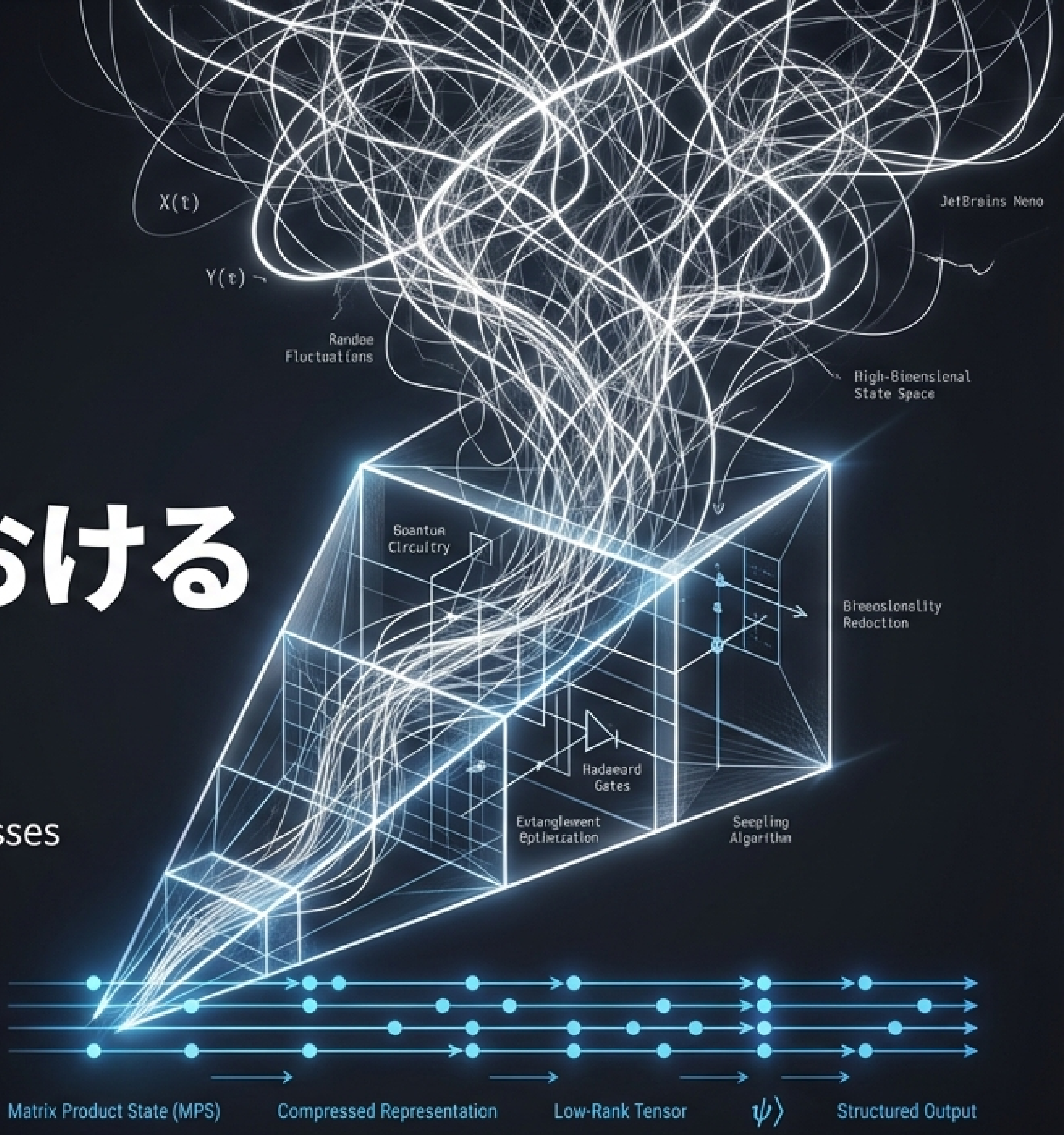
論 文 輪 読 会

確率過程の量子サンプリングにおける次元削減



Dimension reduction in quantum sampling of stochastic processes

