Krzysztof Bednarski – AiR

MNUM – Projekt 1

Zadanie 1.19

Zadanie 1

Wyznaczanie dokładności maszynowej komputera.

Z definicji dokładność maszynowa jest to najmniejsza dodatnia liczba, która w arytmetyce zmiennoprzecinkowej jeśli zostanie dodana do jedynki, da wartość większą od niej, tzn.

$$eps = \min\{g \in M : fl(1+g) > 1, g > 0\}$$

Zasada działania algorytmu:

Jako początkową wartość eps przyjmujemy 1. Podczas przebiegu każdej pętli, zapamiętujemy poprzednią wartość eps, a następnie dzielimy ją przez 2. Jeśli po podzieleniu eps przez 2 i dodaniu do 1, wartość wyrażenia dalej będzie 1, pętla zostaje zakończona. Wartość eps, czyli dokładności maszynowej jest to wartość z przedostatniej pętli.

Kod źródłowy programu (plik: machinePrecision.m) :

```
function [eps] = machineprecision() %Obliczanie dokladnosci maszynowej komputera
    x = 1.0;
    rd = 1.0 + x;
    while (rd > 1.0)
        eps = x;        %Ostatni x spelniajacy warunek petli, zapamietujemy w
zmiennej eps
        x = x/2;
        rd = 1.0 + x;   %Jesli rd bedzie równe 1, oznacza to, ze ostatni
zapamiętany x to dokladnosc maszynowa
    end
end
```

Wyniki:

```
>> [eps] = machinePrecision()


eps =

   2.2204e-16
```

Wynik ten jest zgodny ze standardem IEE 754 dla liczb zmiennoprzecinkowych podwójnej precyzji.

Zadanie 2

Rozwiązywanie układu n równań liniowych A×x = b metodą LU rozkładu macierzy.

Aby otrzymać rozkład LU, w którym macierz L jest macierzą dolną trójkątną, natomiast U jest macierzą górną trójkątną, postępujemy tak jak w metodzie eliminacji Gaussa. Macierz U jest to po prostu macierz A, po przeprowadzeniu eliminacji Gaussa. Natomiast macierz L powstaje w taki sposób, że na jej diagonali znajdują się 1, natomiast pod diagonalą w każdą komórkę macierzy wpisywany jest współczynnik, który był potrzebny do wyzerowania danej komórki w eliminacji Gaussa.

Gdy mamy już rozkład LU, możemy przejść do rozwiązywania równań:

1. L×y = b, a następnie
2. U×x = y

Po rozwiązaniu obu równań, otrzymujemy wektor rozwiązań x.

Dane:

$$\text{(a)}\ \ a_{ij} = \begin{cases} 7 & \text{dla } i = j \\ 3 & \text{dla } i = j-1 \text{ lub } i = j+1, \quad b_i = 2,5 + 0,5i \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

$$\text{(b)}\ \ a_{ij} = 2(i-j) + 2; \quad a_{ii} = \tfrac{1}{6}; \quad b_i = 2,5 + 0,4i$$

$$\text{(c)}\ \ a_{ij} = \tfrac{1}{4(i+j+1)}; \quad b_i = \tfrac{5}{3i}$$

Kod źródłowy programu (plik: metodaLU.m):

```
function[x] = metodaLU(A, b, n)
tic %rozpoczecie pomiaru czasu
A_P = zeros(n,n); %macierz pomocnicza
x = zeros(n,1); %wektor niewiadomych
y = zeros(n,1); %wektor potrzebny do rozwiazywania rownan
L = zeros(n,n);
U = zeros(n,n);

%Macierz w ktorej zapisujemy poczatkowe wartosci macierzy A
A_P = A;

%Przeprowadzamy eliminajce Gaussa macierzy A, ale w komorce, ktora
%zerujemy, zapamietujemy zmienna l
for j = 1:n
    for i = j+1:n
        l = A_P(i,j)/A_P(j,j);
        A_P(i,:) = A_P(i,:) - l * A_P(j,:);
        L(i,j) = l;
    end
end

%Przeksztalcona macierz A rozkladamy na mierze L i U
for j = 1:n
    for i = 1:n
        if i==j
            L(i,j) = 1;
            U(i,j) = A_P(i,j);
        elseif i>j
```

```
            U(i,j) =  0;
        elseif i<j
            U(i,j) = A_P(i,j);
        end
    end
end

%Rozwiazujemy dwa równania
%Najpierw rownanie L*y=b
k = 1;
while k<=n
    y(k) = b(k); %pierwsza komorke mozemy przepisac
    l=k-1;
    while l>=1
        y(k) = y(k) - (L(k,l)*y(l));
        l = l-1;
    end
    k = k+1;
end

%Teraz rownanie U*x=y
k = n;
while k>=1
    x(k) = y(k); %pierwsza komorke mozemy przepisac
    l=k+1;
    while l<=n
        x(k) = x(k) - (U(k,l)*x(l));
        l = l+1;
    end
    x(k) = x(k)/U(k,k);
    k = k-1;
end

%r jest residuum
r = b - A*x;

%Po obliczeniu normy zwracamy ja jako blad obliczenia
r = norm(r);

toc
end
```

