

# Comparaison des méthodes numériques pour résoudre les équations de Maxwell avec singularités

Kirill Brodt

encadré par

Patrick Ciarlet

UMA, ENSTA ParisTech

13 Novembre, 2015

# Motivation

- Problème avec singularités

# Motivation

## ❏ Problème avec singularités

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

# Motivation

## ❖ Problème avec singularités

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

## ❖ Loi de Gauss

# Motivation

## ❖ Problème avec singularités

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

## ❖ Loi de Gauss

Multiplicateur de Lagrange

Pénalisation<sup>[1]</sup>

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Motivation

## ❖ Problème avec singularités

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

## ❖ Loi de Gauss

Multiplicateur de Lagrange  
système **de point selle**

Pénalisation<sup>[1]</sup>  
système **auto-adjoint coercif**

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Motivation

## ❖ Problème avec singularités

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

## ❖ Loi de Gauss

Multiplicateur de Lagrange  
système **de point selle**

Pénalisation<sup>[1]</sup>  
système **auto-adjoint coercif**  
 $\alpha \lesssim h^2$

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Motivation

## ❖ Problème avec singularités

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

## ❖ Loi de Gauss

Multiplicateur de Lagrange  
système **de point selle**

Pénalisation<sup>[1]</sup>  
système **auto-adjoint coercif**  
 $\alpha \lesssim h^2$   $\alpha \lesssim h$

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014



# Table des matières

- 1 Equations de Maxwell en 2d avec une solution singulière  
Equation pour le potentiel et passage à Maxwell  
Multiplicateur de Lagrange vs. pénalisation
- 2 Equations de Maxwell en 3d avec une solution singulière  
Multiplicateur de Lagrange vs. pénalisation modifiée
- 3 Problème électrique aux valeurs propres  
Décomposition orthogonale de l'espace  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$   
Discrétisation et la forme matricielle d'opérateur de projection

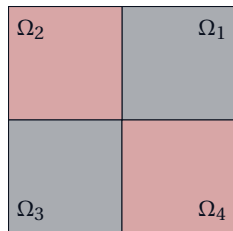
## Section 1

# Equations de Maxwell en 2d avec une solution singulière

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$



# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\sigma_3 = 1$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $\Omega_4$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$

■  $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\sigma_3 = 1$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $\Omega_4$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\sigma_3 = 1$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $\Omega_4$

- ❖  $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- ❖  $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta))$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\sigma_3 = 1$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $\Omega_4$

- ❖  $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- ❖  $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	<p>Trouver <math>\phi \in H^1(\Omega)</math> tel que</p> $\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) &= 0 & (\Omega), \\ \phi &= \phi_{sing} & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------	---

- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (\textcolor{teal}{c} \cos(\lambda \theta) + \textcolor{teal}{s} \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$ $c_2, s_2$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$ $c_1, s_1$
$\sigma_3 = 1$ $c_3, s_3$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $c_4, s_4$ $\Omega_4$



# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	<p>Trouver <math>\phi \in H^1(\Omega)</math> tel que</p> $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$ $\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$
------------------------	--

- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$ ?

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$ $c_2, s_2$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$ $c_1, s_1$
$\sigma_3 = 1$ $c_3, s_3$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $c_4, s_4$ $\Omega_4$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	<p>Trouver <math>\phi \in H^1(\Omega)</math> tel que</p> $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$ $\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$
------------------------	--

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$ $c_2, s_2$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$ $c_1, s_1$
$\sigma_3 = 1$ $c_3, s_3$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $c_4, s_4$ $\Omega_4$

- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
  - $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
  - Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$ ?
- 1**  $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	<p>Trouver <math>\phi \in H^1(\Omega)</math> tel que</p> $\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) &= 0 & (\Omega), \\ \phi &= \phi_{sing} & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------	---

$\Omega_2$ $\sigma_2 = \sigma > 1$ $c_2, s_2$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$ $c_1, s_1$
$\Gamma$ $\sigma_3 = 1$ $c_3, s_3$ $\Omega_3$	$\sigma_4 = \sigma > 1$ $c_4, s_4$ $\Omega_4$

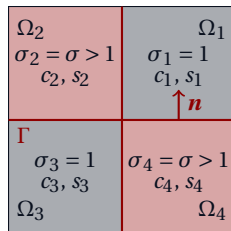
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$ ?

- $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
- $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$



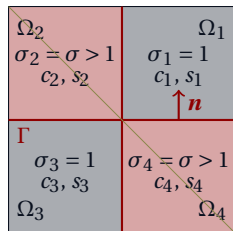
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$ ?

- $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
- $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_{\Gamma} = 0$
- $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega : [\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} = 0$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$



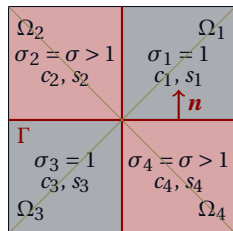
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$  ?

- $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
- $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$
- $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega : [\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0$
- $\phi_{sing}$  est **symétrique** par rapport de l'axe  $-\pi/4$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

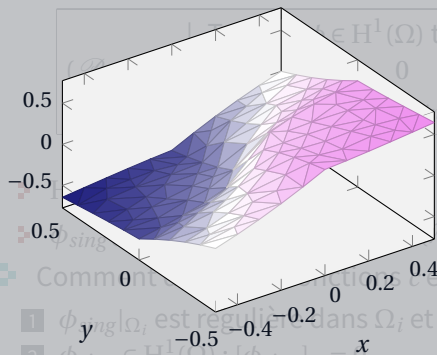
$(\mathcal{P}_{sing})$	<p>Trouver <math>\phi \in H^1(\Omega)</math> tel que</p> $\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) &= 0 & (\Omega), \\ \phi &= \phi_{sing} & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------	---



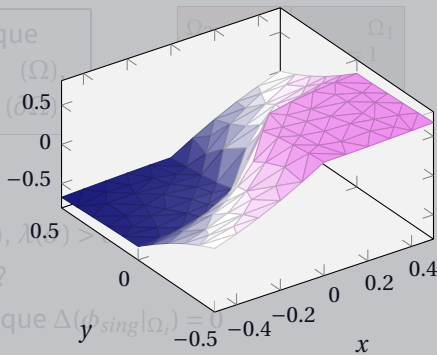
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$  ?
  - $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
  - $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$
  - $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega : [\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0$
  - $\phi_{sing}$  est symétrique (et antisymétrique) par rapport de l'axe  $-\pi/4$  ( $\pi/4$ )

# Equation pour le potentiel

$\lambda = 0.45 (\sigma = 7.3475)$



$\lambda = 0.15 (\sigma = 71.385)$

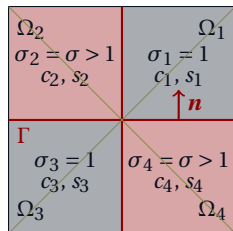


	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
$c_i$	0.7071	-0.3683	1.7825	0.7071	0.7071	-0.668	2.0822	0.7071
$s_i$	-1.9167	-0.6576	0.9982	-0.2609	-5.9743	-0.24645	5.6441	-0.0837

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	<p>Trouver <math>\phi \in H^1(\Omega)</math> tel que</p> $\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) &= 0 & (\Omega), \\ \phi &= \phi_{sing} & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------	---



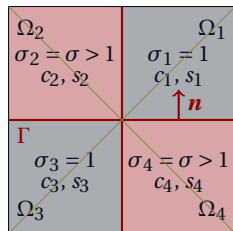
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$  ?
  - $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
  - $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$
  - $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega : [\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0$
  - $\phi_{sing}$  est symétrique (et antisymétrique) par rapport de l'axe  $-\pi/4$  ( $\pi/4$ )
- Dans ce cas  $\phi_{sing} \notin H^2(\Omega)$



# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$

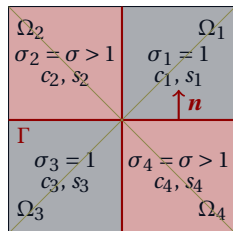


- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$  ?
  - $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
  - $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$
  - $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega$  :  $[\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0 \Rightarrow [\nabla \phi_{sing}]_\Gamma \neq 0$ , car  $\sigma \neq 1$
  - $\phi_{sing}$  est symétrique (et antisymétrique) par rapport de l'axe  $-\pi/4$  ( $\pi/4$ )
- Dans ce cas  $\phi_{sing} \notin H^2(\Omega)$

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$



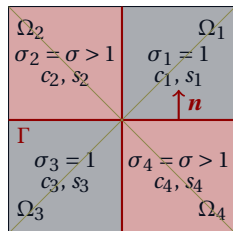
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$  ?
  - $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
  - $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$
  - $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega : [\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0 \Rightarrow [\nabla \phi_{sing}]_\Gamma \neq 0$ , car  $\sigma \neq 1$
  - $\phi_{sing}$  est symétrique (et antisymétrique) par rapport de l'axe  $-\pi/4$  ( $\pi/4$ )
- Dans ce cas  $\phi_{sing} \notin H^2(\Omega)$ . On peut montrer<sup>[2]</sup>  $\phi_{sing} \in H^{1+\lambda}(\Omega), \lambda < 1.$

[2] GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, 1992

# Equation pour le potentiel

- On s'intéresse à résoudre le problème dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{P}_{sing})$	Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que
	$\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (\Omega),$
	$\phi = \phi_{sing} \quad (\partial\Omega).$



- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $\phi_{sing}(r, \theta) = r^\lambda (c \cos(\lambda \theta) + s \sin(\lambda \theta)), \lambda(\sigma) > 0$
- Comment définir les fonctions  $c$  et  $s$  ?
  - $\phi_{sing}|_{\Omega_i}$  est régulière dans  $\Omega_i$  et tel que  $\Delta(\phi_{sing}|_{\Omega_i}) = 0$
  - $\phi_{sing} \in H^1(\Omega) : [\phi_{sing}]_\Gamma = 0$
  - $\operatorname{div}(\sigma \nabla \phi_{sing}) = 0$  dans  $\Omega : [\sigma \nabla \phi_{sing} \cdot \mathbf{n}]_\Gamma = 0 \Rightarrow [\nabla \phi_{sing}]_\Gamma \neq 0$ , car  $\sigma \neq 1$
  - $\phi_{sing}$  est symétrique (et antisymétrique) par rapport de l'axe  $-\pi/4$  ( $\pi/4$ )
- Dans ce cas  $\phi_{sing} \notin H^2(\Omega)$ . On peut montrer<sup>[2]</sup>  $\phi_{sing} \in H^{1+\lambda}(\Omega), \lambda < 1/2$ .