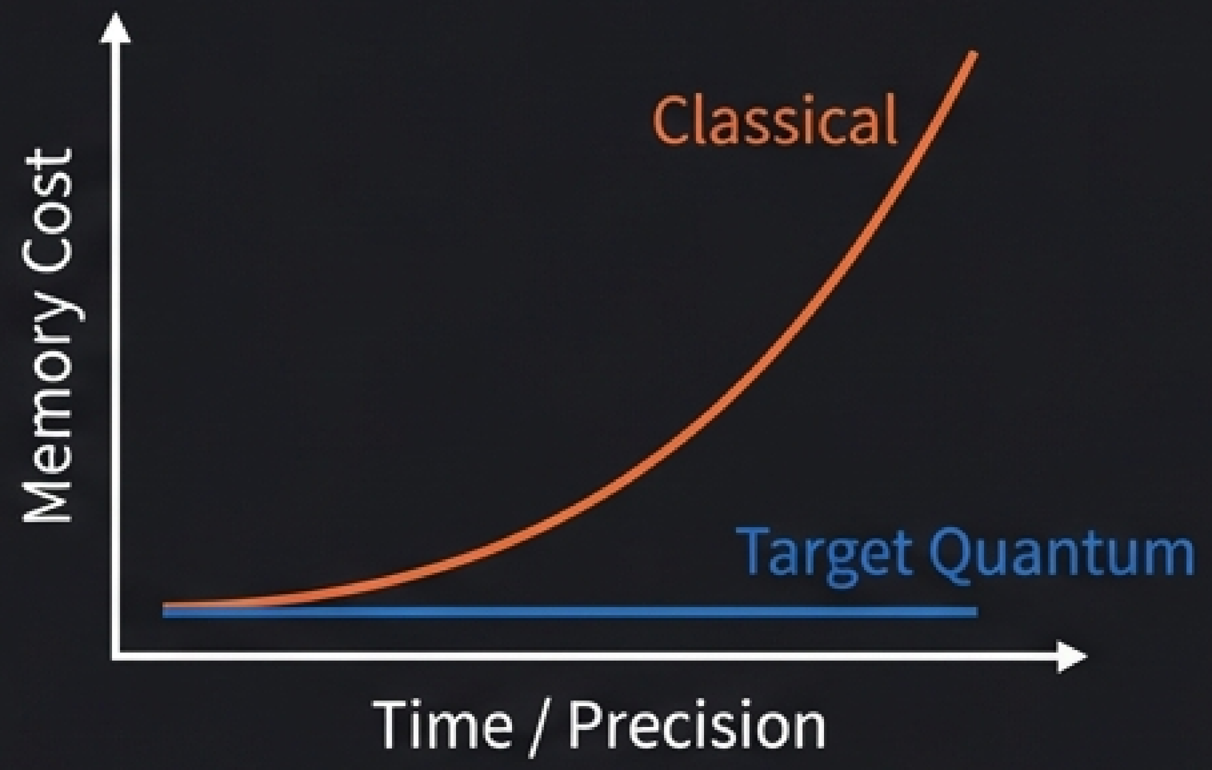
Based on: Yang et al., npj Quantum Information (2025)

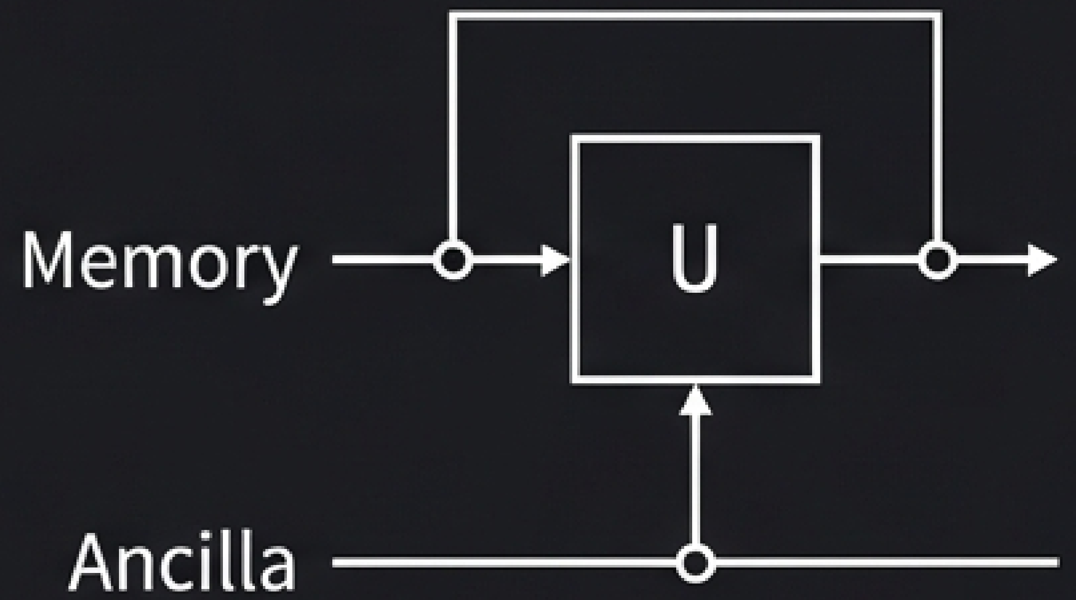
Presenter: [Presenter Name]

