = y$ のケースであって、

$$y = C \cdot \exp\left(\int f(x)dx\right)$$

≪線形非斉次方程式≫ $y' = f(x)y + g(x)$

上記に非斉次項 $g(x)$ が発展として付いた形で対応斉次方程式の解 $u(x)$ が変形して $u(x) \cdot v(x)$ となると予想し、まず $u(x)$、ついで $v(x)$ を求めるものとする。まず順当に

$$u(x) = \exp\left(\int_0^u f(w)dw\right)$$

と求めたあと、これに

$$y = C \cdot u(x) + u(x)\int_0^x \frac{g(w)}{u(w)}dw$$

のように第 2 項が付いた解となる。

≪ベルヌーイの微分方程式≫ $y' = f(x)y + g(x) \cdot y^n$

これは線形斉次の回数 y の替りにそれに加えて多項式項 y^n が変化係数 $g(x)$ で付加された発展形である。y と y^n の二項だけならこれは解けるので、ヤコブ・ベルヌーイの名を付している。前項と同じスピリットで $y = u(x) \cdot v(x)$ として、

$$u(x) = \exp\left(\int_0^x f(w)dw\right)$$

は前と同じ、これを用いて

$$\begin{aligned} y =& u(x)\left\{C\right. \\ &\left.+(1-n)\int_0^x g(w) \cdot (u(w))^{n-1}dw\right\}^{1/(1-n)} \end{aligned}$$

として完全に解ける。

ただし、この形は $u=y^{1-n}$ を導入して u に関する線形方程式に帰着させる方法がある（一松前掲）

≪ 2階微分方程式≫　$y''=f(x,y,y')$

2階微分を含む方程式は積分で解く方法は例外的にしかない。まず、f が y を含まなければ、明らかに

$$p=y'$$

とおけば $p'=f(x,p)$ となって階数は1だけ下がる。

y を含む場合でも x を含まなければ

$$y''=f(y,y')$$

となるが、もし $y'=p(y)$ となるような $p(y)$ があれば、合成関数の微分から $y''=p'p$。

したがって方程式は

$$p'p=f(y,p)$$

を得て、これで首尾よく $p(y)$ が求まる。あとはこの関数 $p(\cdot)$ について $\underline{x\text{の}}$ 微分方程式

$$y'=p(y)$$

を解けばよい。

さらに、$y''=f(y)$ となっている場合はまた別の広い展開がある。

微分方程式の解（しばしば積分といわれたが）はおじヤコブ、父ヨハンが大方述べつくした感があるが、ダニエルはその発展として、リッカティ Riccati[7)] とひんぱんに交信している。「微分方程式」の語も正面から用いられている。実際、このイタリア人数学者は当初セント・ペテルブルグのアカデミーの院長職のオッファーも断った精力的

7）リカッティという発音もある。

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

数学者であった。関心領域は詩学や宗教論に及ぶが、数学では未知関数に関して２次の常微分方程式の一般形

（式が入る？）

で知られる。この解は

（式が入る？）

である。リッカティはベルヌーイ、オイラーに影響を与え、特別なケースはベルヌーイの微分方程式になる。また、ベクトル・行列型で表現すると、線形－２次ガウス型制御モデルの方程式となるなど、現在システム制御理論やフィルタリング理論の基本式としての意義もある（ルーエンバーガー、木村）。

3.8 振子の運動と楕円積分

（ホイヘンスの悲哀）

「振子の等時性」はガリレイが発見し、今や誰でも知っているユニバーサルな知識であるが、もちろん‘振幅が小さい範囲内で’である。これを逆用してホイヘンス、ニュートンが時間測定に用いたことも多少は知られている。しかし、振幅が（糸がたるまない限り）大きければどういう展開となるか。なかなかやっかいだがそれだけに面白い課題である。

振子は支点を中心とし糸の長さに等しい半径の円周上（そしてその上でのみ）運動する。最下点からの振れ角を θ とすると、振子の位置は円周の長さで $\ell\theta$ である。一方、重力の加速度は $g\sin\theta$ で、θ を減小させる方向である。よって運動方程式は

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

ここで $\ell/g = 1$ とおくことは本質的さまたげにならない。さらに θ と y と書くと

$$y'' + \sin y = 0$$

となって 2 階微分方程式が得られる。

一般に力学によく出現する

$$y'' = f(y)$$

の場合、両辺に $2y'$ を掛けて積分すると一階微分方程式

$$y'^2 = 2F(y) + c, \quad F(y) = \int f(y)dy$$

に達する。この積分は、まだ先があるので、「中間積分」といわれる。これを平方根に開いて

$$y' = \sqrt{2F(y) + C} \quad (C\text{ は積分定数}$$

としよう。ここで C を忘れると $\sqrt{\ }$ に開けないことがあるので注意する。

かくして、今の場合

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2\cos y - 2\cos A} \qquad (A\text{ は最大振幅})$$

となるが、ここまでは y がすっきり t の関数とならない。そこで変数分離して、t が y の関数（つまり陰関数）として

$$t = \int_0^y \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos A}}$$

のように求まる。ちなみに最大振幅に対する周期は

$$\begin{aligned} T &= 4\int_0^A \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos A}} \\ &= 2\int_0^A \frac{dy}{\sqrt{\sin^2\dfrac{A}{2} - \sin^2\dfrac{y}{2}}} \end{aligned}$$

で与えられる。見てのとおり、周期Tは（最大）振幅Aに依ることになるが、この関数は「楕円積分」[8]といわれる積分の一つである。

式＜＊131－135＞が入る

周期が振幅によりまちまちになるのはやはりまずい。なぜなら、一定時間で繰り返される現象をすべて原理的に「時計」とするからである。ホイヘンスは円周運動をうまく他の曲線上の運動に改修して、その曲線上の弧長sについて、sについての単振動の方程式

$$s'' + Ks = O$$

に帰着できないか考案した。いうまでもなく、解は‘円に近い’つまり‘円っぽい’もの、はたして文字通りサイクロイドであった。これを「サイクロイド振子」という。

この結果は、最短降下線問題からサイクロイドを出したヨハン・ベルヌーイを喜ばせた。ただし、かんじんのサイクロイド振子の制作はうまく行かず、工学としては失敗した。機械の制作がうまく行く時代はまだ到来していなかったのである。

振り子の理論　振幅小の場合　・・・済み

一般の場合

楕円の周長

レムニスケートの周長 一般には「カッシニのレムニスケート」

（式が入る？）

といわれ、そのうち「ベルヌーイのレムニスケート」(連珠形）の定義

[8]「楕円積分」は総称であって、楕円の周長の関数から由来したが、あくまで命名の由来だけである。すべてが楕円の周長となるわけではないことに注意しよう。

は●●●、すなわち

（式が入る？）

である。極座標で表示すると

（式が入る？）

となる。この弧長を計算してみよう。

（式が入る？）

すなわち、楕円積分になる。

　これは逆三角関数

（式が入る？）

の類似形として興味深い。ガウスは（逆）三角関数に倣って、この積分（レムニスケート積分）の逆関数からレムニスケート・サイン (sin. lemm, sl) レムニスケート・コサイン (cos. lemm, cl) を定義し、逆三角関数の値 π に対応して ω（本来は●●がつく）を考えていたという（高木貞治『近世数学史談』）。これらレムニスケート関数は多くの関心をあつめ、多数の論考が出ている。ここでは