[2] GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, 1992

# Formulation variationnelle et discrétisation

■ On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

# Formulation variationnelle et discrétisation

On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi}_{a(\phi, \psi)} = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

# Formulation variationnelle et discrétisation

- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi}_{a(\phi, \psi)} = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ .

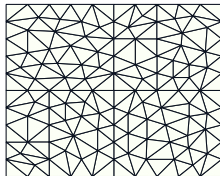
# Formulation variationnelle et discrétisation

- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation



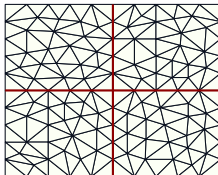
# Formulation variationnelle et discrétisation

- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation **conforme**





# Formulation variationnelle et discrétisation

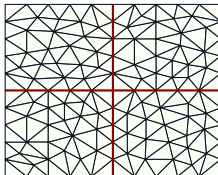
- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme

- $h_i$  diamètre d'un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  et  $h = \max_i h_i$



# Formulation variationnelle et discrétisation

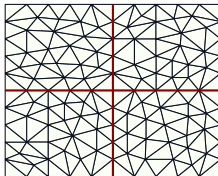
- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme

- $h_i$  diamètre d'un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  et  $h = \max_i h_i$
- $V_h \subset H^1(\Omega)$  un sous-espace de dimension finie



# Formulation variationnelle et discrétisation

- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

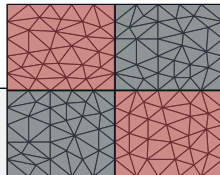
$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme

❖  $h_i$  diamètre d'un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  et  $h = \max_i h_i$

❖  $V_h \subset H^1(\Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$$(\mathcal{P}_{V,sing}^h) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h \in V_h \text{ tel que } \phi_h = \Pi_h \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_h \cdot \nabla \psi_h = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$



# Formulation variationnelle et discrétisation

- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

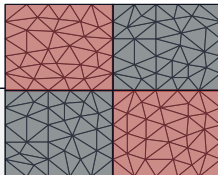
$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme

▣  $h_i$  diamètre d'un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  et  $h = \max_i h_i$

▣  $V_h \subset H^1(\Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$$(\mathcal{P}_{V,sing}^h) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h \in V_h \text{ tel que } \phi_h = \Pi_h \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_h \cdot \nabla \psi_h = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$



- On prend l'espace des éléments finis nodaux de type Lagrange  $P_k$ .

# Formulation variationnelle et discrétisation

- On passe à la formulation variationnelle équivalente

$$(\mathcal{P}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_{V,sing}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \phi = \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0}_{a(\phi, \psi)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

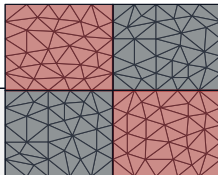
$a$  est **coercive** sur  $H_0^1(\Omega)$  et d'après Lax-Milgram  $(\mathcal{P}_{V,sing})$  est **bien posé**.

- On discrétise le problème  $(\mathcal{P}_{V,sing})$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme

▣  $h_i$  diamètre d'un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  et  $h = \max_i h_i$

▣  $V_h \subset H^1(\Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$$(\mathcal{P}_{V,sing}^h) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h \in V_h \text{ tel que } \phi_h = \Pi_h \phi_{sing}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_h \cdot \nabla \psi_h = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

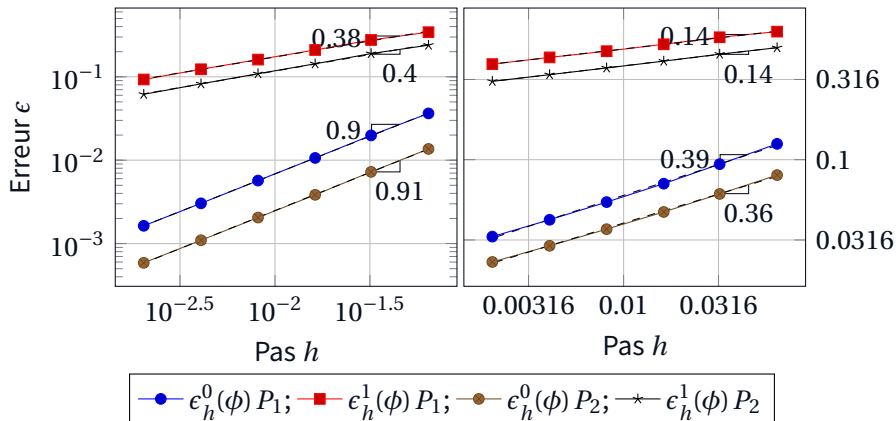


- On prend l'espace des éléments finis nodaux de type Lagrange  $P_k$ .

$$\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^\lambda, \quad \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{2\lambda}$$

# Convergence des éléments finis nodaux pour le potentiel

Convergence avec  $\lambda = 0.45$     Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$$\epsilon_h^0(\phi) = \frac{\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}}, \quad \epsilon_h^1(\phi) = \frac{\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)}}{\|\phi\|_{H^1(\Omega)}}$$

## Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

- ❖ Lorsqu'on se trouve en **deux** dimensions on peut prendre  $E = \sigma \text{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

## Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

❖ Lorsqu'on se trouve en deux dimensions on peut prendre  $E = \sigma \text{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

1  $\text{rot} E = \text{rot} \sigma \text{rot} \phi = -\text{div} \sigma \nabla \phi = 0$ , avec  $\text{rot} E = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$



## Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

❖ Lorsqu'on se trouve en **deux** dimensions on peut prendre  $\mathbf{E} = \sigma \mathbf{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

1  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot} \sigma \mathbf{rot} \phi = -\mathbf{div} \sigma \nabla \phi = 0$ , avec  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

2  $\mathbf{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{div} \sigma^{-1} \sigma \mathbf{rot} \phi = 0$

# Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

❖ Lorsqu'on se trouve en **deux** dimensions on peut prendre  $\mathbf{E} = \sigma \mathbf{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

❶  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot} \sigma \mathbf{rot} \phi = -\operatorname{div} \sigma \nabla \phi = 0$ , avec  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

❷  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = \operatorname{div} \sigma^{-1} \sigma \mathbf{rot} \phi = 0$

❖ On s'intéresse donc à résoudre le problème électrique

$(\mathcal{C}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

# Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

❖ Lorsqu'on se trouve en **deux** dimensions on peut prendre  $\mathbf{E} = \sigma \mathbf{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

❶  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot} \sigma \mathbf{rot} \phi = -\operatorname{div} \sigma \nabla \phi = 0$ , avec  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

❷  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = \operatorname{div} \sigma^{-1} \sigma \mathbf{rot} \phi = 0$

❖ On s'intéresse donc à résoudre le problème électrique

$(\mathcal{C}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$

❖  $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$

# Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

❖ Lorsqu'on se trouve en **deux** dimensions on peut prendre  $\mathbf{E} = \sigma \mathbf{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

❶  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{rot} \sigma \mathbf{rot} \phi = -\operatorname{div} \sigma \nabla \phi = 0$ , avec  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

❷  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = \operatorname{div} \sigma^{-1} \sigma \mathbf{rot} \phi = 0$

❖ On s'intéresse donc à résoudre le problème électrique

$(\mathcal{C}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$	$\uparrow \boldsymbol{\tau}$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$	

❖  $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$

❖  $g$  est défini par  $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{rot} \phi \cdot \boldsymbol{\tau}$  sur  $\partial\Omega$

# Passage aux équations stationnaires de Maxwell en 2d

❖ Lorsqu'on se trouve en **deux** dimensions on peut prendre  $\mathbf{E} = \sigma \operatorname{rot} \phi$  comme champ électrique, où l'opérateur **rot** est défini  $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})^t$ .

❶  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \sigma \operatorname{rot} \phi = -\operatorname{div} \sigma \nabla \phi = 0$ , avec  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

❷  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = \operatorname{div} \sigma^{-1} \sigma \operatorname{rot} \phi = 0$

❖ On s'intéresse donc à résoudre le problème électrique

$(\mathcal{C}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que
	$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$

$\Omega_2$ $\sigma_2 > 1$	$\Omega_1$ $\sigma_1 = 1$	$\uparrow \boldsymbol{\tau}$
$\Omega_3$ $\sigma_3 = 1$	$\Omega_4$ $\sigma_4 > 1$	

❖  $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$

❖  $g$  est défini par  $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma \operatorname{rot} \phi \cdot \boldsymbol{\tau}$  sur  $\partial\Omega$

**Remarque:**  $\mathbf{E} = \sigma \operatorname{rot} \phi$  et  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{E} \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ , avec  $0 < \lambda < 1/2$ .

# Multiplicateur de Lagrange

■ Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$ $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$ $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$
------------------------	--

# Multiplicateur de Lagrange

■ Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E}_{\text{sing}})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$ $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$ $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$
-------------------------------	--

# Multiplicateur de Lagrange

- Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma^{-1} \nabla p = 0 \quad (\Omega),$ $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$ $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g \quad (\partial\Omega).$
---	---



# Multiplicateur de Lagrange

- Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma^{-1} \nabla p &= 0 & (\Omega), \\ \operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} &= 0 & (\Omega), \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} &= g & (\partial\Omega). \end{aligned}$
---	--

- On passe à la formulation variationnelle dite *mixte*

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V})$	Trouver $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ telle que $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla p &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E} \cdot \nabla q &= 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$
--	---

# Multiplicateur de Lagrange

Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma^{-1} \nabla p &= 0 & (\Omega), \\ \operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} &= 0 & (\Omega), \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} &= g & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------------------	--

On passe à la formulation variationnelle dite *mixte*

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing, V})$	Trouver $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ telle que $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla p &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E} \cdot \nabla q &= 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$
---------------------------------------	---

Grâce à la séquence exacte,  $q \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \nabla q \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ , on a  $p \equiv 0$

# Multiplicateur de Lagrange

- ❖ Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma^{-1} \nabla p &= 0 & (\Omega), \\ \operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} &= 0 & (\Omega), \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} &= g & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------------------	--

- ❖ On passe à la formulation variationnelle dite *mixte*

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing,V})$	Trouver $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ telle que $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla p &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E} \cdot \nabla q &= 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$
--------------------------------------	---

- ❖ Grâce à la séquence exacte,  $q \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \nabla q \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ , on a  $p \equiv 0$

$\mathbf{E}$  solution de  $(\mathcal{E}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathbf{E}, 0)$  solution de  $(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing,V})$ .

# Multiplicateur de Lagrange

- ❖ Comment prendre en compte la contrainte  $\operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  ?

