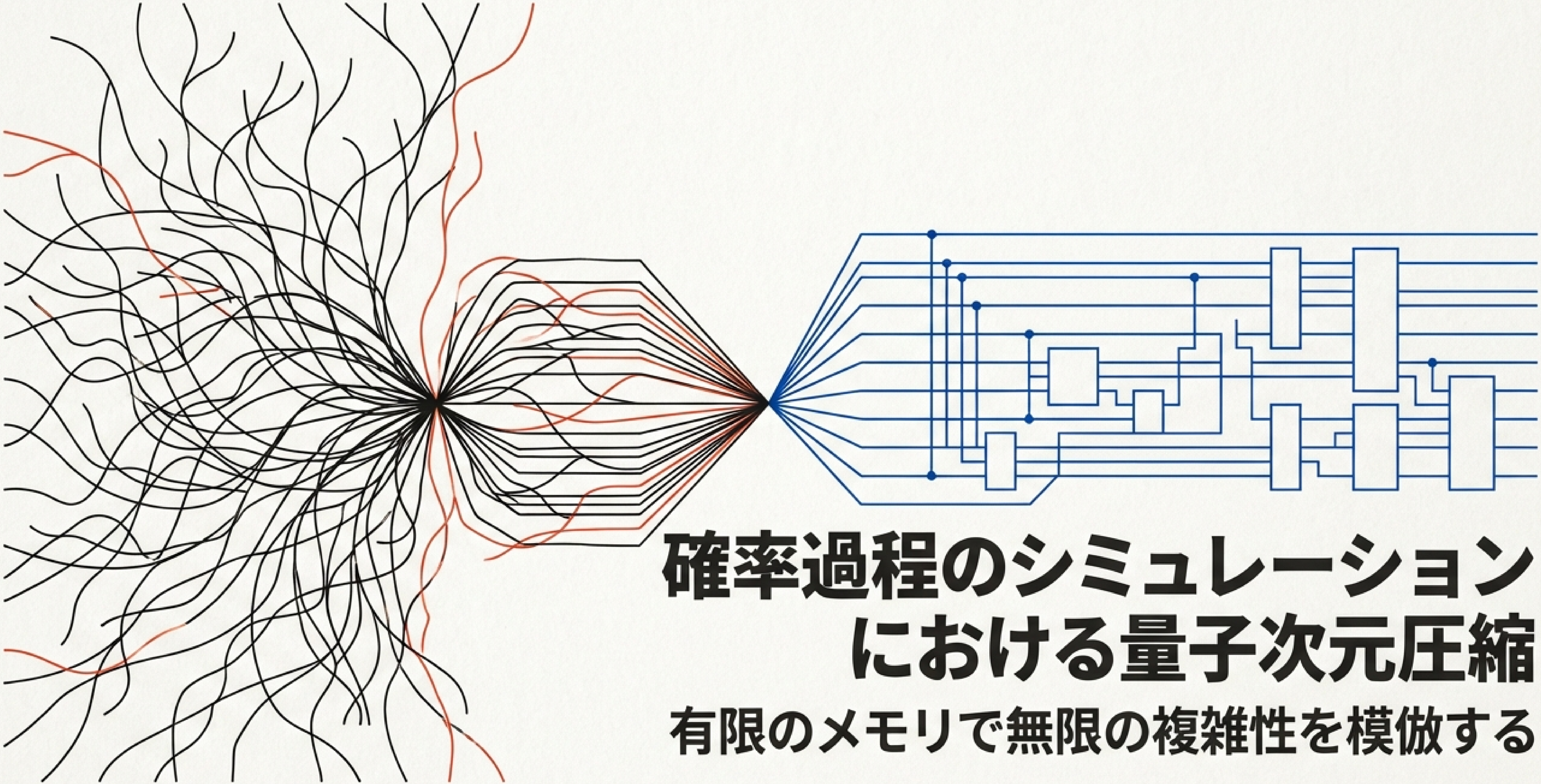


確率過程のシミュレーションにおける量子次元圧縮

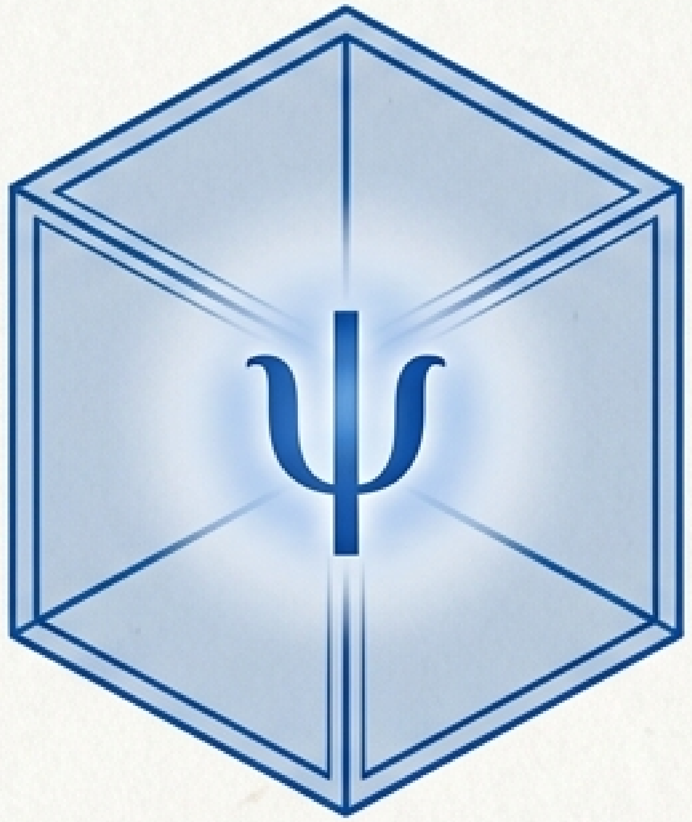
有限のメモリで無限の複雑性を模倣する

Based on 'Dimension reduction in quantum sampling of stochastic processes' (Nature Communications / npj Quantum Information)

