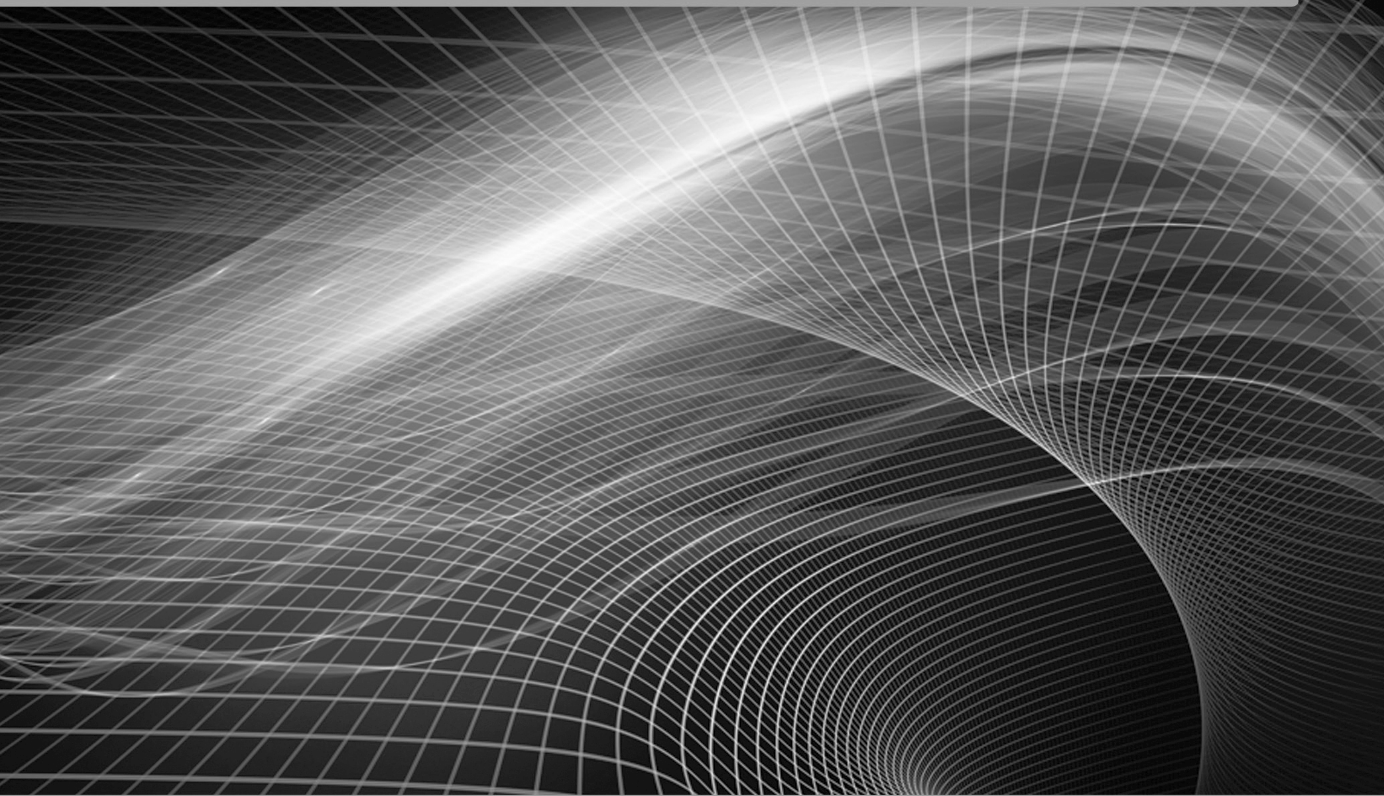
DirectX 12를 이용한

3D 게임 프로그래밍 입문



프랭크 D. 루나 지음 류광 옮김

한빛미디어
Hanbit Media, Inc.

연습문제 해답 모음

제1장

1. $\mathbf{u} = (1, 2)$이고 $\mathbf{v} = (3, -4)$라고 하자. 다음 계산을 수행하고, 벡터들을 2차원 좌표계를 기준으로 그려 보라.

   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

   (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

   (c) $2\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$

   (d) $-2\mathbf{u} + \mathbf{v}$

해답:

(a) $(1, 2) + (3, -4) = (1 + 3, 2 + (-4)) = (4, -2)$

(b) $(1, 2) - (3, -4) = (1, 2) + (-3, 4) = (1 - 3, 2 + 4) = (-2, 6)$

(c) $2(1, 2) + \frac{1}{2}(3, -4) = (2, 4) + (\frac{3}{2}, -2) = (\frac{7}{2}, 2)$

(d) $-2(1, 2) + (3, -4) = (-2, -4) + (3, -4) = (1, -8)$

3. 이 연습문제는 벡터 대수에서도 실수의 여러 좋은 법칙들이 성립함을 보여준다(단, 아래에 나온 것이 전부는 아님). $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$이고 c와 k는 스칼라라고 가정하자. 벡터의 다음과 같은 법칙들을 증명하라.

   (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (덧셈의 교환법칙)

(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (덧셈의 결합법칙)

(c) $(ck)\mathbf{u} = c(k\mathbf{u})$ (스칼라 곱셈의 결합법칙)

(d) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (분배법칙 1)

(e) $\mathbf{u}(k + c) = k\mathbf{u} + c\mathbf{u}$ (분배법칙 2)

해답:

(a)
$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z)\\ &= (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)\\ &= (v_x + u_x, v_y + u_y, v_z + u_z)\\ &= (v_x, v_y, v_z) + (u_x, u_y, u_z)\\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (u_x, u_y, u_z) + \big((v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z)\big)\\ &= (u_x, u_y, u_z) + (v_x, + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)\\ &= \big(u_x + (v_x + w_x), u_y + (v_y + w_y), u_z + (v_z + w_z)\big)\\ &= \big((u_x + v_x) + w_x, (u_y + v_y) + w_y, (u_z + v_z) + w_z\big)\\ &= (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) + (w_x, w_y, w_z)\\ &= \big((u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z)\big) + (w_x, w_y, w_z)\\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}(ck)\mathbf{u} &= (ck)(u_x, u_y, u_z)\\ &= ((ck)u_x, (ck)u_y, (ck)u_z)\\ &= (c(ku_x), c(ku_y), c(ku_z))\\ &= c(ku_x, ku_y, ku_z)\\ &= c(k\mathbf{u})\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k((u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z))\\ &= k(u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)\\ &= \big(k(u_x + v_x), k(u_y + v_y), k(u_z + v_z)\big)\\ &= (ku_x + kv_x, ku_y + kv_y, ku_z + kv_z)\\ &= (ku_x, ku_y, ku_z) + (kv_x, kv_y, kv_z)\\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}\end{aligned}$$

(e) $\mathbf{u}(k+c) = (u_x, u_y, u_z)(k+c)$

$$= \big(u_x(k+c), u_y(k+c), u_z(k+c)\big)$$
$$= (ku_x + cu_x, ku_y + cu_y, ku_z + cu_z)$$
$$= (ku_x, ku_y, ku_z) + (cu_x, cu_y, cu_z)$$
$$= k\mathbf{u} + c\mathbf{u}$$

5. $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$이고 $\mathbf{v} = (3, -4, 1)$이라 할 때, $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 정규화하라.

해답:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$
$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$
$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

7. 각 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$에 대해, 둘 사이의 각도가 직각인지, 예각인지, 둔각인지 밝혀라.

(a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 4)$

(b) $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-2, 2, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (-1, -1, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 0)$

해답:

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(2) + 1(3) + 1(4) = 9 > 0 \Rightarrow$ 예각

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(-2) + 1(2) + 0(0) = 0 \Rightarrow$ 직각

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1(3) + (-1)(1) + (-1)(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ 둔각

9. $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$이고 $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$라고 하자. 그리고 c와 k가 스칼라라고 하자. 내적의 다음과 같은 성질(속성)들을 증명하라.

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(c) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

(d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

(e) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$

해답:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_x, u_y, u_z)\cdot(v_x, v_y, v_z)\\
&= u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z\\
&= (v_x, v_y, v_z)\cdot(u_x, u_y, u_z)\\
&= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\\
\mathbf{u}\ \cdot\ (\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= (u_x, u_y, u_z)\cdot(v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)\\
&= u_x(v_x + w_x) + u_y(v_y + w_y) + u_z(v_z + w_z)\\
&= u_xv_x + v_xw_x + u_yv_y + u_yw_y + u_zv_z + u_zw_z\\
&= (u_xv_x + u_yv_y + u_z) + (u_xw_x + u_yw_y + u_zw_z)\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\\
k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= k(u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z)\\
&= (ku_x)v_x + (ku_y)v_y + (ku_z)v_z\\
&= (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\\
&= u_x(kv_x) + u_y(kv_y) + u_z(kv_z)\\
&= \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})\\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= v_xv_x + v_yv_y + v_zv_z\\
&= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}^{\,2}\\
&= \|\mathbf{v}\|^2\\
\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} &= 0v_x + 0v_y + 0v_z = 0
\end{aligned}
$$

11. $\mathbf{n} = (-2,\ 1)$이라고 하자. $\mathbf{n}$을 이용해서 벡터 $\mathbf{g} = (0,\ -9.8)$을 서로 수직인 두 벡터로, 구체적으로 말하면 $\mathbf{n}$과 평행인 벡터와 $\mathbf{n}$과 수직인 벡터로 분해하라. 또한, 그 벡터들을 2차원 좌표 평면에 그려보라.