（式が入る？）

を挙げるだけとしよう

　これで次の興味深い要約ができた。

＜＊132＞　表（楕円積分）

曲線	弧長
二次曲線	
円	
放物線	
楕円	
双曲線	
サイクロイド	
カテナリー	
レムニスケート	

第4章 ダニエル・ベルヌーイ

4.1 ダニエル君の登場

ヤコブ、ヨハンと来て、次はダニエルである。ヨハンの子で、ベルヌーイ家は3人目になる。ヨハンの子にはニコラス（祖父と同名）2世がいて、おじヤコブのArs Conjectandiを出版した（実際は、形だけ）が、ダニエルに比べると影がうすれ、ヤコブ、ヨハン、ダニエル……はいずれもよく聞くヨーロッパ人の名前だが、強いていうとバイブル（聖書）中の名前である。ヤコブはユダヤ民族の祖とされるアブラハムの二代目でこれは偉い。ダニエルは尊い預言者、いずれも旧約聖書からである。ヨハンは元来は‘ヨハネ’で、ユダヤ民族の中でふつうの男子の名、日本流には太郎、次郎という感じで、知られる通りヨハネは新約聖書にはよく出てくる。

ついでながら、後で多少かかわりがあるのだが、「ダニエル」はヘブル語（ユダヤ民族の言語、‘ユダヤ語’とはいわない）で、‘立派な判事’を意味する。正義と俊厳な規律を重んじるユダヤ民族らしい人名である。そういえばシェイクスピアの『ヴェニスの商人』で、‘名判決’—実は、大ゴマカシなのだが—を出す判事がダニエルで、原告シャイロックが‘これぞ名判事ダニエル様！’と感動して叫ぶ場面がある。このあと、大どんでん返しがあるのだが、それはいいだろう。当のダニエル君、ダニエル少年も聡明で器量が大きくしかもしっかりした意志を持ったその名に恥じない子だったようである。権威があり

重厚な存在だったおじ（ヤコブ)、激烈パパ（ヨハン）の下でよくサバイバルし、ベルヌーイ家の3番手の天才として今も名を残している。

＜＊133＞写真

性格の激しい父ヨハンに商売を継げといわれパリに赴くが性に合わない。次は医学をやれといわれる。家業が薬種商だから縁がないわけではなく、親孝行息子としてそれは受入れるが、数学をやってよいという条件を付ける。そこはソツがなく頭が良い。ベルヌーイ家の肖像画を見ると、それぞれのキャラクターが表れているのが興味深く、ダニエルはどこかおっとりしているが、スマートさがある。交友関係も良かったであろう。最大の友人はいうまでもなく、同時代のオイラーである。（ダニエルの方が7才年長。）

4.2 職歴と業績

職歴を見ておこう。ダニエル・ベルヌーイは1700年オランダのバローニンゲン生れ、5歳のころ父とともにバーゼルに戻る（1705年)。ほどなく1707年当地でオイラーが生れる。長じた後は先に述べた通りだが、ロシア帝国のセント・ペテルブルク大学の教授になる。当時の嫁エカテリーナが学問好きで一流学者を周囲に集めていたのである（当時の専制君主には啓蒙的な君主もいて「啓蒙的専制君主」と言われた)。そういえば、オイラーも同じくセント・ペテルブルク大学教授だがこちらは長続きするが、ダニエルはたった3年で辞去する。実は

オイラー職はダニエルの紹介で、紹介者の方が先に辞めたのである。バーゼルに戻って後バーゼル大学教授となるが、タイトルは医学・哲学の教授である。

業績にうつろう。ベルヌーイ家の業績とつき合うのは本当に力業が必要である。まさに百花繚乱だが、まさか‘百花’をすべてフォローするわけにはいかない。しかし、このベルヌーイ家の3人目ダニエル氏の業績を抜かすわけには行かないのは、その現代的意義があるからである。

＜＊134＞写真 hydro…

ダニエルの業績は何といっても1. 流体力学、そして2. 効用理論である。3. 気体分子運動論もある。1. は「ベルヌーイ定理」として高校の物理にも出て来るのみならず、現代文明に欠かせない飛行機の原理、2. は大学経済学部のミクロの講義で初頭に出る「効用理論」の始まりである。1.、2. は全く別分野のもの（理系と文系）だが、それが名実ともに300年近くも後の今日に残っているのだから、驚嘆すべきものであろう。それは今日の大学教授が300年近い将来に何か残せるかという問と同じである。

4.3 水力学、あるいは流体力学

「水力学」hydraulics は知る人は多くはいないかも知れないが、重要な学問である。父ヨハンの教授赴任地であり、ダニエルの出身地オランダの正式名「ネーデルランド」（Netherland, フランス語 Pays bas）の意味は何と文字通り‘低地地方’(low countries) で国土はつねに海水の浸入の国家的危険に悩んでいた。浸入する水の排出、それに伴う河川の管理は大きな課題であった。近代においては、都市における水の安全、確実な供給システムは、統知者のガバナンスが問われる至上課題[1)]である。若干細かいが、スペインの首都マドリッドは高地にあるが、水道技術によって古くから安全に水供給がなされたことはモノの本に出ている。

ところで、何と言っても極めつけは、他ならぬオイラーの失敗である。オイラーは彼を高く評価したプロシアの啓蒙的専制君主フリードリヒ大王（？）に招へいされてベルリン・アカデミーに新しい職を得るが、やはり素人の過度の期待は恐ろしい。有名な「サン・スーシ宮」（Sanssouci フランス語で「無憂宮」）に通じる‘自動噴水’の制作を命じられる。機械動力もなく[2)]、さらに「永久機関」の不可能性も、一部の学者の間ではとにかくも、十分広くは知られていない時代であった。ものの見事に失敗し、オイラーの不孝なベルリン過去の遠因となる（後任はラグランジュ）。友人だったダニエル・ベルヌーイには、水力学こそ彼の才能の見せ所だったろう。

1) 日本でも、徳川家康が当時荒れはてていた江戸に入城して以来、早速に水供給は大課題となり、多大な時間、労力、資金を費やしており、玉川上水を通したことは知られる。

2) J. ワットの蒸気機関は 1765 年頃、R. トレヴィシックの本格的な蒸気機関車は 1804 年。

図＜＊135＞Sans souci、ステビン

4.4 完全流体のベルヌーイの定理

さて、小石を空中に投げると、石は放物線を描いて飛び落下する。その放物線は「点」が動いた軌跡で、点は「質点」といわれそこで使われる理論は「質点の力学」である。小石は質量をもった点と見なされている。ある程度の大きさの範囲である限り、小石が回転していても石の重心の運動は放物線であることに変りはない。