背景：シミュレーションにおける「メモリの壁」

Classical Memory
古典メモリ

Quantum Memory
量子メモリ



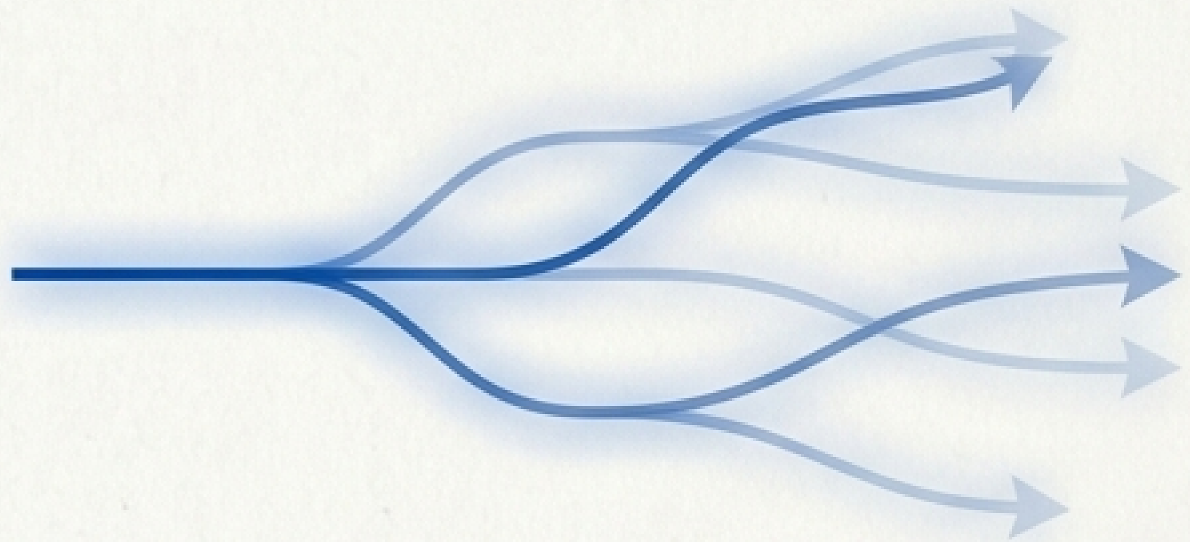
- 確率過程（Stochastic Process）の未来を予測するには、過去の履歴を記憶する必要がある。
- 複雑なプロセス、特に非マルコフ過程では、履歴の情報量が時間とともに指数関数的に増大する。
- 課題：シミュレーションに必要なメモリ次元 (D_q) が、実際に保持すべき情報量 (C_q) を遥かに上回ってしまう。

