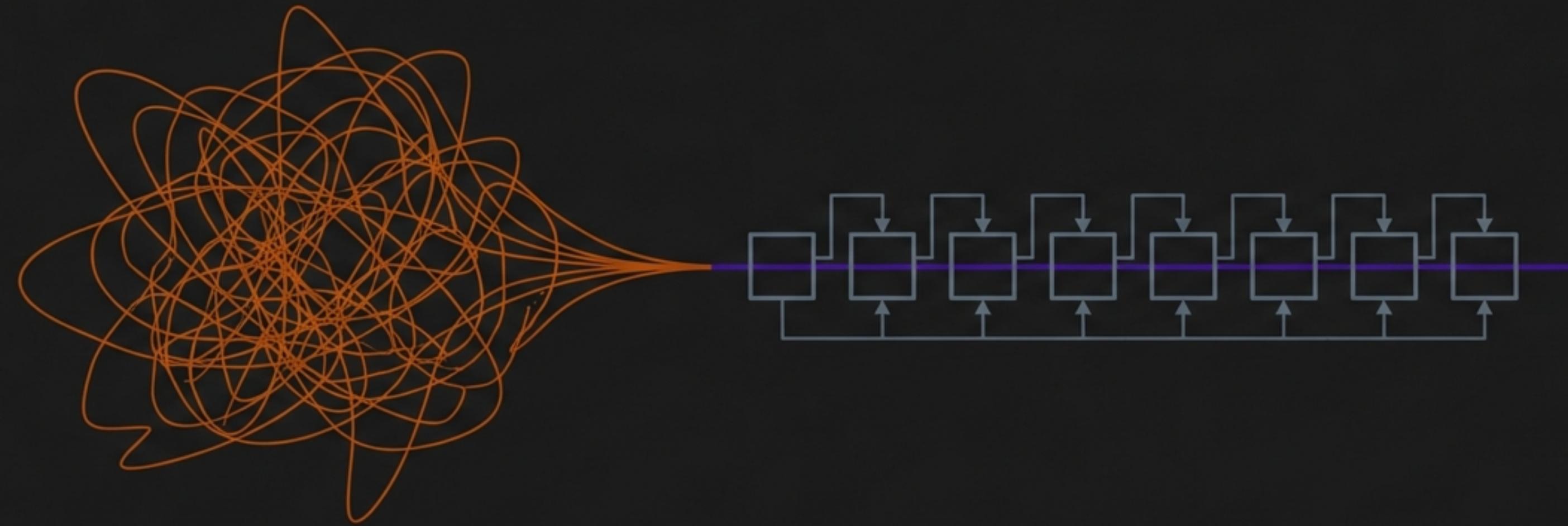


量子サンプル状態の次元削減： MPS変分打ち切りによるアプローチ

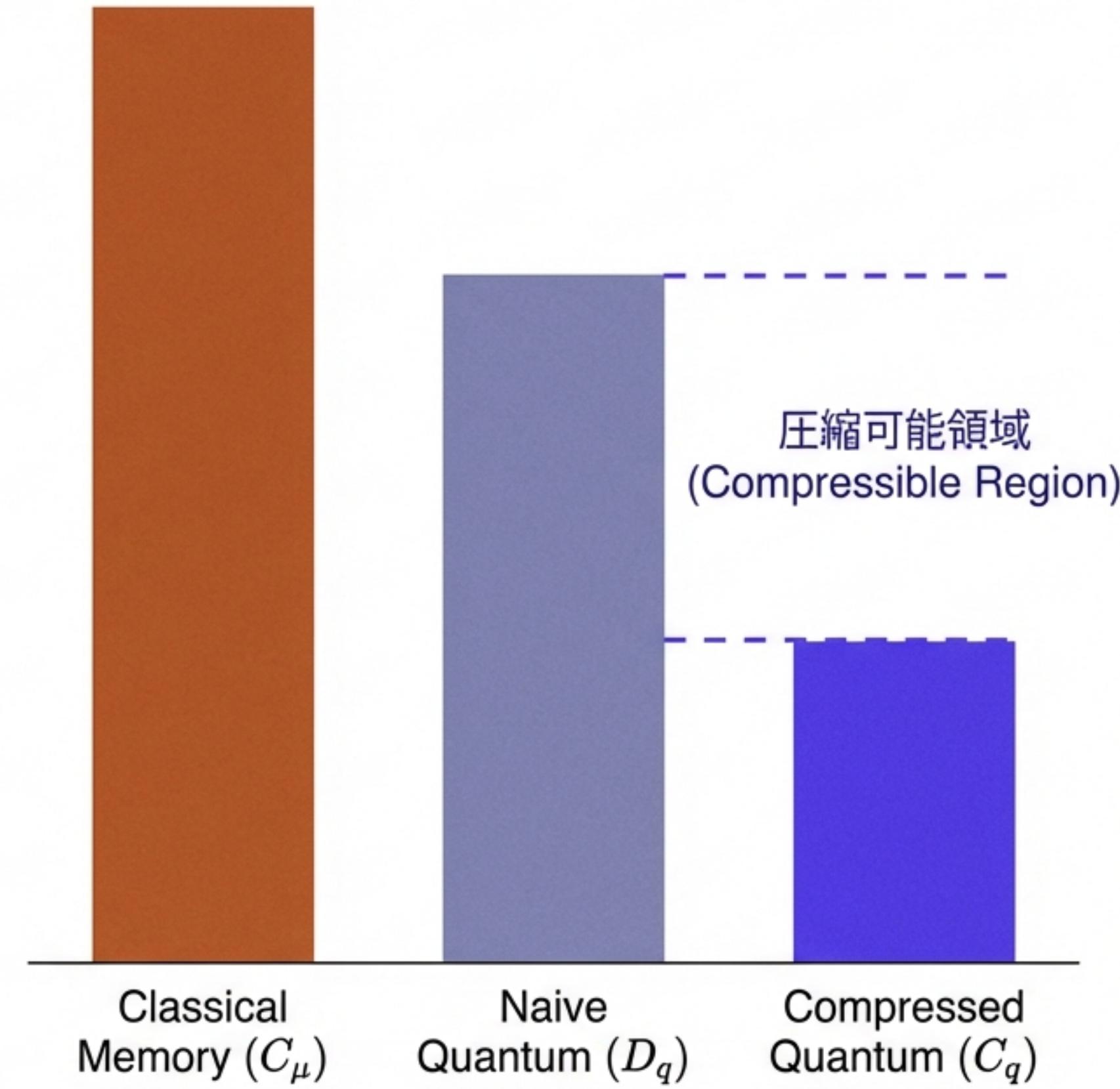
確率過程のメモリ圧縮とQFDRによる誤差評価



Based on: Yang et al., "Dimension reduction in quantum sampling of stochastic processes" (npj Quantum Information, 2025)