Noto Serif JP Regular

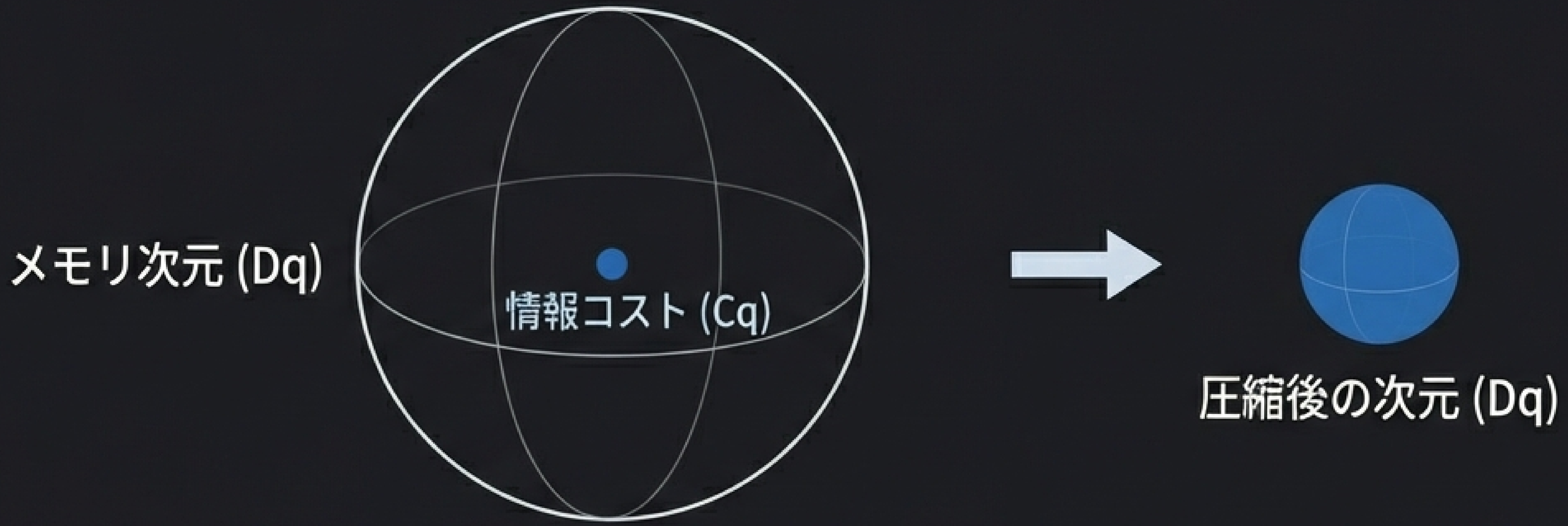
複雑性の壁：なぜ「メモリ」が問題なのか

- **背景**
  - 確率過程は金融、生物学、物理学などあらゆる分野に存在。
- **課題 (The Memory Wall)**
  - 将来予測や高精度の解析には、過去と未来の相関を保持する「メモリ」が必要。
  - 古典シミュレーションでは、時間・精度とともにメモリが指数的に爆発する。
- **現状の量子アプローチ**
  - 量子サンプリング (q-sample): 全軌道の重ね合わせ状態 |P(X0:L|j)> を作ることで高速化。
  - ボトルネック: この状態生成に巨大なメモリ次元 (Dq) が必要。





直感的理解：情報の「箱」と「中身」のギャップ



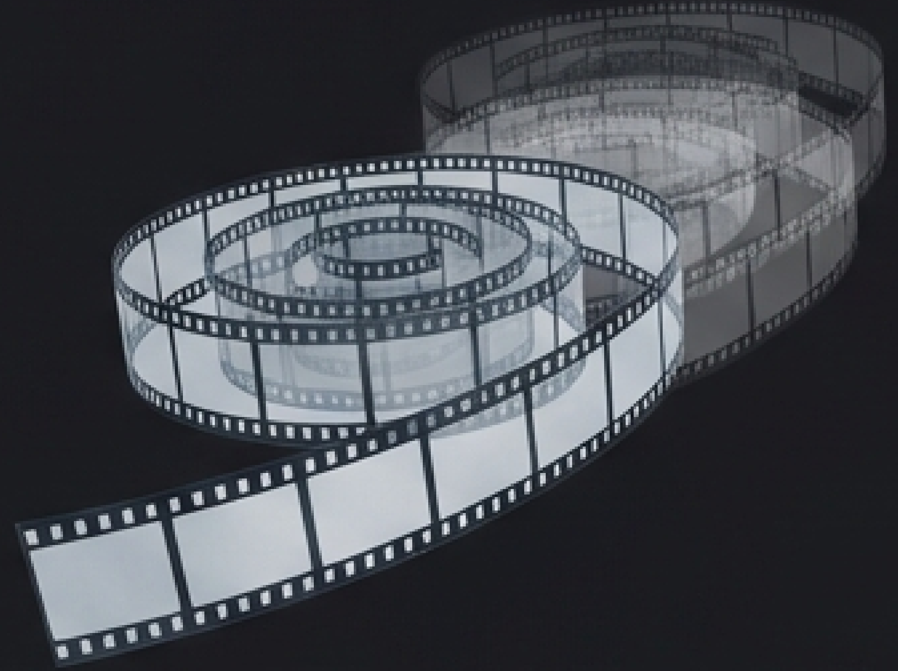
Key Concept: メモリ次元 (Dq) vs 情報コスト (Cq)

