

「Testing for an Explosive Bubble using High-Frequency Volatility」 専門家向け詳細解説

Boswijk, H. P., Jun Yu, Yang Zu (2024, arXiv:2405.02087)

0. 本ドキュメントの目的

本ノートは Boswijk, Yu, Zu (2024) による Testing for an Explosive Bubble using High-Frequency Volatility (以下、BYZ 2024) の理論・推定手順・漸近特性・シミュレーション結果・実証応用を、計量ファイナンス／マクロファイナンス研究者向けに体系的に整理・解説するものである。低頻度系列（例：日次や月次）における資産価格の爆発的挙動（バブル）を検定する際に、高頻度データから得られる実現ボラティリティ情報を活用する新手法 RVPWY (Realized-Volatility-based Phillips-Wu-Yu) テストを中心に論じる。

1. 背景と既存研究

資産価格バブルの統計的識別は Phillips, Wu, and Yu (2011; 以下 PWY) に端を発し、右裾 (right-tailed) Dickey-Fuller統計量の逐次 (recursive) supremumに基づく強力な検定枠組みが広く用いられてきた。PWY 系統はその後、複数バブル検定 (Phillips et al. 2015a,b)、逆方向Chow型 (Homm & Breitung 2012)、不均一分散へのロバスト化 (Harvey et al. 2016, 2020) などへ発展している。BYZ 2024 はこの系譜を継ぎつつ、連続時間確率ボラティリティ (SV) モデルに立脚し、高頻度で観測される資産リターンから推定した実現分散を用いて低頻度価格系列を「デボラタイズ (devolatize)」する点で新規性を持つ。また、オプションからのインプライド・ボラを用いた別種のデボラタイズとCUSUM検定を行う Andersen et al. (2023) とは方法的に異なる。

2. 本稿の主要貢献

- 高頻度ボラ情報を活用した低頻度バブル検定**：低頻度ログ価格差分を実現ボラでスケーリングし擬似標準化リターンを構築、これを累積して擬似ランダムウォーク系列を生成しPWY型sup DFを適用。
- 漸近分布の単純化**：適切な二重漸近 (double asymptotics) 下で、提案統計量RVPWYの帰無分布が元のPWYと同一となり、PWY既存の臨界値表をそのまま使用可能。
- サイズ改善と検出力向上**：SV下で従来PWYは過大棄却 (サイズ歪み) を示す一方、RVPWYは良好なサイズと高いパワーを示す。
- 実時間デイトスタンピング**：RVPWYに対応するRVDF (Realized-Volatility-based DF) 検出器を用いた開始・終結日の推定手順と一致性条件を提示。
- 実証応用**：暗号資産 (日次BTC/ETH、5分足) およびドットコム期S&P500 (月次、名目／実質) のバブル検出。

3. データ周波数と問題設定の直観

政策立案者や投資家はしばしば「低頻度」でのバブル識別（例：日単位、月単位）を求めるが、ボラティリティ推定には高頻度（分・ティック）データが利用可能である場合が多い。高頻度にはマイクロストラクチャ・ノイズや日内パターンなど複雑性があるため、直接のバブル検定は困難だが、そこで抽出した集約的ボラ指標を低頻度検定に活かすというのがBYZ 2024の発想である。 filecite turn1file12 turn1file4

4. モデル：連続時間確率ボラティリティ型線形ドリフト

観測対象はログ資産価格 y_t 。モデルは

$$dy_t = \kappa_t y_t dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0,$$

ここで $\sigma_t > 0$ は（マルコフ性を仮定しない）確率的ボラティリティ過程、 W_t はブラウン運動、 κ_t は持続性パラメータで単位根領域（ $\kappa_t = 0$ ）から爆発領域（ $\kappa_t > 0$ ）への変化を許容する。定数ボラの場合、本モデルはOrnstein–Uhlenbeck (OU)型に帰着する。 filecite turn1file0 turn1file12

4.1 低頻度グリッドへの厳密離散化

低頻度観測点 $t_i = iH$ （例：日次 $H=1$ 、月次 $H=1$ ヶ月）について、厳密積分形で

$$y_{t_i} - y_{t_{i-1}} = \kappa \int_{t_{i-1}}^{t_i} y_u du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_u dW_u = \kappa \int_{t_{i-1}}^{t_i} y_u du + \omega_i \varepsilon_i,$$