メモリボトルネックと量子優位性

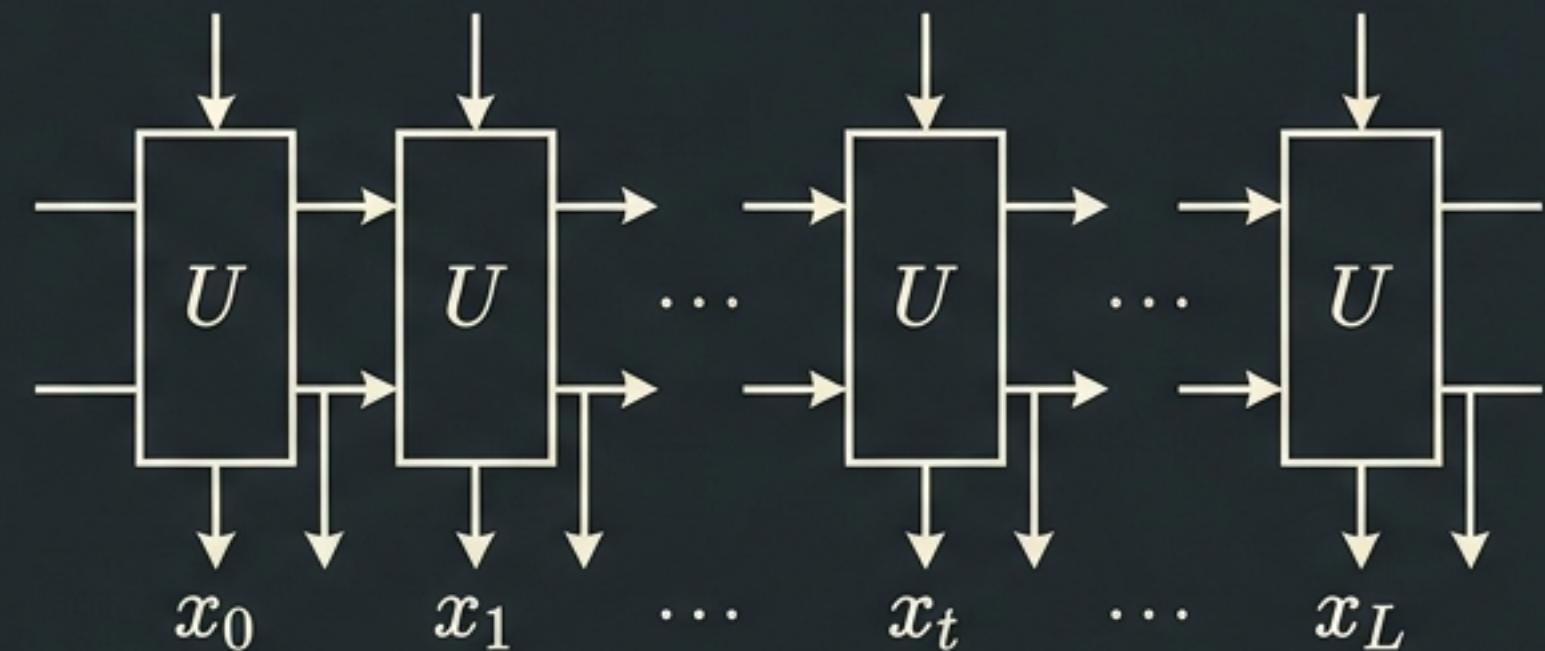
- **背景:** 確率過程のシミュレーションには、過去と未来の相関を保持する「メモリ」が必要。
- **課題:** 複雑なプロセスでは、古典的メモリコスト (C_μ) が発散する。
- **量子優位性:** 量子モデルは重ね合わせを利用し、より少ないメモリ ($C_q \leq C_\mu$) でシミュレーション可能。
- **現状の問題点:** 物理的メモリ次元 D_q は、実際の情報量 C_q より遥かに大きい ($D_q \gg C_q$)。これは圧縮の余地があることを示す。



確率過程のq-sampleとiMPS表現

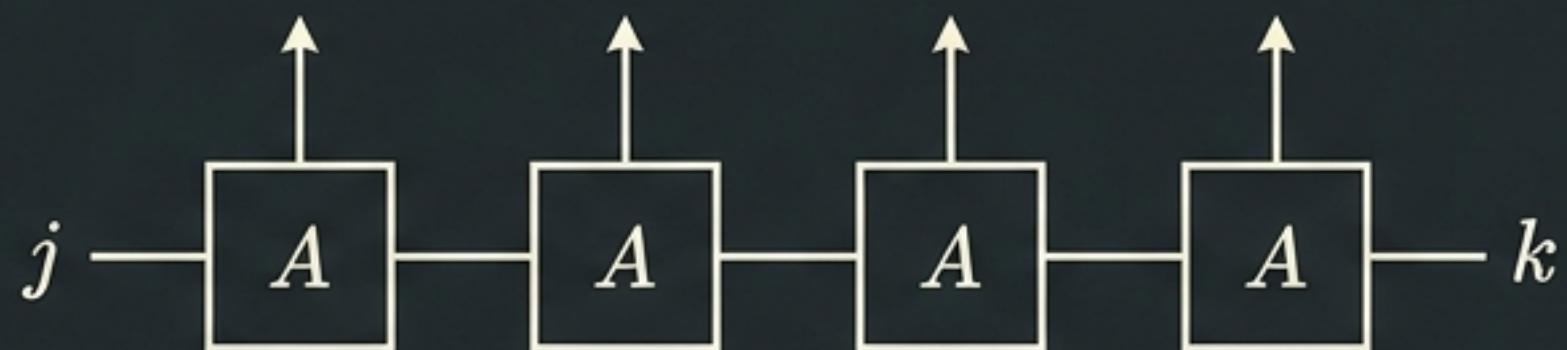
q-sample Definition (Eq. 2):

$$|\mathcal{P}(X_{0:L})\rangle := \sum_{x_{0:L}} \sqrt{P(x_{0:L}|j)} |x_{0:L}\rangle |\sigma_{\lambda(x_{0:L}, j)}\rangle$$