- **Dq (箱):** データを格納するヒルベルト空間のサイズ。現状は巨大な倉庫。
- **Cq (中身):** 実際の量子情報量。実は非常に少ない。

Insight: Cq << Dq ならば、情報を損なわずに「箱」を小さくできる。

写像：q-sample から 行列積状態 (MPS) へ

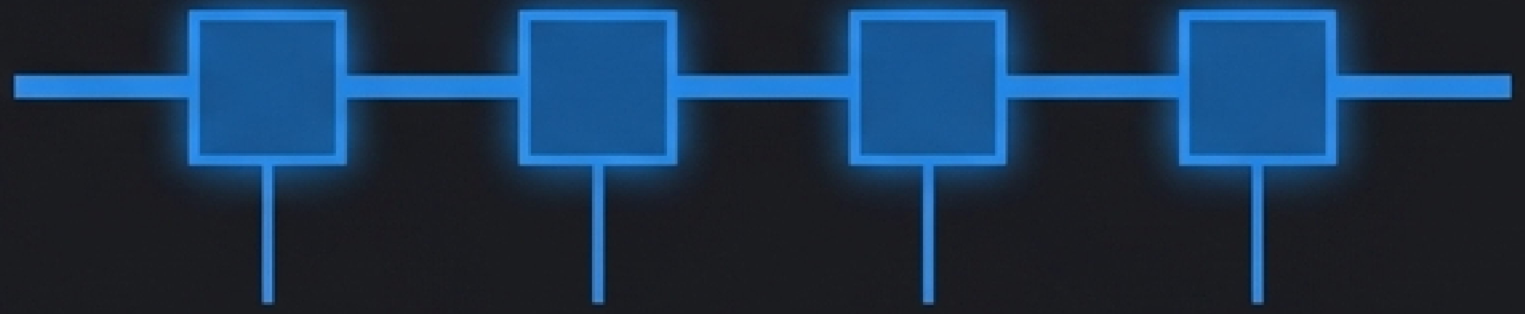
The Process (q-sample)



全軌道の重ね合わせ

=

The Math (MPS)



1次元量子スピン鎖 (MPS)

- 確率分布 $P(X_{0:L})$ を Infinite MPS と見なす。
- 各テンソルが「過去の要約」を次の時刻へ渡す。
- MPSの強力な切り詰め手法 (Truncation) が適用可能に。

理論の基礎：q-sample の構成

1. Quantum Update Unitary

$$U|\sigma_j\rangle\,|0\rangle = \sum_x \sqrt{P(x|j)}\, e^{i\phi_{xj}}\, |x\rangle\, |\sigma_{\lambda(x,j)}\rangle$$