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que $\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma^{-1} \nabla p &= 0 & (\Omega), \\ \operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{E} &= 0 & (\Omega), \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} &= g & (\partial\Omega). \end{aligned}$
------------------------------------	--

- ❖ On passe à la formulation variationnelle dite *mixte*

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing,V})$	Trouver $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ telle que $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla p &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E} \cdot \nabla q &= 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$
--------------------------------------	---

- ❖ Grâce à la séquence exacte,  $q \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \nabla q \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ , on a  $p \equiv 0$

$\mathbf{E}$  solution de  $(\mathcal{E}_{sing}) \Leftrightarrow (\mathbf{E}, 0)$  solution de  $(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing,V})$ .

- ❖  $a(\cdot, \cdot) = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \cdot \operatorname{rot} \cdot$  est **coercive** sur  $\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega) : \operatorname{div} \sigma^{-1} \mathbf{v} = 0\}$  et  
 $b(\cdot, \cdot) = \int_{\Omega} \sigma^{-1} \cdot \cdot$  vérifie la **condition inf-sup**, donc  $(\mathcal{E} \mathcal{M}_{sing,V})$  est **bien posé**.

# Discrétisation

■ Soit  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$	Trouver $(\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0$ telle que $\mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = \Pi_h g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned}\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{rot } \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h &= 0 \quad \forall q_h \in V_h^0.\end{aligned}$
--	--

# Discrétisation

- Soit  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$	Trouver $(\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0$ telle que $\mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = \Pi_h g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned}\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{rot } \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h &= 0 \quad \forall q_h \in V_h^0.\end{aligned}$
--	--

- On prend l'espace des éléments finis d'arête de type Raviart-Thomas  $\mathcal{R}_k$ .

# Discrétisation

- Soit  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$	Trouver $(\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0$ telle que $\mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = \Pi_h g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned}\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{rot } \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h &= 0 \quad \forall q_h \in V_h^0.\end{aligned}$
--	--

- On prend l'espace des éléments finis d'arête de type Raviart-Thomas  $\mathcal{R}_k$ .
- Comme on a préservé la propriété de séquence exacte au niveau discret, on a alors  $p_h \equiv 0$

# Discrétisation

- Soit  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension finie

$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$	Trouver $(\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0$ telle que $\mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = \Pi_h g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned}\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{rot } \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h &= 0 \quad \forall q_h \in V_h^0.\end{aligned}$
--	--

- On prend l'espace des éléments finis d'arête de type Raviart-Thomas  $\mathcal{R}_k$ .
  - Comme on a préservé la propriété de séquence exacte au niveau discret, on a alors  $p_h \equiv 0$
  - $a$  est **coercive** sur l'espace discret et  $b$  vérifie la condition **inf-sup discrète** on peut donc établir que  $(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$  est bien posé



# Discrétisation

- Soit  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension finie

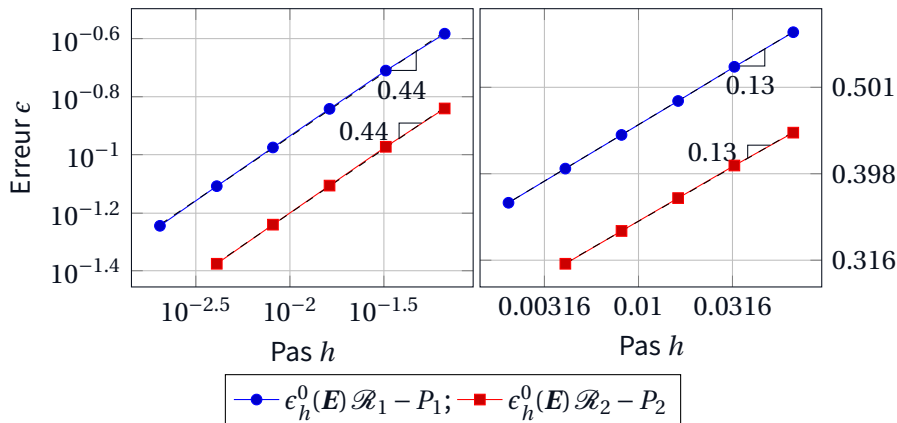
$(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$	Trouver $(\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0$ telle que $\mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = \Pi_h g(\partial\Omega)$ et $\begin{aligned}\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{rot } \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h &= 0 \quad \forall q_h \in V_h^0.\end{aligned}$
--	--

- On prend l'espace des éléments finis d'arête de type Raviart-Thomas  $\mathcal{R}_k$ .
  - Comme on a préservé la propriété de séquence exacte au niveau discret, on a alors  $p_h \equiv 0$
  - $a$  est **coercive** sur l'espace discret et  $b$  vérifie la condition **inf-sup discrète** on peut donc établir que  $(\mathcal{E} \mathcal{M}_{\text{sing}, V}^h)$  est bien posé

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)} \lesssim h^\lambda \quad \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim h^2$$

# Convergence des éléments finis d'arêtes (point selle)

Convergence avec  $\lambda = 0.45$     Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$$\epsilon_h^0(E) = \frac{\|E - E_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|E\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}$$

# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing, V}^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \boldsymbol{\nu}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h = 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing,V}^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \boldsymbol{\nu}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h = 0 \quad \forall \boldsymbol{\nu}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

- On va ici examiner le paramètre  $\alpha$  :

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing,V}^h$	Trouver $\mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h$ tel que $\mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega)$ et $\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0.$
--	--

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

- On va ici examiner le paramètre  $\alpha$  :

- On fixe le pas  $h$  et on varie  $\alpha$

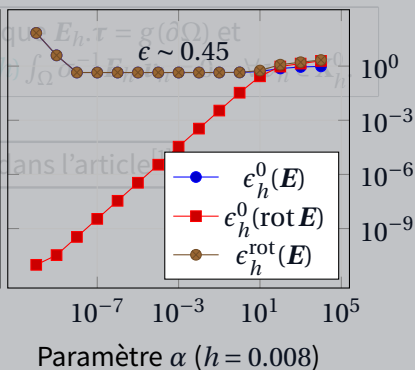
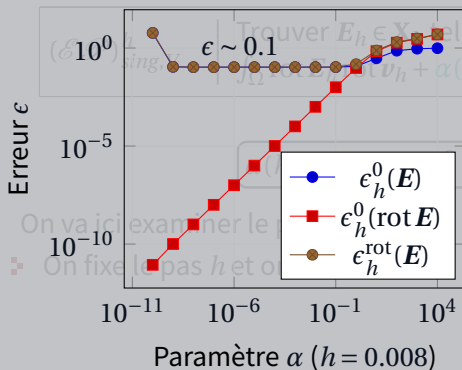
---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$$\epsilon_h^0(\text{rot } E) = \frac{\|\text{rot } E_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|E\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}}, \quad \epsilon_h^{\text{rot}}(E) = \frac{\|E - E_h\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}}{\|E\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}}$$

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing,V}^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

- On va ici examiner le paramètre  $\alpha$  :
  - On fixe le pas  $h$  et on varie  $\alpha$
  - On fixe le paramètre  $\alpha$  et on varie  $h$

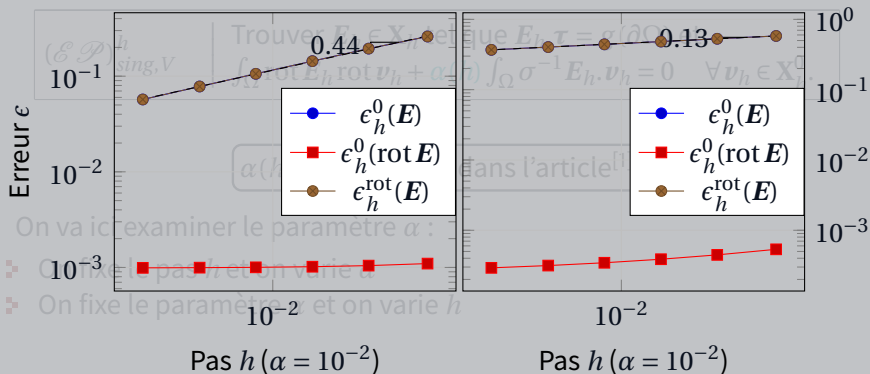
---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014



# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing, V}^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

- On va ici examiner le paramètre  $\alpha$  :
  - On fixe le pas  $h$  et on varie  $\alpha$
  - On fixe le paramètre  $\alpha$  et on varie  $h$
  - On prend  $\alpha = \alpha(h)$

---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing, V}^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

- On va ici examiner le paramètre  $\alpha$  :
  - On fixe le pas  $h$  et on varie  $\alpha$
  - On fixe le paramètre  $\alpha$  et on varie  $h$
  - On prend  $\alpha = \alpha(h)$ 
    - 1**  $\alpha = h^\lambda$ , où  $h = h_{max} = \max_i h_i$

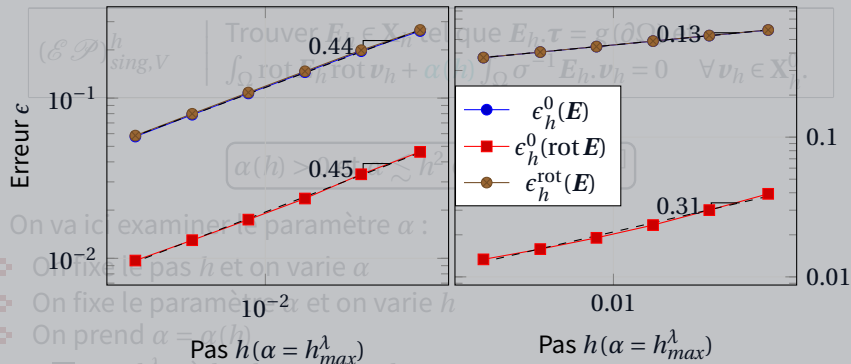
---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

- On passe à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E} \mathcal{P})_{sing,V}^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = g(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_h \text{ rot } \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

$$\alpha(h) > 0 \text{ et } \alpha \lesssim h^2 \text{ dans l'article}^{[1]}$$

- On va ici examiner le paramètre  $\alpha$  :
  - On fixe le pas  $h$  et on varie  $\alpha$
  - On fixe le paramètre  $\alpha$  et on varie  $h$
  - On prend  $\alpha = \alpha(h)$ 
    - $\alpha = h^\lambda$ , où  $h = h_{max} = \max_i h_i$
    - $\alpha = h_{min}^\lambda$ , où  $h_{min} = \min_i h_i$