量子サンプル状態（q-sample）の定義

$$|P(X_{0:L})\rangle := \sum_{x_{0:L}} \sqrt{P(x_{0:L})}\,|x_{0:L}\rangle$$

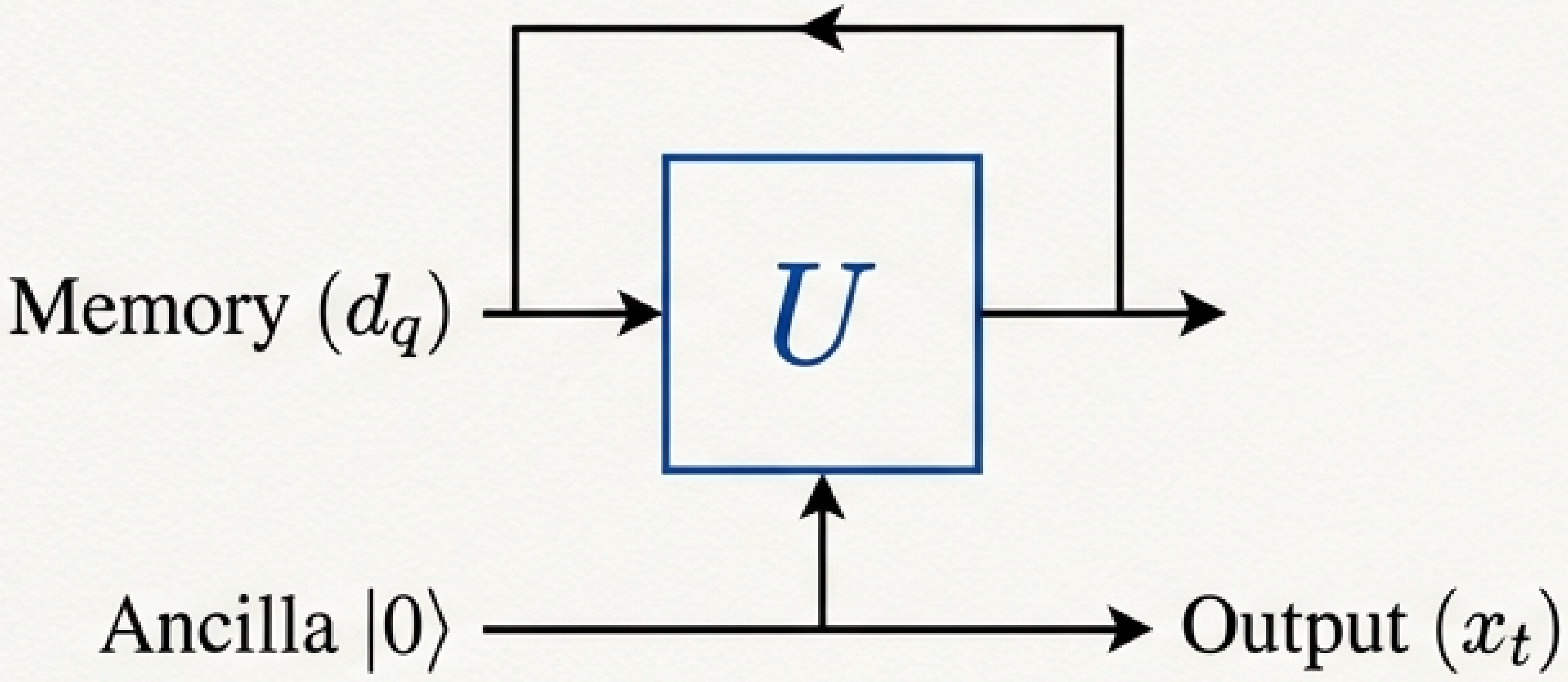
Superposition（重ね合わせ）

Trajectory State（軌跡の状態）



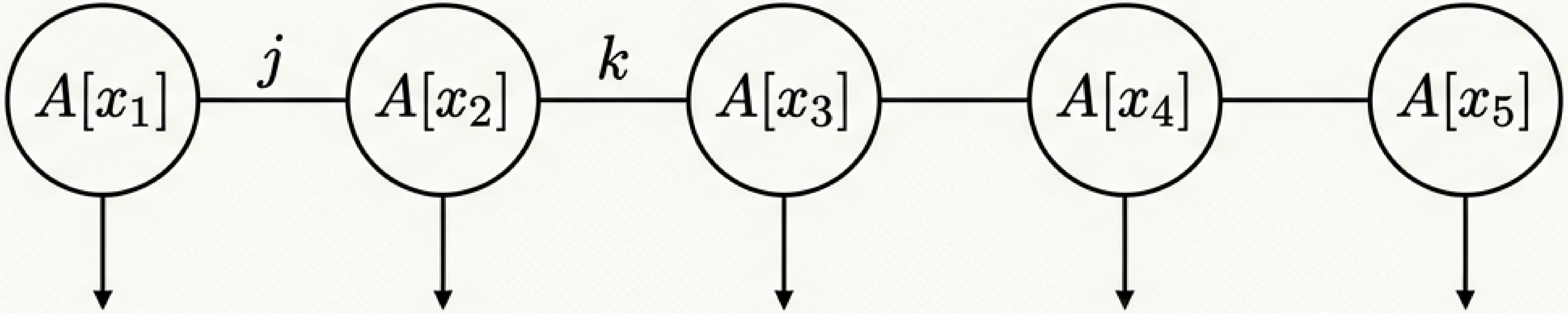
- すべての可能な「未来への軌跡（trajectory)」を、量子重ね合わせとして一度に表現する状態。
- 古典的なサンプリングと異なり、一度の操作ですべての確率振幅を保持する。
- $P(x_{0:L})$ は軌跡の確率振幅。$|x_{0:L}\rangle$ はその軌跡に対応する量子状態。

再帰的な量子回路による構成



- ユニタリ演算子 (U) : メモリ状態と新しい空白のアンシラ（補助ビット）を相互作用させる。
- 再帰的構造: 過去の相関情報を持つ「メモリ」が次のステップへと受け渡される。
- 回路の深さは時間ステップ数 L に対して線形 ($O(L)$) にしか増加しない。

行列積状態（MPS）としての表現

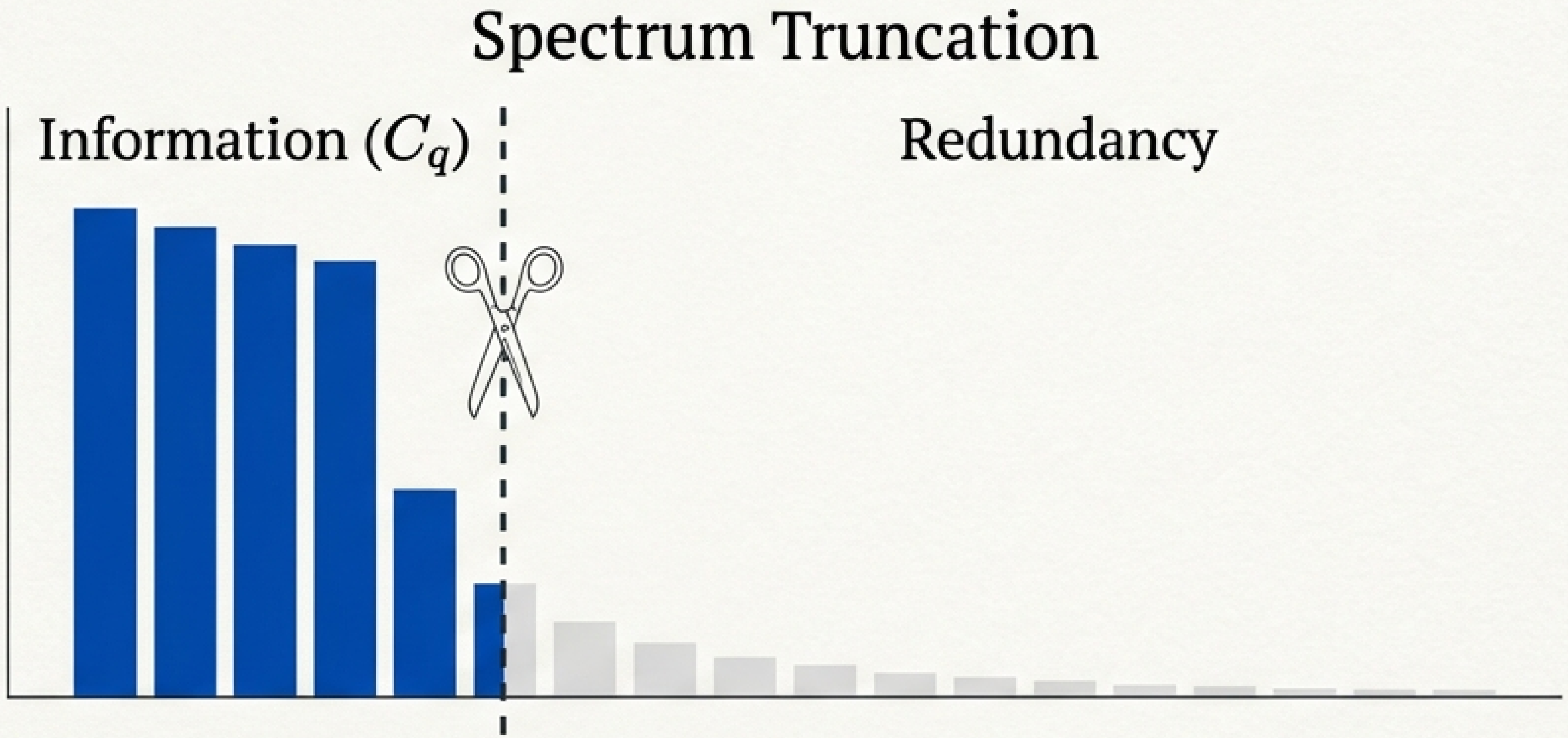


- q-sample は、物理学における「行列積状態（MPS）」と等価である。
- 各ステップのサイト行列 $A[x]$ は、メモリの遷移と出力確率をエンコードしている。