現在のメモリ $|\sigma_j\rangle$ から、出力 x と次のメモリを生成。

2. The q-sample state

$$|P(X_{0:L}|j)\rangle := \sum_{x_{0:L}} \sqrt{P(x_{0:L}|j)}\, |x_{0:L}\rangle$$

全ての可能な軌道の重ね合わせ状態。

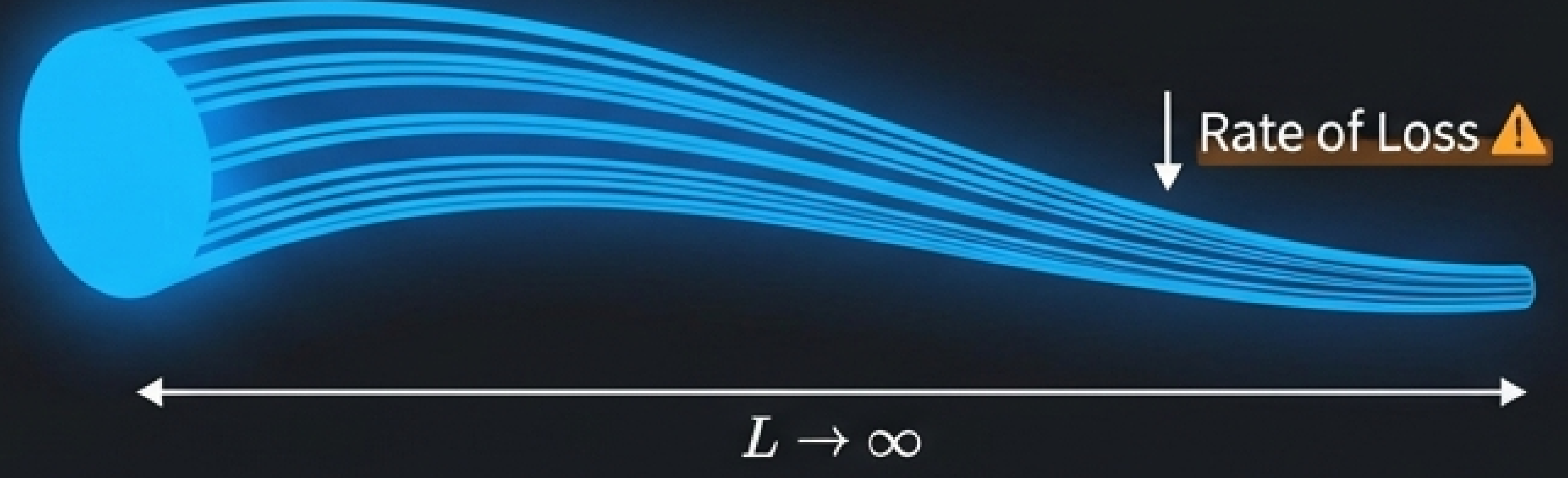
3. MPS Site Matrix

$$A^x_{kj} = \sqrt{P(x|j)}\,\delta_{\lambda(x,j),k}$$

確率 P(x|j) をMPSのテンソル形式 A に変換。

歪みの指標：量子忠実度発散率（QFDR)

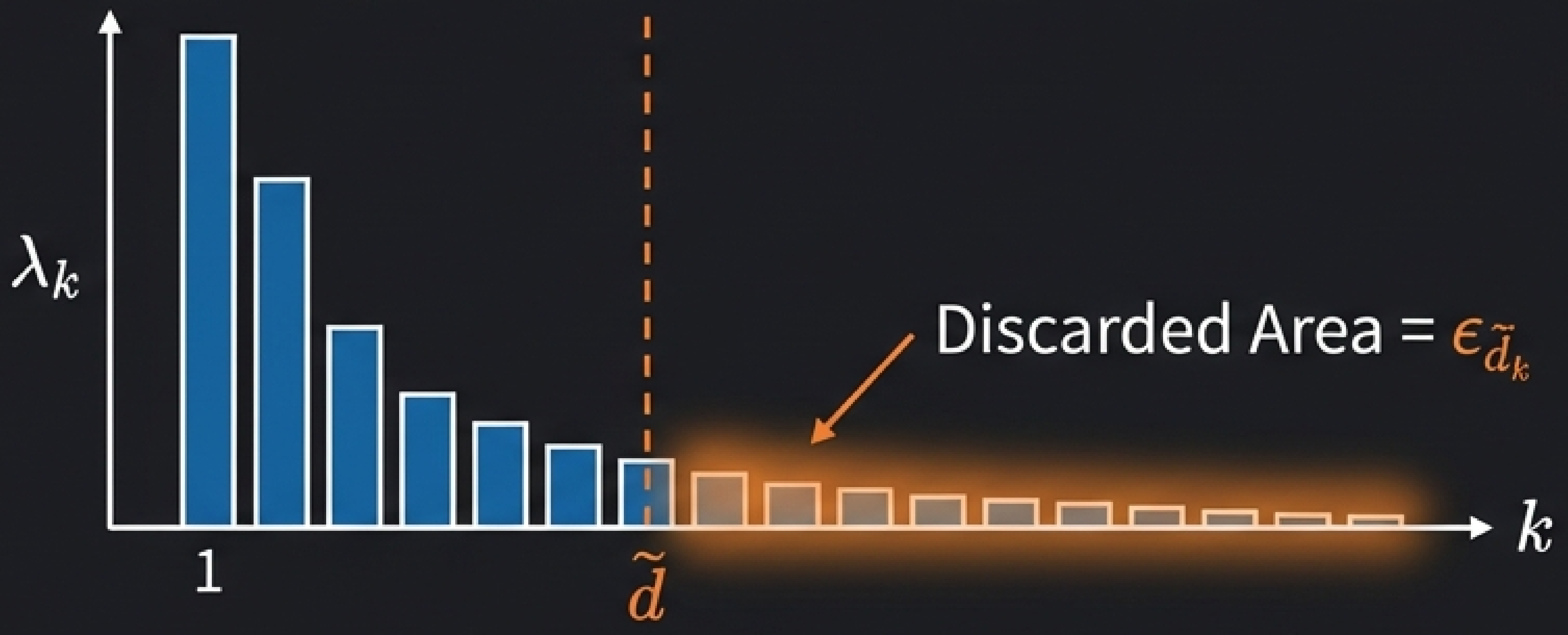
無限長の系列では Fidelity は必ず 0 になる。
→「1ステップあたりの劣化速度」を測る指標が必要。