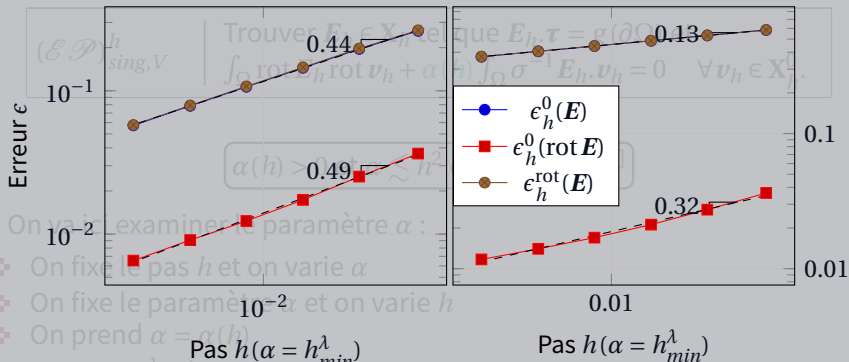
---

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Pénalisation

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



1  $\alpha = h^\lambda$ , où  $h = h_{max} = \max_i h_i$

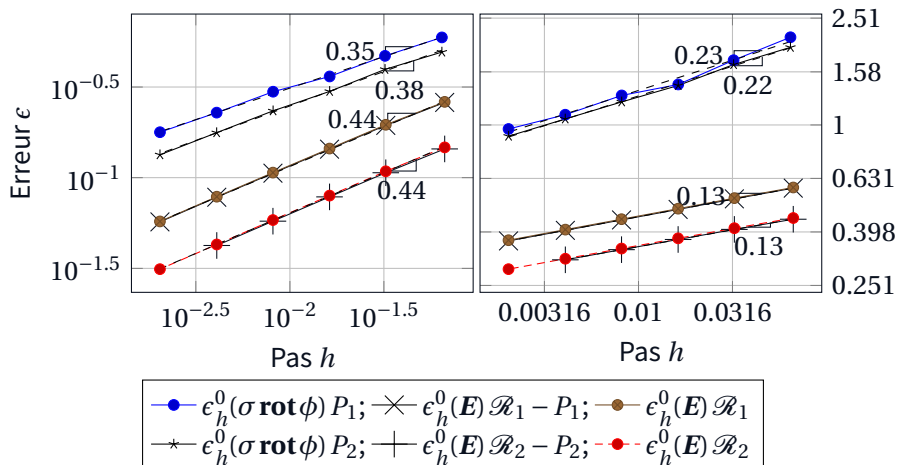
2  $\alpha = h_{min}^\lambda$ , où  $h_{min} = \min_i h_i$

[1] CIARLET, WU et ZOU, « Edge element methods for Maxwell's equations with strong convergence for Gauss' laws », 2014

# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation

DoF	$\mathcal{R}_1 - P_1$		CPU
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	
493	5,359	2.60 <sub>-1</sub>	0.014
1,993	22,309	1.94 <sub>-1</sub>	0.001
7,741	87,811	1.44 <sub>-1</sub>	0.006
30,633	349,869	1.06 <sub>-1</sub>	0.033
120,585	1,381,917	7.80 <sub>-2</sub>	0.158
483,725	5,553,227	5.70 <sub>-2</sub>	0.888

$$\frac{nnz}{dof} \approx 11.5 \quad \frac{dof(\mathcal{R}_1 - P_1)}{dof(\mathcal{R}_1)} \approx 1.33$$

DoF	$\mathcal{R}_2 - P_2$		CPU
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	
1,663	36,415	1.44 <sub>-1</sub>	0.002
6,853	152,965	1.06 <sub>-1</sub>	0.009
26,851	604,531	7.84 <sub>-2</sub>	0.042
106,733	2,413,645	5.75 <sub>-2</sub>	0.212
421,085	9,543,229	4.23 <sub>-2</sub>	0.993
1,691,115	38,369,659	-1.00 <sub>0</sub>	-1

$$\frac{nnz}{dof} \approx 22.5 \quad \frac{dof(\mathcal{R}_2 - P_2)}{dof(\mathcal{R}_2)} \approx 1.4$$

DoF	$\mathcal{R}_1$		CPU
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	
359	1,715	2.64 <sub>-1</sub>	0
1,474	7,210	1.97 <sub>-1</sub>	0
5,765	28,505	1.46 <sub>-1</sub>	0.002
22,894	113,830	1.07 <sub>-1</sub>	0.007
90,278	450,110	7.90 <sub>-2</sub>	0.038
362,473	1,809,805	5.77 <sub>-2</sub>	0.142

$$\frac{nnz}{dof} \approx 5$$

DoF	$\mathcal{R}_2$		CPU
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	
1,170	13,188	1.51 <sub>-1</sub>	0.001
4,860	55,608	1.11 <sub>-1</sub>	0.002
19,110	220,140	8.14 <sub>-2</sub>	0.007
76,100	879,688	5.96 <sub>-2</sub>	0.026
300,500	3,479,656	4.38 <sub>-2</sub>	0.123
1,207,390	13,993,436	3.20 <sub>-2</sub>	0.53

$$\frac{nnz}{dof} \approx 11.5$$

## Résumé 2d

- 1 Solutions singulières  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega)$  et  $E \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1/2$



## Résumé 2d

- 1 Solutions singulières  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1/2$
- 2 Pour  $\phi_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $H^1$  et  $2\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$  en utilisant les éléments finis nodaux

## Résumé 2d

- 1 Solutions singulières  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1/2$
- 2 Pour  $\phi_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $H^1$  et  $2\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$  en utilisant les éléments finis nodaux
- 3 Pour  $\mathbf{E}_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$  en utilisant les éléments finis d'arêtes

## Résumé 2d

- 1 Solutions singulières  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1/2$
- 2 Pour  $\phi_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $H^1$  et  $2\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$  en utilisant les éléments finis nodaux
- 3 Pour  $\mathbf{E}_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$  en utilisant les éléments finis d'arêtes

Multiplicateur de Lagrange  
 $\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$

Pénalisation  
 $\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$ ,

$$\alpha \lesssim h_{\min}^\lambda$$

## Résumé 2d

- 1 Solutions singulières  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1/2$
- 2 Pour  $\phi_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $H^1$  et  $2\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$  en utilisant les éléments finis nodaux
- 3 Pour  $\mathbf{E}_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$  en utilisant les éléments finis d'arêtes

Multiplicateur de Lagrange

$\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$

Pénalisation

$\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$ ,  $\alpha \lesssim h_{\min}^\lambda$

erreurs identiques

## Résumé 2d

- 1 Solutions singulières  $\phi \in H^{1+\lambda}(\Omega)$  et  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^\lambda(\Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1/2$
- 2 Pour  $\phi_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $H^1$  et  $2\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$  en utilisant les éléments finis nodaux
- 3 Pour  $\mathbf{E}_h$  : ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$  en utilisant les éléments finis d'arêtes

Multiplicateur de Lagrange

$\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$

Pénalisation

$\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$ ,  $\alpha \lesssim h_{\min}^\lambda$

erreurs identiques

système de point selle

taille plus gros (multiplicateur)

système auto-adjoint et coercif

pas besoin de multiplicateur

## Section 2

# Equations de Maxwell en 3d avec une solution singulière

# Equations stationnaires de Maxwell en 3d

- On s'intéresse à résoudre le problème dans  $\Omega = \Omega_{2d} \times ]0, a[, a > 0$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

# Equations stationnaires de Maxwell en 3d

On s'intéresse à résoudre le problème dans  $\Omega = \Omega_{2d} \times ]0, a[$ ,  $a > 0$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

$\rho \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  à valeurs tangentielles



# Equations stationnaires de Maxwell en 3d

On s'intéresse à résoudre le problème dans  $\Omega = \Omega_{2d} \times ]0, a[, a > 0$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

❖  $\rho \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  à valeurs tangentielles

❖  $\mathbf{E} = \nabla \Psi$ , où  $\Psi = \Phi_{sing}(r, \theta) f(z)$  avec  $f(z) = \sin(\frac{2\pi}{a} z)$

# Equations stationnaires de Maxwell en 3d

On s'intéresse à résoudre le problème dans  $\Omega = \Omega_{2d} \times ]0, a[, a > 0$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

- ❖  $\rho \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  à valeurs tangentielles
- ❖  $\mathbf{E} = \nabla \Psi$ , où  $\Psi = \Phi_{sing}(r, \theta) f(z)$  avec  $f(z) = \sin(\frac{2\pi}{a} z)$
- ❖  $\rho = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \underbrace{f \operatorname{div}_{2d} \varepsilon \nabla_{2d} \Phi_{sing}}_{=0} + \varepsilon \Phi_{sing} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\varepsilon \Phi_{sing} (\frac{2\pi}{a})^2 \sin(\frac{2\pi}{a} z)$

# Equations stationnaires de Maxwell en 3d

On s'intéresse à résoudre le problème dans  $\Omega = \Omega_{2d} \times ]0, a[, a > 0$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

- ❖  $\rho \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  à valeurs tangentielles
- ❖  $\mathbf{E} = \nabla \Psi$ , où  $\Psi = \Phi_{sing}(r, \theta) f(z)$  avec  $f(z) = \sin(\frac{2\pi}{a} z)$
- ❖  $\rho = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \underbrace{f \operatorname{div}_{2d} \varepsilon \nabla_{2d} \Phi_{sing}}_{=0} + \varepsilon \Phi_{sing} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\varepsilon \Phi_{sing} (\frac{2\pi}{a})^2 \sin(\frac{2\pi}{a} z)$
- ❖  $\mathbf{g}$  est défini par  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$

# Equations stationnaires de Maxwell en 3d

On s'intéresse à résoudre le problème dans  $\Omega = \Omega_{2d} \times ]0, a[, a > 0$

$(\mathcal{C}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

- ❖  $\rho \in L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  à valeurs tangentielles
- ❖  $\mathbf{E} = \nabla \Psi$ , où  $\Psi = \Phi_{sing}(r, \theta) f(z)$  avec  $f(z) = \sin(\frac{2\pi}{a} z)$
- ❖  $\rho = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = f \underbrace{\operatorname{div}_{2d} \varepsilon \nabla_{2d} \Phi_{sing}}_{=0} + \varepsilon \Phi_{sing} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\varepsilon \Phi_{sing} (\frac{2\pi}{a})^2 \sin(\frac{2\pi}{a} z)$
- ❖  $\mathbf{g}$  est défini par  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$
- ❖  $\mathbf{rot E} = 0$  dans  $\Omega$

# Multiplicateur de Lagrange

- On passe directement à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E}\mathcal{M}_V^h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0 \text{ tel que } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h = - \int_{\Omega} \rho q_h \quad \forall q_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