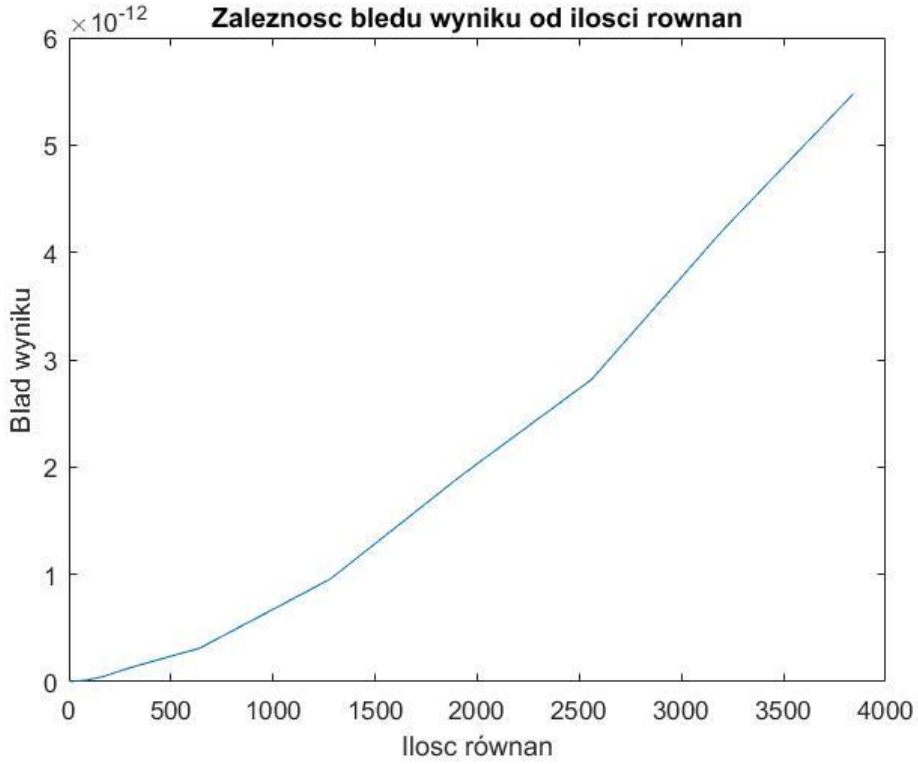
Wyniki:

Ilość równań została zwiększana, aż do momentu w którym czas potrzebny na obliczenie wektora wynikowego, przekroczył 5 minut. Stało się to po osiągnięciu 3840 równań. Ilość równań była zwiększana w następujący sposób. Do 1280 rosła wykładniczo, natomiast później była zwiększana o 640.

Podpunkt a):

Dane dla podpunktu a):

Ilość równań	Czas potrzebny do obliczenia	Błąd przybliżenia
10	0.0050	1.0e-11 *0.0001
20	0.00016840	1.0e-11 *0.0002
40	0.00054938	1.0e-11 *0.0003
80	0.0017	1.0e-11 *0.0008
160	0.0087	1.0e-11 *0.0013
320	0.0471	1.0e-11 *0.0044
640	0.6033	1.0e-11 *0.0142
1280	9.6370	1.0e-11 *0.0312
1920	34.8817	1.0e-11 *0.1919
2560	154.9106	1.0e-11 *0.2817
3200	171.4815	1.0e-11 *0.4201
3840	400.8918	1.0e-11 *0.5473