$$A[x]_{jk} = \sqrt{P(x|j)}\delta_{\lambda(x,j),k}$$

重要: ボンド指数 j, k の次元が「メモリサイズ」に対応する。ここを圧縮したい。

核心概念：損失あり量子次元圧縮

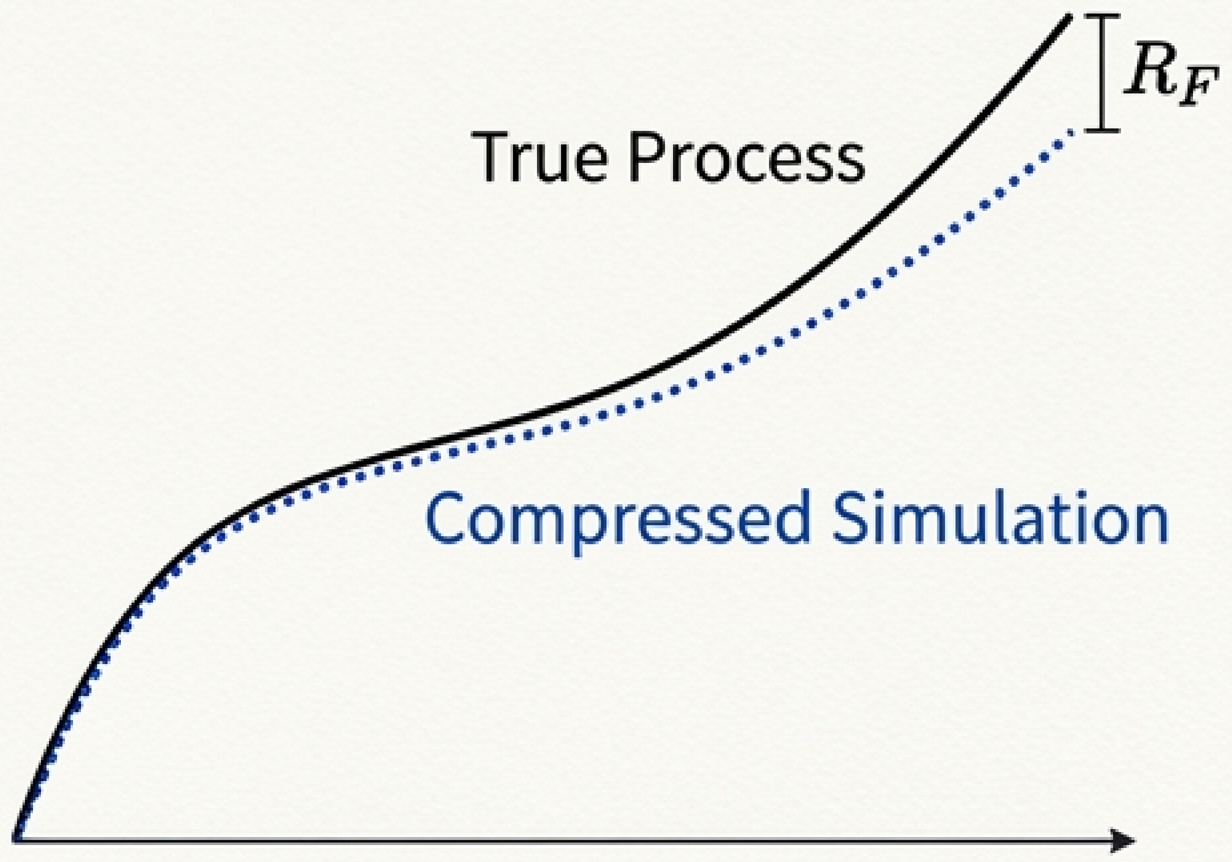


- メモリ次元（D_q）は往々にして実際の情報量（C_q）より大きい。
- 戦略: シュミット係数（情報の重み）が小さい成分を切り捨てることで、わずかな 誤差で劇的な圧縮を実現する。
- MPSの「切断（truncation）」技術を確率過程のシミュレーションに応用。

誤差の尺度：量子フィデリティ発散率（QFDR）

- 無限の長さを持つプロセス同士の距離を測る指標。
- 時間ステップごとに、どれだけシミュレーションが真の分布から離れていくか（発散するか）を率で表す。

$$R_F(|P\rangle, |P'\rangle) := -\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \log_2 F(|P_L\rangle, |P'_L\rangle)$$



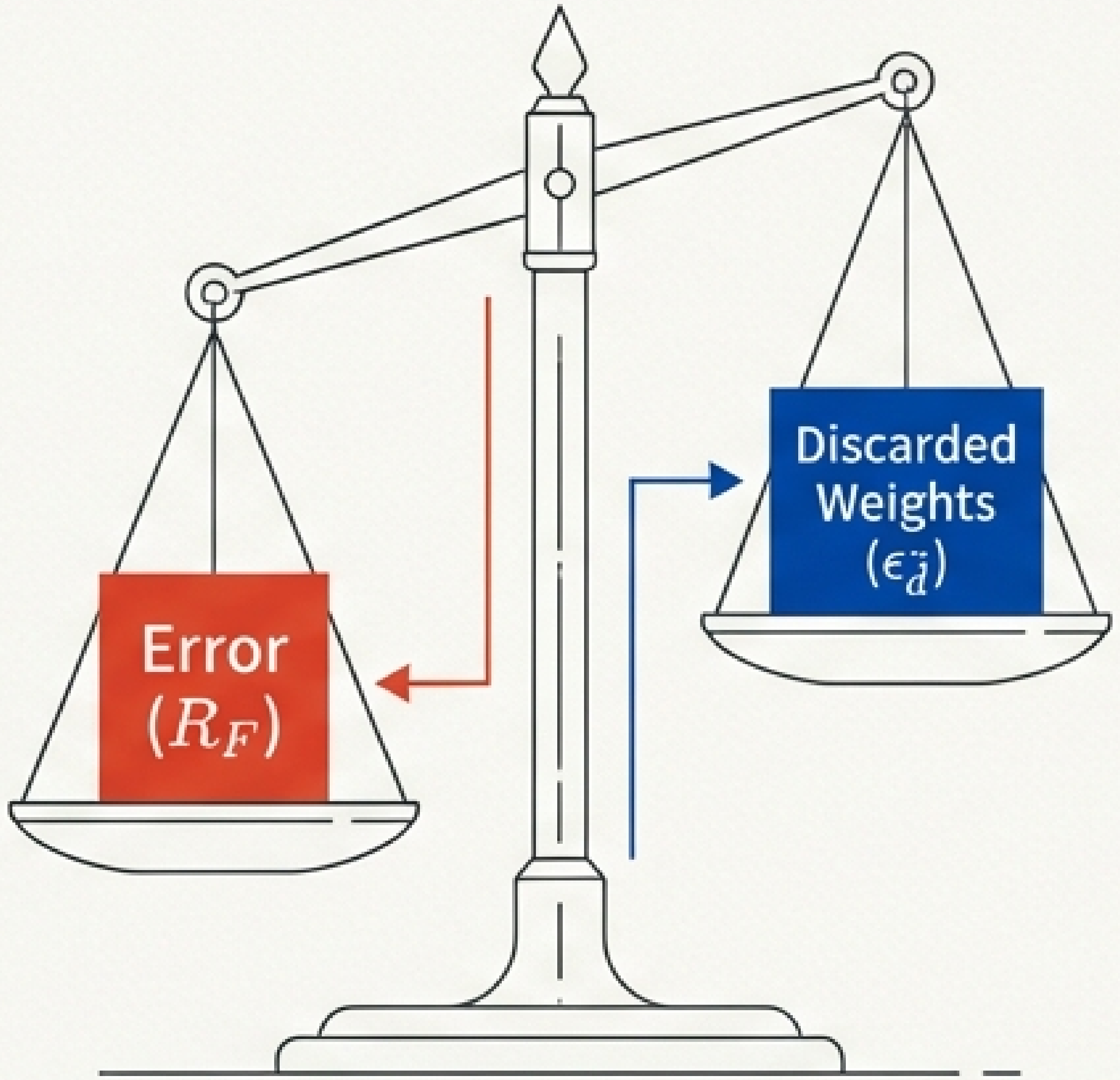
F はフィデリティ（忠実度）。R_F が小さいほど、圧縮後のモデルは正確である。