MPS Site Tensor (Eq. 3):

$$A_{jk}^x = \sqrt{P(x|j)} \delta_{\lambda(x,j),k}$$

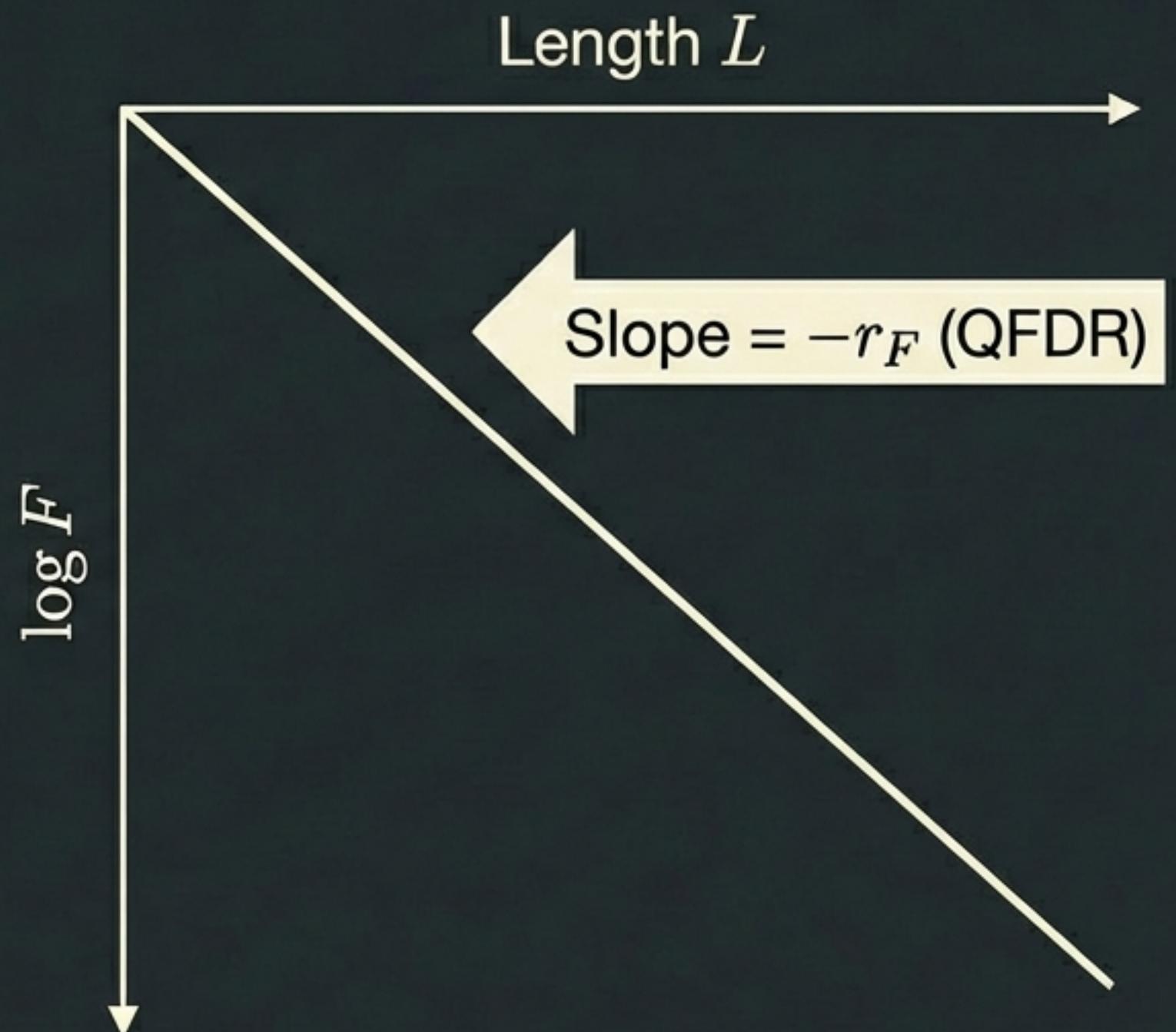


誤差評価指標：量子忠実度発散率 (QFDR)

無限長の鎖では忠実度が0になるため、
単位時間あたりの誤差率 (r_F) を定義する。

$$r_F(|\mathcal{P}\rangle, |\mathcal{P}'\rangle) := - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \log_2 F(|\mathcal{P}_L\rangle, |\mathcal{P}'_L\rangle) \quad (\text{Eq. 4})$$

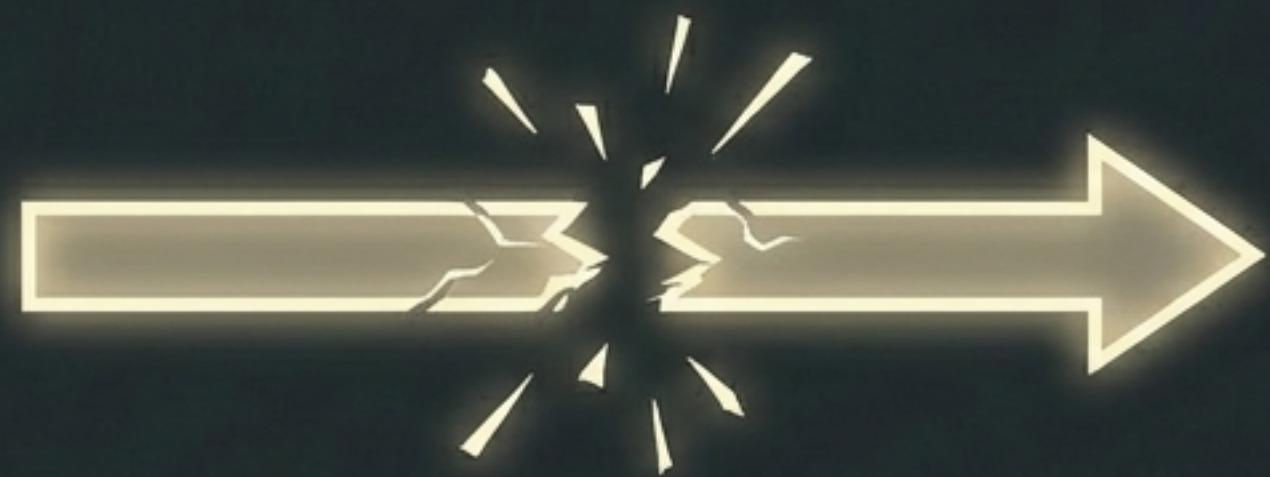
QFDRの逆数 \approx 忠実度が半分になるまでの
長さ (Half-life)