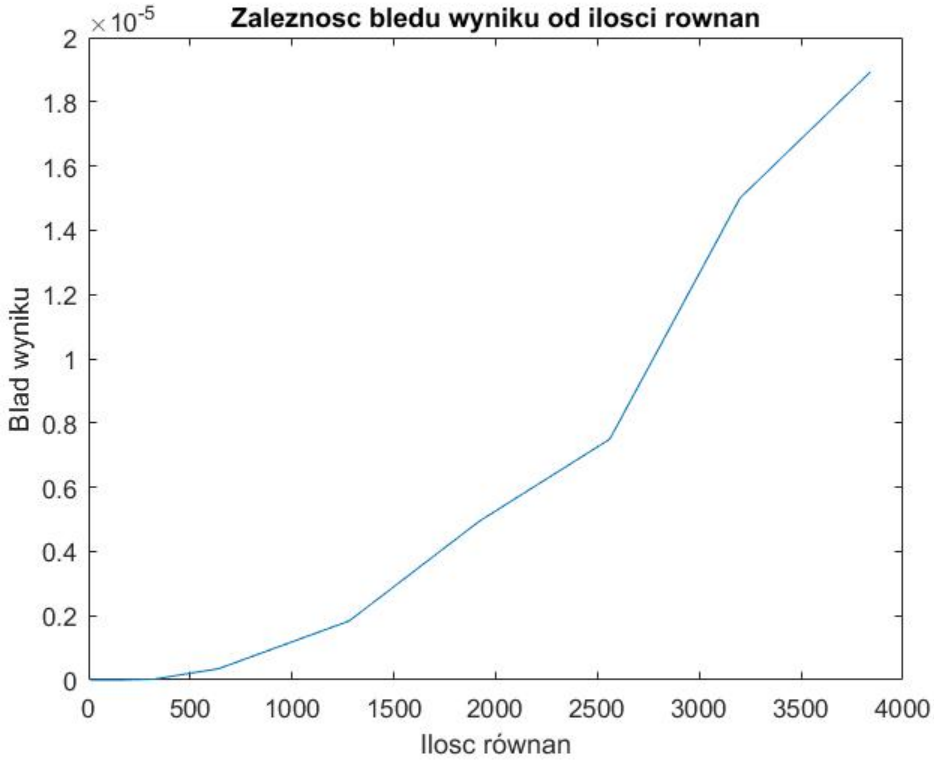


Z wykresu widać, że błąd wyniku rośnie nieliniowo względem ilości równań. Natomiast błędy te są rzędu e^(-12). Możemy z tego wywnioskować, że rozwiązanie podpunktu a) tą metodą daje dokładne rezultaty.

Podpunkt b):

Dane dla podpunktu b):

Ilość równań	Czas potrzebny do obliczenia	Błąd przybliżenia
10	0.00060753	1.0e-10*0.0123
20	0.00018464	1.0e-10*0.1172
40	0.00030546	1.0e-10*0.5060
80	0.0011	1.0e-10*0.3958
160	0.0072	1.0e-06* 0.0015
320	0.0437	1.0e-06*0.0229
640	0.6650	1.0e-06*0.3523
1280	9.7780	1.0e-04*0.0184
1920	36.2052	1.0e-04*0.0494
2560	157.4237	1.0e-04*0.0750
3200	172.4699	1.0e-04*0.1501
3840	412.9059	1.0e-04*0.1893