理論的保証と誤差境界

定理 1 (Error Bound)

QFDRは、切り捨てたシュミット係数の和 $\epsilon_{\tilde{d}}$ によって上から抑えられる。

$$R_F \leq O(\epsilon_{\tilde{d}})$$



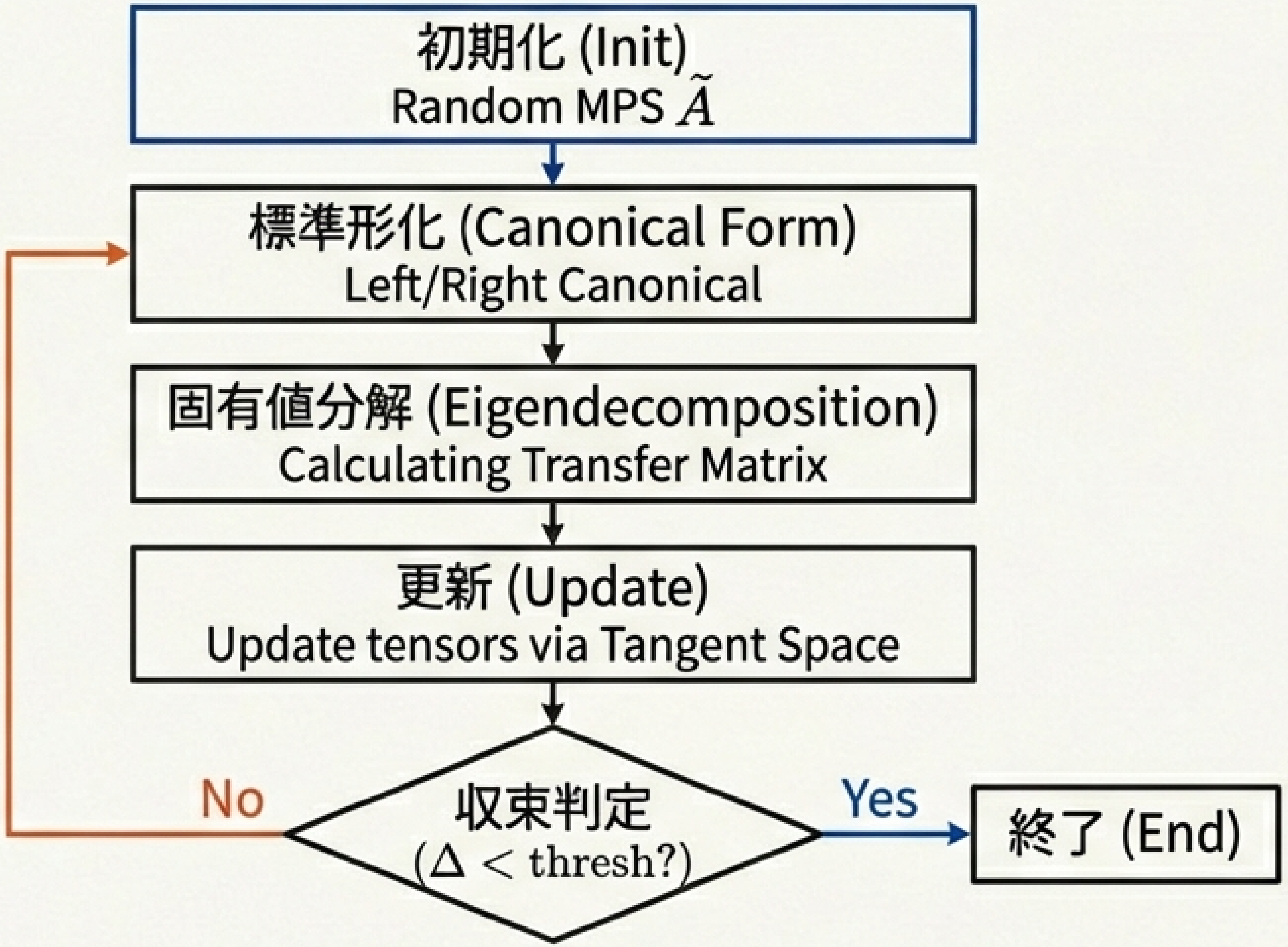
系 1 (Information Bound)