$\omega_i^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_u^2 du$ （統合分散; integrated variance）、 $\varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$ が成立（ σ と W 独立）。これは係数 κ の線形回帰と解釈可能。 filecite turn1file0 turn1file2

5. デボラタイズ（ボラ調整）と擬似系列構築

帰無（ $\kappa = 0$ ）下では $\Delta y_i = \omega_i \varepsilon_i$ 。観測不可な ω_i を知っていれば、標準化差分 $\Delta y_i / \omega_i$ は i.i.d. $N(0, 1)$ 。これを累積和して擬似系列 $x_i^* = \sum_{s=1}^i \Delta y_s / \omega_s$ を作れば真のランダムウォーク（単位根）となるので、標準的DF検定を適用できる——これが不可観測ボラ既知時の基本アイデア。 filecite turn1file0

しかし現実には ω_i は未知。より細かい高頻度グリッド（例：5分足）で得られる帰属区間内リターン平方和から実現分散 $\hat{\omega}_i^2 = \sum_{j=1}^M (y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1})^2$ を推定し、これで標準化する。こうして得る可観測擬似系列

$$x_i = \sum_{s=1}^i \frac{y_{t_s} - y_{t_{s-1}}}{\hat{\omega}_s}, \quad x_0 = 0.$$

filecite turn1file2

5.1 仮定

- **A1:** σ_t は連続・正・一様有界、かつ W_t と独立。
- **A2:** H 固定、低頻度サンプル数 $n \rightarrow \infty$ 、高頻度間隔 $h \rightarrow 0$ 、さらに $nh \rightarrow 0$ （サンプル長に対し日内刻みが十分細かい）。 filecite turn1file2

備考（レバレッジ効果）：経験的にはリターンと将来ボラに負の相関（レバレッジ）が観測されA1を厳密には破る可能性があるが、実現ボラで標準化した日次リターンは概ねi.i.d.正規に近いとする実証エビデンスがあるため、完全一般化は将来課題として残す。
filecite turn1file2

5.2 漸近：擬似系列のブラウン運動極限

上記仮定下、帰無（単位根）では規格化部分 $n^{-1/2}x_{[n\tau]} \Rightarrow B_\tau$ （標準ブラウン運動）で収束し、不可観測ボラ既知ケースと同じ極限を得る（定理1）。これが後続のDF型統計の標準帰無分布を保証する鍵である。
filecite turn1file0 turn1file9

6. RVPWY統計量の定義と性質

擬似系列 x_i を用い、PWYと同様にサンプル初期比率 τ_0 以降の全サブサンプルに対する（定数項付き）Dickey-Fuller t統計を計算し、その上限をとる：

$$\text{RVPWY} = \sup_{\tau \in [\tau_0, 1]} \text{RVDF}_\tau.$$

ここで RVDF_τ はサブサンプル $x_1, \dots, x_{[n\tau]}$ 上のDF統計。 filecite turn1file7 turn1file5

6.1 帰無分布の単純性

定理2：A1-A2の下、帰無仮説（バブルなし）でRVPWYの漸近帰無分布は元PWY統計と同一。従って Phillips et al. (2011) の右裾臨界値表をそのまま使用でき、煩雑なシミュレーションによる再表計算が不要。
filecite turn1file7

6.2 爆発下での感度

爆発領域では Δx_i が単純AR(1)型にならない（前期 x_{i-1} ではなく重み付き和 $z_{i-1} = \sum_{s=1}^{i-1} (\hat{\omega}_s / \hat{\omega}_i) \Delta x_s$ に線形依存）が、 z_i と x_i は高い相関を持つため検出力は保持される。 filecite turn1file7

6.3 CUSUM型代替案と多重バブル拡張

擬似系列差分の累積最大値に基づくCUSUM統計も考えられるが、予備的シミュレーションではt統計型であるRVPWYに劣る。複数バブルが想定される場合はPSY (Phillips et al. 2015a) の二重supアプローチをRVDF版に置換可能。 filecite turn1file7

7. モンテカルロ・シミュレーション

BYZ 2024はHeston型SV過程 $(d\sigma_t^2 = a(b - \sigma_t^2)dt + c\sqrt{\sigma_t^2}dW_t^2)$ を母集団に用い、日次低頻度（n=252）と5分足高頻度（h=1/78）設定で帰無サイズとパワーを比較。 filecite turn1file8 turn1file11