$$R_F(|P\rangle, |P'\rangle) := -\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \log_2 F(|P_L\rangle, |P'_L\rangle)$$

- F: 状態忠実度（Fidelity）
- $|P_L\rangle$: 長さ L の q-sample
- R_F: 小さいほど、圧縮による情報の損失が遅い（＝高精度）。

定理 1：切り詰めによるコストの境界



Theorem 1: 小さい固有値を捨てた場合、誤差 R_F はその和で抑えられる。

$$R_F(|P\rangle, |\widetilde{P}\rangle) \leq \frac{\epsilon_{\tilde{d}}}{2(1 - L\epsilon_{\tilde{d}})\ln 2} + O\left(\frac{1}{L}\right)$$

where $\epsilon_{\tilde{d}} := \sum_{k=\tilde{d}+1}^{d} \lambda_k$

「小さい成分を捨てても、ダメージは線形オーダーで制御できる」

定理 2 & 系 1：情報量と圧縮限界

情報量 C_q (Information Cost) が小さいほど、圧縮は容易になる。

Theorem 2: $\varepsilon_{\tilde{d}_q} \leq H(\lambda)/\ldots$

$\Downarrow$

Corollary 1: $\varepsilon_{\tilde{d}_q} \leq C_q/\widetilde{D}_q$

$$\boxed{R_F(|P\rangle, |\widetilde{P}\rangle) \leq O\left(\frac{C_q}{\widetilde{D}_q}\right)}$$

- C_q: 量子情報コスト（中身の量）
- $\widetilde{D}_q$: 圧縮後のメモリ次元（新しい箱のサイズ）

Takeaway: $C_q \ll D_q$ ならば、$\widetilde{D}_q$ を小さくしても誤差 R_F は極めて小さい。

実装：変分切り詰めアルゴリズム

Input
Target MPS (A) & Random Ansatz (~$\tilde{\boldsymbol{A}}$)

↓

Compute Transfer Matrix
Calculate Mixed Transfer Matrix ~$\tilde{\boldsymbol{E}}$ (Eq 9)

↓

Update Ansatz
Using Eigenvectors $\boldsymbol{G_l}, \boldsymbol{G_r}$
$\tilde{\boldsymbol{A}}_c \leftarrow \boldsymbol{G_l A_c G_r}$ (Eq 10)

↓

Check Error
$\Delta <$ Threshold?

No → Compute Transfer Matrix

Yes ↓

Output
Compressed Unitary ~$\tilde{\boldsymbol{U}}$ (Eq 12)