メモリの情報量 C_q が小さければ、メモリ次元 D_qを大幅圧縮しても誤差は小さい。

$$\epsilon_{\tilde{d}} \leq \frac{C_q}{\tilde{D}_q}$$

結論: 「情報量」さえ保存されていれば、「次元」は削減できることが数学的に保証されている。

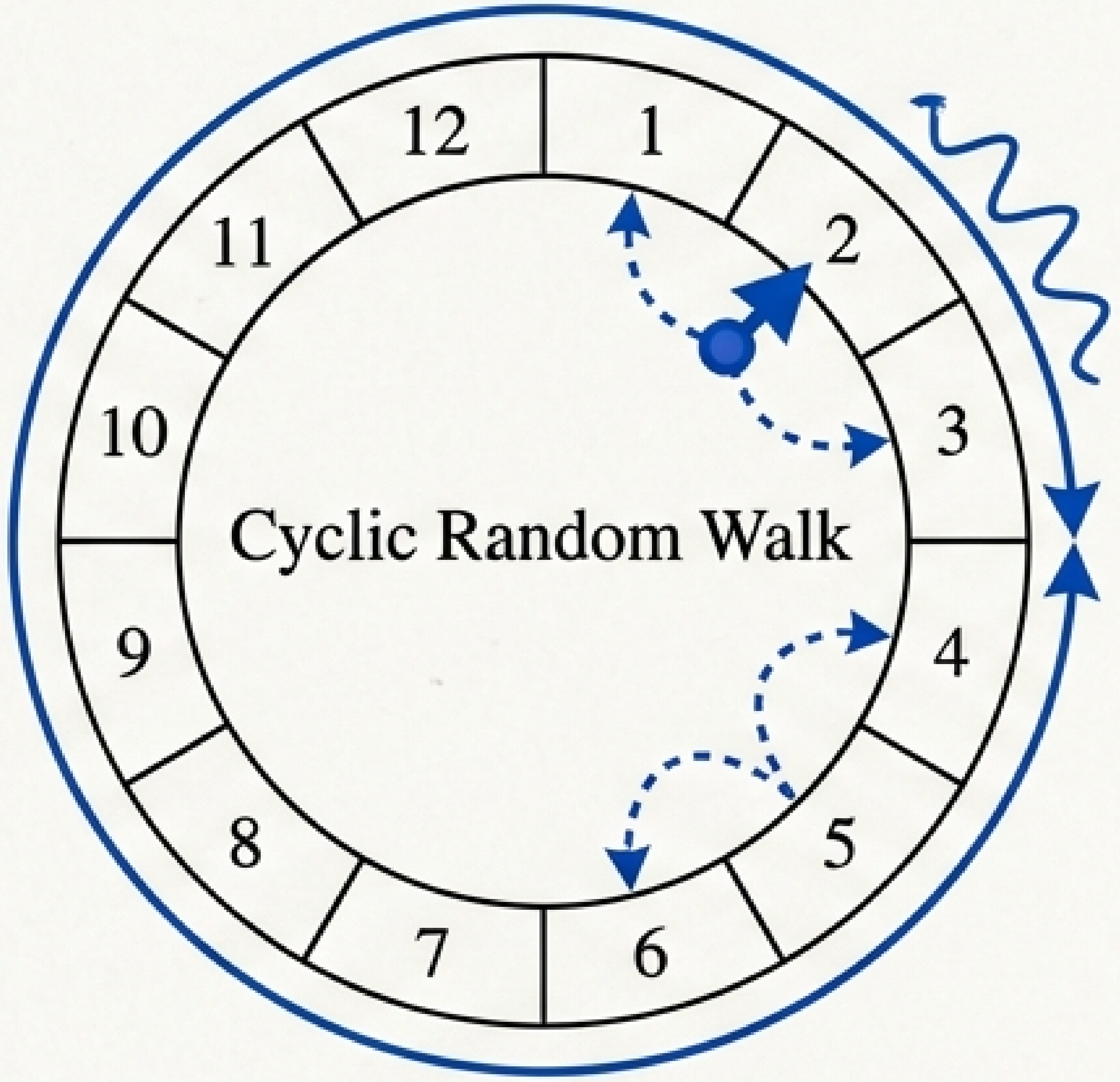
変分的な打ち切りアルゴリズムの手順



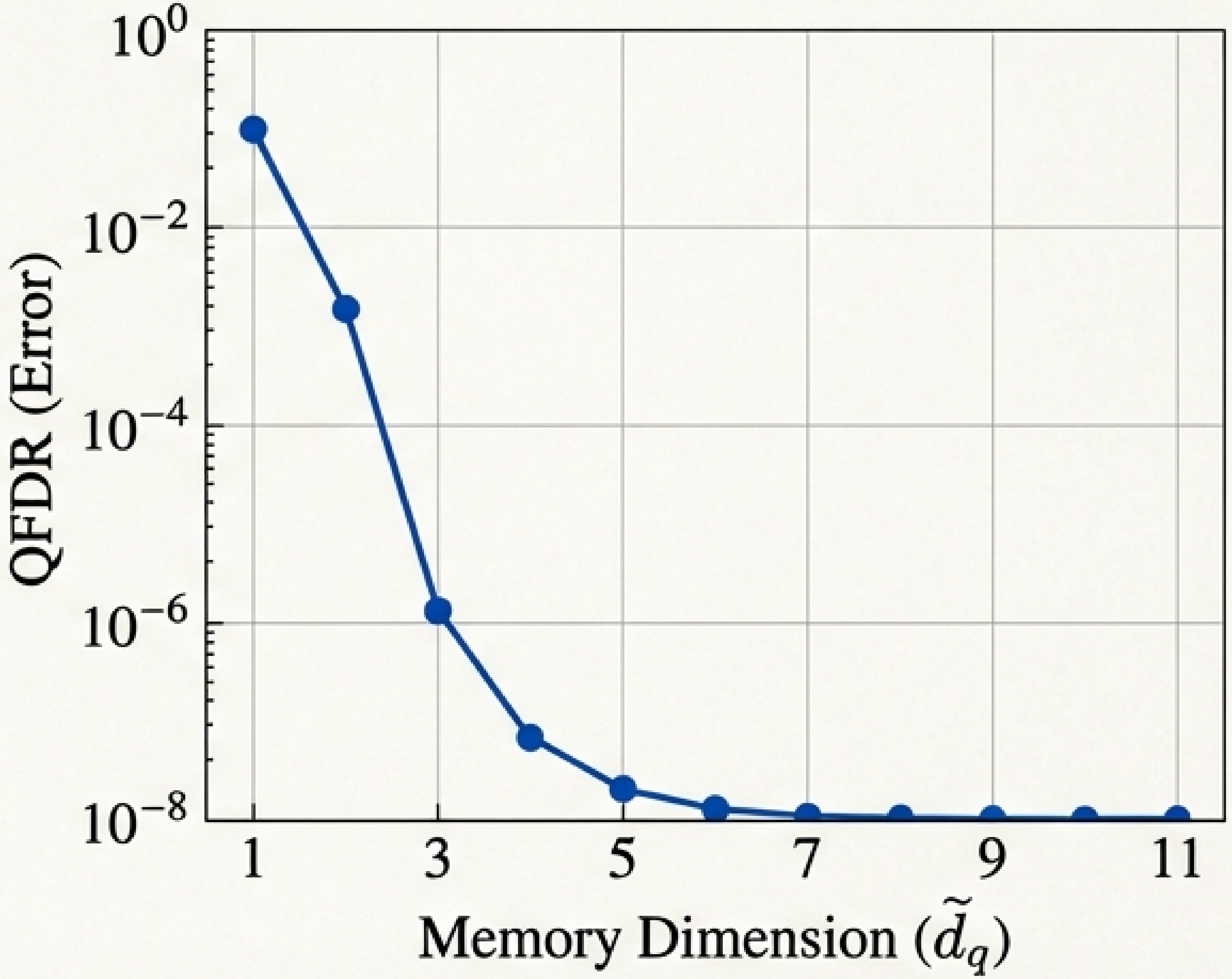
接空間（Tangent-space）法を用いた最適化により、単純な切断よりも高精度な圧縮が可能。