7.1 サイズ特性

SV下では原PWYは中度～深刻な過大棄却（nominal 5%で実効 >20%などパラメタに依存）を示す一方、RVPWYは概ね名目近傍で良好なサイズ制御。Wild bootstrap版PWY (Harvey et al. 2016) はサイズ補正に有効だが、RVPWYと同等か若干劣る。 filecite turn1file8 turn1file13

7.2 パワー特性

(1) 爆発強度 κ^* が大きいほど全テストのパワー上昇；RVPWYは常に優位。(2) バブル開始がサンプル早期ほど（継続期間長期化）パワー増；RVPWY優位。(3) ボラ・モデルパラメタ（平均回帰a、長期平均b、ボラのボラc）の上昇でパワー変動—RVPWYは広範囲で高パワーを維持。 filecite turn1file13 turn1file18

8. 実時間モニタリングとデイトスタンピング

PWY (2011) のリアルタイム検出法をRVPWYへ移植：RVDF_r（各rでのRVDF統計系列）を右裾臨界値と比較し、初回超過時点をバブル開始 \hat{r}_e 、その後一定ウォッチング・ウィンドウ（ $\log(n)/n$ ）後に再び臨界値未満となる最初時点を終了 \hat{r}_f と定義：

$$\hat{r}_e = \inf_{\tau \geq r_0} \{\tau : \text{RVDF}_\tau > cv_{\beta_n}\}, \quad \hat{r}_f = \inf_{\tau \geq \hat{r}_e + \log(n)/n} \{\tau : \text{RVDF}_\tau < cv_{\beta_n}\}.$$

一様性を得るには有意水準 $\beta_n \rightarrow 0$ かつ臨界値 $cv_{\beta_n} \rightarrow \infty$ が必要（サンプル依存実装では1-5%を慣行）。 filecite turn1file5 turn1file18

8.1 Mild Explosivenessモデルと一様性条件

連続時間OUを単位根→mild爆発→単位根に切替（瞬間クラッシュ付き）とし、爆発度合い $\kappa = c/n^\alpha, 0 < \alpha < 1$ の場合におけるRVDFベース・デイトスタンピングの一様性を理論解析。二重漸近（長期スパン $T \rightarrow \infty$ かつインフィル $h \rightarrow 0$ ）に加え、爆発期間内の実現ボラ推定精度を確保するための速度条件（例： $T^{\alpha-1} \ln h \rightarrow -\infty$ に相当）を提示。 filecite turn1file5 turn1file9

9. 実証応用 1：暗号資産 (BTC / ETH)

期間：2018/01/01–2021/08/31。5分リターンから24時間実現ボラを計算し日次ログ価格系列をデボラタイズ。RVDFとDF検出器を比較すると、原系列で顕著な急落フェーズがデボラタイズ後は弱まり、ボラの高い下落期は爆発信号として誤認されにくくなる一方、上昇期の相対的重要性が強調される。ETHでRVPWY統計が10%水準で有意となりバブル兆候を検出、BTCは臨界値に近いが非有意という結果（RVDF最大値1.282 vs 臨界値10%）が報告されている。 filecite turn1file17 turn1file7

10. 実証応用 2：S&P500（ドットコム期）

サンプル：1990/01–2005/06（Phillips et al. 2011 と同期間）。日次S&P500から月次統合ボラを推定し、名目・実質の両インデックスにRVPWY適用。実質指数ではCPIが月次のみのため、月次ボラの近似として「名目S&P500の月次ボラ」を代用—CPI変動分散とS&P500分散のオーダ差（約1/500）および共分散の微小性から合理化。 filecite turn1file1 turn1file3

10.1 結果概要

RVPWY統計は名目・実質ともPWY統計を上回り、両系列で1%水準棄却（PWYは5%水準）。RVDF検出器はバブル開始を早期（名目1995年2月、実質1995年3月）に検出し、PWYより数ヶ月早いシグナル（PWY: 名目7月、実質11月）。バブル終了は概ね2001年初頭付近で両手法概ね一致。 filecite turn1file6 turn1file5

11. 実装アルゴリズム（疑似コードレベル）

以下は研究者がRVPWY検定を実装する際のステップ指針である。

入力

- 低頻度ログ価格系列 y_{t_i} , $i=0..n$.
- 各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 内の高頻度ログ価格観測 $y_{i-1,j}$, $j=0..M_i$.
- 開始比率 τ_0 （推奨0.1前後）。