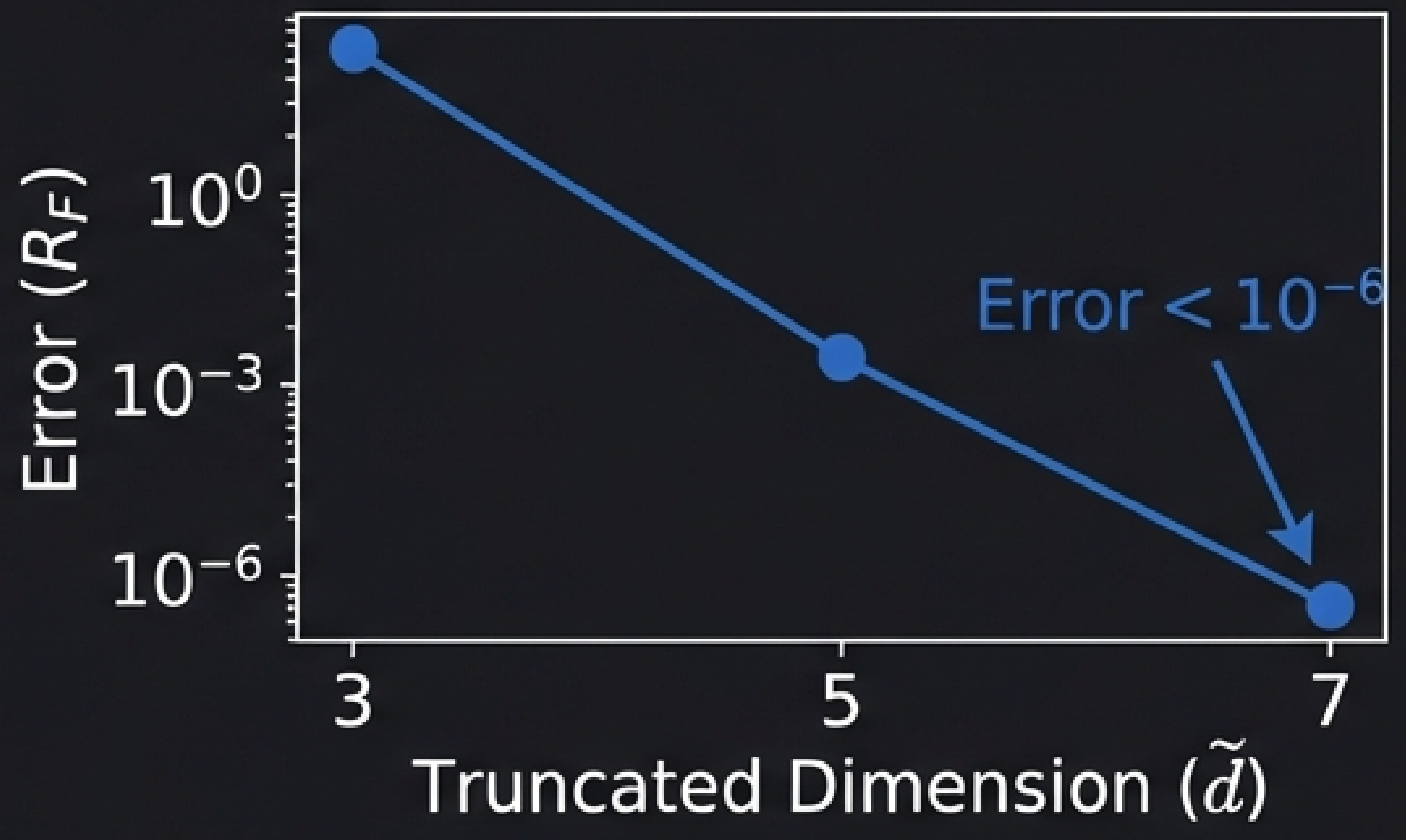
勾配法ではなく、接空間への射影を用いて効率的に最適解を探索。

実験 1：巡回ランダムウォーク（Markovian）

Context

- モデル: 円環上のランダムウォーク
- 式: $y_{t+1} = \mathrm{Frac}(y_t + x)$
- 課題: 古典離散化では状態数 N が爆発 (N=256など)。