変分打ち切りアプローチ (Variational Truncation)

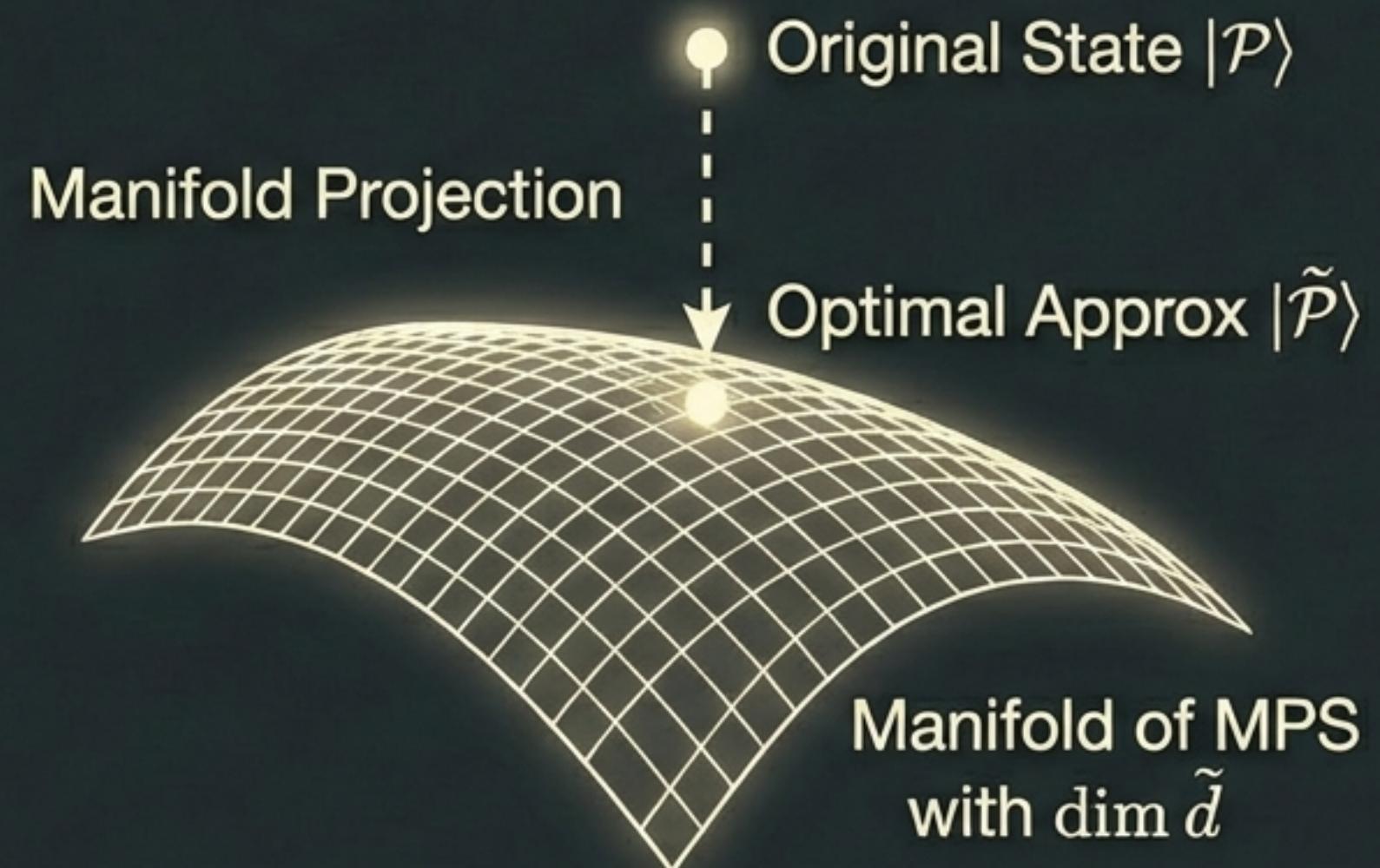
Direct Truncation (SVD)

- 単純なSVD打ち切りは、 MPSの単射性 (Injectivity) を破壊する場合がある。



Tangent-Space Variational Method

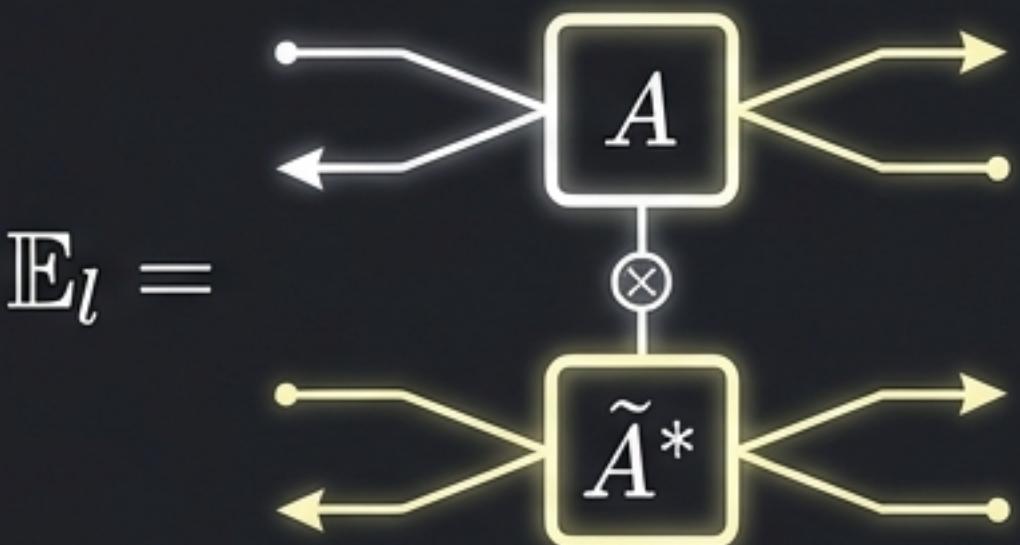
- 目的関数: QFDR (r_F) の最小化
- ターゲット状態 $|\mathcal{P}\rangle$ を低次元多様体へ射影