해답:

$$\mathbf{g}_{\parallel} = \mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}) = \frac{(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} = \frac{-9.8}{5}(-2,1) = -1.96(-2,1) = (3.92,\ -1.96)$$

$$\mathbf{g}_{\perp} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_{\parallel} = (0,\ -9.8) - (3.92,\ -1.96) = (-3.92,\ -7.84)$$

13. 어떤 좌표계를 기준으로 점 $\mathbf{A} = (0,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{B} = (0,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{C} = (5,\ 1,\ 0)$이 하나의 삼각형을 정의한다고 하자. 이 삼각형에 수직인 벡터를 구하라.

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (0, 1, 3)$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = (5, 1, 0)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x) \\ &= (0 - 3,\ 15 - 0,\ 0 - 5) \\ &= (-3,\ 15,\ -5)\end{aligned}$$

15. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$가 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$로 정의되는 평행사변형의 면적임을 증명하라. [그림 1.21]을 참고할 것.

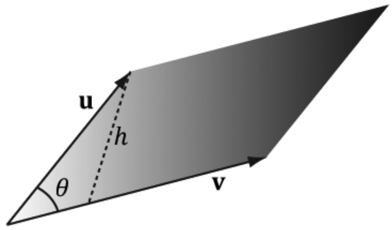


그림 D.1 두 3차원 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$로 정의되는 평행사변형. 밑변의 길이는 $\|\mathbf{v}\|$이고 높이는 h이다.

해답:

평행사변형의 면적은 밑변 곱하기 높이이다.

$$A = \|\mathbf{u}\| h$$

삼각함수 공식에 의해 높이는 $h = \|\mathbf{u}\| \sin(\theta)$이다. 이 사실에 연습문제 14를 결합하면 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

$$A = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

17. 영벡터가 아닌 두 평행 벡터의 외적이 영벡터임을, 즉 $\mathbf{u} \times k\mathbf{u} = \mathbf{0}$임을 증명하라.

해답:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times k\mathbf{u} &= (u_y k u_z - u_z k u_y,\ u_z k u_x - u_x k u_z,\ u_x k u_y - u_y k u_x) \\ &= (k u_y u_z - k u_z u_y,\ k u_z u_x - k u_x u_z,\ k u_x u_y - k u_y u_x) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

제2장

1. 다음 행렬 방정식을 $\mathbf{X}$에 대해 풀어라: $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2\mathbf{X}\right) = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

해답:

$$3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2\mathbf{X}\right) = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} - 6\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-6\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-6\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. 다음 행렬들의 전치를 구하라.

(a) $[1,2,3]$, (b) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

해답:

$$[1,2,3]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

5. 다음 등식을 증명하라.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{A}_{1,*}\mathbf{B} \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{A}_{2,*}\mathbf{B} \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{A}_{3,*}\mathbf{B} \rightarrow \end{bmatrix}$$

해답:

i가 $\mathbf{AB}$의 임의의 한 행이라고 하자. 행렬 곱셈의 정의에 의해, i번째 행은 다음과 같이 주어진다.

$$(\mathbf{AB})_{i,*} = [\mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,1} \quad \mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,2} \quad \mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,3}]$$

그런데 행렬 곱셈의 정의에 의하면 이는 벡터와 행렬의 곱 $\mathbf{A}_{i,*}\mathbf{B}$와 상등이다. 즉,

$$(\mathbf{AB})_{i,*} = [\mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,1} \quad \mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,2} \quad \mathbf{A}_{i,*} \cdot \mathbf{B}_{*,3}] = \mathbf{A}_{i,*}\mathbf{B}$$

이다. i가 임의의 행이므로, $i = 1, 2, 3$을 대입하면 증명이 완성된다.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} (\mathbf{AB})_{1,*} \\ (\mathbf{AB})_{2,*} \\ (\mathbf{AB})_{3,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{A}_{1,*}\mathbf{B} \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{A}_{2,*}\mathbf{B} \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{A}_{3,*}\mathbf{B} \rightarrow \end{bmatrix}$$

7. 벡터 외적을 다음과 같은 행렬 곱으로 표현할 수 있음을 증명하라.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z] \begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix}$$

해답:

$$[v_x \quad v_y \quad v_z] \begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix} = [u_y v_z - u_z v_y \quad u_z v_x - u_x v_z \quad u_x v_y - u_y v_x]$$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$라고 하자. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$이 $\mathbf{A}$의 역행렬인가?

해답:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{AB} \neq \mathbf{I}$이므로, $\mathbf{B}$는 $\mathbf{A}$의 역행렬이 아니라는 결론을 내릴 수 있다.

11. 다음 행렬들의 역행렬을 구하라.

$$\begin{bmatrix} 21 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

해답:

왼쪽의 2 × 2 행렬에는 [예 2.10]에 나온 역행렬 공식을 적용한다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}$$

이것이 실제로 주어진 행렬의 역행렬인지는 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$= \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 7(21)+4(10) & 7(-4)+4(7) \\ -10(21)+10(21) & -10(-4)+21(7) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 187 & 0 \\ 0 & 187 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

오른쪽의 3 × 3 행렬에는 다음 공식을 적용한다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}}$$

여인수행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{C_A} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det\overline{\mathbf{A}}_{11} & (-1)^{1+2}\det\overline{\mathbf{A}}_{12} & (-1)^{1+3}\det\overline{\mathbf{A}}_{13} \\ (-1)^{2+1}\det\overline{\mathbf{A}}_{21} & (-1)^{2+2}\det\overline{\mathbf{A}}_{22} & (-1)^{2+3}\det\overline{\mathbf{A}}_{23} \\ (-1)^{3+1}\det\overline{\mathbf{A}}_{31} & (-1)^{3+2}\det\overline{\mathbf{A}}_{32} & (-1)^{3+3}\det\overline{\mathbf{A}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

따라서 $\mathbf{A}^* = \mathbf{C}_{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$이고

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

이다. 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. $\mathbf{A}$가 가역행렬일 때, $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$임을 보여라.

해답:

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

따라서 $(\mathbf{A}^{-1})^T$는 $\mathbf{A}^T$의 역행렬이다.

15. 2차원 행렬의 행렬식 $\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$가, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$와 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$로 정의되는 평행사변형의 부호 있는 넓이임을 증명하라. 만일 $\mathbf{u}$를 반시계방향으로 각도 $\theta \in (0, \pi)$만큼 회전해서 $\mathbf{v}$와 일치시킬 수 있으면 넓이가 양수이고 그렇지 않으면 음수이다.

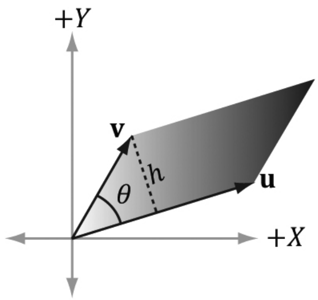


그림 D.2 두 2차원 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$로 정의되는 평행사변형. 밑변 길이는 $||\mathbf{u}||$이고 높이는 h이다.

해답:

평행사변형의 넓이는 밑변 곱하기 높이이다.

$$\begin{aligned} A &= \|\mathbf{u}\| h \\ &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sqrt{1-\cos^2\theta} \end{aligned}$$

양변을 제곱해서 정리하면:

$$\begin{aligned} A^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta)^2 \\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \\ &= (u_x^2 + u_y^2)(v_x^2 + v_y^2) - (u_x v_x + u_y v_y)^2 \\ &= u_x^2 v_x^2 + u_x^2 v_y^2 + u_y^2 v_x^2 + u_y^2 v_y^2 - u_x^2 v_x^2 - 2u_x v_x u_y v_y - u_y^2 v_y^2 \\ &= u_x^2 v_y^2 + u_y^2 v_x^2 - 2u_x v_x u_y v_y \\ &= (u_x v_y - u_y v_x)^2 \end{aligned}$$

이제 양변에 제곱근을 취하면 증명이 완료된다.

$$\begin{aligned} A &= |u_x v_y - u_y v_x| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \right| \end{aligned}$$

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 이고 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ 라고 할 때 $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$임을 보여라. 이 등식은 차원이 같은 행렬들의 곱셈에 결합법칙이 성립함을 보여준다. (사실, 그 어떤 차원의 행렬이든 곱셈이 정의되기만 한다면 행렬 곱셈은 결합법칙을 만족한다.)

해답:

2 × 2 행렬의 경우에는 그냥 직접 계산해서 증명하면 된다.

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} & B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} \\ B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} & B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\begin{bmatrix} A_{11}(B_{11}C_{11}+B_{12}C_{21})+A_{12}(B_{21}C_{11}+B_{22}C_{21}) & A_{11}(B_{11}C_{12}+B_{12}C_{22})+A_{12}(B_{21}C_{12}+B_{22}C_{22}) \\ A_{21}(B_{11}C_{11}+B_{12}C_{21})+A_{22}(B_{21}C_{11}+B_{22}C_{21}) & A_{21}(B_{11}C_{12}+B_{12}C_{22})+A_{22}(B_{21}C_{12}+B_{22}C_{22}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}C_{11}+A_{11}B_{12}C_{21}+A_{12}B_{21}C_{11}+A_{12}B_{22}C_{21} & A_{11}B_{11}C_{12}+A_{11}B_{12}C_{22}+A_{12}B_{21}C_{12}+A_{12}B_{22}C_{22} \\ A_{21}B_{11}C_{11}+A_{21}B_{12}C_{21}+A_{22}B_{21}C_{11}+A_{22}B_{22}C_{21} & A_{21}B_{11}C_{12}+A_{21}B_{12}C_{22}+A_{22}B_{21}C_{12}+A_{22}B_{22}C_{22} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\begin{bmatrix} (A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21})C_{11}+(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22})C_{21} & (A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21})C_{12}+(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22})C_{22} \\ (A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21})C_{11}+(A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22})C_{21} & (A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21})C_{12}+(A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22})C_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}C_{11}+A_{12}B_{21}C_{11}+A_{11}B_{12}C_{21}+A_{12}B_{22}C_{21} & A_{11}B_{11}C_{12}+A_{12}B_{21}C_{12}+A_{11}B_{12}C_{22}+A_{12}B_{22}C_{22} \\ A_{21}B_{11}C_{11}+A_{22}B_{21}C_{11}+A_{21}B_{12}C_{21}+A_{22}B_{22}C_{21} & A_{21}B_{11}C_{12}+A_{22}B_{21}C_{12}+A_{21}B_{12}C_{22}+A_{22}B_{22}C_{22} \end{bmatrix}$$

항들을 성분 대 성분으로 비교해 보면 $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$임을 확인할 수 있다.