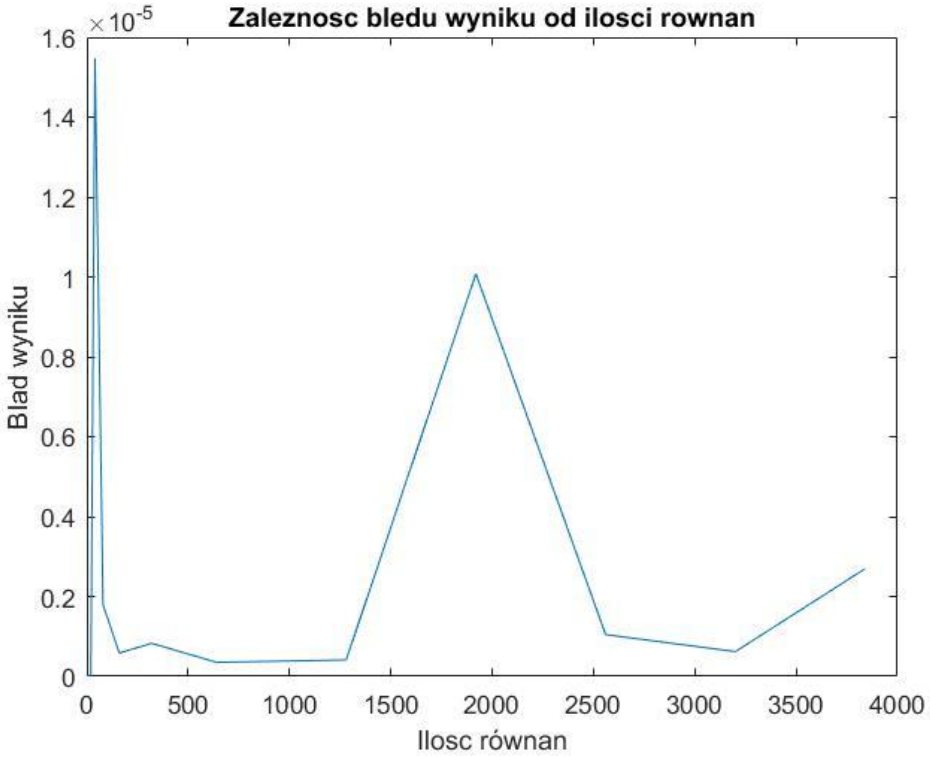


Z wykresu widać, że błąd wyniku rośnie nieliniowo względem ilości równań. Natomiast błędy są większe niż w poprzednim przypadku bo są rzędu e^(-5), również wzrost ich jest szybszy niż w podpunkcie a). Mimo to, możemy stwierdzić, że ta metoda również jest dokładna dla podpunktu b).

Podpunkt c):

Dane dla podpunktu c):

Ilość równań	Czas potrzebny do obliczenia	Błąd przybliżenia
10	0.000058147	1.0e-05*0.0001
20	0.000070608	1.0e-04*0.0005
40	0.00023146	1.0e-04*0.1548
80	0.00092243	1.0e-04*0.0179
160	0.0072	1.0e-04*0.0058
320	0.0520	1.0e-04*0.0083
640	0.6813	1.0e-04*0.0035
1280	9.9240	1.0e-04*0.0041
1920	34.8913	1.0e-04*0.1007
2560	159.0515	1.0e-04*0.0105
3200	170.8698	1.0e-04*0.0062
3840	421.2050	1.0e-04*0.0269



Z wykresu widać, że błąd wyniku nie rośnie wraz ze wzrostem ilości równań. Dla małej ilości równań bardzo szybko rośnie, potem maleje, ale znowu w okolicach 1500 równań zaczyna rosnąć, a przy 2500 znowu maleć. Z wykresu wnioskujemy, że i ta metoda jest w miarę dokładna, bo rząd błędu wynosi około e^(-5). Natomiast nie możemy przewidzieć, mniej więcej wielkości błędu, jak to miało miejsce w poprzednich podpunktach.

Zadanie 3

Rozwiązywanie układu n równań liniowych A×x = b metodą iteracyjną Gaussa-Seidela.

Aby móc przeprowadzić metodę iteracyjną Gaussa-Seidela, na początku musimy sprawdzić, czy macierz A spełnia warunek dostateczny zbieżności, czyli silnej dominacji diagonalnej (oznacza to, że suma wszystkich elementów w wierszu poza diagonalnym, nie może być większa od elementu diagonalnego).

Gdy warunek ten jest spełniony możemy przejść do rozkładu macierzy A na macierze: L – macierz poddiagonalną, U – naddiagonalną i D – diagonalną. W następujący sposób:

$$\mathbf{A = L + D + U}$$

Przykład:

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}} = \underset{\mathbf{L}}{\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 7 & 8 & 0\end{vmatrix}} + \underset{\mathbf{D}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}} + \underset{\mathbf{U}}{\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}}$$

Pojedynczą iterację możemy zapisać w postaci:

$$D * x^{(i+1)} = -L * x^{(i+1)} - U * x^{(i)} + b;\ \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Otrzymujemy stąd znowu układ n równań skalarnych. Składowe nowego wektora wyznaczamy kolejno, poczynając od pierwszej:

gdzie $w^{(i)} = U * x^{(i)} - b$.

$$x_1{}^{(i+1)} = -\frac{w_1^{(i)}}{d_{11}},$$

$$x_2{}^{(i+1)} = -\frac{-l_{21} * x_1^{(i+1)} - w_2^{(i)}}{d_{22}},$$

$$x_3{}^{(i+1)} = -\frac{-l_{31} * x_1^{(i+1)} - l_{32} * x_2^{(i+1)} - w_3^{(i)}}{d_{33}},$$

itd.