アルゴリズム：混合ゲージと転送行列

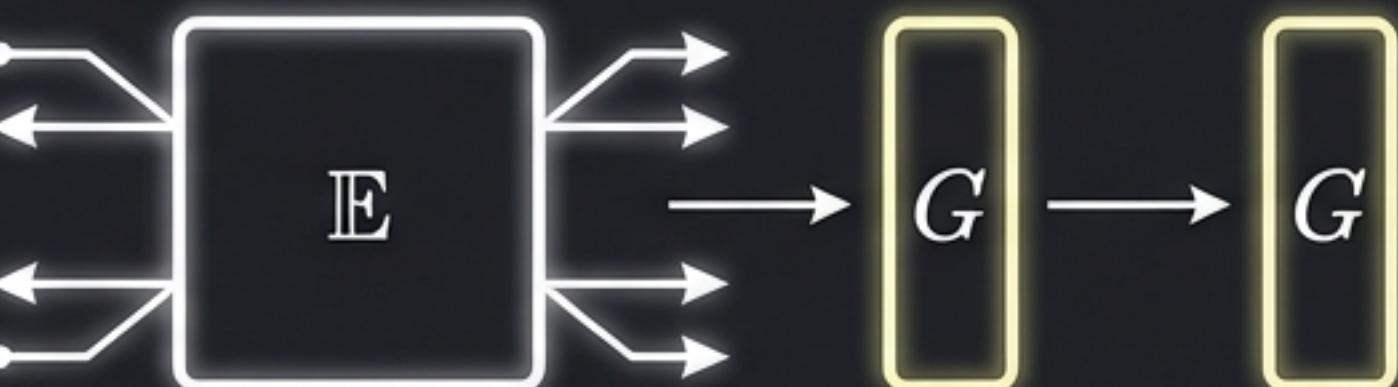
Mixed Transfer Matrices (Eq. 9)

$$\mathbb{E}_l = \sum_x A_l^x \otimes (\tilde{A}_l^x)^*$$



Gradient Calculation

Calculate eigenvectors G_l, G_r
corresponding to max eigenvalue.



Update Rule (Eq. 10)

$$\tilde{A}_c \rightarrow G_l A_c G_r$$

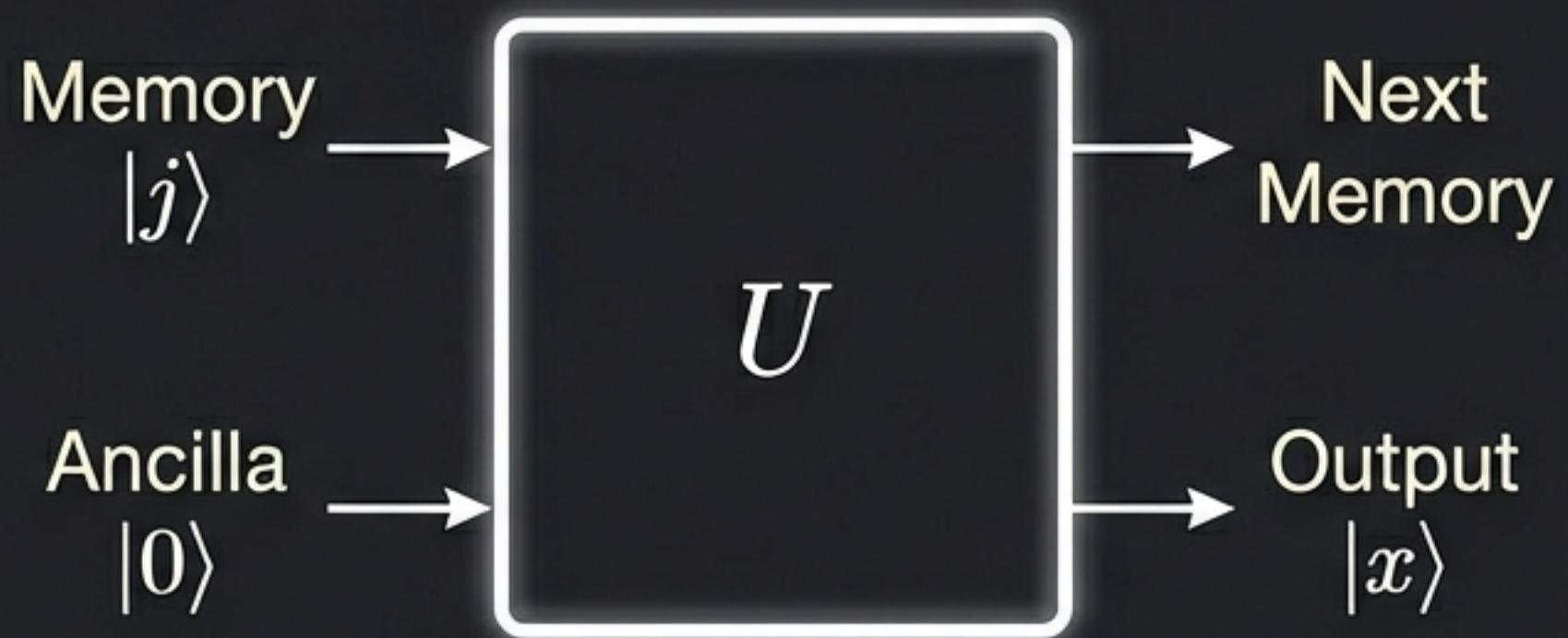


量子回路の再構成：ユニタリ演算子の導出

Truncated Tensor \tilde{A}



Physical Unitary U



Isometry Condition:

$$\sum(\tilde{A})^\dagger \tilde{A} = I$$

$$\text{Eq 12: } \tilde{U} |j\rangle |0\rangle = \sum_x (\tilde{A}_l^x |j\rangle) |x\rangle$$