제3장

1. 변환 τ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이 $\tau(x, y, z) = (x + y, x - 3, z)$로 정의된다고 하자. 이 τ는 선형변환인가? 만일 그렇다면 그에 해당하는 표준 행렬 표현을 구하라.

해답:

만일 τ가 선형이면 다음이 성립한다.

1. $\tau(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \tau(\mathbf{u}) + \tau(\mathbf{v})$
2. $\tau(k\mathbf{u}) = k\tau(\mathbf{u})$

$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$와 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \tau(u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) \\ &= (u_x + v_x + u_y + v_y, u_x + v_x - 3, u_z + v_z) \\ &= (u_x + u_y, u_x - 3, u_z) + (v_x + v_y, v_x, v_z) \\ &= \tau(\mathbf{u}) + (v_x + v_y, v_x, v_z) \\ &= \tau(\mathbf{u}) + (v_x + v_y, v_x - 3 + 3, v_z) \\ &= \tau(\mathbf{u}) + (v_x + v_y, v_x - 3, v_z) + (0, 3, 0) \\ &= \tau(\mathbf{u}) + \tau(\mathbf{v}) + (0, 3, 0)\end{aligned}$$

이다. 즉 $\tau(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq \tau(\mathbf{u}) + \tau(\mathbf{v})$이며, 따라서 τ는 선형변환이 아니다.

3. τ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이 선형변환이라고 하자. 그리고 $\tau(1, 0, 0) = (3, 1, 2)$, $\tau(0, 1, 0) = (2,$

$-1, 3)$, $\tau(0, 0, 1) = (4, 0, 2)$라고 하자. $\tau(1, 1, 1)$을 구하라.

해답:

가정에 의해 τ는 선형변환이다. 그리고 주어진 사례들은 표준기저벡터 $\tau(\mathbf{i})$, $\tau(\mathbf{j})$, $\tau(\mathbf{k})$에 대한 이 변환의 행동 방식을 말해준다. 다음은 이로부터 변환 τ의 표준 행렬 표현을 구할 수 있다. 행렬 표현은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

이를 $(1, 1, 1)$에 적용하면:

$$\tau(1, 1, 1) = [1, 1, 1]\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [3 + 2 + 4, 1 - 1, 2 + 3 + 2] = [9, 0, 7]$$

5. $(1, 1, 1)$을 축으로 30° 회전하는 회전행렬을 구축하라.

해답:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$c = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{R_n} = \begin{bmatrix} c + (1 - c)x^2 & (1 - c)xy + sz & (1 - c)xz - sy \\ (1 - c)xy - sz & c + (1 - c)y^2 & (1 - c)yz + sx \\ (1 - c)xz + sy & (1 - c)yz - sx & c + (1 - c)z^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} & \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} & \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} & \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} & \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{6} & \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6} & \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{6} & \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6} & \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}+2}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}+2}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}+2}{6} \end{bmatrix}$$

7. 먼저 x 축을 따라 2단위, y 축을 따라 −3단위 비례하되 z 성분은 변경하지 않는 비례변환을 수행한 후 x 축 4단위, y 축 변경 없음, z 축 −9단위 이동하는 이동변환을 수행하는 하나의 변환 행렬을 구축하라.

해답:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

이 두 행렬의 곱이 곧 문제가 요구하는 변환 행렬이다.

$$\mathbf{M} = \mathbf{ST} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

9. [예 3.2]를 다시 풀되, 이번에는 정사각형을 x 축을 따라 1.5단위, y 축을 따라 0.75단위 비례하라(z 축은 변경 없음). 변환 이전과 이후의 기하구조를 그래프로 그려서 변환이 제대로 되었는지 확인해 볼 것.

해답:

해당 비례행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & .75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

정사각형의 최솟점과 최댓점에 이 행렬을 곱하면 정사각형이 비례된다.

$$[-4, -4, 0] \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & .75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-6, -3, 0] \quad [4, 4, 0] \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & .75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [6, 3, 0]$$

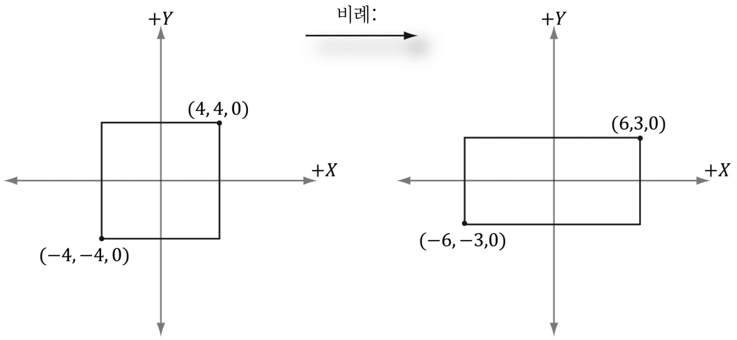


그림 D.3 비례변환.

11. 예 3.4를 다시 풀되, 이번에는 정사각형을 x 축을 따라 −5.0단위, y 축을 따라 −3.0단위, z 축을 따라 4.0단위 이동하라. 변환 이전과 이후의 기하구조를 그래프로 그려서 변환이 제대로 되었는지 확인해 볼 것.

해답:

해당 이동행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

정사각형의 최솟점과 최댓점에 이 행렬을 곱하면 정사각형이 이동된다.

$$[-8,\ 2,\ 0,\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [-13,\ -1,\ 4,\ 1]$$

$$[-2,\ 8,\ 0,\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [-7,\ 5,\ 4,\ 1]$$

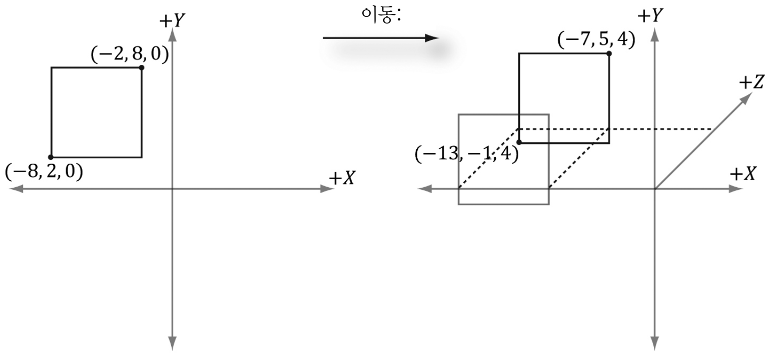


그림 D.4 이동변환.

13. $\mathbf{R}_y$(y 축에 대한 회전행렬)의 행벡터들이 정규직교임을 증명하라. 수학에 좀 더 자신 있는 독자라면 일반적인 회전행렬(임의의 축에 대한 회전행렬)에 대해서도 증명해 볼 것.

$$\mathbf{R_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

해답:

$\mathbf{r}_1 = (\cos\theta,\ 0,\ -\sin\theta)$, $\mathbf{r}_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{r}_3 = (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$라고 하자. 우선 모든 행이 단위길이임을 증명한다.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_1\| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \\ \|\mathbf{r}_2\| &= 1 \\ \|\mathbf{r}_3\| &= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \end{aligned}$$

다음으로, 이 행들이 서로 직교임을 증명한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= 0 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 &= 0 \\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 &= \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

14. 행렬 $\mathbf{M}$은 만일 $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$이면, 그리고 오직 그럴 때에만 정규직교임을 증명하라.

해답:

구체적인 설명을 위해 3×3 행렬을 예로 들겠다. 어차피 이 책에 필요한 직교행렬은 3차원 회전행렬뿐이기 때문이다. 그러나 아래의 논증을 다른 행렬들로 일반화하는 것도 가능하다.

$\mathbf{M}$이 하나의 3×3 직교행렬이라고 하자.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{r}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{r}_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{r}_3 \rightarrow \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

그러면 행렬 곱셈의 정의에 의해 $(\mathbf{MM}^T)_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$이다. 그런데 $\mathbf{M}$이 직교행렬이므로 다음이 성립한다.

$$(\mathbf{MM}^T)_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \begin{cases} 1 & \text{만일 } i = j\text{이면} \\ 0 & \text{만일 } i \neq j\text{이면} \end{cases}$$

$i = j$는 오직 행렬의 대각 성분에서만 참이다. 따라서 곱셈의 결과는 대각 성분들만 1이고 나머지는 모두 0인 행렬이다. 그런 행렬은 바로 단위행렬이다. 즉, $\mathbf{MM}^T = \mathbf{I}$이다. 비슷한 논증을 통해서 $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{I}$임도 증명할 수 있다. 그러므로 $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$이다.

이제 $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$이라고 가정하자. 그러면 $\mathbf{MM}^T = \mathbf{I}$이며, 따라서 다음이 성립한다.

$$(\mathbf{MM}^T)_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \begin{cases} 1 & \text{만일 } i = j\text{이면} \\ 0 & \text{만일 } i \neq j\text{이면} \end{cases}$$

그러므로 행벡터들은 서로 직교이고 단위 길이이다. 따라서 $\mathbf{M}$은 직교행렬이다.