しかし、小石がボールであったり、軽くかつ大きい物体であると、必らずしも正確には放物線ではなくなる。空気抵抗が無視できなくなるからである。ボールに回転が加わると軌道は微妙に変化するが、さらに言うなら、紙飛行機ならもはや様相は一変する。これらはすべて空気による力の影響が支配的になるからであって、ここに空気という流体の力学、つまり「流体力学」が必要とされる理由がある。もちろん流体といえども多数の質点の集合であり、数は極めて多くとも統計的に集計すればよいという考え方、すなわち還元主義もあり、それはそれとして有効な理論である（気体分子運動論)。しかし、気体一般のマクロな性質を扱おうとするなら、一まとまり—というより、一続きの— の存在として考えなくてはならず、この力学の立場を「連続体の力学」という。流体は連続体の一つである。

流体を考えるとき、1. 各点での流れの速さと方向をベクトル u として考える「場」の立場（「オイラー記述」という）と 2. 水の粒子の行く跡（軌跡）をフォローして行く立場（「ラグランジュ記述」という）の 2 通りがあるが、1. のオイラー記述が数学的に容易である。そ

こで、流れの中に一本の曲線を考え、その上の各点での速度ベクトル u が曲線の接線となるようにするとき、これを「流線」(stream line) という。流れてはいても流線は時間とともに変らないときこれを「定常流」(stationary flow) という。定常流の連続写真はまるで静止画像のように見える。

図書館の棚に並んでいる 2, 30 冊の一まとまりの本の中から一冊の本を引き抜くと、摩擦抵抗によって引き抜く同じ方向に周囲の本が引き抜かれてしまうが、摩擦がなければそれは起らない。流体の場合も、流線の束（流管）がその境目から抵抗を受ける現象が「粘性」viscosity つまり‘ねばり’である。どのような流体にも大小は別として粘性があり、水も‘サラサラ’とはしているが、粘性が小さいだけでゼロではない。空気も非常に小さいが粘性をもった流体で、一般に流体の運動は境界の面で抵抗を受け、「粘性流体」といわれる。

＜＊136＞粘性データ

水の粘性もこのように温度とともに低下し、よりサラサラとなる。ところで、単一物体の力学でもそうであるが、摩擦力がると理論の取扱は難しくなる。流体の場合も粘性がゼロとした理想状態が「完全流体」perfect fluid であり、ダニエル・ベルヌーイ、オイラーが想定した流体もこの「完全流体」である。

完全流体なら扱い易い。流線のある点に非常に小さな（角砂糖のよ

うな）体積を想定し、この運動を考える。流体は v、水平方向のみならず垂直にも動くとして落差を h、重力加速度を g、流体の体積当りの質量（密度）ρ、流体には外部から何らかの圧力（単位面積当り）p がかつているとしよう。流線に沿って、体積当り

$$\begin{aligned}\text{運動エネルギー} &= (1/2)\rho v^2,\\ \text{重力による位置エネルギー} &= \rho g h,\\ \text{外からの圧力のした仕事} &= p\end{aligned}$$

である（厳密には、流管の一部の両端でおのおのの差を考え、その和が 0 になることを見る）。ここで、仕事 $=$ (圧力 $\times$ 面積) $\times$ 距離 $=$ $p \times$ 体積 $= p$ として、これらの総和のエネルギーが保存されるから、めでたく

ベルヌーイの定理

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{一定}$$

を得ることになった。流れに落差がないなら $h = 0$ で、

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{一定}$$

である。

　または、速さと圧力とポテンシャルであらわしたオイラーの運動方程式を積分して

（式が入る）(1)

を得るが、これが「ベルヌーイの定理」である。定理はさまざまな同等の形に表される。

（wiki）

(2)

（3）

「ベルヌーイの定理」はよく現象にあてはまると云われる。たとえば、飛行機の翼周囲の上面、下面では空気の流速が異なり、ベルヌーイの定理から圧力差が生じて上向きの揚力が生じる。ただ、揚力の原因としてここまでは正しいが、翼周囲の速度分布の理論は別個必要であり、いわゆる「同着の原理」の誤りを始め現在も多くの混乱がある（実際、10件中7件は誤りを書いているという指摘もある）。

例 計算演習をしておこう。

（式が入る）

水の力学である「水力学」は流体力学 hydrodynamics の主要分野とされているが、ここでこの定理の応用範囲は極めて広い。並んで「水理学」hydraulics という分野もあり、こちらが歴史が古いがほとんど違いはないとされる。あるいは分野での呼称の違いであるとの説明もあり、専門外のものには分かりにくい。ただし「流体力学」は近代になってから数学的にも高度に発達した分野であり、しかも起源から hydro-（水の、の意。hydrogen = 水素）を冠していながら、圧縮性のある流体（気体）も扱う。本来的に正面から fluid mechanics という分野もある。

それは深入りしないとして、有名エピソードがある。ダニエルが『水力学』（あるいは今日的に『流体力学』hydrodynamics）を出版すると、しっと、ねたみから父ヨハンが何とこれに対抗して『水理学』hydraulics を—出版日を遡って—出版した。妨げるのではなく対抗して出す、という所がまたベルヌーイ家らしい。

流体力学の分野は数学的にハードである。入門書はたしかに冒頭は親しみ易いが、すぐに学問的に入ってしまい、ベクトル解析、テンソル解析、関数論、熱学・統計力学、力学系、……とフォローするのが大変である。事実、一般の力学から見れば、流体力学そのものが個別専門分野であって、入門といえども専門的であるのはやむを得ない。

時間さえあれば、これを数学的に逐一読み解いてゆけば興味深い世界がそこに展開するだろう。

4.5 噴水事件でオイラーを弁護

オイラーがフリードリヒ大王に見込まれ、サン・スーシ宮の噴水制作を命じられたが、うまく行かなかったことは述べた。オイラーは視力を失ってもなお、ベルリンにとどまり、'大王の数学者' としてのほこりは失わなかったくらいだから、この程度のことはベルリン退去（セント・ペテルブルク復帰）の大きな理由にはならないだろう。むしろ、オイラーは類稀に見る敬けんなプロテスタント信仰の保持者だったが、当時隆盛だったフランスの無神論的啓蒙思想—ヴォルテール自身は無神論ではなかったが— の宣伝マンのヴォルテールもアカデミーに招へいされていてオイラーを論難していたこと、オイラーを招へいし後盾になっていた院長モーペルテュイが死去したことなどが状勢を悪くした。

この事件はほとんど知られていない。ただ、噴水の一件には著者としてこだわりがある。もし「永久機関」を作れと指示されていたのなら、それが不可能なことは当時十分には知られておらず（次世紀の Clausius まで）もともと無理難題であったかも知れない。ではオイラーは果たしてそれを知っていたのだろうか。日本では「数学者オイラー」だけが無機的に偶像化されて若人のアイドルとなり、人間オイラーの人柄や思想・信仰には無関心であり、ましてや失敗や挫折については知る由もない。まずは、フリードリッヒ大王の不満を聞こう