グラム・シュミット正規直交化により、物理的に実装可能な量子ゲートを構成

Theorem 1 : 誤差境界 (Error Bound)

$$r_F(|\mathcal{P}\rangle, |\tilde{\mathcal{P}}\rangle) \leq \frac{\epsilon_{\tilde{d}}}{2(1 - L\epsilon_{\tilde{d}}) \ln 2} + O\left(\frac{1}{L}\right)$$

Discarded Schmidt Coefficients
(捨てられたシュミット係数の総和)

QFDRは、捨てられた情報量に対して線形にスケーリングする。

結論: $L \approx 1/2\epsilon_{\tilde{d}}$ までは、誤差は $O(\epsilon_{\tilde{d}})$ に制御可能。

Theorem 2 & Corollary 1：情報量との関係

Corollary 1 (Eq. 7)

$$\epsilon \tilde{d} \leq \frac{C_q}{\tilde{D}_q}$$

Temporal Area Law (時間的面積則)



- C_q : Quantum Information Cost
- \tilde{D}_q : Truncated Dimension ($\log \tilde{d}$)

Low C_q allows compression even in infinite processes.

基底状態の面積則と同様に、確率過程も情報量が有限であれば圧縮可能。

数値例 1：巡回ランダムウォーク (Cyclic Random Walk)

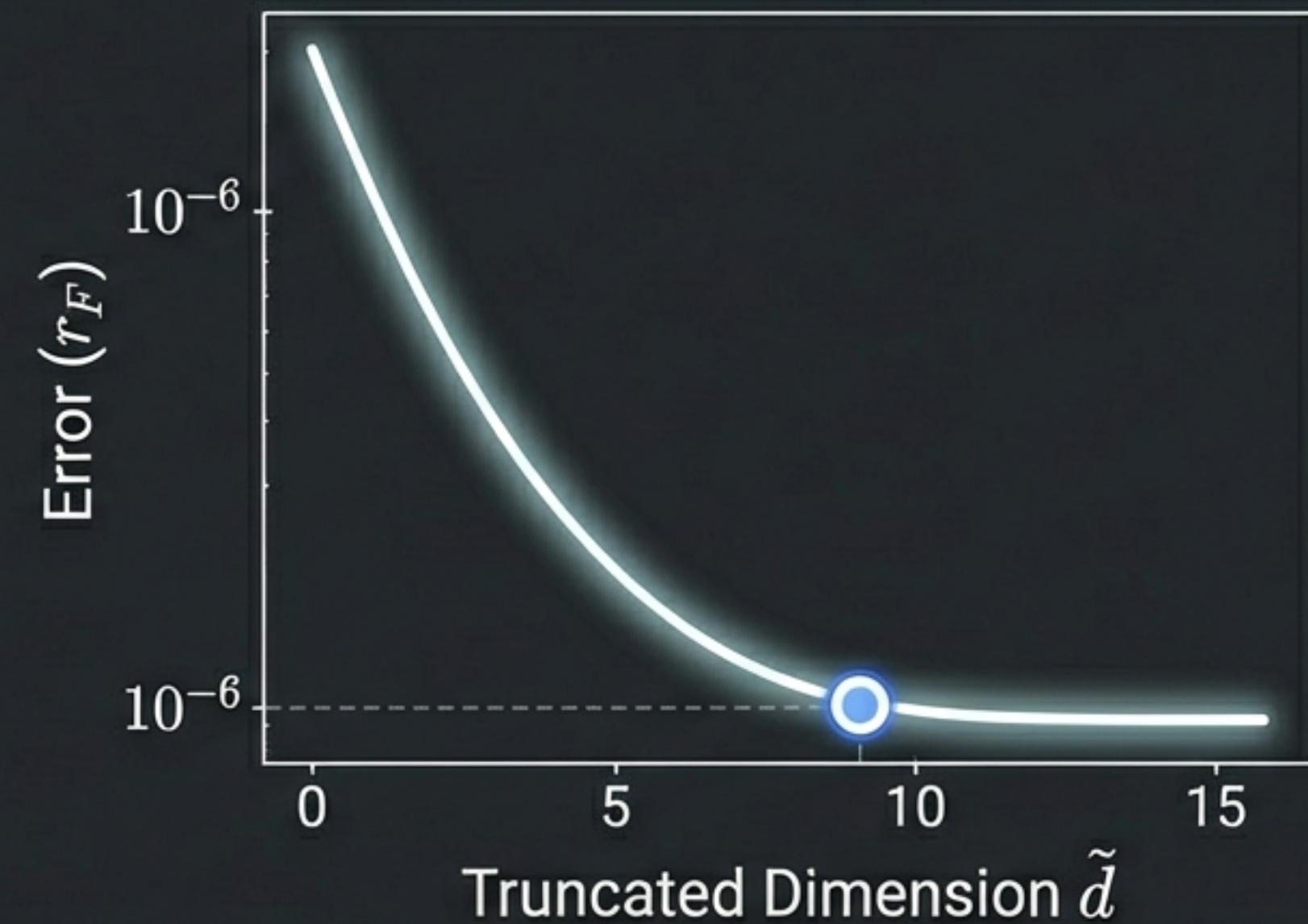
位置の離散化数 $N = 256$ (States)



位置の離散化数 $N = 256$ (States)