15. 벡터 대 행렬 곱셈

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix}\text{과} \qquad [x, y, z, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix}$$

을 계산하라. 이동행렬이 점을 이동하는가? 이동행렬이 벡터를 이동하는가? 표준 위치에 있는 벡터의 좌표를 이동한다는 것이 말이 되지 않는 이유는 무엇인가?

해답:

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix} = [x + b_x,\ y + b_y, z + b_z, 1]$$

점은 이동행렬에 의해 이동한다.

$$[x, y, z, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \end{bmatrix} = [x, y, z, 0]$$

벡터는 이동행렬에 의해 이동하지 않는다. 벡터는 단지 방향과 크기를 서술할 뿐 위치와는 무관하므로, 벡터를 이동한다는 것은 말이 되지 않는다.

17. A와 B가 좌표계들이고 $\mathbf{p}_A = (1, -2, 0)$과 $\mathbf{q}_A = (1, 2, 0)$이 어떤 점과 힘(force)의 A 기준 좌표들이라고 하자. 더 나아가서, $\mathbf{Q}_B = (-6, 2, 0)$, $\mathbf{u}_B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{v}_B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{w}_B = (0, 0, 1)$이 A의 원점과 세 좌표축의 B 기준 좌표들이라고 하자.

   A 기준 좌표들을 B 기준 좌표들로 사상하는 좌표 변경 행렬을 구축하고, $\mathbf{p}_B = (x, y, z)$와 $\mathbf{q}_B = (x, y, z)$를 구하라. 그래프용지(모눈종이)에 그림을 그려서 답이 합당한가 확인해 볼 것.

해답:

식 3.9를 적용해서 좌표 변경 행렬을 구한다.

$$\begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_B \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}_B \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}_B \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{Q}_B \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이제 주어진 점과 벡터에 이 좌표 변경 행렬을 곱하면 점과 벡터가 좌표계 A에서 좌표계 B로 변환된다.

$$\mathbf{p}_B = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{3}{\sqrt{2}} - 6 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \quad 0 \quad 1\right]$$

$$\approx [-3.88 \quad 1.29 \quad 0 \quad 1]$$

$$\mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} -.707 & 2.12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

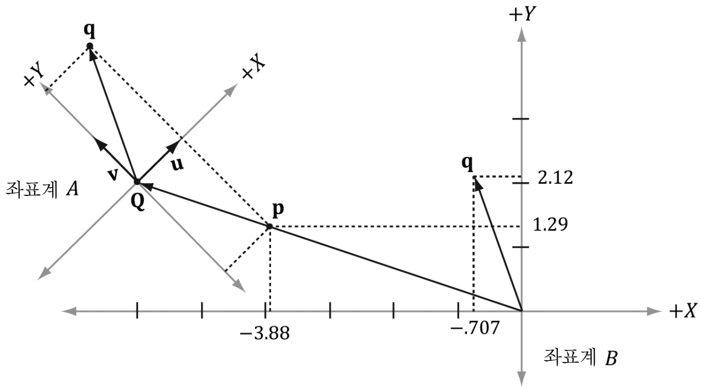


그림 D.5 좌표계 *A*에서 좌표계 *B*로의 좌표 변경 변환.

19. 점 $\mathbf{p}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{p}_3 = (2, 0, 0)$으로 정의되는 삼각형이 있다고 하자. 다음 점들을 그래프로 그려 보라.

(a) $\frac{1}{3}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_3$

(b) $0.7\mathbf{p}_1 + 0.2\mathbf{p}_2 + 0.1\mathbf{p}_3$

(c) $0.0\mathbf{p}_1 + 0.5\mathbf{p}_2 + 0.5\mathbf{p}_3$

(d) $-0.2\mathbf{p}_1 + 0.6\mathbf{p}_2 + 0.6\mathbf{p}_3$

(e) $0.6\mathbf{p}_1 + 0.5\mathbf{p}_2 - 0.1\mathbf{p}_3$

(f) $0.8\mathbf{p}_1 - 0.3\mathbf{p}_2 + 0.5\mathbf{p}_3$

부문제 (a)의 점은 어떤 면에서 특별한가? $\mathbf{p}_2$와 점 $(1, 0, 0)$을 점 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$과 무게중심

좌표들로 표현하라. 무게중심좌표들 중 하나가 음수일 때 점 **p**가 삼각형의 어디에(내부, 외부, 변 위) 있는지 추측하는 공식을 만들어 보라.

해답:

(a) $\frac{1}{3}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3}(0, 0, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, 0) + \frac{1}{3}(2, 0, 0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

(b) $0.7\mathbf{p}_1 + 0.2\mathbf{p}_2 + 0.1\mathbf{p}_3 = 0.7(0, 0, 0) + 0.2(0, 1, 0) + 0.1(2, 0, 0)$
$= (0.2, 0.2, 0)$

(c) $0.0\mathbf{p}_1 + 0.5\mathbf{p}_2 + 0.5\mathbf{p}_3 = 0.0(0, 0, 0) + 0.5(0, 1, 0) + 0.5(2, 0, 0)$
$= (1, 0.5, 0)$

(d) $-0.2\mathbf{p}_1 + 0.6\mathbf{p}_2 + 0.6\mathbf{p}_3 = -0.2(0, 0, 0) + 0.6(0, 1, 0) + 0.6(2, 0, 0)$
$= (1.2, 0.6, 0)$

(e) $0.6\mathbf{p}_1 + 0.5\mathbf{p}_2 - 0.1\mathbf{p}_3 = 0.6(0, 0, 0) + 0.5(0, 1, 0) - 0.1(2, 0, 0)$
$= (-0.2, 0.5, 0)$

(f) $0.8\mathbf{p}_1 - 0.3\mathbf{p}_2 + 0.5\mathbf{p}_3 = 0.8(0, 0, 0) - 0.3(0, 1, 0) + 0.5(2, 0, 0)$
$= (1, -0.3, 0)$

부문제 (a)의 점은 삼각형의 무게중심이다. $\mathbf{p}_2 = 0\mathbf{p}_1 + 1\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3$이므로 $\mathbf{p}_2$의 무게중심 좌표는 (0, 1, 0)이다. 그리고 $(1, 0, 0) = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_3$이므로 그 점의 무게중심 좌표는 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$이다. 무게중심 좌표에 음의(0보다 작은) 좌표성분이 있는 점은 삼각형 바깥에 있는 것이다.

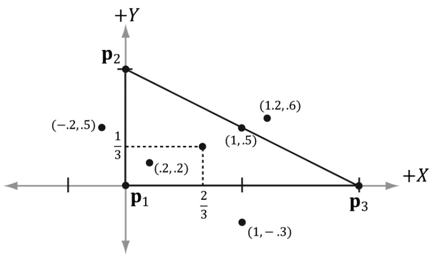


그림 D.6 무게중심 좌표들의 그래프.

21. [그림 3.16]을 보자. 컴퓨터 그래픽에서는 좌표계 A(정사각형 $[-1, 1]^2$)의 좌표를 좌표계 B(y 축이 좌표계 A의 y 축과 반대 방향인 정사각형 $[0, 1]^2$)의 좌표로 사상하는 좌표

변경 변환이 자주 쓰인다. 좌표계 A에서 좌표계 B로의 이러한 좌표 변경 변환이 다음과 같이 주어짐을 증명하라.

$$[x,\ y,\ 0,\ 1]\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x',\ y',\ 0,\ 1]$$

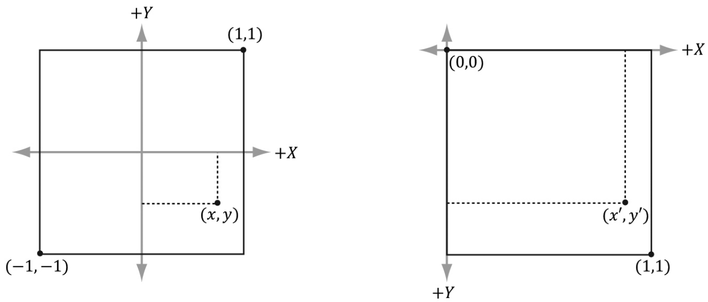


그림 D.7 좌표계 A(정사각형 $[-1, 1]^2$)에서 좌표계 B(정사각형 $[0, 1]^2$, y 축이 A의 것과 반대 방향)로의 좌표 변경 변환.

해답:

식 3.9에서 보았듯이, 좌표 변경 변환은 다음과 같이 주어진다.

$$[x',\ \ y',\ \ z',\ \ w] = [x,\ \ y,\ \ z,\ \ w]\begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{u}_B \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{v}_B \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}_B \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{Q}_B \rightarrow \end{bmatrix}$$

따라서 좌표계 A의 원점과 축들을 좌표계 B를 기준으로 서술해야 한다. (이 논의는 동차좌표를 사용한다.) 좌표계 A의 원점은 정사각형의 중심인데, 그 좌표는 $\mathbf{Q}_B$ = (0.5, 0.5, 0, 1)이다. 좌표계 A의 x축은 좌표계 B의 x축과 같은 방향이고, 이 축 방향으로 좌표계 A의 1단위는 좌표계 B의 1/2단위에 해당한다. 그러므로 $\mathbf{u}_B$ = (0.5, 0, 0, 0)이다. 좌표계 A의 y축은 좌표계 B의 y축과 반대 방향이고, 이 축 방향으로 좌표계 A의 1단위는 좌표계 B의 1/2 단위에 해당한다. 따라서 $\mathbf{v}_B$ = (0, −0.5, 0, 0)이다. 이것은 2차원 문제이므로 z축은 두 좌표계가 동일하다고 가정한다. 그러면 $\mathbf{w}_B$ = (0, 0, 1, 0)이다. 이 수치들을 위의 공식에 대입하면 문제가 요구하는 변환 행렬이 나온다.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

23. 아래의 변환 τ는 정사각형을 평행사변형으로 왜곡한다(그림 3.17 참고).

$$\tau(x, y) = (3x + y, x + 2y)$$

이 변환의 표준 행렬 표현을 구하고, 그 변환 행렬의 행렬식이 $\tau(\mathbf{i})$와 $\tau(\mathbf{j})$로 규정되는 평행사변형의 면적과 같음을 보여라.