> 私が望んだのは庭の噴水だった。オイラーは貯水池へ水を揚げるに必要な車輪の力を計算し、水はそこから水路を落ちて、最後は勢いよくサンスーシに流れ出るはずであった。私の水車は幾何学的には実現したが、たった一口分の水を

わずか50歩でも貯水池へ揚げることもできなかった。ああ空の空[3] なるかな！　幾何学の空なるかな！　Vanity of vanities！　Vanity of　geometry！」

サンスーシ

フリードリヒ大王は、18世紀啓蒙思想の影響を受け思想・学問・芸術に多大な関心を寄せた世界史上の「啓蒙的専制君主」—しかし専制を脱するには至らなかったな—の一人であった。フリードリヒにとってサンスーシに噴水システムを持つことは長年の夢であり、執念が込められ、巨額の費用も投じられた。この失敗以降ホーエンツォルレルン家の代々の王たちの願いにもかかわらず、噴水システムは約100年もの間沈黙したままであった。

オイラーが制作を命じられた装置（工作物）はどういうものか、どのような条件でどのように設計され、制作され、最終的には装置はどう機能した（しなかった）のか、その理由や原因は何であったか。詳しい事情はわからないが、想像するに二つの論点が思い浮かぶ。

第一点は流体力学（当時としては水力学）はほんの幼稚段階であっ

[3] 旧約聖書『伝道の書』第1章冒頭にある有名な聖句「1 ダビデの子、エルサレムの王である伝道者の言葉。2 伝道者は言う、空の空、空の空、一切は空である。……6 川はみな、海に流れ入る。しかし海は満ちることがない。川はその出てきた所にまた帰って行く。」を指したもの。大王はさすがに啓蒙的専制君主だけあって、よく古典や聖書に通じている。信仰深かったオイラーはもちろんこの聖句には通じていただろう。オイラーが幾何学者と認識されていたことは注目される。

た。もちろん、ようやく「オイラーの方程式」が知られているが、そもそも工作物は理学的知識だけでは制作できず工学的センスが必要である。他方、ダニエル・ベルヌーイはベルヌーイ家きっての現場実証観察派でセンスも非凡抜群であり（物理学を数学と同等以上の位置においていた)、生理学者として当時最新のハーヴェイ流の血液循環論に現場に通じていたから流体力学については一線級だったであろう。はたしてオイラーに工学的な器用さやセンスがあった否か。少年・青年時代から旧友だったオイラーとベルヌーイのノウハウの交換はなかったのだろうか。これらについては不幸にして著者のよく知る所ではない。

第二点はもう少し根本的なもので、いわゆる（第 1 種の)「永久機関」のことである。「揚げる」とあるので、貯水池は水源から正の高度差[4] にあったと想定される。想定が正しければ、動力（物理学的には外部からの仕事）が必要であるが、蒸気機関は未だ存在せず、また風力などの自然力に一切頼らなかったとすると、そもそもこの装置自体が「永久機関」であって、したがって本来あり得ない。

オイラー信奉者には、オイラーがはたして永久機関の不可能性を知っていたか否かが気になるかもしれない。筆者はその確定的情報を持たず推量するほかない。ラウエ『物理学史』(第 8 章）によれば、フランス学士院がこの問題の解法と称するものの不受理を決議したのは 1775 年であり、永久機関への到達不可能は 18 世紀終わりごろには確信となった。オイラーの件の問題は先立つこと数十年で微妙な時期である。さらに、たとえ見識や予想を以てしても、ある機関が永久機関であるかどうかの判断は一般には平易ではなく—だからこそ、学士院に申請の制度がある—それ自体一理論に相当する難しさがある（次項

4) ちなみに、江戸幕府の命令で江戸まで●●年開削された「玉川上水」は多摩川の羽村取入口水源より当時の江戸四谷大木戸（現東京都新宿区四谷 4 丁目交差点）までの約 43km で、両地点間の自然の落差はわずか 100 m であった。工事は地質の問題もあって難航を極め、予定資金は底をつきまた技術的失敗の結果の自殺者まで出た。

参照)。

リース

永久機関の不可能性について、オランダの物理学者、数学者、技術家でレオナルド・ダ・ヴィンチにも比せられるS. ステヴィン（●●●）の「ステヴィンの墓碑」で知られる「斜面上の釣り合いの法則」がある。図のようなリース（墓碑に掛ける花輪の鎖）のたとえで、右側の斜面が左側の斜面より長いから鎖も重く、鎖は時計回りに永遠に回転し続けるだ自ろうと想像されるが、ステヴィンは、斜面上の力の釣り合いを力学的に論じ実際にはそれは起こらないとした[5]それでは、ゼロから仕事が生まれることになる。かくして、エネルギーの総量は一定であり（エネルギー保存則)、これによって第1種の永久機関すなわち「周期的に働いて外部に仕事をし、機関自身も外界もその仕事以外は完全に元に戻る機関」(小野、遠藤、小出) の可能性は否定される。

ただ、これが重要だが、水力学のエクスパートのダニエル・ベルヌーイの助言と関与があっても、むしろ第1種の永久機関は不可能であることの再確認で終っただけであろう。

4.6 ベルヌーイも阻まれた「経験則」の世界

そこで確認しておこう。閉じた孤立した系においては全エネルギーは一定に保たれるが、系内での変化についてはエネルギー保存則は何も語らないし語りえない。この変化の向きを決める原理はエネル

[5] ダニエルは父ヨハンの赴任地オランダのグローニンゲン生まれであり、当然ステヴィンの名声と著名な業績を知っていたはずであり、他方オイラーは竹馬の友であったから、オイラーもステヴィンの論には通じていたと推論されるが、あくまで推論である。

ギーの保存則と矛盾はしないがそれとは独立な原理である。熱エネルギーの受け渡しについては、エントロピーの増大（厳密には非減少）$\Delta S = \Delta q/T > 0$ の向きのみ可能である。実際、熱 Δq が高温側 T_1 から低温側 T_2 へ移るとき、$T_1 > T_2$ から総エントロピー変化は $\Delta S > 0$ になることはみやすい (Brillouin)。

実は、これは証明になっていない。なぜなら、最初から「高温側 T_1 から低温側 T_2 へ移るとき」との前提をおいていて、実質上は同義反復である。逆向きの移動のもとでは $\Delta S < 0$ となるが、それが観察されたことはないのである。「エントロピーの減少は自然界では事実上全く観察しえない」（ランダウ・リフシッツ『統計物理学』邦訳・上)。つまり、この「熱力学の第二法則」は経験則であり力学の役割は無用である。

次のように言われている。

> —さて、蒸気機関は熱から機械的な仕事を発生させるが、一方機械的な力によっても、熱を生み出すことができる。衝突、摩擦はすべてこのことをしているのである。熟練した鍛冶屋は、鉄の楔を鎚で打つだけで灼熱させることができる。車輪の軸は、細心に油を差すことによって、摩擦による発熱から守られなければならない。近頃このことが大規模に利用されている。すなわち若干の工場の過剰の水力が、一方の鉄板がその軸を中心として迅速に回転している二大鉄板を互に摩擦するように利用され、その結果両者は強く加熱された。その獲得された熱が部屋を暖め、燃料の要らぬストーブが得られた。ところで鉄板によって生み出された熱が小さな蒸気機関に加熱するほど十分であり、その蒸気機関がさらにまたその鉄板を動かし続けることができるようになり得ないものであろうか。そうすればもちろん永久機関は発見されたであろう。この問題は提起されることができたし、また