古典メモリコストは N に比例して増大

QFDR vs Memory Dimension



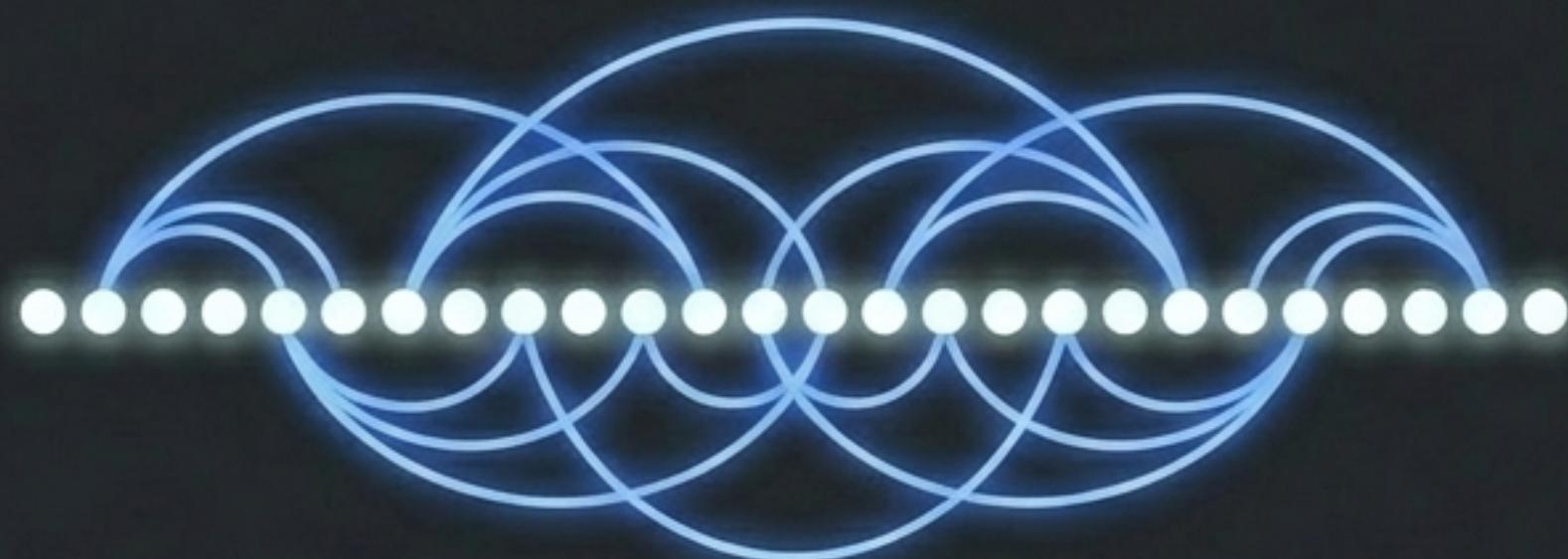
Result: $\tilde{d} = 7$ (3 qubits) で誤差 10^{-6} 以下を達成。

数値例 2 : Dyson-Isingスピン鎖

Context

Strongly Non-Markovian Process

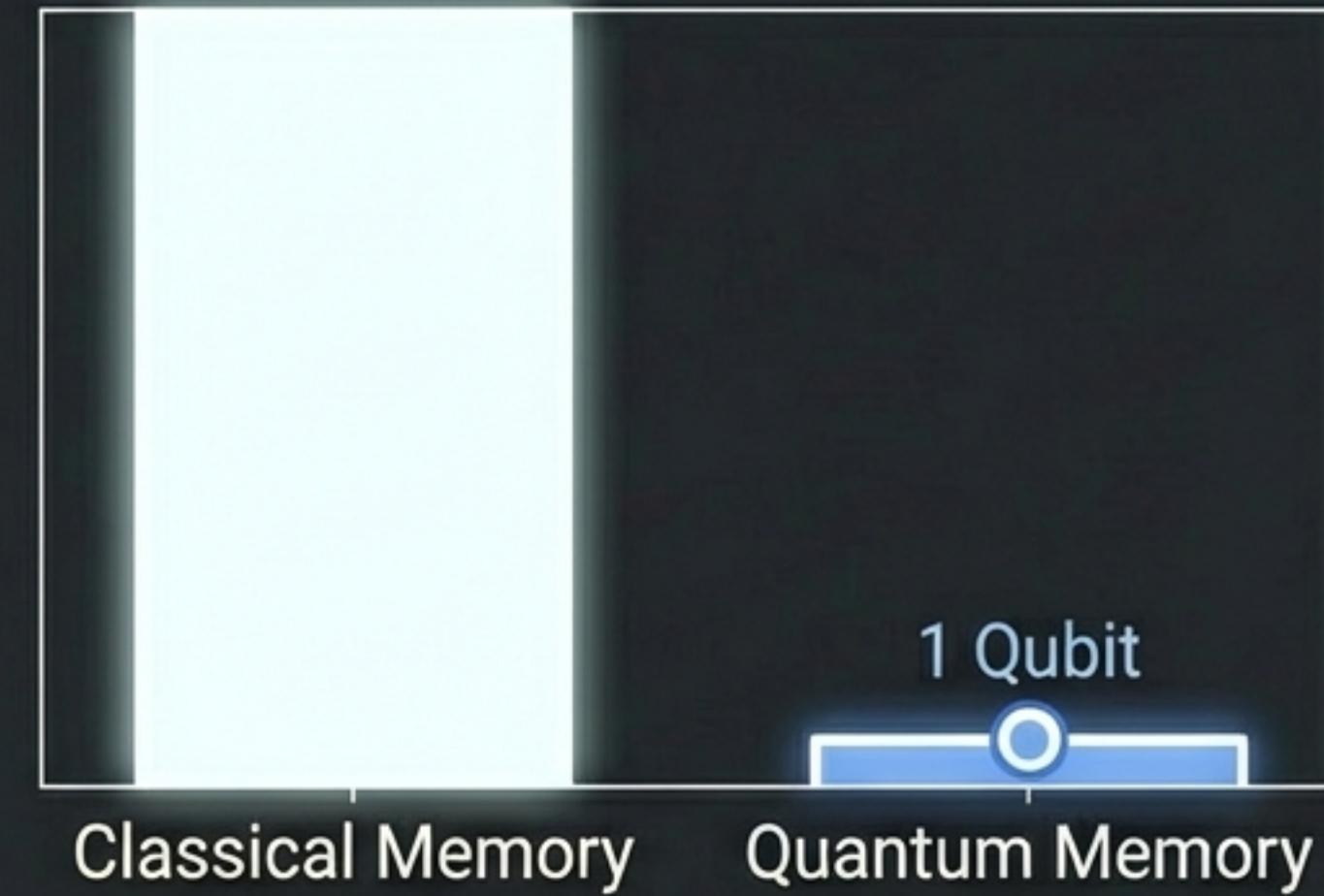
Interaction: $J(j, k) \propto 1/|j - k|^\delta$