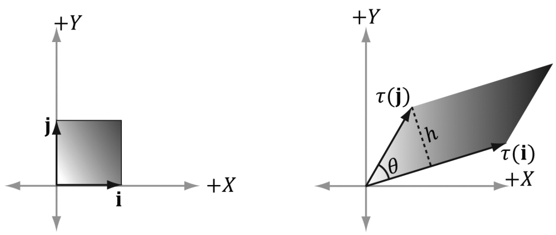


그림 D.8 정사각형을 평행사변형으로 사상하는 변환.

해답:

$$\tau(1, 0) = (3, 1)$$
$$\tau(0, 0) = (1, 2)$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\det \mathbf{A} = 6 - 1 = 5$$

$\tau(\mathbf{i})$와 $\tau(\mathbf{j})$로 정의되는 평행사변형의 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \text{밑변} \times \text{높이} \\ &= \|\tau(\mathbf{i})\|\|\tau(\mathbf{j})\|\sin\theta \\ &= \|\tau(\mathbf{i}) \times \tau(\mathbf{j})\| \end{aligned}$$

2차원에서는 외적이 정의되지 않지만, 다음처럼 $z = 0$으로 두어서 2차원 벡터들을 3차원으로 확장한 후 외적을 구하는 요령을 사용하면 된다. $z = 0$으로 두어도 벡터들의 크기나 방향에는 영향이 없음을 주목하기 바란다.

$$
\begin{aligned}
(3,\ 1,\ 0) \times (1,\ 2,\ 0) &= (0,\ 0,\ 5) \\
&= \|(3,\ 1,\ 0)\ \times\ (1,\ 2,\ 0)\| \\
&= \|(0,\ 0,\ 5)\| \\
&= 5
\end{aligned}
$$

또한, 제2장 연습문제 15도 참고하기 바란다. 표준기저벡터 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$로 정의되는 평행사변형(정사각형)의 넓이는 1이지만 $\tau(\mathbf{i})$와 $\tau(\mathbf{j})$로 정의되는 평행사변형의 넓이는 5라는 점에 주목하자. 즉, 변환 τ를 이용해서 단위 정사각형을 $\tau(\mathbf{i})$와 $\tau(\mathbf{j})$로 정의되는 평행사변형으로 왜곡시키면 부피(2차원의 경우 넓이)가 1에서 5로 변한다.

25. 대수학적으로 특징짓자면, 회전행렬은 행렬식이 1인 직교행렬이다. 연습문제 24와 [그림 3.7]를 다시 살펴보면 이 점을 이해할 수 있다. 회전된 기저벡터 $\tau(\mathbf{i})$, $\tau(\mathbf{j})$, $\tau(\mathbf{k})$는 모두 단위 길이이고 서로 직교이다. 더 나아가서, 물체를 회전해도 물체의 크기는 변하지 않으므로, 행렬식은 당연히 1이어야 한다. 두 회전행렬의 곱 $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}$이 하나의 회전행렬임을 보여라. $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$임을(따라서 $\mathbf{R}$이 직교행렬임을) 증명하고, $\det \mathbf{R} = 1$임을 증명하면 된다.

해답:

$$
\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T = \mathbf{I}
$$
$$
(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}
$$

이를 $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$라는 사실을 이용해서 정리하면:

$$
\det(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1)\det(\mathbf{R}_2) = 1
$$

27. 어떤 비례행렬 하나와 회전행렬 하나, 이동행렬 하나를 모두 곱해서 나온 변환 행렬을 시작점이 $\mathbf{p} = (0,\ 0,\ 0)$이고 끝점이 $\mathbf{q} = (0,\ 0,\ 1)$인 선분에 적용하면 길이가 2이고 벡터 $(1,\ 1,\ 1)$에 평행하며 시작점이 $(3,\ 1,\ 2)$인 선분이 된다고 하자. 그러한 비례행렬과 회전행렬, 이동행렬을 구하라.

해답:

원래의 선분은 길이가 1이고 z 축 방향을 가리킨다. 우선 선분을 2단위 비례시켜서 길이를 2로 만든다. 그런 다음에는 벡터 $(0,\ 0,\ 1)$과 $(1,\ 1,\ 1)$이 놓인 평면에서 선분을 각도 θ만큼 회전시켜서 벡터 $(1,\ 1,\ 1)$에 평행이 되게 한다(그림 D.9 참고). 이때 회전축은 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,\ 0,\ 1) \times (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ 1,\ 0)$이고 회전각 θ는 벡터 $(0,\ 0,\ 1)$과 벡터 $(1,\ 1,\ 1)$ 사이의 각도, 즉

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 54.73^\circ$$

이다. 마지막으로, 이동변환 $\mathbf{T}(3, 1, 2)$를 적용해야 한다. 이상의 세 변환을 행렬 형태로 표현하면 문제가 요구하는 답이 나온다.

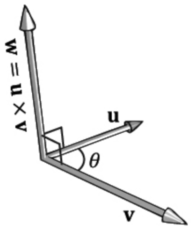


그림 D.9 $\mathbf{u}$가 $\mathbf{v}$와 같은 방향이 되게 하려면, $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$를 회전축으로 해서 $\mathbf{u}$를 각도 θ만큼 회전해야 한다.

제5장

1. [그림 5.35]와 같은 피라미드(사각뿔)의 정점 목록과 색인 목록을 작성하라.

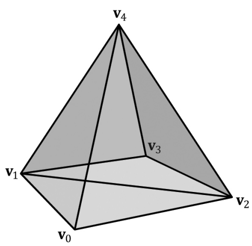


그림 D.10 피라미드의 정점들.

해답:

```
Vertex vertices[5] = {v0, v1, v2, v3, v4 };
UINT indices[] = {
    0, 1, 2,
    1, 3, 2,
    1, 4, 0,
    0, 4, 2,
    2, 4, 3,
    3, 4, 1
};
```

3. 카메라가 세계 좌표계를 기준으로 (−20, 35, −50)에서 대상점 (10, 0, 30)을 바라본다고 하자. 세계 공간의 상향 벡터가 (0, 1, 0)이라고 가정하고 이 카메라의 시야 행렬을 구하라.

해답:

[그림 5.20]을 기준으로 설명하겠다. $\mathbf{Q} = (-20, 35, -50)$, $\mathbf{T} = (10, 0, 30)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$이라고 하자. 카메라가 바라보는 방향은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{Q}}{\|\mathbf{T} - \mathbf{Q}\|} = \frac{(30,\ -35,\ 80)}{5\sqrt{341}} = (.3249,\ -.3791,\ .8664)$$

이 벡터는 카메라의 국소 z 축을 서술한다. 카메라의 '오른쪽'을 가리키는 단위 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{w}}{\|\mathbf{j} \times \mathbf{w}\|} = \frac{(.8664,\ 0,\ -.3249)}{.9254} = (.9363,\ 0,\ -.3511)$$

이 벡터는 카메라의 국소 x 축을 서술한다. 마지막으로, 카메라의 국소 y 축을 서술하는 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} = (.1331,\ .9253,\ .3549)$$

이로부터 구한 시야 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u} & -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{v} & -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{w} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9363 & .1331 & .3249 & 0 \\ 0 & .9253 & -.3791 & 0 \\ -.3511 & .3549 & .8664 & 0 \\ 1.170 & -11.98 & 63.09 & 1 \end{bmatrix}$$

다음과 같은 코드를 실행해서 행렬 성분들을 조사해 보면 답이 맞는지 확인할 수 있을 것이다.

```
XMMATRIX K = XMMatrixLookAtLH(
             XMLoadFloat3(&XMFLOAT3(-20.0f, 35.0f, -50.0f)),
             XMLoadFloat3(&XMFLOAT3(10.0f, 0.0f, 30.0f)),
             XMLoadFloat3(&XMFLOAT3(0.0f, 1.0f, 0.0f)));
```

5. 시야 창의 높이가 4라고 할 때, 수직 시야각이 $\theta = 60°$가 되려면 시야 창과 원점의 거리 d를 몇으로 설정해야 할까?

해답:

$$\tan 30^\circ = \frac{2}{d}$$

$$\therefore\ d = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 3.464$$

7. 다음과 같이 상수 A, B, C, D가 포함된 원근 투영 행렬이 주어졌다고 하자.

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 1 \\ 0 & 0 & D & 0 \end{bmatrix}$$

이 행렬을 만드는 데 쓰인 수직 시야각 α와 종횡비 r, 가까운 평면 거리, 먼 평면 거리를 A, B, C, D로 표현하라. 즉, 다음 방정식들을 풀어라.

(a) $A = \dfrac{1}{r\tan(\alpha/2)}$

(b) $B = \dfrac{1}{\tan(\alpha/2)}$

(c) $C = \dfrac{f}{f-n}$

(d) $D = \dfrac{-nf}{f-n}$

이 연립방정식을 풀면 이 책에서 설명하는 종류에 속하는 임의의 원근투영 행렬에서 수직 시야각 α와 종횡비 r, 가까운 평면 거리, 먼 평면 거리를 추출하는 공식들이 나온다.

해답:

방정식 (b)를 방정식 (a)로 나누면 다음이 나온다.