# Multiplicateur de Lagrange

- On passe directement à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E}\mathcal{M}_V^h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0 \text{ tel que } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h = - \int_{\Omega} \rho q_h \quad \forall q_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

- $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension fini et  $\mathbf{X}_h^0 = \mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

# Multiplicateur de Lagrange

- On passe directement à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{EM}_V^h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0 \text{ tel que } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h = - \int_{\Omega} \rho q_h \quad \forall q_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

- $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension fini et  $\mathbf{X}_h^0 = \mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$
- $V_h \subset H^1(\Omega)$  un sous-espace de dimension fini et  $V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega)$

# Multiplicateur de Lagrange

- On passe directement à la formulation variationnelle discrète

$$(\mathcal{E}\mathcal{M}_V^h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times V_h^0 \text{ tel que } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v}_h \cdot \nabla p_h = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0, \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla q_h = - \int_{\Omega} \rho q_h \quad \forall q_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

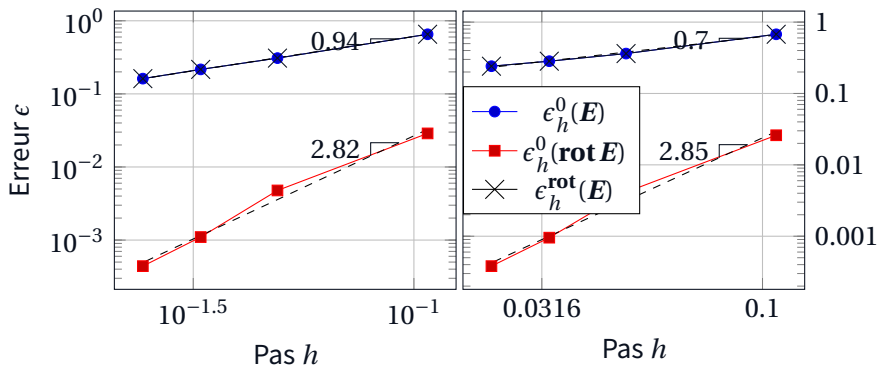
- $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  un sous-espace de dimension fini et  $\mathbf{X}_h^0 = \mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$
- $V_h \subset H^1(\Omega)$  un sous-espace de dimension fini et  $V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega)$
- On prend les éléments finis d'arêtes de type Nédélec  $\mathcal{N}_k$  comme  $\mathbf{X}_h$  et les éléments finis nodaux de type Lagrange  $P_k$  comme  $V_h$



# Convergence avec $\mathcal{N}_1 - P_1$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

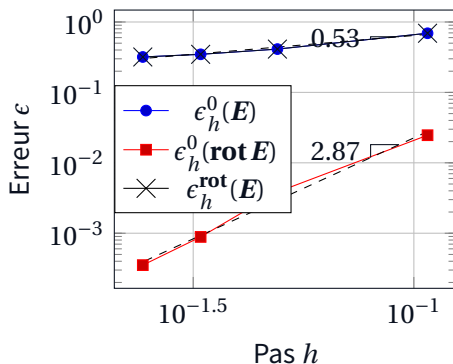
Convergence avec  $\lambda = 0.15$



Ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $L^2$  et  $H(\text{rot})$

# Convergence avec $\mathcal{N}_1 - P_1$

Convergence avec  $\lambda = 0.05$



Ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{H}(\text{rot})$

# Problème magnétostatique

On a pris le gradient  $\nabla\Psi$  comme  $\mathbf{E}$  dans  $(\mathcal{E}_{sing})$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

# Problème magnétostatique

- On a pris le gradient  $\nabla\Psi$  comme  $\mathbf{E}$  dans  $(\mathcal{E}_{sing})$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

- On formule un problème magnétostatique pour le potentiel  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$

$(\mathcal{A}_{sing})$	Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} = 0 \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (\Omega),$
	$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

# Problème magnétostatique

- On a pris le gradient  $\nabla\Psi$  comme  $\mathbf{E}$  dans  $(\mathcal{E}_{sing})$

$(\mathcal{E}_{sing})$	Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot rot E} = 0 \quad (\Omega),$
	$\text{div } \varepsilon \mathbf{E} = \rho \quad (\Omega),$
	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

- On formule un problème magnétostatique pour le potentiel  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{rot A} = \mathbf{B}$

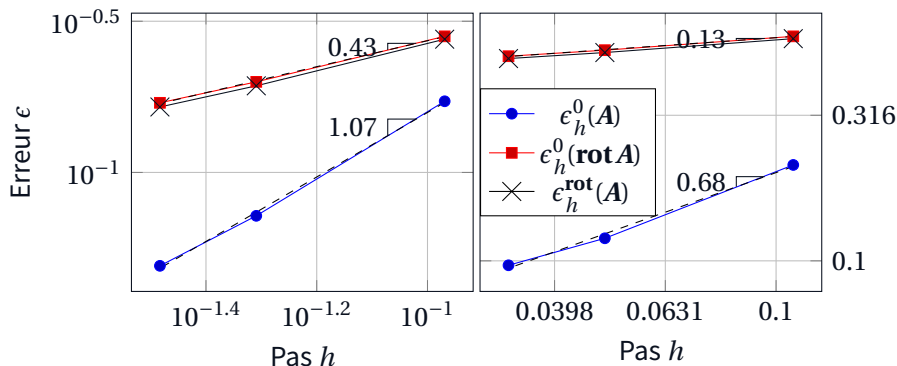
$(\mathcal{A}_{sing})$	Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que
	$\mathbf{rot } \mu^{-1} \mathbf{rot A} = 0 \quad (\Omega),$
	$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (\Omega),$
	$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad (\partial\Omega).$

❖  $\mathbf{A} = (0, 0, \Phi_{sing})^t, \quad \mathbf{rot A} = \left( \frac{\partial \Phi_{sing}}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi_{sing}}{\partial x}, 0 \right)^t \neq 0$

# Convergence avec $\mathcal{N}_1 - P_1$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$

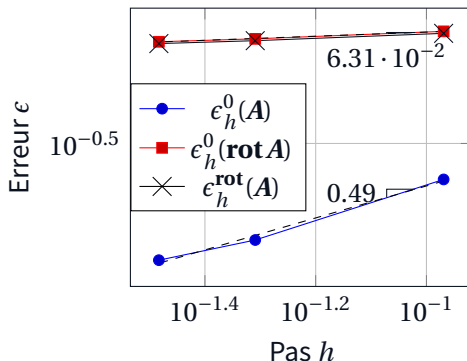


Ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$

Ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$

# Convergence avec $\mathcal{N}_1 - P_1$

Convergence avec  $\lambda = 0.05$



Ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$   
Ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$

# Pénalisation

- La démarche est un peu différente. On passe à l'approximation suivante

$$(\mathcal{E} \mathcal{P}_V^h) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = \alpha(h) \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \chi_h \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$



# Pénalisation

- La démarche est un peu différente. On passe à l'approximation suivante

$$(\mathcal{E} \mathcal{P}_V^h) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = \alpha(h) \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \chi_h \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

- $\chi_h$  est la solution du problème

$$(\mathcal{X}_V^h) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi_h \in V_h^0 \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \chi_h \cdot \nabla \psi_h = - \int_{\Omega} \rho \psi_h \quad \forall \psi_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

# Pénalisation

- La démarche est un peu différente. On passe à l'approximation suivante

$$(\mathcal{E} \mathcal{P}_V^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h \text{ tel que } \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} = \Pi_h \mathbf{g}(\partial\Omega) \text{ et} \\ \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}_h + \alpha(h) \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{v}_h = \alpha(h) \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \chi_h \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^0. \end{array} \right.$$

- $\chi_h$  est la solution du problème

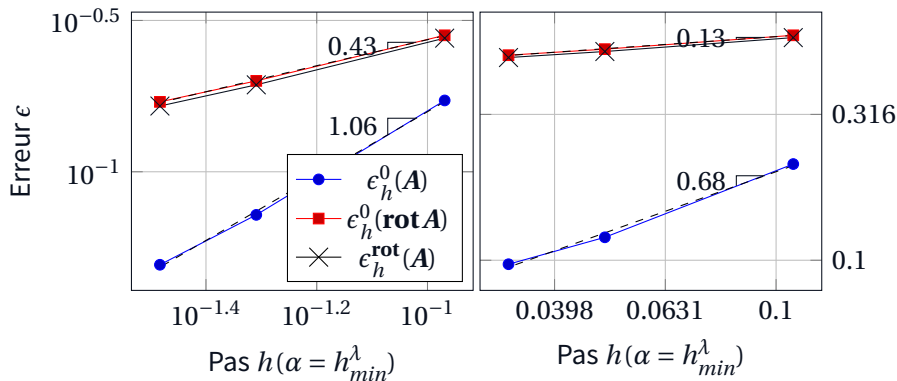
$$(\mathcal{X}_V^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi_h \in V_h^0 \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \chi_h \cdot \nabla \psi_h = - \int_{\Omega} \rho \psi_h \quad \forall \psi_h \in V_h^0. \end{array} \right.$$

- Comme d'habitude, on prend les éléments finis d'arêtes de type Nédélec  $\mathcal{N}_k$  comme  $\mathbf{X}_h$  et les éléments finis nodaux de type Lagrange  $P_k$  comme  $V_h$

# Convergence avec $\mathcal{N}_1$ et $\alpha = h_{min}^\lambda$

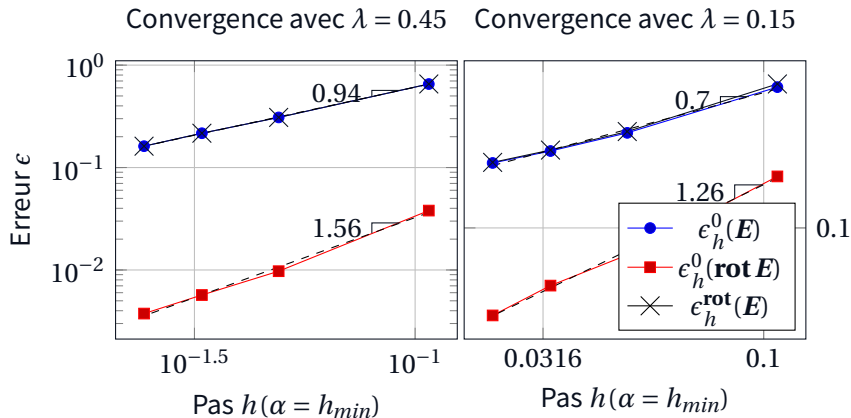
Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$\alpha = h_{min}^\lambda$  est suffisant. Aucune diminution n'améliore l'erreur  
 Ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\mathbf{rot})$  et  
 ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$ .

