Hvor i ellipsebanen endres banefarten mest?

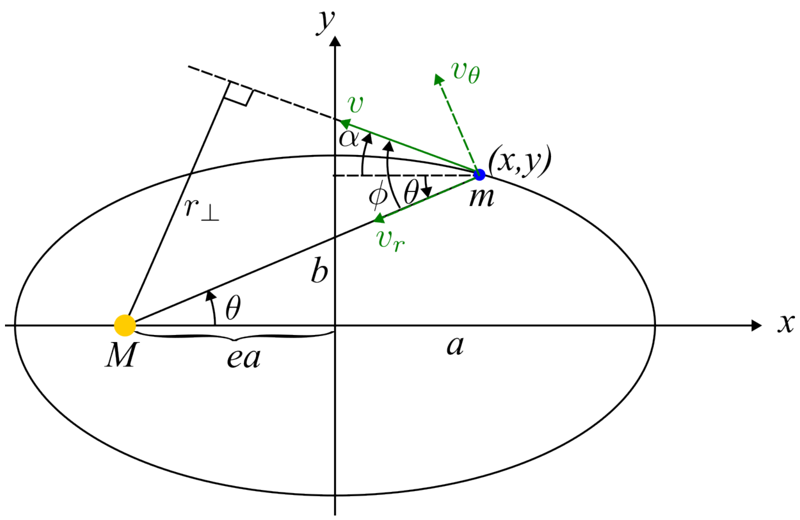
En planet med masse m går i en ellipsebane med eksentrisitet e med en moderplanet eller stjerne med masse M i det ene brennpunktet.

I hvilket punkt i banen øker banefarten mest, dvs. hvor er den tangentielle akselerasjonen størst?

Løsningsstrategi

Vi uttrykker bane/tangentialakselerasjonen $\dot{v}$ ved polar-parameteren θ, og bestemmer parameterverdien som gjør $\dot{v}$ størst mulig.

Utgangspunkt



I kartesiske koordinater er likningen en ellipse med halvakser a og b og sentrum i origo gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Stigningstallet til tangenten for ellipsen finnes ved å derivere likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \cdot 2x + \frac{1}{b^2} \cdot 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Fra figuren er stigningstallet $\frac{dy}{dx}$ knyttet til vinkelen α mellom x- og y-retningen:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(-\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \right). \end{aligned}$$

Eksentrisiteten e til en ellipse er definert som (en sirkel har $e = 0$):

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - e^2.$$

På polar form er ellipsen gitt ved

$$r(\theta) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 - e \cos \theta}, \tag{1}$$

der parameteren θ er vinkelen mellom positiv x-akse og strålen mellom m og M, slik at $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Med en slik parametrisering blir

$$x = r \cos \theta - ea, \; y = r \sin \theta,$$

slik at

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1}\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{r\cos\theta - ea}{r\sin\theta}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{ea}{\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}\sin\theta}\right)\right) \\
&= \tan^{-1}\left(-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{e}{1-e^2}\frac{(1-e\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ettersom den konservative tyngdekraften er den eneste kraften som virker på planeten, er planetens mekaniske energien konstant:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant}. \tag{2}$$

Fordi tyngden er en sentralkraft er banedreieimpulsen L til planeten er konstant:

$$L = mvr_\perp = mvr\sin\phi = \text{konstant}, \tag{3}$$

der ϕ er vinkelen mellom $\vec{v}$ (dvs. tangenten i punktet) og linja som forbinder M og m. Fra figuren er

$$\phi = \alpha + \theta.$$

Deriverer (2) med hensyn på t, og får (der $\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}$ osv.)

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{-GMm}{r^2}\cdot\dot{r} + \frac{1}{2}m\cdot 2v\cdot\dot{v} \\
\dot{v} &= -GM\frac{\dot{r}}{r^2 v} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Fra (3) er

$$v = \frac{L}{mr\sin\phi},$$

som innsatt i (4) gir

$$
\begin{aligned}
\dot{v} &= -GM\frac{\dot{r}}{r^2\cdot\frac{L}{mr\sin\phi}} \\
&= \underline{-\frac{GMm}{L}\frac{\dot{r}\sin\phi}{r}}
\end{aligned}
$$

Finner $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ fra 1, der vi innfører konstanten A for å forenkle utregningen:

$$r(\theta) = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1-e\cos\theta} \equiv \frac{A}{1-e\cos\theta},$$

gir

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= -A\left(1-e\cos\theta\right)^{-2}\cdot\left(-e\left(-\sin\theta\right)\cdot\dot{\theta}\right) \\
&= \underline{-\frac{1}{Ar^2}\cdot e\sin\theta\dot{\theta}}
\end{aligned}
$$