Dla tej metody ważne jest ustalenie warunku, który gdy zostanie spełniony, ma spowodować przerwanie iterowania i wypisanie wyniku. W tym przypadku będzie to osiągnięcie założonej dokładności.

Kod źródłowy programu (plik: Gaussa_Seidela.m):

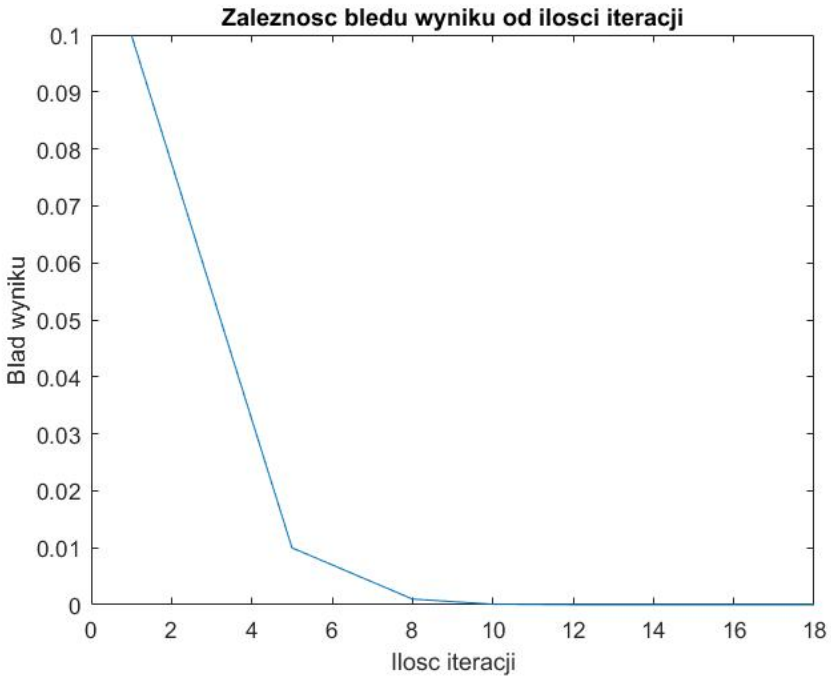
```
%e oznacza ε - czyli blad przyblizenia
function[x]=Gaussa_Seidela(A,b,n,e)
L = zeros(n,n);
D = zeros(n,n);
U = zeros(n,n);
x = zeros(n,1);
y = zeros(n,1); %zapisuje postac wektora x, z poprzedniej iteracji
w = zeros(n,1);
```

```
%Sprawdzenie warunku dostatecznego zbieznosci - silnej dominacji
    %diagonalnej macierzy A
    for i = 1:n
        %Sumujemy wszystkie elementy w wierszu, poza diagonalnym
        sum = 0;
        for j = 1:n
            if i~=j
                sum = sum + abs(A(i,j));
            end
        end
        %Jesli suma jest wieksza od elementu to warunek nie jest spelniony
        if sum > abs(A(i,i))
            disp('Warunek silnej dominacji diagonalnej nie jest spelniony');
        return
        end
    end

%Stworzenie macierzy trojkatnych oraz diagonalnej
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if(i<j)
            U(i,j) = A(i,j);
        elseif(i>j)
            L(i,j) = A(i,j);
        else
            D(i,j) = A(i,j);
        end
    end
end

%Zaczynamy iterowanie
%e - to blad przyblizenia
r = 1;
iter = 1;
while r>e
    y = x; %zapamietujemy wektor x z poprzedniej iteracji
    w = U*x - b;
    for i = 1:n
        x(i) = (-L(i,:)*x- w(i))/D(i,i);
    end
    r = x-y;
    r = norm(r); %liczmy blad z nomrmy euklidesowej, po kazdej iteracji
    iter = iter + 1; %zliczamy ilosc iteracji
end
end
```