## Convergence avec $\mathcal{N}_1$ et $\alpha = h_{min}$

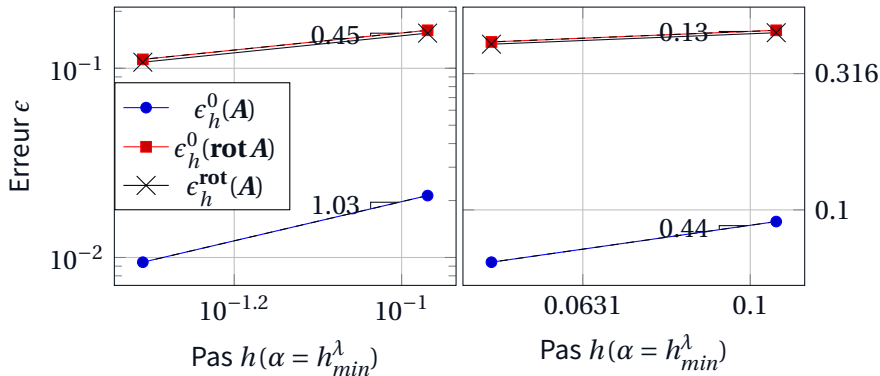


$\alpha = h_{min}$  est suffisant. Aucune diminution n'améliore l'erreur.  
Ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$ .

# Convergence avec $\mathcal{N}_2$ et $\alpha = h_{min}^\lambda$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$\alpha = h_{min}^\lambda$  est suffisant. Aucune diminution n'améliore l'erreur.

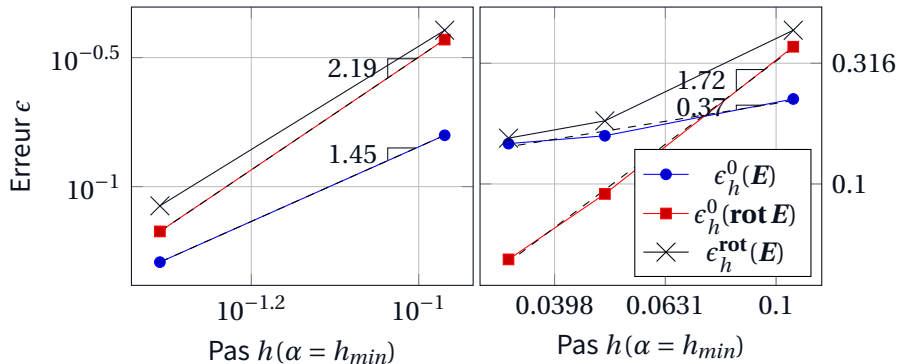
Ordre de convergence  $\lambda$  en norme  $\mathbf{H}(\text{rot})$  et

ordre de convergence  $1/2 + \lambda$  en norme  $\mathbf{L}^2$

# Convergence avec $\mathcal{N}_2$ et $\alpha = h_{min}$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

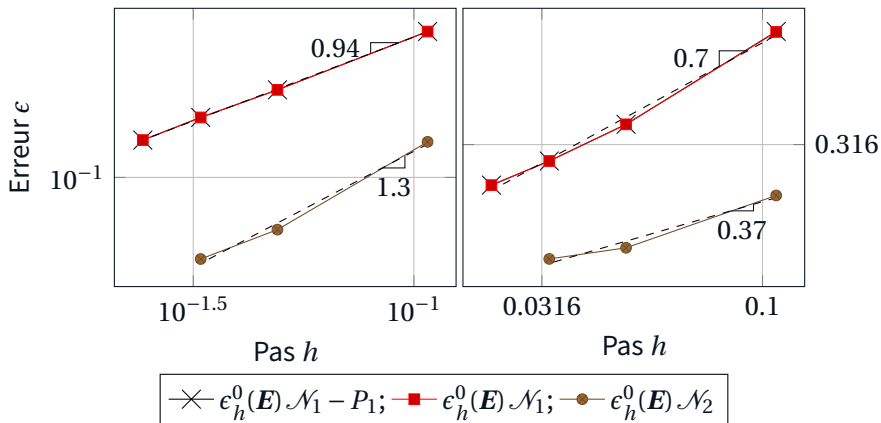
Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$\alpha = h_{min}$  se révèle meilleur.

# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation $E_h$

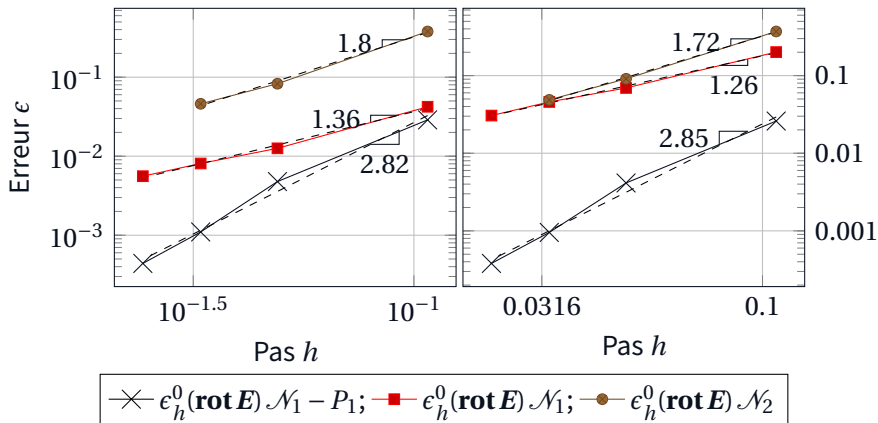
Convergence avec  $\lambda = 0.45$     Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$$\alpha = h_{min}$$

# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation $\mathbf{rot} E_h$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$     Convergence avec  $\lambda = 0.15$

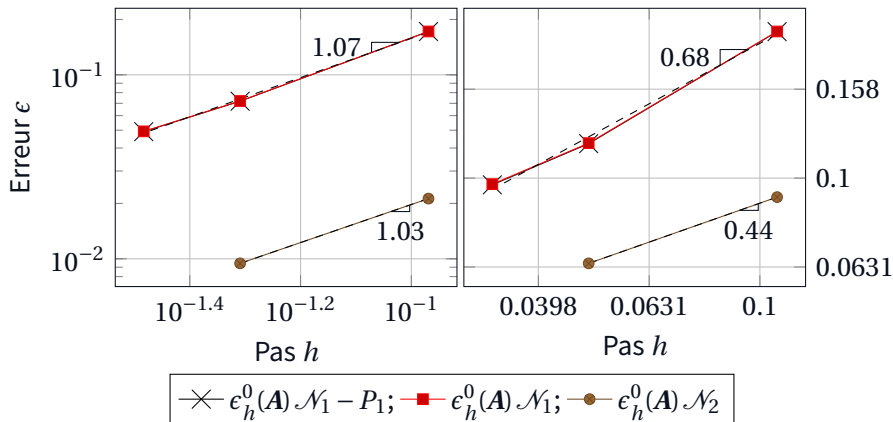


$$\alpha = h_{min}$$



# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation $\mathbf{A}_h$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$     Convergence avec  $\lambda = 0.15$

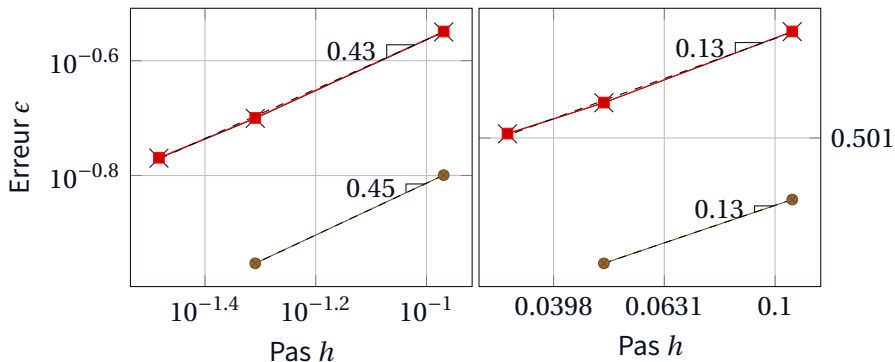


$$\alpha = h_{min}^{\lambda}$$

# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation $\mathbf{rot} A_h$

Convergence avec  $\lambda = 0.45$

Convergence avec  $\lambda = 0.15$



$\times \epsilon_h^0(\mathbf{rot} A) \mathcal{N}_1 - P_1$ ;  $\square \epsilon_h^0(\mathbf{rot} A) \mathcal{N}_1$ ;  $\bullet \epsilon_h^0(\mathbf{rot} A) \mathcal{N}_2$

$$\alpha = h_{min}^\lambda$$

# Multiplicateur de Lagrange vs. Pénalisation pour $E_h$

DoF	$\mathcal{N}_1 - P_1$		
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU
1,626	34,652	6.55 <sub>-1</sub>	0.003
14,331	340,239	3.09 <sub>-1</sub>	0.055
45,383	1,112,348	2.16 <sub>-1</sub>	0.339
109,282	2,724,905	1.62 <sub>-1</sub>	4.165

$$\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 24.5 \quad \frac{\text{dof}(\mathcal{R}_1 - P_1)}{\text{dof}(\mathcal{R}_1)} \approx 1.3$$

DoF	$\mathcal{N}_1$		
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU
1,186	16,672	6.55 <sub>-1</sub>	0.001
10,887	167,427	3.09 <sub>-1</sub>	0.039
34,913	550,703	2.16 <sub>-1</sub>	0.186
84,624	1,353,504	1.62 <sub>-1</sub>	0.756

$$\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 15$$

DoF	$\mathcal{N}_2$		
	NNZ	$\epsilon_h^{\text{rot}}(E)$	CPU
5,920	232,568	4.10 <sub>-1</sub>	0.012
57,030	2,381,820	9.71 <sub>-2</sub>	0.363
185,470	7,874,420	5.78 <sub>-2</sub>	146.602

$$\frac{\text{nnz}}{\text{dof}} \approx 40$$

# Résumé en 3d

	en norme	$\mathcal{N}_1 - P_1$	$\mathcal{N}_1$	$\mathcal{N}_2$
Électro ( $\alpha = h_{min}$ )	$\mathbf{L}^2$	$1/2 + \lambda$	$1/2 + \lambda$	
( $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ )	$\mathbf{H}(\mathbf{rot})$	$1/2 + \lambda$	$1/2 + \lambda$	
Magnéto ( $\alpha = h_{min}^\lambda$ )	$\mathbf{L}^2$	$1/2 + \lambda$	$1/2 + \lambda$	$1/2 + \lambda$
( $\mathbf{rot} \mathbf{A} \neq 0$ )	$\mathbf{H}(\mathbf{rot})$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$