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\tan(\alpha/2)} \cdot \frac{r\tan(\alpha/2)}{1} = r$$

방정식 (b)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{B}$$

$$\therefore\ \alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{B}\right)$$

방정식 (c)를 f에 대해 정리하면:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{f}{f-n} \\
Cf - f - Cn &= 0 \\
f &= \frac{f}{C-1}
\end{aligned}
$$

이제 이것을 방정식 (d)의 f에 대입하고 n에 대해 정리한다.

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{-nf}{f-n} \\
Df - Dn &= -nf \\
D\frac{Cn}{C-1} - Dn &= -n\frac{Cn}{C-1} \\
CDn - Dn(C-1) &= -Cn^2 \\
Dn &= -Cn^2 \\
D &= -Cn \\
n &= -\frac{D}{C}
\end{aligned}
$$

따라서

$$
f = \frac{Cn}{C-1} = \frac{-D}{C-1} = \frac{D}{1-C}
$$

이다. 이런 식으로 대입과 정리를 반복하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$
r = \frac{B}{A}
$$

$$
\alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{B}\right)
$$

$$
n = -\frac{D}{C}
$$

$$
f = \frac{D}{1-C}
$$

8. 투영 텍스처 적용 알고리즘들을 위해서는 투영 행렬 다음에 아핀변환 행렬 **T**를 곱해야 한다. **T**를 곱하는 연산을 원근 나누기 이전에 하든 이후에 하든 차이가 없음을 증명하라. 구체적으로 말해서, **v**가 4차원 벡터, **P**가 투영 행렬, **T**가 4 × 4 아핀변환 행렬이고 아래첨자 w가 4차원 벡터의 w 성분을 뜻한다고 할 때, 다음을 증명하라.

$$\left(\frac{\mathbf{vP}}{(\mathbf{vP})_w}\right)\mathbf{T} = \frac{(\mathbf{vPT})}{(\mathbf{vPT})_w}$$

해답:

행렬 대수의 법칙들을 적용하면 다음과 같은 등식을 유도할 수 있다.

$$\left(\frac{\mathbf{vP}}{(\mathbf{vP})_w}\right)\mathbf{T} = \frac{1}{(\mathbf{vP})_w}(\mathbf{vPT})$$

그런데 **T**는 하나의 아핀변환 행렬로 주어진 것이다. 즉, **T**는 **w** 성분을 변경하지 않는다. 따라서 $(\mathbf{vP})_w = ((\mathbf{vP})\mathbf{T})_w = (\mathbf{vPT})_w$가 성립한다. 그러므로

$$\left(\frac{\mathbf{vP}}{(\mathbf{vP})_w}\right)\mathbf{T} = \frac{1}{(\mathbf{vP})_w}(\mathbf{vPT}) = \frac{(\mathbf{vPT})}{(\mathbf{vPT})_w}$$

이다.

10. $[x, y, z, 1]$이 시야 공간의 한 점의 좌표이고 $[x_{ndc}, y_{ndc}, z_{ndc}, 1]$이 그 점의 NDC 공간에서의 좌표라고 하자. NDC 공간에서 시야 공간으로의 변환을 다음과 같이 수행할 수 있음을 증명하라.

$$[x_{ndc}, y_{ndc}, z_{ndc}, 1]\mathbf{P}^{-1} = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1, \frac{1}{z}\right] \xrightarrow{w\text{로 나누기}} [x, y, z, 1]$$

해답:

식 5.1과 §5.6.3.5에 의해

$$x_{ndc} = \frac{x}{rz\tan(\alpha/2)}$$

$$y_{ndc} = \frac{y}{z\tan(\alpha/2)}$$

$$z_{ndc} = \frac{f}{f-n} + \frac{-nf}{(f-n)z}$$

이다. 여기서 (x, y, z)는 시야 공간 좌표이다.

$$[x_{ndc},\ y_{ndc},\ z_{ndc},\ 1]\begin{bmatrix} r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f-n}{nf} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \left[x_{ndc}\, r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ y_{ndc}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ 1,\ -z_{ndc}\frac{f-n}{nf}+\frac{1}{n}\right]$$

$$= \left[\frac{x}{rz\tan(\alpha/2)}r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ \frac{y}{z\tan(\alpha/2)}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ 1,\ -\left(\frac{f}{f-n}+\frac{-nf}{(f-n)z}\right)\frac{f-n}{nf}+\frac{1}{n}\right]$$

$$= \left[\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ 1,\ \left(\frac{-f}{f-n}+\frac{nf}{(f-n)z}\right)\frac{f-n}{nf}+\frac{1}{n}\right]$$

$$= \left[\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ 1,\ \left(\frac{-f}{nf}+\frac{nf}{znf}\right)+\frac{1}{n}\right]$$

$$= \left[\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ 1,\ \frac{-1}{n}+\frac{1}{z}+\frac{1}{n}\right]$$

$$= \left[\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ 1,\ \frac{1}{z}\right]$$

$$\left[\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ 1,\ \frac{1}{z}\right] \xrightarrow{w\text{로 나누기}} [x,\ y,\ z,\ 1]$$

시야 공간에서 NDC 공간으로 갈 때에는 우선 투영행렬을 곱한 다음에 $w = z$로 나누기를 수행한다. 따라서, NDC 공간에서 시야 공간으로 돌아가기 위해서는 투영행렬의 역행렬을 곱한 다음에 $w = 1/z$로 나누기(이는 $w = z$로 **곱하기**와 동치이다)를 수행해야 한다. 다음에서 보듯이, 동차 절단 공간($w = z$로 나누기 이전의)의 점이 주어진 경우에는 역변환 과정에서 w로 나누기를 수행할 필요가 없다. 점 $[x_{ndc}, y_{ndc}, z_{ndc}, 1]$의 동차 절단 공간에서의 좌표는 $[zx_{ndc}, zy_{ndc}, zz_{ndc}, z]$이다.

$$[zx_{ndc},\ zy_{ndc},\ zz_{ndc},\ z]\begin{bmatrix} r\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f-n}{nf} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\ x_{ndc}\, r \tan\!\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ y_{ndc} \tan\!\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ z,\ -z_{ndc}\,\frac{f-n}{nf} + \frac{1}{n}\right]$$

$$= \left[\frac{zx}{rz\tan(\alpha/2)} r\tan\!\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ \frac{zy}{z\tan(\alpha/2)}\tan\!\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ z,\ -z\!\left(\frac{f}{f-n} + \frac{-nf}{(f-n)z}\right)\frac{f-n}{nf} + \frac{1}{n}\right]$$

$$= [x,\ y,\ z,\ 1]$$

13. $S_{xy}(x, y, z) = (x + zt_x, y + zt_y, z)$로 주어진 3차원 전단변환(shear transform; 층밀림 변환)을 생각해 보자. [그림 5.37]에 이 변환이 나와 있다. 이것이 선형변환이며 행렬 표현이 다음과 같음을 증명하라.

$$\mathbf{S}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

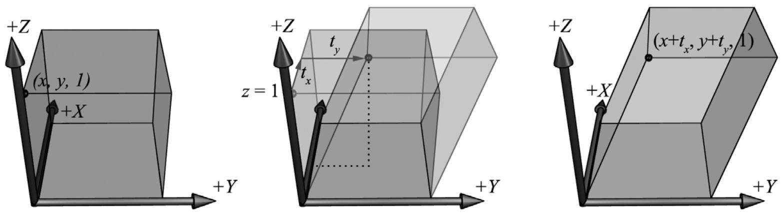


그림 D.11 전단변환은 x 성분과 y 성분을 z 성분에 비례해서 밀어낸다. 상자의 윗면은 $z = 1$ 평면에 있다. 전단 변환이 이 평면의 점들을 이동함을 주목하기 바란다.

해답:

$$\begin{aligned}
S_{xy}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= ((u_x + v_x) + (u_z + v_z)t_x,\ (u_y + v_y) + (u_z + v_z)t_y,\ u_z + v_z) \\
&= ((u_x + u_zt_x) + (v_x + v_zt_x),\ (u_y + u_zt_y) + (v_y + v_zt_y),\ u_z + v_z) \\
&= (u_x + u_zt_x,\ u_y + u_zt_y,\ u_z) + (v_x + v_zt_x,\ v_y + v_zt_y,\ v_z) \\
&= S_{xy}(\mathbf{u}) + S_{xy}(\mathbf{v}) \\
S_{xy}(k\mathbf{u}) &= (ku_x + ku_zt_x,\ ku_y + ku_zt_y,\ ku_z) \\
&= k(u_x + u_zt_x,\ u_y + u_zt_y,\ u_z) \\
&= kS_{xy}(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

따라서 S_{xy}는 선형변환이다. 이 변환의 행렬 표현을 구하기 위해, 이 변환을 표준기저벡터들에 적용한다.

$$S_{xy}(\mathbf{i}) = S_{xy}(1,0,0) = (1,0,0)$$
$$S_{xy}(\mathbf{j}) = S_{xy}(0,1,0) = (0,1,0)$$
$$S_{xy}(\mathbf{k}) = S_{xy}(0,0,1) = (t_x, t_y, 1)$$

행들이 이 세 벡터로 이루어진 행렬이 바로 이 변환의 행렬 표현이다.

$$\mathbf{S}_{xy} = \begin{bmatrix} \leftarrow S_{xy}(\mathbf{i}) \rightarrow \\ \leftarrow S_{xy}(\mathbf{j}) \rightarrow \\ \leftarrow S_{xy}(\mathbf{k}) \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

제9장

5. $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$가 어떤 3차원 삼각형의 정점들이고 그에 해당하는 텍스처 좌표가 $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$라고 하자. §9.2에서 보았듯이, 3차원 삼각형의 임의의 한 점 $\mathbf{p}(s, t) = \mathbf{p}_0 + s(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$(여기서 $s \geq 0$, $t \geq 0$, $s + t \leq 1$)의 텍스처 좌표 (u, v)는 삼각형 정점들에 지정된 텍스처 좌표들을 삼각형을 따라 보간해서, 좀 더 구체적으로 말하면 점 $\mathbf{p}$의 정의에 쓰인 것과 동일한 s, t 매개변수들로 다음과 같이 보간해서 구할 수 있다.

$$(u, v) = \mathbf{q}_0 + s(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) + t(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_0)$$

(a) (u, v)와 $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$가 주어졌을 때, 위의 방정식을 풀어서 (s, t)를 u와 v로 표현하라. (힌트: 벡터 방정식 $(u, v) - \mathbf{q}_0 = s(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) + t(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_0)$을 고려할 것.)

