SMD Blatt 5

Abgabe von Marian Bruns und Kai Brügge

Aufgabe "Mehrdimensionale Verteilungen"

a)

Korrelationskoeffizent beträgt 0.8

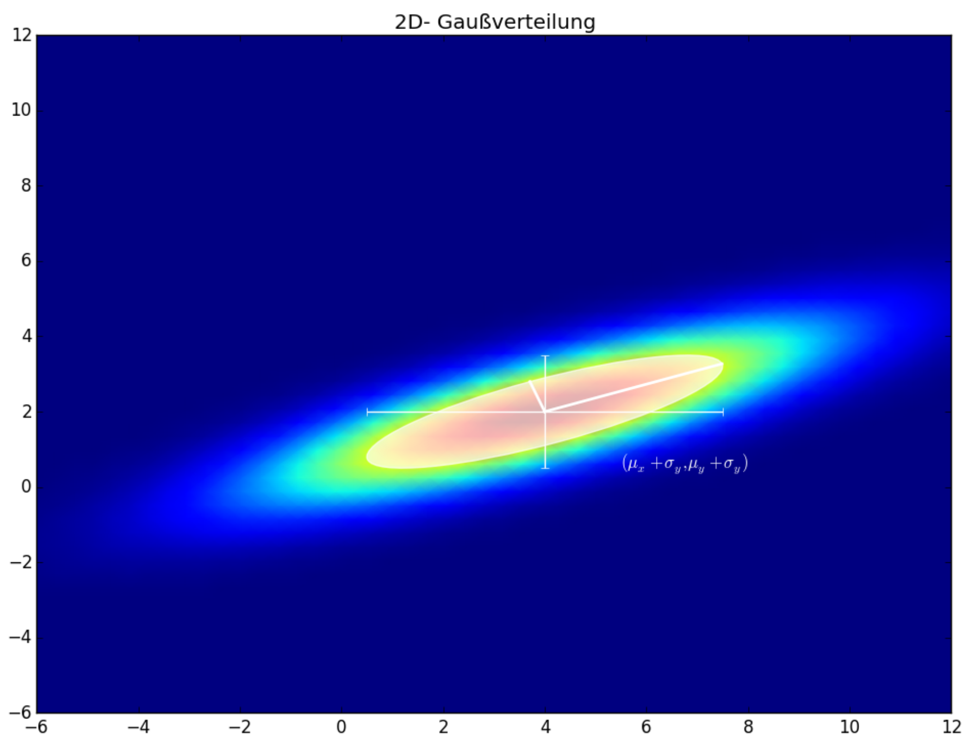
b)

Für eine Konstante Wahrscheinlichtkeit, muss der Exponent konstant sein.

$$-\frac{1}{2 \cdot d \cdot (1-\rho^2)}((\frac{x_m}{\sigma_x})^2 + (\frac{y_m}{\sigma_y})^2 + 2\,\frac{x_m \cdot y_m}{\sigma_x \sigma_y}\rho) = Const$$

Das ist offensichtlich eine Ellispengleichung.

c)



d)

Winkel zur x-Achse: 20.0151296359

Ellipsen Ausdehnungen:

- $$7.42426591305 = 2\sigma_x$$

- $$1.69713748774 = 2\sigma_y$$

e)

Die Rotationsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

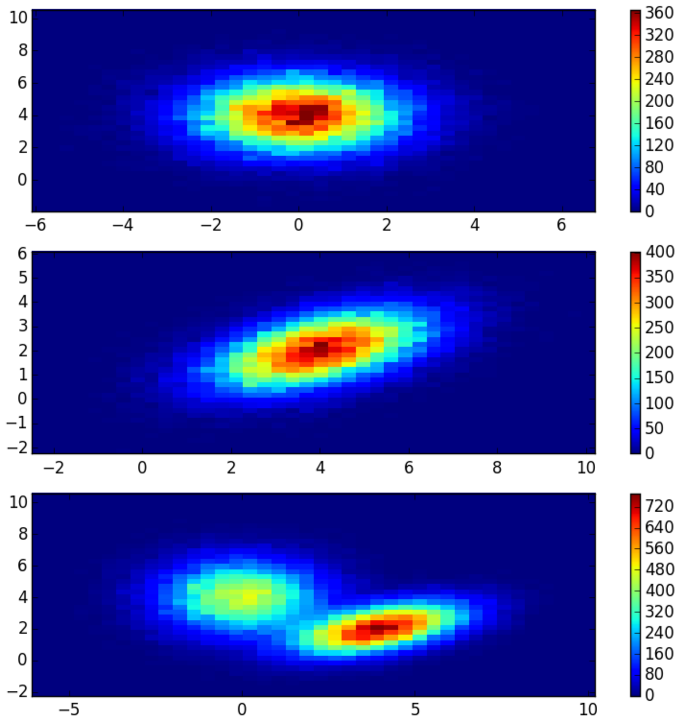
Wobei α der Winkel aus dem vorherigen Aufgabenteil ist. Die 'neuen' Halbachsen ergeben sich entweder nach den in der Vorlesung ermittelten Formeln oder aus den Eigenwerten der Kovarianzmatrix.