## Section 3

### Problème électrique aux valeurs propres

# Problème aux valeurs propres

- On s'intéresse à résoudre un problème dans un domaine borné  $\Omega$

$(\mathcal{E}_\lambda)$	Trouver $(E \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que
	$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} E = \lambda \varepsilon E \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon E = 0 \quad (\Omega).$

# Problème aux valeurs propres

On s'intéresse à résoudre un problème dans un domaine borné  $\Omega$

$(\mathcal{E}_\lambda)$	Trouver $(\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que
	$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \lambda \varepsilon \mathbf{E} \quad (\Omega),$
	$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega).$

$0 < \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max} < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} < \infty$

# Problème aux valeurs propres

- On s'intéresse à résoudre un problème dans un domaine borné  $\Omega$

$(\mathcal{E}_\lambda)$	Trouver $(\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \lambda \varepsilon \mathbf{E} \quad (\Omega),$ $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega).$
-------------------------	---

❖  $0 < \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max} < \infty$  et  $0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} < \infty$

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{E}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega),$ $\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).$
-----------------------------	---



# Problème aux valeurs propres

- On s'intéresse à résoudre un problème dans un domaine borné  $\Omega$

$(\mathcal{E}_\lambda)$	Trouver $(\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \lambda \varepsilon \mathbf{E} \quad (\Omega),$ $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (\Omega).$
-------------------------	---

■  $0 < \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max} < \infty$  et  $0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} < \infty$

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{E}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega),$ $\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).$
-----------------------------	---

Est-ce que  $\lambda = 0$  est une valeur propre du problème  $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$  ?

## Décomposition de l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

✚ Soit  $\lambda = 0$ . Si  $\mathbf{E}$  est la fonction propre du  $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$ , on a  $\mathbf{E} = \nabla\phi$ ,  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

$(\mathcal{E}_{V,\lambda})$	$\left  \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$
-----------------------------	--

## Décomposition de l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

- ❖ Soit  $\lambda = 0$ . Si  $\mathbf{E}$  est la fonction propre du  $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$ , on a  $\mathbf{E} = \nabla\phi$ ,  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

$(\mathcal{E}_{V,\lambda})$	$\left  \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$
-----------------------------	--

- ❖  $\nabla H_0^1(\Omega) = \{\nabla p \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) : p \in H_0^1(\Omega)\}$  contient les fonctions propres

## Décomposition de l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

- Soit  $\lambda = 0$ . Si  $\mathbf{E}$  est la fonction propre du  $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$ , on a  $\mathbf{E} = \nabla\phi$ ,  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

$(\mathcal{E}_{V,\lambda})$	$\left  \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$
-----------------------------	--

- $\nabla H_0^1(\Omega) = \{\nabla p \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) : p \in H_0^1(\Omega)\}$  contient les fonctions propres
- Mais, à cause de contrainte sur  $\mathbf{E} = \nabla\phi : \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \forall q \in H_0^1(\Omega)$  on a forcément  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$ . Il n'y a donc pas de valeur propre nulle !

## Décomposition de l'espace $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$

❏ Soit  $\lambda = 0$ . Si  $\mathbf{E}$  est la fonction propre du  $(\mathcal{E}_{V,\lambda})$ , on a  $\mathbf{E} = \nabla\phi$ ,  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

$(\mathcal{E}_{V,\lambda})$	$\left  \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{E} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega), \\ \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$
-----------------------------	--

❏  $\nabla H_0^1(\Omega) = \{\nabla p \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) : p \in H_0^1(\Omega)\}$  contient les fonctions propres

❏ Mais, à cause de contrainte sur  $\mathbf{E} = \nabla\phi$  :  $\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla q = 0 \forall q \in H_0^1(\Omega)$  on a forcément  $\mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$ . Il n'y a donc pas de valeur propre nulle !

❏ On décompose l'espace  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$  à deux sous-espace orthogonaux  $\nabla H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{U}_0$  ou bien

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) = \nabla H_0^1(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{U}_0,$$

où  $\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) : \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla q = 0 \forall q \in H_0^1(\Omega)\}$  l'espace à divergence nulle.

# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $E = \nabla\phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}E = \mathbf{u}$ .

# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $\mathbf{E} = \nabla \phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{E} = \mathbf{u}$ .

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{U}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{u} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_0,$
-----------------------------	--

# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $\mathbf{E} = \nabla\phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} = \mathbf{u}$ .

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{U}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{u} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_0,$
-----------------------------	--

ou bien

$(\mathcal{PE}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{E}, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \neq 0$ et $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \cdot \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega).$
------------------------------	--



# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $\mathbf{E} = \nabla \phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{E} = \mathbf{u}$ .

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{U}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{u} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_0,$
-----------------------------	--

ou bien

$(\mathcal{PE}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{E}, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{E} \neq 0$ et $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{E} \cdot \mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega).$
------------------------------	---

- L'avantage de cette formulation est

# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $\mathbf{E} = \nabla\phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} = \mathbf{u}$ .

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{U}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{u} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_0,$
-----------------------------	--

ou bien

$(\mathcal{PE}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{E}, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \neq 0$ et $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \cdot \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega).$
------------------------------	--

- L'avantage de cette formulation est
  - à supprimer toutes les valeurs propres nulles

# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $\mathbf{E} = \nabla\phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} = \mathbf{u}$ .

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{U}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{u} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_0,$
-----------------------------	--

ou bien

$(\mathcal{PE}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{E}, \lambda) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \neq 0$ et $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{E} \cdot \mathcal{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega).$
------------------------------	--

- L'avantage de cette formulation est
  - à supprimer toutes les valeurs propres nulles
  - à éviter la contrainte sur la divergence

# Opérateur de projection

- On définit un opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbf{U}_0$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_0.$$

Soit  $\mathbf{E} = \nabla \phi + \mathbf{u}$  avec  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_0$ , donc  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}} \mathbf{E} = \mathbf{u}$ .

- On passe à la formulation variationnelle

$(\mathcal{U}_{V,\lambda})$	Trouver $(\mathbf{u} \neq 0, \lambda) \in \mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_0,$
-----------------------------	--

ou bien

$(\mathcal{P}\mathcal{E}_{V,\lambda}^h)$	Trouver $(\mathbf{E}_h, \lambda_h) \in \mathbf{X}_h^0 \times \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}^h \mathbf{E}_h \neq 0$ et $\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}^h \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{rot} \mathcal{P}_{\mathbf{U}}^h \mathbf{v}_h = \lambda_h \int_{\Omega} \varepsilon \mathcal{P}_{\mathbf{U}}^h \mathbf{E}_h \cdot \mathcal{P}_{\mathbf{U}}^h \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_0^h.$
--	---

- L'avantage de cette formulation est

- à supprimer toutes les valeurs propres nulles
- à éviter la contrainte sur la divergence

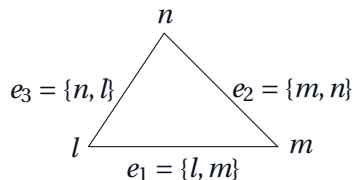
# Forme matricielle d'opérateur de projection

■ On définit un opérateur frontière  $\partial$

$$\partial e_1 = -l + m,$$

$$\partial e_2 = -m + n,$$

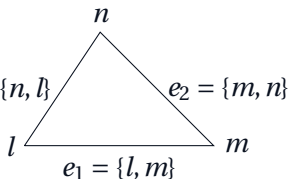
$$\partial e_3 = -n + l,$$



# Forme matricielle d'opérateur de projection

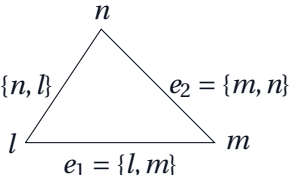
On définit un opérateur frontière  $\partial$

$$\begin{aligned}\partial e_1 &= -l + m, \\ \partial e_2 &= -m + n, \\ \partial e_3 &= -n + l,\end{aligned}\quad \mathbb{G} = (\mathbb{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} & l & m & n \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$



# Forme matricielle d'opérateur de projection

On définit un opérateur frontière  $\partial$

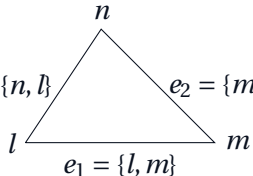
$$\begin{aligned}\partial e_1 &= -l + m, \\ \partial e_2 &= -m + n, \\ \partial e_3 &= -n + l,\end{aligned}\quad \mathbb{G} = (\mathbb{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} & l & m & n \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$


The diagram shows a triangle with vertices labeled  $l$ ,  $m$ , and  $n$ . The edges are labeled as follows: the bottom edge is  $e_1 = \{l, m\}$ , the right edge is  $e_2 = \{m, n\}$ , and the left edge is  $e_3 = \{n, l\}$ .

Soit  $\{w^e\}_e$  une base de  $\mathbf{X}_h$  et  $\{w^n\}_n$  une base de  $\mathbf{V}_h$ .

# Forme matricielle d'opérateur de projection

On définit un opérateur frontière  $\partial$

$$\begin{aligned} \partial e_1 &= -l + m, \\ \partial e_2 &= -m + n, \\ \partial e_3 &= -n + l, \end{aligned} \quad \mathbb{G} = (\mathbb{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} & l & m & n \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$


The diagram shows a triangle with vertices labeled  $l$ ,  $m$ , and  $n$ . The edges are labeled as follows: the bottom edge is  $e_1 = \{l, m\}$ , the right edge is  $e_2 = \{m, n\}$ , and the left edge is  $e_3 = \{n, l\}$ .

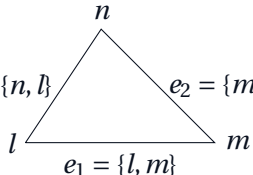
Soit  $\{w^e\}_e$  une base de  $\mathbf{X}_h$  et  $\{w^n\}_n$  une base de  $\mathbf{V}_h$ .

pour  $\mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h$  on a  $\mathbf{E}_h = \sum_e M_e(\mathbf{E}_h) w^e$ , où  $M_e(\mathbf{E}_h) = \int_e \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{t}$



# Forme matricielle d'opérateur de projection

On définit un opérateur frontière  $\partial$

$$\begin{aligned} \partial e_1 &= -l + m, \\ \partial e_2 &= -m + n, \\ \partial e_3 &= -n + l, \end{aligned} \quad \mathbb{G} = (\mathbb{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} & l & m & n \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$


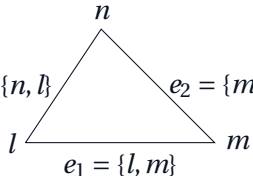
The diagram shows a triangle with vertices labeled  $l$ ,  $m$ , and  $n$ . The edges are labeled as follows: the bottom edge is  $e_1 = \{l, m\}$ , the right edge is  $e_2 = \{m, n\}$ , and the left edge is  $e_3 = \{n, l\}$ .