(b) $\mathbf{p}$를 u와 v의 함수로 표현하라. 즉, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$의 공식을 구하라.

(c) $\partial\mathbf{p}/\partial u$와 $\partial\mathbf{p}/\partial v$를 구하고, 그 벡터들의 기하학적 의미를 설명하라.

해답:

(a) $\mathbf{q}_0 = (u_0, v_0)$, $\mathbf{q}_1 = (u_1, v_1)$, $\mathbf{q}_2 = (u_2, v_2)$라고 하자. 그러면

$$(u, v) - (u_0, v_0) = s(u_1 - u_0, v_1 - v_0) + t(u_2 - u_0, v_2 - v_0)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 - u_0 & u_2 - u_0 \\ v_1 - v_0 & v_2 - v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$$

이다. [예 2.10]에서 보았듯이 2×2 행렬 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$의 역행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

이 역행렬을 앞의 행렬 공식의 양변에 곱하면 A가 나온다.

$$\therefore \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_0 & u_2 - u_0 \\ v_1 - v_0 & v_2 - v_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} v_2 - v_0 & u_0 - u_2 \\ v_0 - v_1 & u_1 - u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)}$$

다른 말로 하면, 삼각형 위의 한 점의 텍스처 좌표 (u, v)가 주어졌을 때, 그 좌표에 해당하는 3차원 점을 산출하는 매개변수 좌표 (s, t)를 구하는 것이 가능하다.

(b) 부문제 (a)에서 보았듯이 $s = s(u, v)$이고 $t = t(u, v)$이다. 따라서 $\mathbf{p}(s, t) = \mathbf{p}_0 + s(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$을 다음과 같이 (u, v)로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{p}(s(u, v), t(u, v))$$

$$= \mathbf{p}_0 + s(u, v)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + t(u, v)(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$$

(c) 우선 다음에 주목하자.

$$\begin{bmatrix} s(u, v) \\ t(u, v) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} v_2 - v_0 & u_0 - u_2 \\ v_0 - v_1 & u_1 - u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial t}{\partial u}(u, v) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} v_2 - v_0 \\ v_0 - v_1 \end{bmatrix}}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial t}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} u_0 - u_2 \\ u_1 - u_0 \end{bmatrix}}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)}$$

그러면 u의 편도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} \\
&= (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)\frac{\partial s}{\partial u} + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)\frac{\partial t}{\partial u} \\
&= \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)(v_2 - v_0) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)(v_0 - v_1)}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)} \\
&= \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)(v_2 - v_0) - (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)(v_1 - v_0)}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)} \\
&= \frac{\Delta v_1 \mathbf{e}_0 - \Delta v_0 \mathbf{e}_1}{\Delta u_0 v_1 - \Delta u_1 v_0}
\end{aligned}$$

여기에는 다음과 같은 단축 표기들이 쓰였다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 \\
\mathbf{e}_1 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 \\
\Delta u_0 &= u_1 - u_0 \\
\Delta u_1 &= u_2 - u_0 \\
\Delta v_0 &= v_1 - v_0 \\
\Delta v_1 &= v_2 - v_0
\end{aligned}$$

v의 편도함수도 마찬가지로 방식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v} \\
&= (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)\frac{\partial s}{\partial v} + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)\frac{\partial t}{\partial v} \\
&= \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)(u_0 - u_2) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)(u_1 - u_0)}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)} \\
&= \frac{-(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)(u_2 - u_0) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)(u_1 - u_0)}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)} \\
&= \frac{-\Delta u_1 \mathbf{e}_0 + \Delta u_0 \mathbf{e}_1}{\Delta u_0 \Delta v_1 - \Delta u_1 \Delta v_0}
\end{aligned}$$

정리하자면,

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} = \frac{\Delta v_1 \mathbf{e}_0 - \Delta v_0 \mathbf{e}_1}{\Delta u_0 \Delta v_1 - \Delta u_1 \Delta v_0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} = \frac{-\Delta u_1 \mathbf{e}_0 + \Delta u_0 \mathbf{e}_1}{\Delta u_0 \Delta v_1 - \Delta u_1 \Delta v_0}$$

$$\begin{bmatrix} \leftarrow \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \rightarrow \\ \leftarrow \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \rightarrow \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta u_0 \Delta v_1 - \Delta v_0 \Delta u_1} \begin{bmatrix} \Delta v_1 & -\Delta v_0 \\ -\Delta u_1 & \Delta u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{e}_0 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{e}_1 \rightarrow \end{bmatrix}$$

이다. 이를 §19.3에서 유도한 결과와 비교해 보기 바란다. §19.3에서는 이와는 다른 방식으로 공식을 간단하게 유도했다.

3차원 벡터 $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u}$는 텍스처 공간에서의 u 방향 이동에 따른 3차원 공간에서의 이동 '속도'에 해당한다. 다른 말로 하면, 이 벡터는 텍스처 공간 u 축의 3차원 공간에서의 방향을 말해준다. 마찬가지로, 3차원 벡터 $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v}$는 텍스처 공간 v 방향(즉, 텍스처 공간 v 축의 3차원 공간에서의 방향) 이동에 따른 3차원 공간에서의 이동 '속도'에 해당한다.

6. (문제 생략.) 부록 DVD 제9장 폴더의 'TexturedColumns' 예제를 보라.

제11장

2. $\mathbf{s} = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d}{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{L})}(\mathbf{p} - \mathbf{L}) = \mathbf{p}\mathbf{S}_{point}$임을 증명하라. §11.5.1에서 평행광 그림자에 대해 했던 것처럼 벡터 대 행렬 곱셈을 전개해서 각 성분을 확인하면 된다.

해답:

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, 1)$이라고 하자. $i \in \{1, 2, 3\}$에 대해, $\mathbf{s} = \mathbf{p}\mathbf{S}_{point}$의 i번째 좌표성분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} s'_i &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} + d)p_i - L_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d) \\ &= p_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} + p_i d - L_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - L_i d \\ &= p_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} + p_i d + (p_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - p_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - L_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - L_i d \\ &= p_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} - p_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + p_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d) - L_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d) \\ &= p_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{p}) + p_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d) - L_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d) \\ &= -p_i \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{L}) + (p_i - L_i)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d) \end{aligned}$$

그리고 넷째 좌표성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s'_4 &= -\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{L} \\ &= -\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{L}) \end{aligned}$$

여기에 동차 나누기를 적용하면 다음이 나온다.

$$\begin{aligned} s''_i &= \frac{-p_i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{L}) + (p_i - L_i)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + d)}{-\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{L})} \\ &= p_i - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + d}{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{L})} = (p_i - L_i) \end{aligned}$$

그런데 이는 $\mathbf{s} = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + d}{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{L})}(\mathbf{p} - \mathbf{L})$ 의 i번째 성분과 정확히 동일하다. 그러므로:

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + d}{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{L})}(\mathbf{p} - \mathbf{L}) = \mathbf{pS}_{point}$$

제13장

5. (문제 생략.) 부록 DVD 제13장 폴더의 'WavesCS' 예제를 보라.
6. (문제 생략.) 부록 DVD 제13장 폴더의 'SobelFilter' 예제를 보라.

제15장

1. 세계 좌표계의 좌표축들과 원점이 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$과 $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$이고 세계 좌표계를 기준으로 한 시야 공간 좌표축들과 원점이 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$와 $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$라고 할 때, 내적을 이용해서 다음과 같은 형태의 시야 행렬을 유도하라.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u} & -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{v} & -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{w} & 1 \end{bmatrix}$$

(기억하겠지만, 세계 공간에서 시야 공간으로의 좌표 변경 행렬을 구하려면 그냥 세계 공간 축들과 원점의 시야 공간 기준 좌표들을 구하기만 하면 된다. 그 좌표들이 곧 시야 행렬의 행들이다.)

해답:

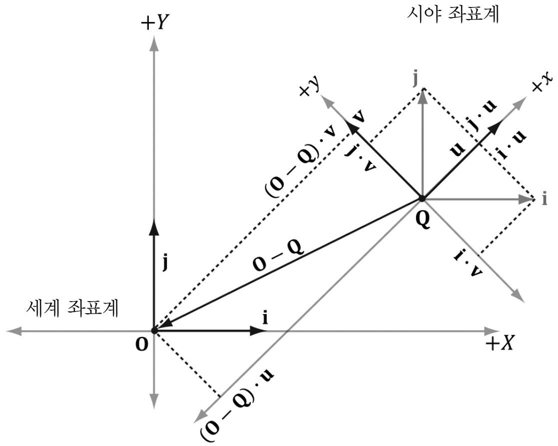


그림 D.12 시야 공간에서의 세계 공간 좌표 구하기.

