Blatt 3

Abgabe von Marian Bruns marian.bruns@tu-dortmund.de und Kai Brügge kai.bruegge@tu-dortmund.de

Aufgabe 9

Die Maxwell-Boltzmann Verteilung. Der Normierungsfaktor N=1 ergibt sich aus dem Integral der Dichtefunktion über dem Gesamten Parameterbereich. Die genauen Rechungen gibts im Anhang Handschriftlich.

a) Die Wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (pmf).

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} \stackrel{!}{=} 0$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

b) Der Mittelwert der Verteilung wird wie üblich über

$$< v >= \int_0^\infty v f(v) dv$$

bestimmt.

c) Der Median lässt sich aus einem Histogramm der Verteilung bestimmen. Aber niemand hat Zeit für Monte-Carlo Simulationen.

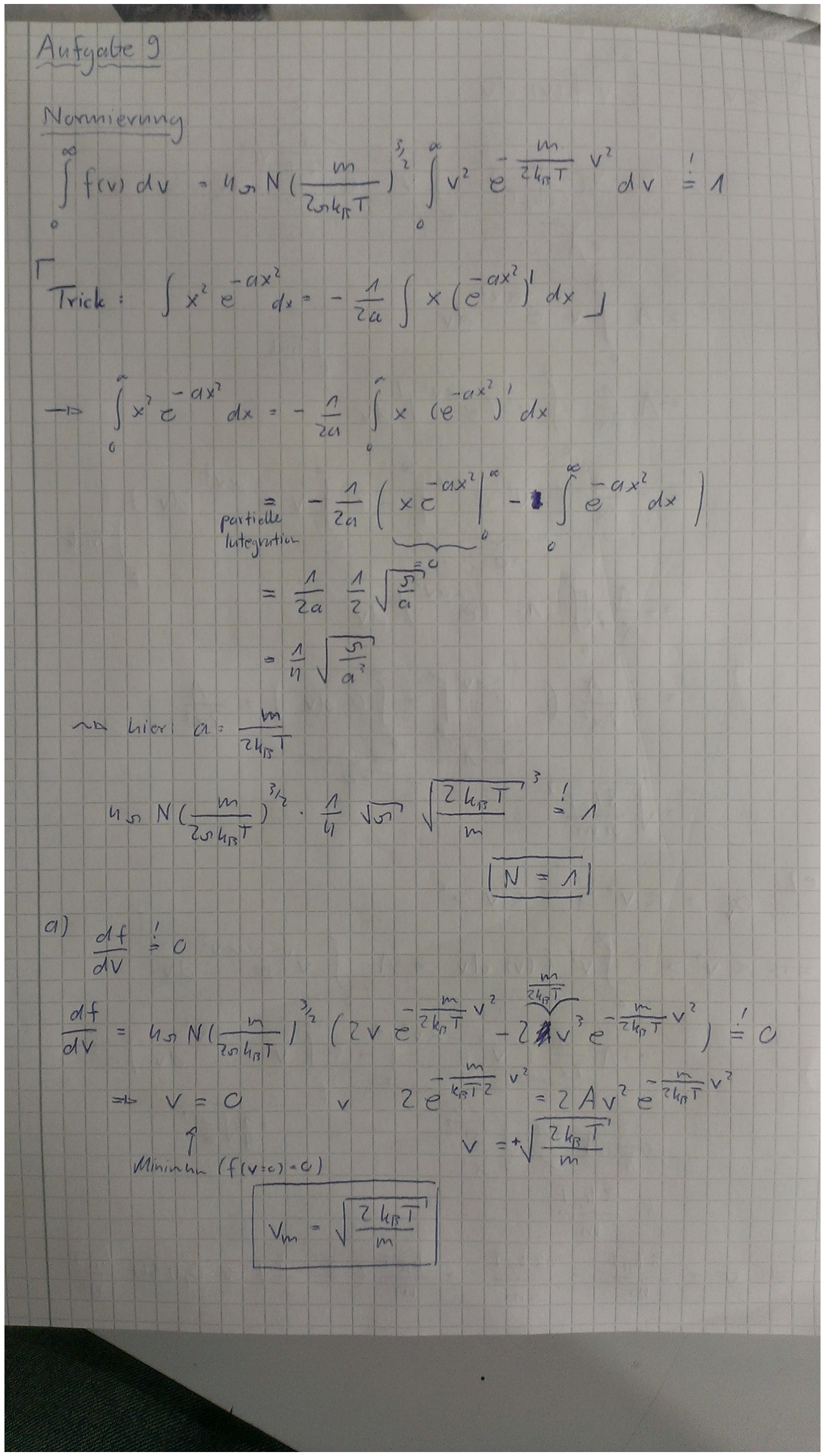
d) Man braucht die Lambertsche W Funktion. Aber auch dafür hat keiner Zeit.