それは旧来の数字機械学［力学を指すと思われる］の研究では決定され得なかった[6)]。私が諸君に述べようと思っている普遍的法則は、この問題を否定するものであることを前もって付言しておきたい[7)] —

もちろんここで言われている「永久機関」の不可能性は熱現象を介在させる「第２種永久機関」のことであり、無からエネルギーを作り出す「第１種永久機関」ではなく、したがって、力学の研究が入り込む余地はない。旧来の (älteren) というと何やら旧弊が批判されているように感じられるが、別のところに「前世紀の偉大な数学者たちによって一般的に確認された法則」……dieses Gesetz durch die gro β en Mathemamatiker des vorigen Jahrhundert allgemein war として、ダニエル・ベルヌーイとダランベールが注釈されている。したがって、研究（者）の質の評価ではない。

これは「法則」の論理学上の地位を述べたもので、一言でいうなら、「経験則」は証明の限りではない。合致する事実は無数に観察されているが、それに反する事例は（ないと証明できたわけではいないが）ただの一例もなく、論理的証明は困難で、本質的にただ「経験」を根拠によって成立している法則である。

「上に述べた簡単な定式化［統計力学ことにエントロピーをさす］が現実の事実に対応していることには何の疑いもない。それはわれわれの日常の観察のすべてによって裏書きされている。しかし、この法則性の物理的本質と起源についての問題にいっそう念入りの考察を加える段になると、今日にいたってもなおある程度は克服されないでいる困難が現われてくる。」

6) Sie(diese Frage)war durch die älteren mathematisch-mechanischen Untersuchungen nicht zu entscheidon.

7) H. ヘルムホルツ 『自然力の相互作用について』Über die Wechselwirkung der Natur kräfte. （1854 年、ケーニヒスベルクにて）

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

（ランダウ・リフシッツ前掲）

4.7 気体分子運動論も

たしかに、筆者は寡聞にして詳しくは知らなかったが、ダニエル・ベルヌーイは『流体力学』のなかでミクロの気体分子の運動論を論じている（熱力学のテキストは人名だけは挙げている）。気体は圧縮性のある流体である。どこまで到達したか研究の余地があるが、とにかくこの見方の歴史的意義は大きい。物質が巨視的には静止した状態でも、その構成粒子は勝手な向きに絶え間なく運動している。この乱雑な運動のエネルギーは「内部エネルギー」と云われ（兵頭）、その収支を議論するのが熱学である。

ちなみに、気体分子運動論の教える所によると、ボルツマン分布（速度ベクトルが独立な3次元正規分布とする）をもとに計算された分子の平均速度は、根平均2乗速度[8] (root-mean-square velocity)

（式が入る？）

として与えられる（クラウジウス，1857)。これを0°C，1気圧の標準状態で計算してみよう。気体はヘリウム He とし、さしあたり1モルで計算すると

$$p = \qquad , \quad V = \qquad , \quad M =$$

から

（式が入る？）

となる。これは1 km/秒のオーダーで不自然に大きいが、実際は他粒子との衝突で自由に運動できる飛距離（平均自由行程 mean-free-

[8] ＊英語式に記号の外側から読んだ呼称で、逆の読み「2乗平均平方根速度」(兵頭) もある。ここでは筆者の慣れた流儀によった。

path）はずっと小さい。言い換えれば、他粒子への衝突は並外れてきわめて頻繁である。

このようにして、ベルヌーイの提唱した気体分子運動論は「内部エネルギー」という熱学の基礎概念へ発展した。実際、エネルギーは仕事 W と熱 Q という形で物体に与えられるから、前後の内部エネルギー変化として

$$E_2 - E_1 = Q + W \qquad \text{(小野・小出 etc.)}$$

が「エネルギー保存則」の表現となる。これこそが「熱力学の第一法則」であり、そこまでは力学的考察で到達できるのである。

メモ：https://en.wikipedia.org/wiki/H-theorem

4.8 不可逆性自体はベルヌーイ分布の仕組みで理解できる

ただし、ここから先が全く無縁というわけではない。

「熱力学の第二法則」は、熱は高温から低温へ移りエントロピーは増加し (厳密には非減少) この過程は不可逆であると述べる。これに反する現象は実際は起きていない。人類は少なくとも有史以来「氷の上に置いたやかんの水が沸騰するのを観察したことはない」。法則は経験則であって、しかも無類の確率論的・統計的正確さのある法則である。

確率論的・統計的正確さなら経験則でなくとも確率数理の数値例で表現できる。「可逆・不可逆性」のテーマに合わせてはあるが、熱現象は介在せずしたがって未だ「熱力学の第二法則」とは別物であることを注意しておこう。

秩序より無秩序へ　いま $2n$ 個のランダムに運動する粒子が箱の仕切られた左半分にある。これを仕切りを除いて解放しよう。運動によって 十分な時間の後 n 個が左半分に n 個が右半分に存在する確率は、各粒子が右か左の半分にある確率は各 $1/2$ で—ベルヌーイ分布—

あって、

$$P_1 = \frac{2N!}{N!N!} \cdot (1/2)^{2N}$$

である。ちなみに $n = 1000$ として計算すると

$$P_1 =$$

となる。左半分に存在する粒子数 x の確率分布は二項分布 $\mathrm{Bi}(2n,\, 1/2)$ であるが、中心極限定理でこれを近似すれば $N(n,\, n/4)$ で、1 シグマ範囲は

$$N \pm \sqrt{N/2}$$

となる。$x = n$（半数）の極大に対する比は $(\sqrt{n}/2)/n$ で、極大はきわめて鋭く確からしい。

<u>無秩序から秩序へ</u>　運動によってこれらすべての粒子がいずれか半分の片側にそろい集中する確率は、同じく二項分布から

$$P_2 = (1/2)^{2n} \cdot 2 = (1/2)^{2n-1}$$

で、決して 0 ではないが極めて小さく、事実上「決して観察されることはない」[9]。

$$P_2/P_1 = \frac{N!N!}{2 \cdot 2N!}$$

この設定の限りでは、秩序 $\Longrightarrow$ 無秩序 の転移はほぼ起こりえないことが数理的に（確率論的に）理解できよう。

9) ボレル

図と表

4.9 有限のなかに無限と永遠を読み込む

地球は孤立系ではないが、全宇宙は（定義により）孤立系である。エントロピー増大が不可逆なら—エントロピーは増大するしかないなら— 「永遠」の長時間後ではあるが、全宇宙のエントロピーはいつか極大に達する。エントロピーはドイツの物理学者 R. クラウジウスによって定義され (1865)、それは有名な論文「熱の移動力について」Über die bewegende Kraft der Wärme(1850) に基づいていた。エントロピーが極大に達すれば全宇宙はもはや熱的高低差が消失してフラット一様になり、一切の物理的仕事（移動）の原資が消えて、宇宙は完全停止（死）の状態を迎える。この終局イメージはクラウジウス、W. トムソン（ケルヴィン卿）によるが、「熱的死」heat death[10)] と形容してよかろう。