適用結果１：巡回ランダムウォーク（マルコフ過程）

- 円環上のランダムウォーク。位置の離散化数を増やすと古典メモリは発散する。
- 量子モデルは、離散化数が増えても情報量 C_q が有限にとどまる。
- 結果：わずか数量子ビット（$\tilde{d}_q \approx 3 \sim 7$）の メモリで、極めて低い誤差率（$10^{-6}$以下）を達成。

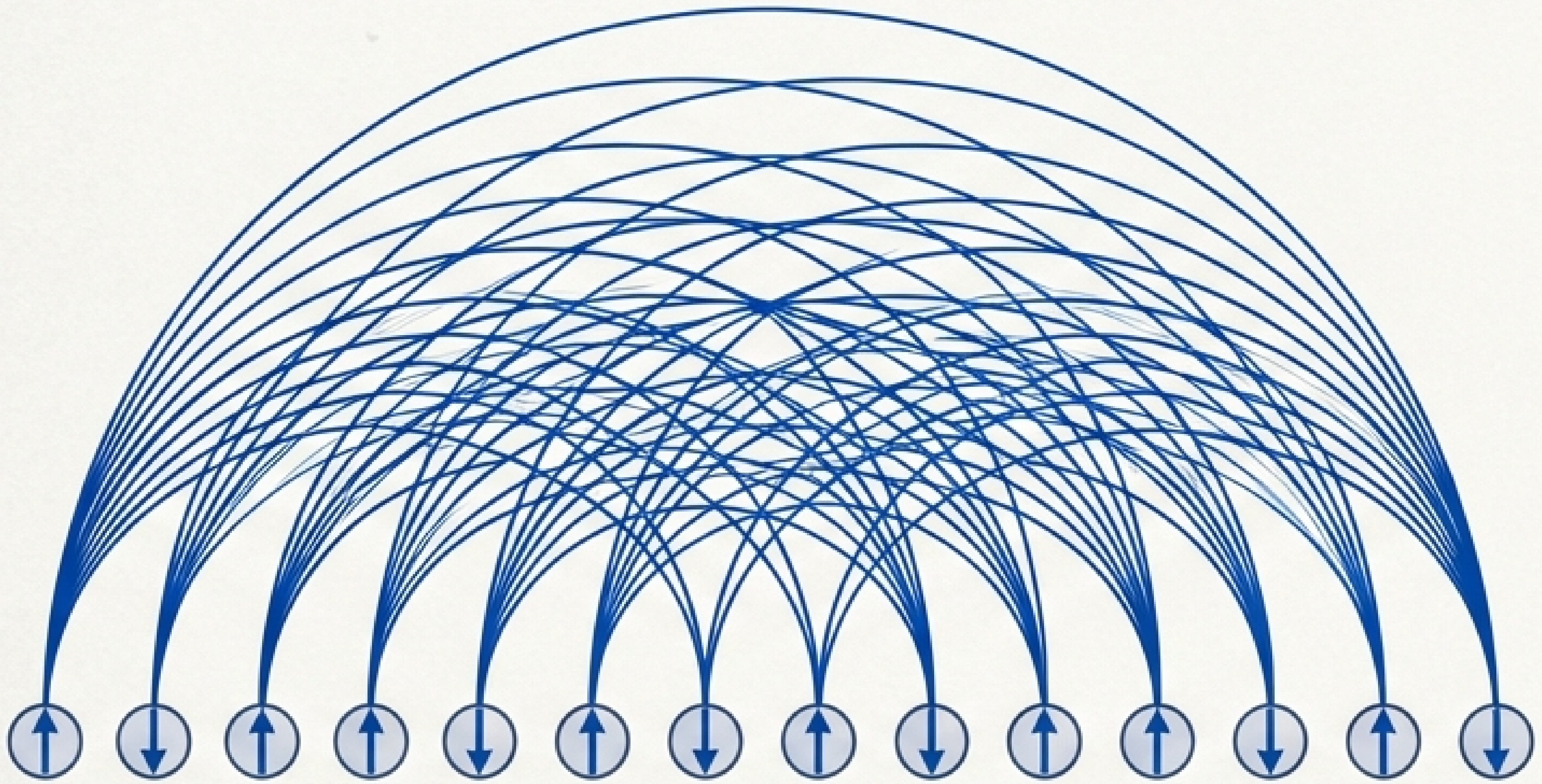


量子モデル: 有限 C_q



適用結果 2：Dyson-Ising スピン鎖

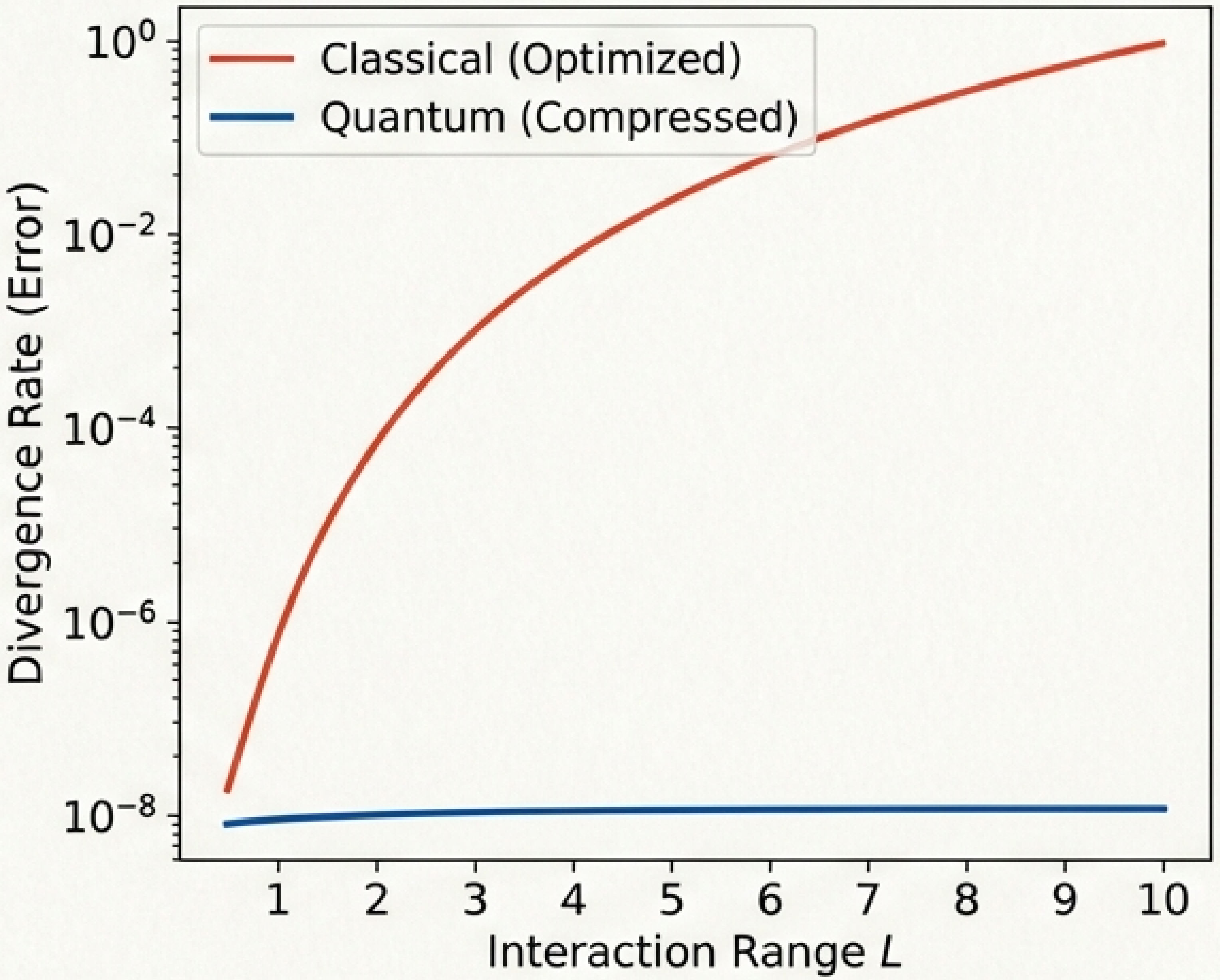
強非マルコフ過程への挑戦



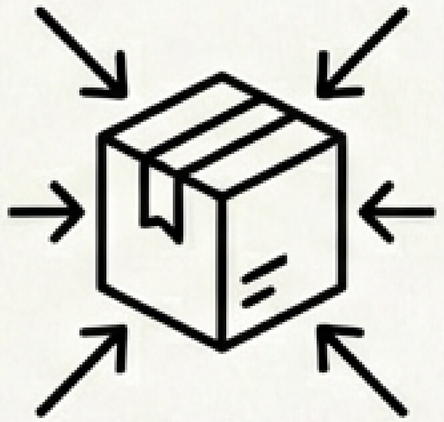
- 長距離相互作用を持つスピン系。
- 過去の履歴への依存度が強く、古典モデルではメモリコストが指数関数的に増大する難問。
- 目的: たった１量子ビット ($\tilde{d} = 2$) のメモリで、この複雑な過程をどこまで再現できるか？