Wyniki:

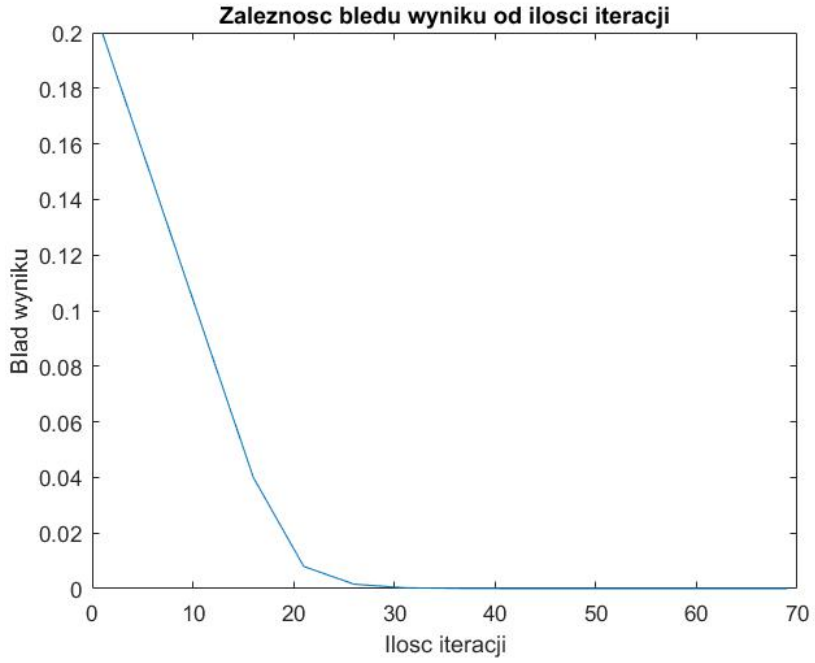
Do danych z zadania 3:

```
x =

   -0.1635

    0.1544

    0.9236

    2.7396
```



Jak możemy zauważyć na wykresie dla małej liczby iteracji błąd rozwiązania jest duży, ale bardzo szybko maleje wraz ze wzrostem liczby iteracji. Dla ilości iteracji większej od 10 błąd osiąga wartość bardzo bliską zeru. Można więc przyjąć, że metoda Gaussa-Seidela daje w tym przypadku dokładne rezultaty.

Dane z zadania 2 z podpunktu a) (ilość równań = 2560):



Jak widać na wykresie błąd wyniku bardzo szybko zbiega do 0. Po 30 iteracji jest on już równy prawie 0. Wnioskujemy z tego, że dla tych danych metoda Gaussa- Seidela daje dobre rezultaty. Ponadto w tym przypadku jest ona szybsza niż metoda rozkładu LU z zadania 2.

Dane z zadania 2 z podpunktu b) i c):

Dla tych danych metoda Gaussa-Seidela nie działa, ponieważ nie spełniają one warunku dostatecznego dla tej metody, czyli silnej dominacji diagonalnej. Po uruchomieniu procesu dla tych danych od razu dostajemy informacje `'Warunek silnej dominacji diagonalnej nie jest spelniony'` i proces zostaje przerwany. Dzieje się tak, ponieważ w tych przypadkach ciągi $x^{(i)}$ były rozbieżne.

Podsumowanie

Porównując oba algorytmy rozwiązywania układów n równań liniowych, możemy zauważyć, że metoda Gaussa-Seidela daje lepsze rezultaty dla odpowiedniej liczby iteracji, ponadto jest ona znacznie szybsza. Natomiast nie jest ona tak uniwersalna jak metoda rozkładu LU, dzięki której możemy rozwiązać dużo większą liczbę układów równań, ale dla liczby równań przewyższającej 4000, staje się ona bardzo nieefektywna, ponieważ czas obliczenia wektora wynikowego dla takiej liczby równań przekracza 10 minut. W związku z tym metoda Gaussa-Seidela powinna być stosowana dla macierzy, które spełniają odpowiednie warunki (warunek dostateczny dla tej metody: silna dominacja diagonalna), natomiast dla innych metoda rozkładu LU.