Soit  $\{w^e\}_e$  une base de  $\mathbf{X}_h$  et  $\{w^n\}_n$  une base de  $V_h$ .

- pour  $E_h \in \mathbf{X}_h$  on a  $E_h = \sum_e M_e(E_h) w^e$ , où  $M_e(E_h) = \int_e E_h \cdot \mathbf{t}$
- pour  $\phi_h \in V_h$  on a  $\phi_h = \sum_n \alpha_n w^n$ , où  $\alpha_n = \phi_h(n)$

# Forme matricielle d'opérateur de projection

On définit un opérateur frontière  $\partial$

$$\begin{aligned} \partial e_1 &= -l + m, \\ \partial e_2 &= -m + n, \\ \partial e_3 &= -n + l, \end{aligned} \quad \mathbb{G} = (\mathbb{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} l & m & n \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$


The diagram shows a triangle with vertices labeled  $l$ ,  $m$ , and  $n$ . The edges are labeled as follows: the bottom edge is  $e_1 = \{l, m\}$ , the right edge is  $e_2 = \{m, n\}$ , and the left edge is  $e_3 = \{n, l\}$ .

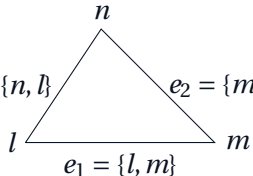
Soit  $\{w^e\}_e$  une base de  $\mathbf{X}_h$  et  $\{w^n\}_n$  une base de  $V_h$ .

- pour  $\mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h$  on a  $\mathbf{E}_h = \sum_e M_e(\mathbf{E}_h) w^e$ , où  $M_e(\mathbf{E}_h) = \int_e \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{t}$
- pour  $\phi_h \in V_h$  on a  $\phi_h = \sum_n \alpha_n w^n$ , où  $\alpha_n = \phi_h(n)$

$$\sum_e M_e(\mathbf{E}_h) w^e = \sum_n \alpha_n \nabla w^n + \sum_e M_e(\mathbf{u}_h) w^e.$$

# Forme matricielle d'opérateur de projection

On définit un opérateur frontière  $\partial$

$$\begin{aligned} \partial e_1 &= -l + m, \\ \partial e_2 &= -m + n, \\ \partial e_3 &= -n + l, \end{aligned} \quad \mathbb{G} = (\mathbb{G}_{e,n}) = \begin{pmatrix} l & m & n \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$


The diagram shows a triangle with vertices labeled  $l$ ,  $m$ , and  $n$ . The edges are labeled as follows: the bottom edge is  $e_1 = \{l, m\}$ , the right edge is  $e_2 = \{m, n\}$ , and the left edge is  $e_3 = \{n, l\}$ .

Soit  $\{w^e\}_e$  une base de  $\mathbf{X}_h$  et  $\{w^n\}_n$  une base de  $V_h$ .

pour  $\mathbf{E}_h \in \mathbf{X}_h$  on a  $\mathbf{E}_h = \sum_e M_e(\mathbf{E}_h) w^e$ , où  $M_e(\mathbf{E}_h) = \int_e \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{t}$

pour  $\phi_h \in V_h$  on a  $\phi_h = \sum_n \alpha_n w^n$ , où  $\alpha_n = \phi_h(n)$

$$\sum_e M_e(\mathbf{E}_h) w^e = \boxed{\sum_n \alpha_n \nabla w^n} + \sum_e M_e(\mathbf{u}_h) w^e.$$

On peut montrer<sup>[3]</sup> que  $\boxed{\nabla w^n = \sum_e \mathbb{G}_{e,n} w^e}$

[3] RAPETTI et BOSSAVIT, « Whitney Forms of Higher Degree », 2009

# Forme matricielle d'opérateur de projection

■ En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G}\vec{\alpha} + \vec{U}$$

# Forme matricielle d'opérateur de projection

- En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G}\vec{\alpha} + \vec{U}$$

- On effectue le produit scalaire de  $\mathbf{E}_h = \nabla\phi_h + \mathbf{u}_h$  par  $\nabla w^n \in \nabla V_h$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla w^n = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla\phi_h \cdot \nabla w^n$$

# Forme matricielle d'opérateur de projection

- En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G}\vec{\alpha} + \vec{U}$$

- On effectue le produit scalaire de  $\mathbf{E}_h = \nabla\phi_h + \mathbf{u}_h$  par  $\nabla w^n \in \nabla V_h$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla w^n = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla\phi_h \cdot \nabla w^n$$

$$\mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E} = \mathbb{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha}$$

# Forme matricielle d'opérateur de projection

- En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G} \vec{\alpha} + \vec{U}$$

- On effectue le produit scalaire de  $\mathbf{E}_h = \nabla \phi_h + \mathbf{u}_h$  par  $\nabla w^n \in \nabla V_h$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla w^n = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \phi_h \cdot \nabla w^n$$

$$\mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E} = \mathbb{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha}$$

- $\mathbb{M}_a^\varepsilon$  matrice de masse d'arêtes :  $(\mathbb{M}_a^\varepsilon)_{e',e} = \int_{\Omega} \varepsilon w^e w^{e'}$

# Forme matricielle d'opérateur de projection

- En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G}\vec{\alpha} + \vec{U}$$

- On effectue le produit scalaire de  $\mathbf{E}_h = \nabla\phi_h + \mathbf{u}_h$  par  $\nabla w^n \in \nabla V_h$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla w^n = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla\phi_h \cdot \nabla w^n$$

$$\mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E} = \mathbb{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha}$$

- $\mathbb{M}_a^\varepsilon$  matrice de masse d'arêtes :  $(\mathbb{M}_a^\varepsilon)_{e',e} = \int_{\Omega} \varepsilon w^e w^{e'}$
- $\mathbb{K}_s^\varepsilon$  matrice de rigidité nodale :  $(\mathbb{K}_s^\varepsilon)_{n,m} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla w^m \cdot \nabla w^n$



# Forme matricielle d'opérateur de projection

- En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G}\vec{\alpha} + \vec{U}$$

- On effectue le produit scalaire de  $\mathbf{E}_h = \nabla\phi_h + \mathbf{u}_h$  par  $\nabla w^n \in \nabla V_h$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla w^n = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla\phi_h \cdot \nabla w^n$$

$$\mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E} = \mathbb{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha}$$

- $\mathbb{M}_a^\varepsilon$  matrice de masse d'arêtes :  $(\mathbb{M}_a^\varepsilon)_{e',e} = \int_{\Omega} \varepsilon w^e w^{e'}$
- $\mathbb{K}_s^\varepsilon$  matrice de rigidité nodale :  $(\mathbb{K}_s^\varepsilon)_{n,m} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla w^m \cdot \nabla w^n$
- On a  $\vec{\alpha} = (\mathbb{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E}$  ou bien pour  $\vec{U} = \vec{E} - \mathbb{G}\vec{\alpha} = (\mathbb{I}_d - \mathbb{G}(\mathbb{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon) \vec{E}$ .

# Forme matricielle d'opérateur de projection

- En forme vectorielle

$$\vec{E} = \mathbb{G}\vec{\alpha} + \vec{U}$$

- On effectue le produit scalaire de  $\mathbf{E}_h = \nabla\phi_h + \mathbf{u}_h$  par  $\nabla w^n \in \nabla V_h$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \nabla w^n = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \phi_h \cdot \nabla w^n$$

$$\mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E} = \mathbb{K}_s^\varepsilon \vec{\alpha}$$

- $\mathbb{M}_a^\varepsilon$  matrice de masse d'arêtes :  $(\mathbb{M}_a^\varepsilon)_{e',e} = \int_{\Omega} \varepsilon w^e w^{e'}$
- $\mathbb{K}_s^\varepsilon$  matrice de rigidité nodale :  $(\mathbb{K}_s^\varepsilon)_{n,m} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla w^m \cdot \nabla w^n$
- On a  $\vec{\alpha} = (\mathbb{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon \vec{E}$  ou bien pour  $\vec{U} = \vec{E} - \mathbb{G}\vec{\alpha} = (\mathbb{I}_d - \mathbb{G}(\mathbb{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon) \vec{E}$ .
- Opérateur  $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}^h$  s'écrit sous la forme matricielle

$$\boxed{\mathbb{Q}^\varepsilon = \mathbb{I}_d - \mathbb{G}(\mathbb{K}_s^\varepsilon)^{-1} \mathbb{G}^t \mathbb{M}_a^\varepsilon}$$

# Expériences numériques

$(\mathbb{K}, M)$	$(\mathbb{K}, MQ)$	$(\mathbb{K} + \alpha M, MQ)$	$(Q^t \mathbb{K} Q, Q^t M Q)$	$(Q \mathbb{K} Q + Q^t \mathbb{K} Q^t, \dots M)$
9.86	2.46	9.86	6.55	9.86
9.87	-3.28	9.87	9.86	9.87
19.74	6.94	19.74	9.87	19.74
39.31	9.86	39.31	19.74	39.31
39.47	9.87	39.47	39.31	39.47
49.27	-16.89	49.27	39.47	49.27
49.28	19.74	49.28	44.32	49.28
78.67	-27.91	78.67	49.27	78.67
88.34	-38.41	88.34	49.27	88.34
88.36	-39.25	88.36	49.28	88.36

# Bibliographie



P. CIARLET, H. WU et J. ZOU, « Edge element methods for maxwell's equations with strong convergence for gauss' laws », *SIAM J. Numer. Anal.*, t. 52, p. 779–807, 2014. DOI : 10.1137/120899856.



P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, sér. Recherches en mathématiques appliquées. Paris, Milan, Barcelone : Masson Berlin Heidelberg New York, 1992, ISBN : 3540554505. adresse : <http://opac.inria.fr/record=b1076896>.



F. RAPETTI et A. BOSSAVIT, « Whitney forms of higher degree », *SIAM Journal on Numerical Analysis*, t. 47, n° 3, p. 2369–2386, juin 2009. DOI : 10.1137/070705489. adresse : <https://hal-supelec.archives-ouvertes.fr/hal-00763881>.