$$\sigma_{x'} = 3.710$$
$$\sigma_{y'} = 0.845$$

Aufgabe "Zwei Populationen"

a)

Die Populationen werden zunächst einzeln und dann gemeinsam in einem Histogram dargestellt.



b)

Die Stichprobenmittelwerte der einzelnen Verteilungen lauten

- Verteilung A: (0.0047031104860435838, 3.9967748156064422)
- Verteilung B: (4.0029264219117229, 2.005293094717822)
- Gesamt : (2.0038147661988828, 3.0010339551621326)

Die Standardabweichungen lauten

- (1.4953849601359293, 1.4987705226138697)
- (1.5048650546024045, 1.046639687105708)
- (2.499368903901352, 1.6316812550859521)

Die stichprobengeschätzen Kovarianzmatrizen lauten:

- $$\begin{pmatrix} 2.23622 & -0.00620 \\ -0.00620 & 2.23622 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 2.26466413 & 0.79436375 \\ 0.79436375 & 1.09547654 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 6.24690739 & -1.59654167 \\ -1.59654167 & 2.66241034 \end{pmatrix}$$

Die Korrelationskoeffizienten lauten:

- -0.00276
- 0.5043
- -0.3914

Aufgabe "Mehrere Messungen"

a)

Am besten werden Ergebnis 1 und 2 Kombiniert (es wird das aritmetische Mittel gebildet und der entsprechene Fehler berechnet):

$$299793599 \pm 4527.69$$

b)

Wir berechnen das geometrische Mittel (Fehler aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung):

$$\bar{N} = \sqrt{N_1 \cdot N_2} \approx 405.64 \pm 14.25$$

Die 405.3 enstrpechen dem harmonischen Mittel. Das ist aber falsch.

Aufgabe "Teilchenspuren"

a)

Es ergibt sich

$$a_1 = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}$$

und

$$a_2 = x_1$$

sodass

$$x(z) = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + x_1$$

Die Fehler auf a_1 und a_2 ergeben sich aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{a_1} = \frac{1}{z_2 - z_1} \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$$

$$\sigma_{a_2} = \sigma_{x_1}$$

Die Kovarianzmatrix $C(a_1, a_2)$ berechnet sich folgendermaßen:

$$C(a_1, a_2)_{kl} = \sum_{i,j} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_j} C(x_1, x_1)_{ij}$$

Wobei sich $C(x_1, x_2)$ mit den angegebenen Fehlern und aus der Unabhängigkeit (=> Unkorreliertheit) von x_1 und x_2 zu

$$C(x_1, x_1) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

ergibt.

Damit ergibt sich dann:

$$C(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(z_2 - z_2)^2} (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2) & -\frac{\sigma_{x_1}^2}{z_2 - z_1} \\ -\frac{\sigma_{x_1}^2}{z_2 - z_1} & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

Nun berechnet sich der Korrelationsfaktor $korr(a_1, a_2)$ zu

$$korr(a_1, a_2) = korr(a_2, a_1) = \frac{-\sigma_{x_1}^2}{(z_2 - z_1)\sqrt{\frac{\sigma_{x_2}^2(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)}{(z_2 - z_1)^2}}}$$

$$= \frac{-\sigma_{x_1}^2}{\sigma_{x_2}\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}}$$

b)

Die Position des Teilchens ist

$$x(z) = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} (z - z_1) + x_1$$

Der Fehler σ_x hierauf ergibt sich zu

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x(z)}{\partial a_1} \sigma_{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x(z)}{\partial a_2} \sigma_{a_2}\right)^2 + 2 \frac{\partial x(z)}{\partial a_1} \frac{\partial x(z)}{\partial a_2} C(a_1, a_2)_{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{(z - z_1)(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)}{(z_2 - z_1)^2} + \sigma_{x_2}^2 + 2 \frac{(z - z_1)\sigma_{x_1}^2}{z_2 - z_1}}$$

Für $z = z_3$ müssen die Formeln dann an dieser Stelle ausgewertet werden.

c)

Wird die Korrelation zwischen a_1 und a_2 vernachlässigt, ergibt sich für den Fehler auf $x(z)$:

$$\sigma_x = \sqrt{(\frac{\partial x(z)}{\partial a_1}\sigma_{a_1})^2 + (\frac{\partial x(z)}{\partial a_2}\sigma_{a_2})^2} = \sqrt{\frac{(z - z_1)(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)}{(z_2 - z_1)^2} + \sigma_{x_2}^2}$$