e) Die Varianz wird bestimmt durch

$$\langle v^2 \rangle - (\langle v \rangle)^2$$

Aufgabe 10

a) Sehr spontante Schätzung liefert 22.5



Aufgabe 9

Normierung

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2}\,dv \overset{!}{=} 1$$

Trick: $\int x^2 e^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2a}\int x\,(e^{-ax^2})'\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2a}\int_0^\infty x\,(e^{-ax^2})'\,dx$$

$$\underset{\text{partielle Integration}}{=} -\frac{1}{2a}\left(\underbrace{x e^{-ax^2}\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

⇝ hier: $a = \frac{m}{2k_BT}$

$$4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}^{\,3} \overset{!}{=} 1$$

$$\boxed{N = 1}$$

a) $\frac{df}{dv} \overset{!}{=} 0$

$$\frac{df}{dv} = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\left(2v\,e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} - 2\overbrace{A}^{\frac{m}{2k_BT}}v^3 e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow v = 0 \quad\vee\quad 2e^{-\frac{m}{k_BT\,2}v^2} = 2Av^2 e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2}$$

Minimum $(f(v=0)=0)$

$$v = +\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

$$\boxed{v_m = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}}$$

Figure 1: Rechnung zu Aufgabe 9

b) Für n = 23 gibt es insgesamt

$$365^{23}$$

Möglichkeiten Geburtstage auf Personen aufzuteilen. Legt man einen Geburtstag fest so gibt es insgesamt

$$365 \cdot 364 \ldots \cdot (365 - (n-1))$$

Möglichkeiten, dass kein anderer an diesem Tag Geburtstag hat. Bei 23 Leuten ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit also

$$P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \ldots \cdot (365 - (n-1))}{365^{23}} \approx 0.5$$

.

Aufgabe 11

a) Der Kandidat sollte wechseln. Für begründung siehe Teil b)

b) Wenn der Kandidat auf jeden Fall wechselt, dann ist die Gewinnwahrscheinlichkeit bei 2/3. Andernfalls bei 1/3. Zur begründung siehe den Wkeitsbaum im Anhang.

Aufgabe 12

Das Buffonsche Nadelproblem. Sei y der Abstand von einem Nadelende zu einer Linie. Und Theta der Winkel zu der Linie. Die Nadel schneidet die Linie wenn

$$l * \sin(\theta) > y$$

Aus dem Verhältnis aus erlaubten und nicht erlaubten Bereich ergibt sich die Geschwindigkeit.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi}$$