ステップ

1. **実現分散推定**: 区間毎に $\hat{\omega}_i^2 = \sum_j (y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1})^2$ 。極端なマイクロストラクチャノイズが懸念される場合はプレフィルタ（subsampling, kernel, pre-averaging）可。 filecite turn1file2
2. **標準化差分**: $u_i = (y_{t_i} - y_{t_{i-1}})/\hat{\omega}_i$ 。
3. **擬似累積系列**: $x_i = x_{i-1} + u_i$, $x_0=0$. filecite turn1file2
4. **RVDF計算**: 各 $k = \lfloor \tau_0 n \rfloor, \dots, n$ について、サブサンプル $\{x_0, \dots, x_k\}$ 上で定数項付きDF回帰 $\Delta x_t = a + \rho x_{t-1} + e_t$ のt値 $t(\hat{\rho})$ を算出（右裾）。 filecite turn1file7 turn1file5
5. **RVPWY統計**: 上記t値の最大値を記録。臨界値はPWY表（サンプル依存 r_0 補正）または大標本漸近を利用。 filecite turn1file7
6. **リアルタイム判定（任意）**: 時点順にRVDF系列を追跡し、超過で開始、再下落で終結を判定（式(6)）。 filecite turn1file5

12. 実務・応用時の留意点

(i) **レバレッジ効果**: リターンとボラの負相関が強い市場ではA1違反。実現ボラ標準化が経験的にi.i.d.性を改善することは示唆されるが、完全ロバスト化は残課題。 filecite turn1file2 (ii) **ドリフトバースト**: 高頻度区間でドリフトが爆発的に変化すると実現ボラ推定が影響を受ける（drift burst）。別途調整が必要。 filecite turn1file7 (iii) **マイクロストラクチャノイズ**: 理論では無視されているが、実データでは5分足程度への集約で軽減可（BYZ実証）。 filecite turn1file17 (iv) **不連続ジャンプ**: 理論仮定（ボラ連続）と齟齬。大ジャンプが頻発する市場ではジャンプ・ロバストRV（bipower variation等）への置換検討。 filecite turn1file2

13. 理論的含意と拡張研究課題

1. **レバレッジを許す連続時間SV**: σ_t と W_t の依存構造を導入した場合のRVPWY帰無分布の変化。 filecite turn1file2
2. **ドリフトバースト識別と統合**: Christensen et al. (2022) のdrift burst概念を組込み、ボラ推定のバイアスを補正。 filecite turn1file7
3. **複数バブル・重複エピソード**: RVDF版PSY二重sup統計の理論化。 filecite turn1file7
4. **CUSUMベース早期警戒指標**: 低パワー課題を克服する改良CUSUM。 filecite turn1file7

14. まとめ

BYZ 2024は、高頻度データから推定した区間別ボラティリティで低頻度リターンを標準化する「デボラタイズ」戦略により、確率ボラ環境下でのバブル検定を大幅に改善した。提案RVPWY統計は既存PWY臨界値を再

利用できる単純さと、SV下でのサイズ健全性・高パワーを兼備し、リアルタイムなバブル開始・終結推定にも応用可能である。暗号資産およびドットコム期株価指数への応用は、ボラ調整が下落局面での偽陽性を抑え、上昇局面の真の爆発性を浮かび上がらせる実用的重要性を示した。

filecite turn1file6 turn1file17 turn1file7

付録A：記号対応早見表

記号	意味	備考
y_t	ログ資産価格	連続時間モデル状態変数
H	低頻度サンプリング間隔	日=1, 月=1等
h	高頻度間隔	例:5分/日, H/M
ω_i^2	区間統合分散	不可観測
$\hat{\omega}_i^2$	実現分散推定量	高頻度データから算出
x_i	デボラタイズ後擬似系列	標準化差分の累積和
RVDF	デボラタイズDF統計	サブサンプルt値
RVPWY	$\sup_{\tau} \text{RVDF}_{\tau}$	提案バブル検定統計
r_0	最小サブサンプル比率	実装パラメタ
\hat{r}_e, \hat{r}_f	バブル開始/終了推定	実時間モニタリング

(表中定義は本文関連節を参照。)

End of expert guide.