Results

Classical Model: Requires 2^L states (Exponential)

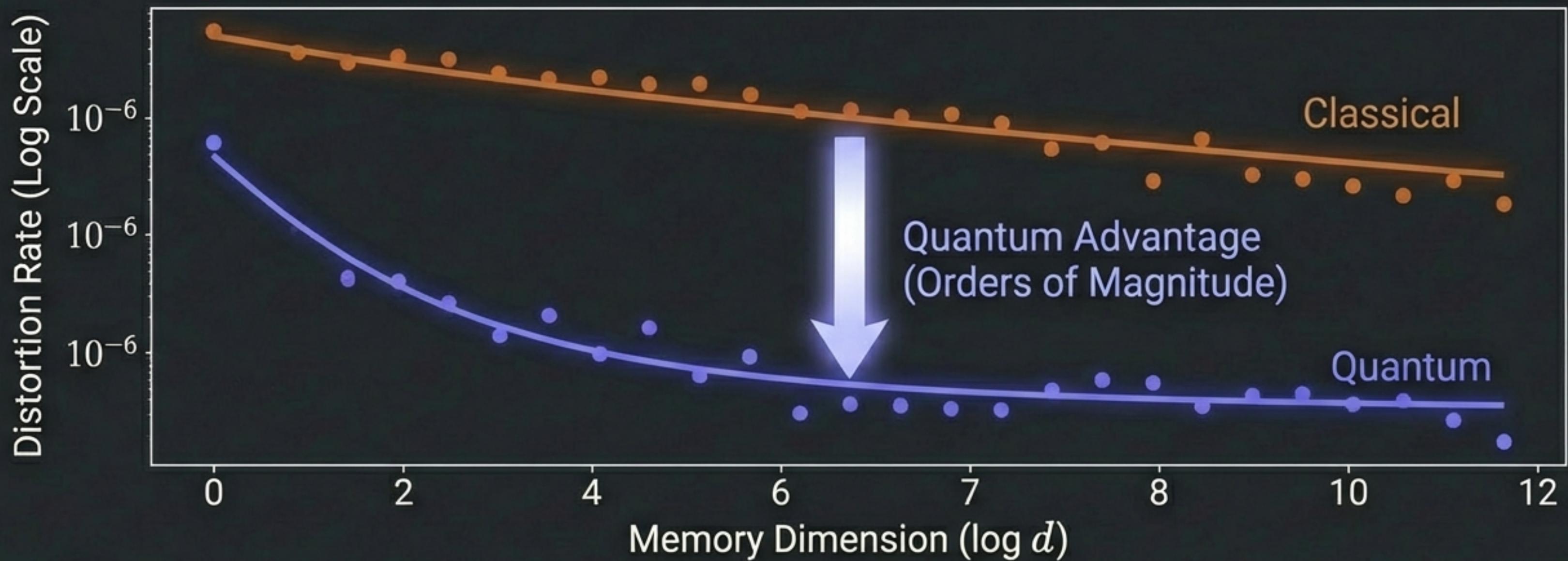
Quantum Model: $\tilde{d} = 2$ (1 Qubit)



Infinite past compressed into single qubit.

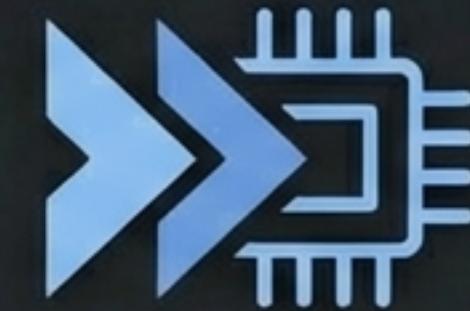
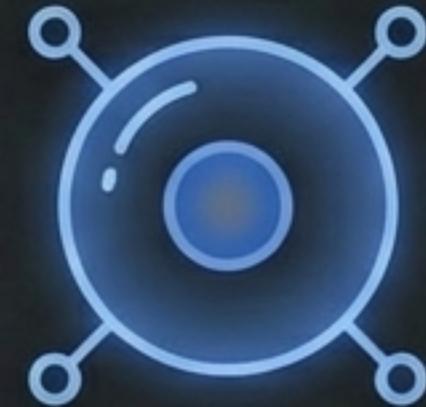
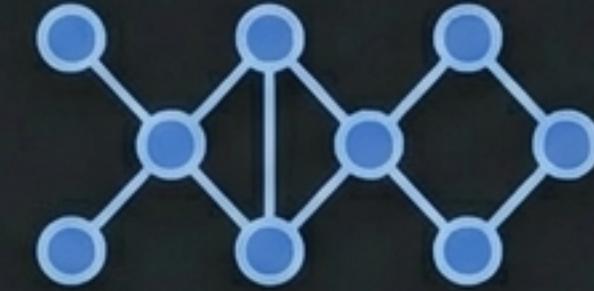
古典モデルとの比較と優位性

$$\text{Eq. 17: } R_F^{(S)}(P, P') \leq O\left(\frac{C_q}{\tilde{D}_q}\right)$$



同じメモリサイズにおいて、量子モデルは古典モデルより圧倒的に低い誤差を実現。

まとめと展望 (Summary & Discussion)



フレームワーク

- q-samples \leftrightarrow iMPS の対応関係を確立。
- 变分打ち切り法により、单射性を保ちつつ最適化。

理論的保証

- 情報量 C_q が圧縮限界を規定する（時間的面積則）。
- 誤差は捨てられたシュミット係数に比例。

今後の展望

- 非平衡熱力学への応用
- データからの直接学習 (Feature Extraction)
- 実機実装に向けたゲート分解