量子モデル vs 古典モデル（量子優位性）

- 青線 (Quantum): メモリ次元を削減しても高い精度（低いQFDR）を維持。
- 赤線 (Classical): 同じメモリサイズでは、相互作用距離 L が伸びると誤差が急激に悪化する。
- 結論: 量子次元圧縮を用いることで、古典的には不可能なメモリ効率で複雑な確率過程をシミュレーションできる。

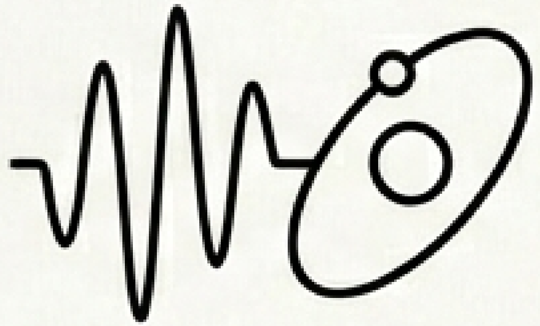


結論と今後の展望



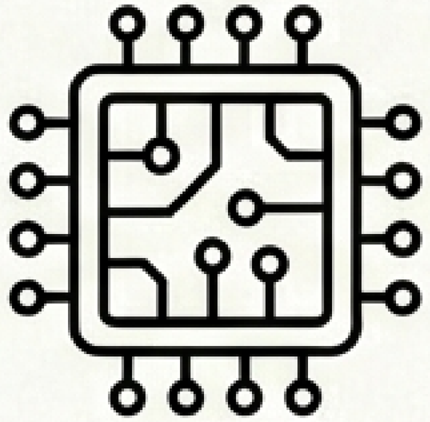
1. メモリ圧縮

確率過程の量子シミュレーションにおいて、情報量 C_q に基づく極限までのメモリ圧縮を実現。



2. 汎用性

単純なマルコフ過程から、複雑な強非マルコフ過程まで適用可能。



3. インパクト

既存のNISQ（中規模量子）デバイスでも、より大規模・複雑な自然現象のシミュレーションが可能になる道を開いた。

Thank you.

Questions?