科学者は自然から学ぶのではなく、自然の「法則」から学び、法則が人間にとって何を意味するかを主体的に了解する素地を持っている。

—このようにして、永久機関の夢を追求した人々が、暗中

10) この語の正確な創案者については不明。

模索的に紡ぎ始めた糸は、われわれを一つの普遍的な自然の根本法則へと導き、その法則は、宇宙史の初めと終りの遠い暗闇にまで光を送っている (welches Lichtstrahlen in die fernen Nächte des Anfang und des Endes der Geschichte des Weltalls aussendet)。この法則は、われわれ人類に対しても、長期ではあるが、しかし決して永遠な存続 (ewig Bestehen) を許容するものではない。その法則は、審判の日[11] をもって人類を脅かすものではあるが、その日の来る時は、幸いにもまだベールに包まれている。各個人と同じように、人類もまたその死滅の考えに堪えなければならない。しかし人類は、既に死滅した他の生物形態よりも優って、高い倫理的課題 (höhere sittliche Aufgaben) をもつものであり、その課題を背負い、それを完成することによってその使命を果たすものである。（ヘルムホルツ前掲）—

4.10 「物質的」でない価値は 10 倍楽しめない

われわれはここで現実の世界に戻る。ここから先の $x, y, \ldots$ は数学的なものでなく、現実に返った量である。

われわれはオカネやモノの価値がその量 (x) に比例しないことを知っている。知っているどころか、それ以前に、そうでなく無意識に感じまたそうでなく日々行なっている。われわれはオカネやモノに比例して楽しめるわけがない。‘あんぱん’がおいしいからといって 10 個食べれば 10 倍おいしいわけではないし、ピーナッツがあるとして、

11) 新約聖書「ヨハネ黙示録」などに見られるユダヤ・キリスト教の終末論思想では、世界には「終わりの日」が定められており、正義の神による「最後の審判」が行われる。予告はされているがどのような形や状況でいつ到来するかは知らされていない。しかし、いつであってもそれにそなえて正しく高い倫理に生きなければならない。ここでは、象徴的に、熱力学の第二法則の指し示す「熱的死」を「世界の終わり」の起こり方の一つと見立てている。

際限なく食べれば先の方ではおよそ味自体を感じなくなり、したがってどこかでストップするだろう。‘足るを知る’ことは倫理、道徳上の問題以前で、10 倍のオカネやモノで「10 倍楽しむ」とか「10 倍幸福」になるわけではないのは当然である。われわれは、物理的、物質的な量 x にそのまま基づいて生きているわけではなく、かといって比例する量 ax、あるいは $ax+b$ で生きているわけでもない。

ただ、これは重要なことだが、ある程度の範囲においてなら、より多く楽しみより多く幸福になることくらいは言えそうである。却って苦しくなったりみじめで不幸になることはない。実際、$2>1$ である以上 2 個のリンゴは 1 個より価値が多そうだし、$10>5$ である以上 10 万円は 5 万円よりいろいろなことができるから、価値が多いことも確かである。物質的量 x は決して無関係ではなく効いているとは言える。では、x は どう 効くのか。

4.11 物質対精神

ベルヌーイ家の人々は、哲学のトレーニングを積んでいた。当時の知識ある人々の約束事のようなものであったから、原理的に考えることには慣れていた。ましてやダニエルは生理学も専門にしていた。ここに述べたいったいどこから手を付けていいかわからない—わかり切っているがゆえにかえって難しい—難問にもそれほど苦労はしなかった。

‘人間には心理がある、価値は心理にもとづく’といえばかなり近いのだが、心理学なるものはまだなかった。ただ、少なくとも、明らかにそれは「精神」の現象である。物理的、物質的存在だけでなく、「精神」の存在があり、オカネやモノはあるだけで、それに価値を見出すのは「精神」である。すなわちオカネもモノに見出される価値はダニエル・ベルヌーイの「精神的価値」なのである。

「精神的価値」moral value の moral にはもちろん「道徳・論理の」

という辞書的意味があるが、研究社『大英和辞典』では、第3番目に「物理的なものに対して精神的」という訳語がある。当時はこの‘精神的’という形容詞は広く用いられ、‘人間的’さらに‘社会的’まで及んでいる。ヤコブ・ベルヌーイの Ars Conjectandi の窮極目的は、確率の応用を社会や人間の中に見出す構想であった。その第IV部は‘社会の中にある確率’—パスカルやフェルマー、ホイヘンスはさいころしか頭になかった—を目ざすもので、当時としては型破りに大胆な構想だったろう。この構想はおいのダニエルにおいていそう明確な形をとった。オカネの精神的価値である。あきらかにこれは経済学そして統計学の始まりを告げるものでもあった。

‘理系’の人には、微分積分（ヤコブ、ヨハン・ベルヌーイ）や流体力学、熱力学（ダニエル・ベルヌーイ）と来て、今何かアイマイでミステリアスなものに連れ込まれたと感じる人は多い。「精神」は少なくとも「物質」ではなく、明確でも正確でもない。それは人間に関することである限り当然であるのだが、実は、リケイにもわかる、精神的価値を考えなければならない現象が存在する。それがダニエル・ベルヌーイが問題にした「セント・ペテルスブルグの逆説 (St. Petersburg's paradox)」である。

> —いま、理想的な硬貨（表の確率 $= p = 1/2$）を、表が出るまで投げつづける。1回目で出れば2円、2回目ならば4円、3回目なら8円、...、n 回目なら 2^n 円を受け取る。賭の参加料は f 円とする。この賭けに参加すべきか。—

この賭から得る金額の期待値を計算しよう。n 回目にはじめて表が出るという確率は $(1/2)^n$ なので、確率 $\times$ 金額 の和をとれば、

$$(1/2) \times 2 + (1/2)^2 \times 2^2 + \cdots + (1/2)^n \times 2^n + \cdots = \infty$$

＜＊139＞

で、無限大となる。したがって、f がいくら高くても賭に参加した方が得となるが、とうてい承服できぬバカバカしい結論である。実際、f が高くなれば、この賭に参加する人の数は減少するであろう。例えば $f = 1000$ 円とすると $n \geqq 10$ でなければこの賭は損となり、'まじめに' 賭ける人ならばこの賭にはまず参加しない（ドストエフスキー『賭博者』にあらわれる病的賭博者には通じない）。どうしてこのような誤った数学的結果になるのであろうか。これを正しく修正する方法はないのだろうか。

ニコラス・ベルヌーイは 1713 年 9 月 9 日に P. R. de モンモールにあててある問題を提起した。これが先の「セント・ペテルブルグの逆説」である。1728 年 G. Cramer は $\sqrt{x}$ 関数を用いてこれを解き（後述）、5 月 21 日にニコラスに伝えた。そして、ニコラスは 1732 年 4 月 5 日、ダニエルにこれを伝えている。ダニエルは結果を不十分と考え、1738 年次の有名な論文となった。論文はラテン語（一部フランス語）で