«Vinkelhastigheten» $\dot{\theta}$, dvs. hvor raskt strålen mellom M og m sveiper ut banen, er ut i fra definisjonen av vinkelfart gitt fra

$$
\begin{aligned}
v_\theta &= r\dot{\theta} \\
v\sin\phi &= r\dot{\theta} \\
\dot{\theta} &= \frac{v\sin\phi}{r} \\
&= \frac{L}{mr\sin\phi}\cdot\frac{\sin\phi}{r} \\
&= \underline{\frac{L}{m}\frac{1}{r^2}}
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= -\frac{1}{Ar^2}\cdot e\sin\theta\dot{\theta} \\
&= -\frac{1}{Ar^2}\cdot e\sin\theta\cdot\frac{L}{m}\frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{L}{Am}e\frac{\sin\theta}{r^4} \\
&= -\frac{L}{Am}e\frac{\sin\theta}{\left(\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}\right)^4} \\
&= -\frac{L}{Am}\frac{e}{\left(a\left(1-e^2\right)\right)^4}\cdot\sin\theta\cdot\left(1-e\cos\theta\right)^4
\end{aligned}
$$

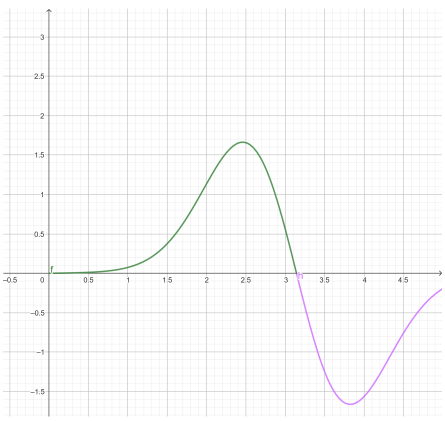
Uttrykket for den tangentielle akselerasjonen blir da

$$
\begin{aligned}
\dot{v} &= -\frac{GMm}{L}\frac{\dot{r}\sin\phi}{r} \\
&= -\frac{GMm}{L}\cdot\left(-\frac{L}{Am}e\frac{\sin\theta}{r^4}\right)\frac{\sin\phi}{r} \\
&= \frac{GM}{A}e\frac{\sin\theta\sin\phi}{r^5} \\
&= \frac{GM}{A}e\frac{\sin\theta\sin\phi}{\left(\frac{A}{1-e\cos\theta}\right)^5} \\
&= \frac{GM}{A^6}e\cdot\sin\theta\sin\phi\left(1-e\cos\theta\right)^5 \\
&= \underline{\frac{GM}{A^6}e\cdot\sin\theta\left(1-e\cos\theta\right)^5\cdot\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{\tan\theta}-\frac{e}{1-e^2}\frac{(1-e\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\right)+\theta\right)}
\end{aligned}
$$

Vi kan nå tegne grafen til funksjonen[1]

$$
f\left(\theta\right) = e\cdot\sin\theta\left(1-e\cos\theta\right)^5\cdot\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{\tan\theta}-\frac{e}{1-e^2}\frac{(1-e\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\right)+\theta\right),
$$

og finne maksimum grafisk. Bildet under viser grafen for $e = 0,86$:

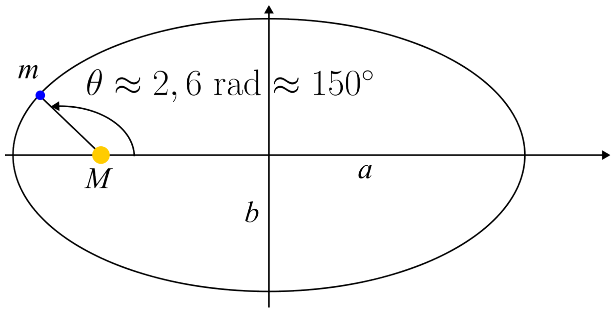


Den eksakte verdien $\theta_{\max}$ i 2. kvadrant ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) som gir maksimal $\dot{v}$ varierer svakt med eksentrisiteten e:

e	$\theta_{\max}$
0,010	2,64
0,10	2,65
0,20	2,64
0,30	2,63
0,40	2,62
0,50	2,60
0,60	2,58
0,70	2,54
0,80	2,48
0,90	2,22

Konklusjon: For «de fleste» ellipser, ligger punktet i 2. kvadrant med maksimal baneakselerasjon som antydet på figuren under:

[1] En teknisk detalj er at funksjonen $f\left(\theta\right)$strengt tatt kun er gyldig for $0 < \theta < \pi$; for vinkler $\pi < \theta < 2\pi$ må vi egentlig legge til et minustegn; funksjonen i dette området er $-f\left(\theta\right)$. Dette har imidleritd ikke betydning for resonnementet i denne problemstillingen.


m
$\theta \approx 2,6$ rad $\approx 150°$
M
a
b