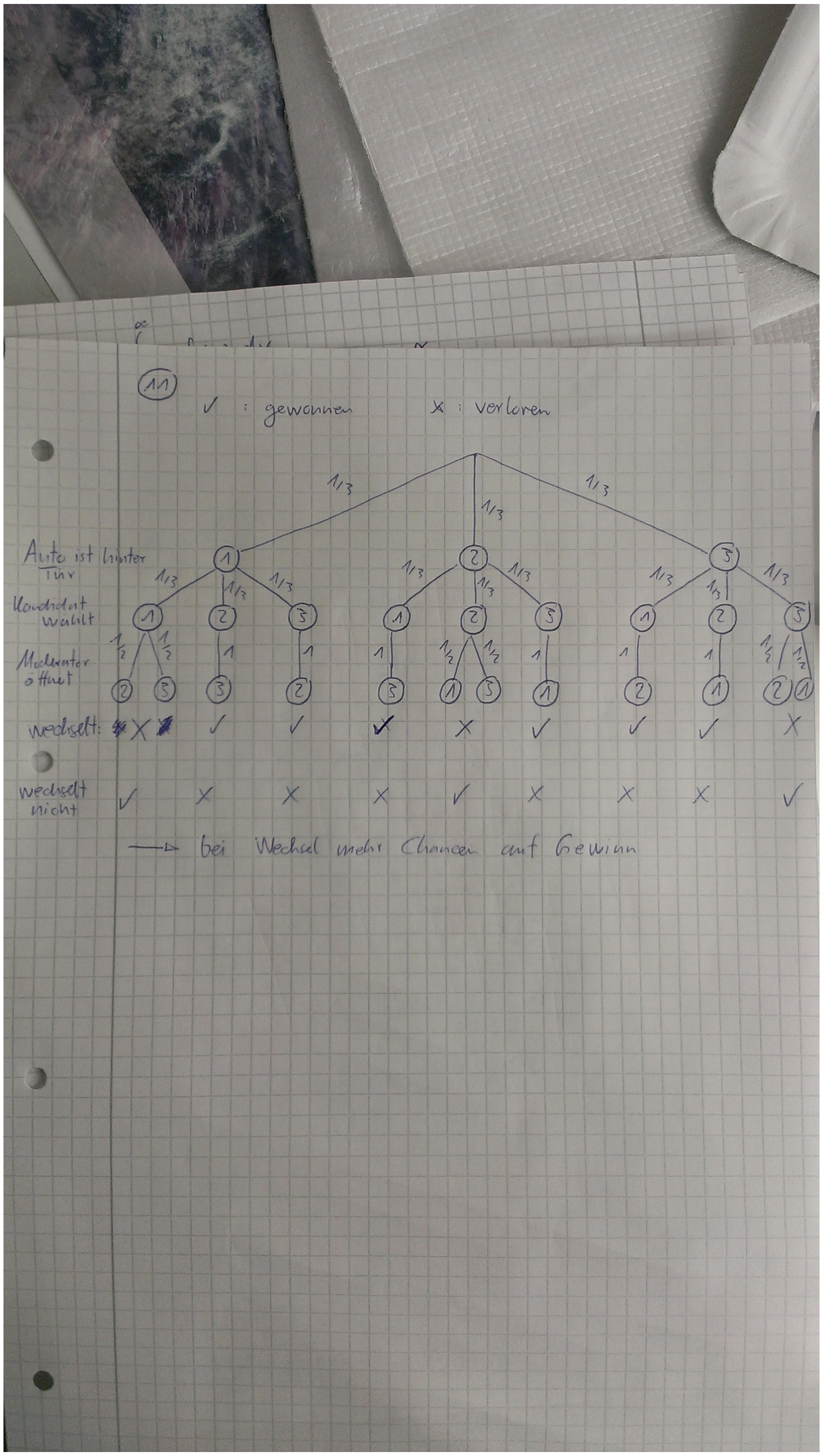
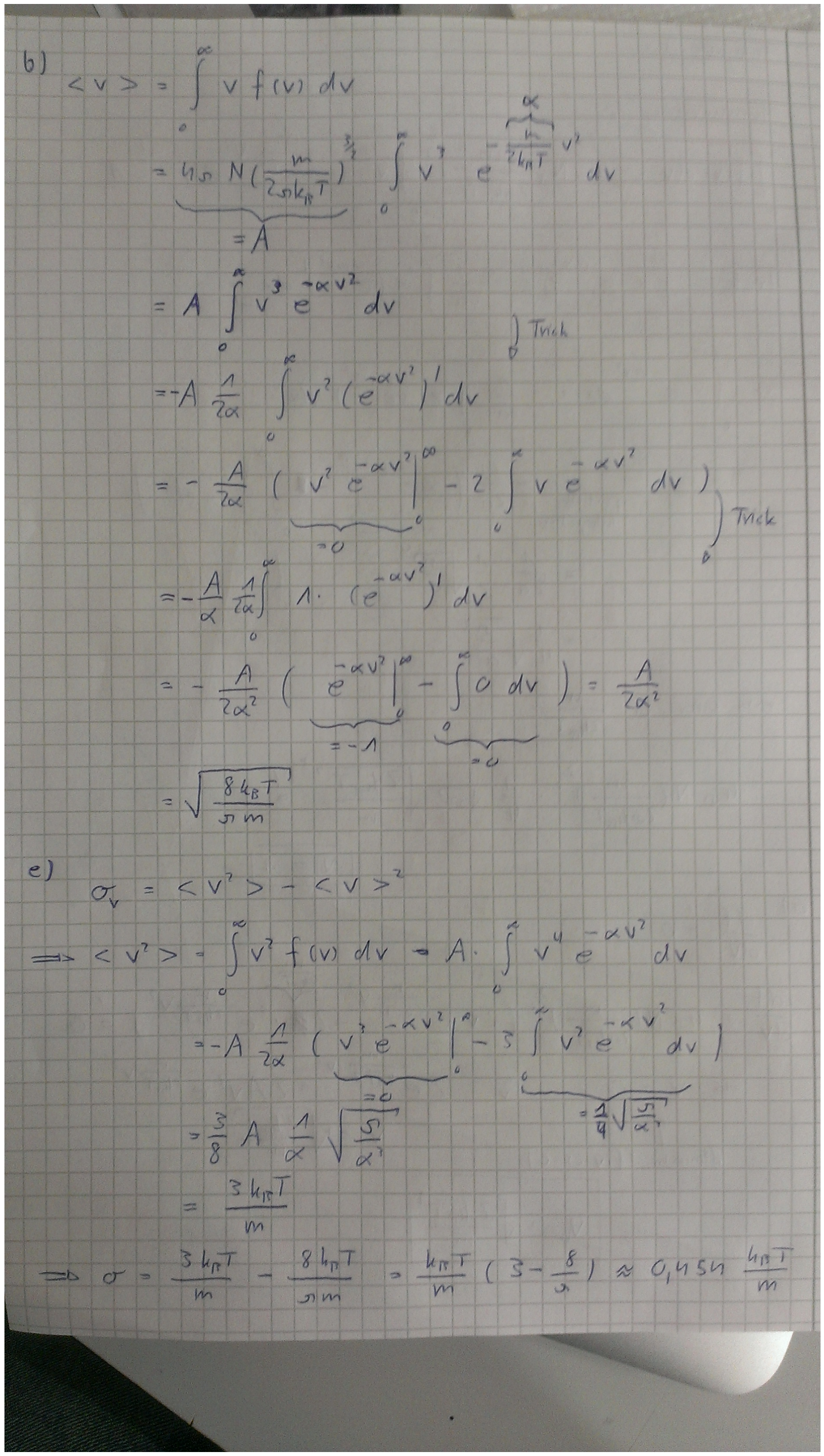