> Specimen theoriae novae de mensura sortis
> *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*

強いて訳せば『賭けの測定に関する新理論の見本』となろう。specimen（見本）は、こういうものを作成しましたので一つご覧ください、くらいの意味で、ここには単に逆説を解くというよりも、もっと前進

して新理論を提案する気概がある[12]。

さて、そもそも「賭け」（sors, 英 = lottery）はその金額で直接評価できるものではなく、ある適切な価値関数（対数関数）に換算したうえで平均（期待値）をとって、その実質価値（moral value 心理的認識上の価値）を定めるべきである。この命題は価値の本質に迫る画期的なもので、次の式と図で説明される。

$C, D, E, F, \ldots$ は得られる可能性のある金額、$m : n : p : q : \cdots$ はそれらが得られる可能性の比率とする。適切な関数を用意し、この関数で金額の実質価値評価し $CG, DH, EL, FM, \ldots$ となったとすれば、この賭けの実質価値はその期待値

（式が入る？）

で表される。そして、これは有限な値にすることが証明できるし、実際計算も可能である。

図

現在資産額が B 点（大きさ AB）ならば金額はこれで割っておいてもよい。もしこの価値関数を対数関数 $\log x$（一般に $b \log x$。ただし b は結果的に効かない）するならば、

[12] 発表は「セント・ペテルブルク帝国科学院論文誌」（あるいは紀要）上で、Petropolitan はロシア帝国のペテルブルクのギリシャ名をラテン語訳したもの。

（式が入る？）

である。これを金額に戻して計算したいなら

（式が入る？）

となり、この場合はこれで解決した。なお価値関数は数学的には対数関数に限る理由はなく、$\sqrt{}$ 関数でも差し支えない。しかし、現在資産効果が上手く入らないなどの欠点もある。

このような価値関数を入れたくないなら、次のように考えてもよい。逆説の設定では、賭けの提供者（ハウス）は無限の資産を保有すると仮定されているが、それは現実的でない。非常に大きいが有限の資産を保有し、参加者はそれを限度として賭けの賞金を得ると考えれば、賭けの期待値は有限となり、逆説は解消する。実際、

（式が入る？）

という計算結果もある。

経済学者 P. サミュエルソンは、市場メカニズムのもとではこれほどの巨大な損失を被る金融商品はそもそも供給されないから、もともと逆説は生じないとした。

4.12 「効用」（コウヨウ）とは？

さて、原論文に当って調べたのだが、これを解釈してみよう。貨幣の価値というのだからまずは経済学の問題である。いきなりだが、「効用とは何だろうか。」ダニエル・ベルヌーイは‘精神的価値’と言っている価値が、今日では経済学で「効用」utility と広く言い慣らされている概念である。もとより、‘価値’とは、何か善いこと、良いこと、気持いいこと、役に立つこと、おいしいこと、幸せなこと……などの総称で、これを何らかの効きめがあることとして「効用」と仮に

言うことにしよう（いやならそう言わなくてもいいのだが……）。すると、ここまで述べたことはまず次の命題となる。x が $10x$ になってもシアワセの効き目が単純比例的に 10 倍になるわけではないし、直線的にシアワセが伸びるわけではない。

> —モノやオカネの量を x とすると、x の効用 $u(x)$ は x あるいは ax あるいは $ax+b$ とは表わされず、ある関数 $u(x)$ である—

そうだとすると、$u(x)$ は‘精神的なもの’を表わすゆえ、何かアイマイでエタイの知れない何物かとなろう。確かにそういう面はあり、これが「効用関数」$u(x)$ だと一通り示すことはできない。そもそも人により場合によりまた x が何であるかによるだろう。少なくとも

$$x > y \text{ なら} \quad u(x) > u(y)$$

でなくてはならないだろう。これ以外にハッキリすることはないのだろうか。

4.13 セント・ペテルブルグの逆説の解決—経済学のスタート

したがって、精神的価値の曲線は「金銭の効用曲線」となる。図●もそれである。

重要なことは、小さい金額（たとえば 5 円）から 1 円分増加した場合と、大きい金額（例えば 1000000 円）から 1 円分増加した場合とでは、同じ 1 円に対する効用の増加分—限界効用という—が後者の方がずっと小さい。金持ちほど「お金」のありがたみがわからない。これは日常の経験則であるが、重い経験的事実で経済学で「限界効用逓減[13] の法則」といわれている。もちろん、ベルヌーイの効用曲線

13）「逓減」とはだんだん減る、の意。

$$u(x) = k \log x \quad (k > 0)$$

（自然対数として底は $e = 2.71828\cdots$）

でもその法則は取り入れられている。

簡単のために $\mathrm{AB} = 1$, $k = 1$ とすると、x 円の効用 $= \log x$ となるが、

$$\log 2.72x = \log 2.72 + \log x = 1 + \log x$$

金銭が約 2.72 倍になるごとに、効用は 1 ずつふえる。

$$\log 10x = \log 10 + \log x = 2.3 + \log x$$

よって、10 倍になっても約 2.3 程度ふえるだけである。決して、10 倍シアワセになることはない！

セント・ペテルブルグの問題も、賭によって金銭そのものを得るのでなく金銭の効用—精神的価値—を得ていると考え、その価値の期待値として、今度は ∞ ではなく

$$\begin{aligned}
&(1/2)\log 2 + (1/2)^2 \log 2^2 + (1/2)^3 \log 2^3 + \cdots \\
&= (\log 2)\{1 \times (1/2) + 2 \times (1/2)^2 + 3 \times (1/2)^3 + \cdots\} \\
&= \log 4
\end{aligned}$$

を得るということで、めでたく解消（解決）する（$\{\quad\}$ 内 $= 2$ に注意）。

同じことだが見方を変え、この賭けの価値を金銭換算すると、‘確実な’ 4 円—この換算値を「確実同値額」certainty (monetary) eqivalent という— が与える効用に等しい。効用で測ったこの賭の換算期待値はわずかに 4 円で、参加料が 4 円以下のときだけ賭に参加すればよいが、まともな結論であろう。と同時に、「効用」概念の有効性、妥当性がこれで歴史上はじめて確立したのである。

なぜ、「セント・ペテルブルク」か。

ダニエル・ベルヌーイはセント・ペテルブルク大学の教授で、ここでこの課題を知り、論文もここの学士院紀要に出した。「紀要」とは学者仲間の論文集で、ふつうの人々は詩人仲間の同人誌を思いうかべるかもしれない。しかし、学会のお偉方によるクオリティの審査で掲載許可が決るので、なかなかきびしい。
なお、この地名は時代的変遷があり、

1. セント・ペテルブルク $\Longrightarrow$ 2. ペトログラード（ト）$\Longrightarrow$ 3. レニングラード（ト）$\Longrightarrow$ 4. サンクト・ペテルブルク