Results



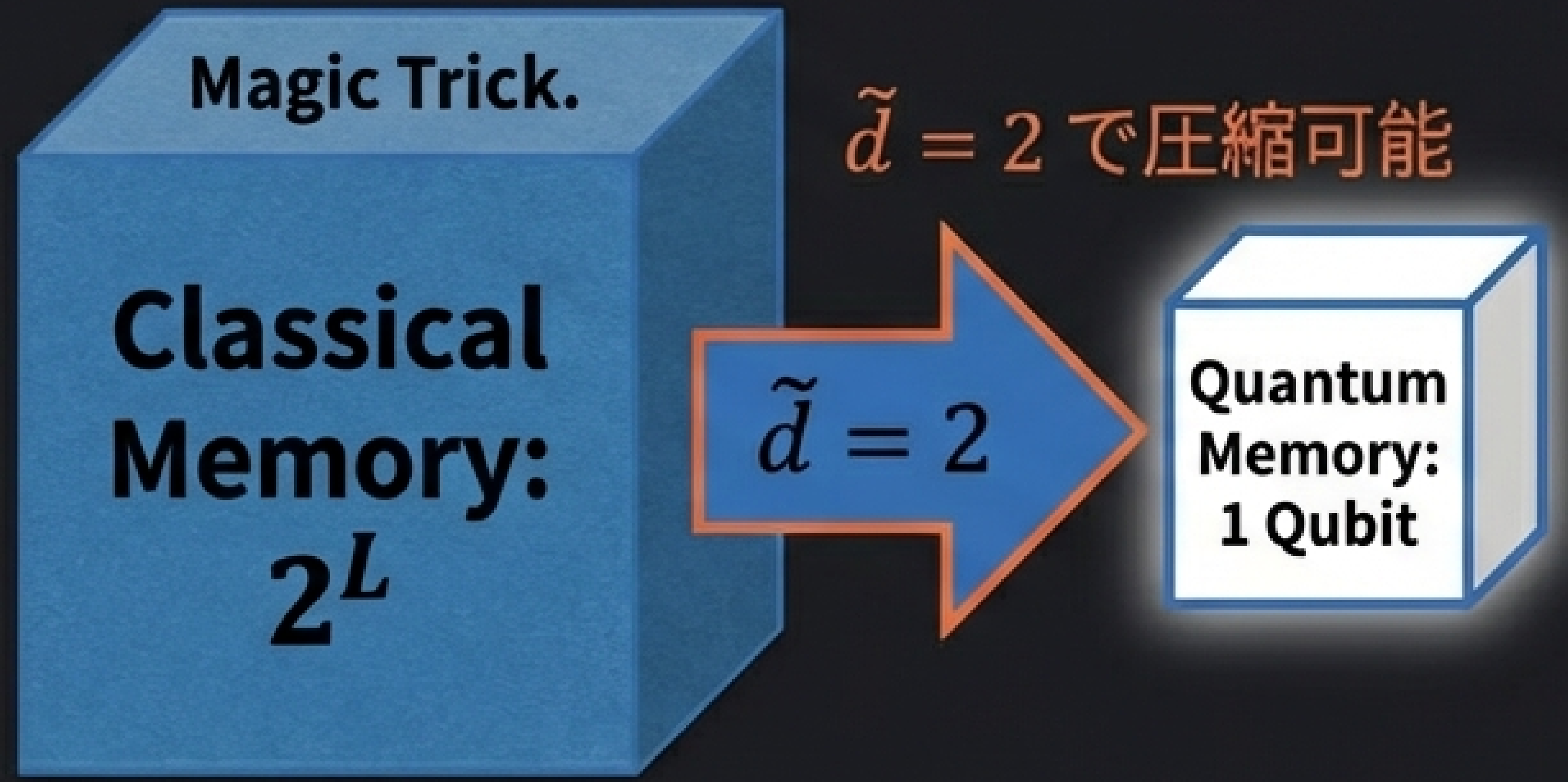
- 量子情報コスト $C_q \approx 3.4$ bits
- 巨大な古典状態数 N に対し、わずか 3 qubits (d=7) で高精度再現。

実験 2：Dyson-Ising 鎖 (Strongly Non-Markovian)

Context

- モデル: 長距離相互作用を持つスピン鎖
- Hamiltonian: $H = -\sum J(j,k)\,\sigma_j \sigma_k$
- 課題: メモリ長 L に対して古典メモリは 2^L で指数爆発。

Results



- 長距離相関があるにも関わらず、1 qubit に圧縮可能。
- 誤差 QFDR $< 10^{-3}$

比較と優位性：古典 vs 量子

Process Type	Classical Limit	Quantum Result
Cyclic Random Walk (Markovian)	Discretization Cost (High N)	Low Dimension (d~7)
Dyson-Ising (Non-Markovian)	Exponential Cost (2^L)	Extreme Compression (1 Qubit)

Theoretical Validation

統計的FDR (Eq 16 & 17)

$$R_F^{(S)} \leq O\left(\frac{C_q}{D_q^{\sim}}\right)$$

結論：同一のメモリ次元で比較した場合、量子モデルは古典モデルよりも桁違いに低い歪みを達成。

結論：複雑性を圧縮する

1. 課題

確率過程シミュレーションにおける「メモリの壁」

2. 発見

メモリ次元 (D_q) は大きいが、真の情報量 (C_q) は小さい。

3. 手法

MPSベースの変分切り詰めにより、理論的保証付きで次元削減。

4. 成果

強い非Markov過程でも、わずかな量子メモリで高忠実度サンプリングを実現。

ディスカッション・論点

- **トレードオフ**
  精度 vs メモリ。実アプリケーションで許容される "Loss" のラインは？
- **計算コスト**
  圧縮回路を見つけるための古典前処理コスト O(d d~^2) との兼ね合い。
- **NISQへの応用**
  この圧縮回路は現在のノイズあり量子デバイスで実装可能か？
- **今後の展望**
  よりカオスな系への適用可能性。

参考文献 & 補足

Main Paper:

Chengran Yang, et al., 'Dimension reduction in quantum sampling of stochastic processes', npj Quantum Information 11, 34 (2025).

Related Works:

- Matrix Product State (MPS) truncation techniques.
- Quantum Causal Models / Epsilon Machines.

Key Definitions:

- `C_q`: Quantum Information Cost
- `D_q`: Memory Dimension
- `QFDR`: Quantum Fidelity Divergence Rate