Figure 2: Rechnung zu Aufgabe 11



b) $\langle v \rangle = \int_0^\infty v\, f(v)\, dv$

$$= \underbrace{4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}}_{=A} \int_0^\infty v^3\, e^{-\overbrace{\frac{m}{2k_BT}}^{\alpha} v^2}\, dv$$

$$= A\int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2}\, dv$$

Trick

$$= -A\,\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty v^2 \left(e^{-\alpha v^2}\right)' dv$$

$$= -\frac{A}{2\alpha}\left(\underbrace{v^2 e^{-\alpha v^2}\Big|_0^\infty}_{=0} - 2\int_0^\infty v\, e^{-\alpha v^2}\, dv\right)$$

Trick

$$= -\frac{A}{\alpha}\,\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty 1\cdot\left(e^{-\alpha v^2}\right)' dv$$

$$= -\frac{A}{2\alpha^2}\left(\underbrace{e^{-\alpha v^2}\Big|_0^\infty}_{=-1} - \underbrace{\int_0^\infty 0\, dv}_{=0}\right) = \frac{A}{2\alpha^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

e) $\sigma_v = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv = A\cdot\int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2}\, dv$$

$$= -A\,\frac{1}{2\alpha}\left(\underbrace{v^3 e^{-\alpha v^2}\Big|_0^\infty}_{=0} - 3\underbrace{\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2}\, dv}_{=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}}\right)$$

$$= \frac{3}{8}A\,\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$= \frac{3k_BT}{m}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{3k_BT}{m} - \frac{8k_BT}{\pi m} = \frac{k_BT}{m}\left(3-\frac{8}{\pi}\right) \approx 0{,}454\,\frac{k_BT}{m}$$

Figure 3: Rechnung zu Aufgabe 9.2