と変った。1. セントは「聖」でイエス・キリストの弟子ペテロを聖人としたが、あるいは歴史上の建国者ピョートル大帝に因むといってもよい。2. は 1. のロシア名、「ブルク」「グラード」は…市、3. はロシア革命後、4. はソ連崩壊後で、‘サンクト’‘ブルク’は 1. の音名を写したもので、現在名である。なお、英語名 Petersburg では s を発音するが、ロシア名では欠落するので、多少不自然だが、s を入れずしかしながら「セント」を入れた地名呼称とした。

4.14 「効用」の切れ味

それだけ有用ならその切れ味を知りたいものだが、典型的な現代的用い方を紹介しよう。著者の著書から引用する。

リスク下における人間行動をみていると、効用の概念なしに、通常の金銭の期待額—期待金額 (expected monetary value)—だけでは、到底満足できる説明ができないことは、セント・ペテルブルグの逆説でみた通りである。それだけではない。人はなぜ、モナコやラスベガ

スで儲けるのか？　しかも、カジノの経営者はめったに負けて破産することはない。火災保険という‘賭’ではプレミアム（保険料）の統計は、多くの場合、支払われるであろう保険金より高いし、そうでなければ保険会社は倒産してしまう。すると、人はなぜ保険に入るのか？　これらの問題は、効用の曲線の様子—その凹凸（おうとつ）—によって、答えられる。

効用曲線が凹型のときに、表●であらわされるような賭（投資）を考えよう。成功、失敗が 50–50 というリスクのある投資であって、成功すれば 200 万円利得し、失敗すれば 200 万円損失する。また、投資をしない場合の現在額は 300 万円である。

表＜＊140＞

まず、投資による期待金額で考えれば、

$$\frac{1}{2} \times 500 + \frac{1}{2} \times 100 = 300\,（万円）$$

となり、投資をしない現状額に等しい。ゆえに期待金額の基準は、区別をせず、投資の可否について何も告げない。一方、金銭額でなく効用を導入して、効用の期待値で考えよう。賭に入ったとすると、

$$u(500\,万円) = \mathrm{QG}, \quad u(100\,万円) = \mathrm{PF}$$

であるから、台形 PFSQ の中点連結定理により、効用の期待値は

$$\frac{1}{2}u(500\,万円) + \frac{1}{2}u(100\,万円) = \mathrm{S'M}$$

となる。一方、賭に入らなければ、効用は

$$u(300\,万円) = \mathrm{SM}$$

ここで曲線が凹型であるから、必ず

$$\mathrm{S'M} < \mathrm{SM}$$

すなわち、賭（投資）に入らず、リスクを回避することになる。あるいは、同じことを金銭額で—効用ではなく、生の金銭で—次のようにいってもよい。

効用曲線上にRを$\mathrm{RS'} \parallel x$軸なるようにとり、x軸に下した垂線の足をN、その点のxの値をx_0とする。●●式および$\mathrm{RS'} = \mathrm{RN}$なることを考えると、表●の賭に入ることは、額$x_0$の金銭（現ナマ）を確実に—賭に供せずに—保持していることと、同一の効用を与える想像上の金額であるが、効用を考慮に入れた場合に、リスクのもとにある投資資産の実質的—リスクのない安全な場合に換算した—価値である。このx_0を、「確実同値額」ということは先に述べた。●●式は、$x_0 < 300$、つまり

$$確実同値額 < 現状額$$

と同じことをいっている。

ちなみに、ダニエル・ベルヌーイの効用関数のとき（ただし、$k = 1$）には、

$$\mathrm{QG} = \log(5 \times 10^6), \qquad \mathrm{PF} = \log(1 \times 10^6)$$

であるから、

$$\mathrm{RN} = \mathrm{S'M} = \frac{1}{2}(\mathrm{QG} + \mathrm{PF}) = \log(\sqrt{5 \times 1 \times 10^{12}})$$
$$x_0 = \sqrt{5} \times 10^6 \fallingdotseq 223\,万\,6\,千円$$

つまり、この投資の実質的価値は、投資をしない現状額300万円を約66万円下回ることになり、当然、リスクを回避して投資を控えることになるのである。

mathpulus<2016/11/01, beta2 baseed on kbdbook7b.cls keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2006/11/10> (based on LaTeX2e<2016/03/31>+0):

4.15 ゴールドバッハの問題

4.15.1 「私は復活する」resurgo

バーゼルの「ミュンスター[14]」は、ゆっくり流れるライン川を下に見る小高い丘に天を衝いて立っている。バーゼル大学「ベルヌーイ文庫」のフリッツ氏の勧めでこの大聖堂を訪れた。

写真

ヤコブ・ベルヌーイの墓碑はこの大聖堂の一角の柱に刻まれ、碑銘の下に、対数らせんとともに、標語

Eadem mutata resurgo[15]
(Though changed I shall rise the same.)
変わるといえども同じ形で私は復活する

が故人への頌とともに書き込まれてあった。「復活する」（英：resuurect）は、「死からの復活」つまり「甦(よみがえ)り」と永遠の生命を意味しキリスト教信仰の中心教義である。実はこれには数学的表現が与えられる。さすがに父祖以来の熱心な新教徒（改革派教会）の面目躍如た

14) 中世の修道院に由来を持つ大聖堂。ほかにボン、コンスタンス、エッセン、フライブルグ、ウルムなどにある。

15) 再び上がる (rise again)。聖書用語で、死から立ち上がる（復活する）の意。

るものがある。
　そこで、頌を書き留めた。

IACOBUS BERNOULLI
MATHEMATICUS INCOMPARABILIS
ACAD. BASIL.
VLTRA XVIII ANNOS PROF.
ACADEM. ITEM REGIAE PARIS. ET BEROLIN.
SOCIUS
EDITIS LUCUBRAT. INLUSTRIS.
MORBO CHRONICO
MENTE AD EXTREMUM INTEGRA
ANNO SALUT. MDCCV. D. XVI. AUGUSTI
AETATIS L. M. VII
EXTINCTUS
RESURRECT. PIOR. HIC PRAESTOLATUR[16)]
IUDITHA STUPANA
XX ANNOR. UXOR
CUM DUOBUS LIBERIS
MARITO ET PARENTI
EHEU DESIDERATISS.
H.M.P.[17)]
＜邦訳中＞

16)　RESURRECT. PIOR. HIC PRAESTOLATUR 私は清められ、そしてそこで（それによって）復活を待ち望み［文法的には受動態］……の意。
17)　hoc monumentum posuit　「これを建つ」（建之）。墓碑の建立を記す最終文。

（写真）

対数らせん

知られるように、平面曲線のらせんにはいろいろあるが、

表

ヤコブ・ベルヌーイはこの対数らせん

（極表示で式が入る？）

を気に入っていた。その著しい性質は

（式が入る？）

であって、ベルヌーイには「同じ形で再生する」という宗教的テーマを暗示していた。また、このらせんは「等角らせん」equiangular spiral ともいわれ、各点での接線が動径と一定角 ϕ をなすという性質があるが、これは $\theta, \theta + d\theta$ の動径が作る三角形から容易に証明される。

図

ベルヌーイ家年譜：作成中