주어진 모든 벡터의 좌표는 세계 공간이 기준이며, 축 벡터들은 모두 단위 벡터이다. 그런데 내적을 이용하면 세계 공간 좌표축들과 원점의 시야 공간 기준 좌표들을 구할 수 있다. 다음은 [그림 D.12]를 참고해서 이끌어낸 좌표들이다.

$$[\mathbf{i}]_V = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{v},\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{w}) = (u_x,\ v_x,\ w_x)$$

$$[\mathbf{j}]_V = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{v},\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{w}) = (u_y,\ v_y,\ w_y)$$

$$[\mathbf{k}]_V = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{v},\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{w}) = (u_z,\ v_z,\ w_z)$$

$$[\mathbf{O}]_V = ((\mathbf{O}-\mathbf{Q})\cdot\mathbf{u},\ (\mathbf{O}-\mathbf{Q})\cdot\mathbf{v},\ (\mathbf{O}-\mathbf{Q})\cdot\mathbf{w}) = (-\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u},\ -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{v},\ -\mathbf{Q}\cdot\mathbf{w})$$

이들을 동차 좌표로 확장한 벡터들을 행들로 삼아서 행렬을 만들면 시야 행렬이 나온다.

제16장

2. NDC 공간의 평면 방정식은 형태가 아주 단순하다. 시야 절두체 안의 모든 점은 다음 구간에 속한다.

$$-1 \le x_{ndc} \le 1$$
$$-1 \le y_{ndc} \le 1$$
$$0 \le z_{ndc} \le 1$$

특히, NDC 공간에서 왼쪽 평면의 방정식은 $x = -1$이고 오른쪽 평면의 방정식은 $x = 1$이다. 원근 나누기 이전의 동차 절단 공간에서는 절두체 안의 모든 점이 다음 구간에 속한다.

$$-w \le x_h \le w$$
$$-w \le y_h \le w$$
$$0 \le z_h \le w$$

이 경우 왼쪽 평면은 $w = -x_h$로 정의되고 오른쪽 평면은 $w = x_h$로 정의된다. $\mathbf{M} = \mathbf{VP}$가 시야 행렬과 투영 행렬을 곱한 시야-투영 변환 행렬이고 $\mathbf{v} = (x, y, z, 1)$이 세계 공간을 기준으로 한 절두체 안의 한 점이라고 하자. $(x_h, y_h, z_h, w) = \mathbf{vM} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,2}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,3}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4})$라는 점을 고려해서, 세계 공간에서 절두체 안쪽을 향한 절두체 평면들이 다음과 같이 주어짐을 보여라.

왼쪽 평면	$0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,1} + \mathbf{M}_{*,4})$
오른쪽 평면	$0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,1})$
아래 평면	$0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,2} + \mathbf{M}_{*,4})$
위 평면	$0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,2})$
가까운 평면	$0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,3}$
먼 평면	$0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,3})$

참고: (a) 문제가 요구하는 것은 절두체 안쪽을 향하는 평면 법선이다. 따라서, 절두체 안의 한 점과 평면 사이의 거리는 양수이어야 한다. 다른 말로 하면, 절두체 안의 한 점 $\mathbf{p}$에 대해 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + d \geq 0$이어야 한다.

(b) $p_w = 1$이므로, 위의 내적들을 전개해서 정리하면 $Ax + By + Cz + D = 0$ 형태의 평면 방정식들이 나온다.

(c) 계산된 평면 법선들은 단위 길이가 아니다. 평면을 정규화하는 방법이 부록 C에 나와 있다.

해답:

$\mathbf{v} = (x, y, z, 1)$이 절두체 안의 한 점이라고 가정하자. 동차 공간에서 그 점의 좌표 $(x_h, y_h, z_h, w) = \mathbf{vM} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,2}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,3}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4})$의 좌표성분들은 다음과 같은 구간으로 한정된다.

$$-w \leq x_h \leq w$$
$$-w \leq y_h \leq w$$
$$0 \leq z_h \leq w$$

이들을 적절히 대입하면 세계 공간에서의 평면의 범위(경계)를 구할 수 있다.

왼쪽 평면:

$$-w \leq x_h$$
$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4} \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,1}$$
$$0 \leq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,1} + \mathbf{M}_{*,4})$$

즉, $\mathbf{v}$는 세계 공간 평면 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{M}_{*,1} + \mathbf{M}_{*,4}) = 0$의 양의 반공간 안에 있다.

오른쪽 평면:

$$x_h \leq w$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,1} \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4}$$
$$0 \leq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,1})$$

즉, $\mathbf{v}$는 세계 공간 평면 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,1}) = 0$의 양의 반공간 안에 있다.

아래쪽 평면:

$$-w \leq y_h$$
$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4} \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,2}$$
$$0 \leq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,2} + \mathbf{M}_{*,4})$$

즉, $\mathbf{v}$는 세계 공간 평면 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{M}_{*,2} + \mathbf{M}_{*,4}) = 0$의 양의 반공간 안에 있다.

위쪽 평면:

$$
\begin{aligned}
y_h &\le w \\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,2} &\le \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4} \\
0 &\le \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,2})
\end{aligned}
$$

즉, $\mathbf{v}$는 세계 공간 평면 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,2}) = 0$의 양의 반공간 안에 있다.

가까운 평면:

$$
\begin{aligned}
0 &\le z_h \\
0 &\le \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,3}
\end{aligned}
$$

즉, $\mathbf{v}$는 세계 공간 평면 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{*,3} = 0$의 양의 반공간 안에 있다.

먼 평면:

$$
\begin{aligned}
z_h &\le w \\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,3} &\le \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_{*,4} \\
0 &\le \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,3})
\end{aligned}
$$

즉, $\mathbf{v}$는 세계 공간 평면 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{M}_{*,4} - \mathbf{M}_{*,3}) = 0$의 양의 반공간 안에 있다.

4. OBB(유향 경계상자)는 중심 $\mathbf{C}$와 세 개의 직교축 벡터 $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, 그리고 세 축 방향으로의 한계 거리(상자 중심에서 해당 면까지의 거리) a_0, a_1, a_2로 정의할 수 있다. 중심은 상자의 위치, 세 축은 상자의 방향, 한계 거리들은 상자의 크기를 결정한다.

    (a) 길이 r이 다음과 같이 정의된다고 할 때, 하나의 OBB를 평면의 법선 벡터로 정의되는 한 축에 투영한 '그림자'의 길이가 $2r$임을 보여라. [그림 16.13](2차원으로 단순화했음)을 참고하기 바란다.

    $$r = |a_0\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}| + |a_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}| + |a_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}|$$

    (b) 앞의 r의 공식에서, 그냥 $r = (a_0\mathbf{r}_0 + a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$으로 계산하지 않고 반드시 절댓값들을 취해야 하는 이유를 설명하라.

    (c) 이로부터, OBB가 평면의 앞쪽에 있는지, 아니면 뒤쪽에 있는지, 아니면 평면과 교차하는지를 결정하는 평면 대 OBB 교차 판정 방법을 고안하라.

    (d) AABB는 OBB의 한 특별한 경우이므로 OBB에 대한 판정 방법은 AABB에도 유효하다. 그러나 AABB에서는 r의 공식이 단순해진다. AABB의 경우에 대해 단순

화된 r의 공식을 구하라.

해답:

(b) 만일 $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}$ 항들 중 하나가 음수이면, 합 $(a_0\mathbf{r}_0 + a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$은 OBB의 '반지름'이 아니다. 이를 다른 식으로 설명해 보겠다(2차원에서). 상자 중심에서 꼭짓점(모퉁이 정점)들로의 벡터들을 다음과 같이 표기하기로 하자.

$$\mathbf{v}_0 = +a_0\mathbf{r}_0 + a_1\mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{v}_1 = +a_0\mathbf{r}_0 - a_1\mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{v}_2 = -a_0\mathbf{r}_0 - a_1\mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{v}_3 = -a_0\mathbf{r}_0 + a_1\mathbf{r}_1$$

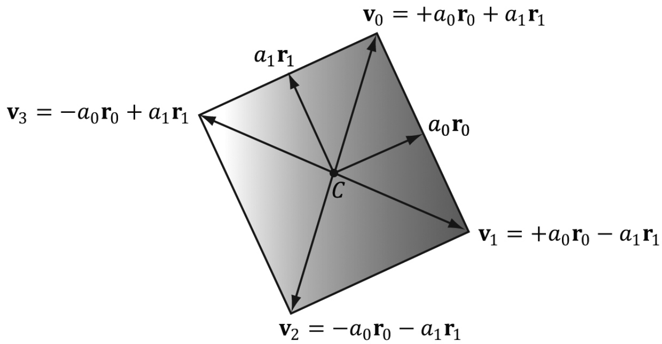


그림 D.13 꼭짓점 벡터들. 이들이 꼭짓'점'이 아니라 중점에서 꼭짓점으로의 '벡터'임을 주의하기 바란다.

OBB의 '반지름'은 $\mathbf{n}$으로의 투영이 가장 큰 꼭짓점 벡터의 길이이다.

$$r = \max(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_3)$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{n} \cdot a_0\mathbf{r}_0 + \mathbf{n} \cdot a_1\mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{n} \cdot a_0\mathbf{r}_0 - \mathbf{n} \cdot a_1\mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2 = -\mathbf{n} \cdot a_0\mathbf{r}_0 - \mathbf{n} \cdot a_1\mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_3 = -\mathbf{n} \cdot a_0\mathbf{r}_0 + \mathbf{n} \cdot a_1\mathbf{r}_1$$

이 길이는 벡터의 모든 성분이 양수(또는 모든 성분이 음수)일 때 최댓값이 된다. 그런 경우 성분들이 서로 상쇄되는 일이 없기 때문이다. 다른 말로 하면, 최대 길이는 다음과 같다.

$$r = \max(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_3) = |a_0\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}| + |a_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}|$$

이러한 논증을 꼭짓점 벡터가 여덟 개인 3차원의 경우로도 일반화할 수 있다.

(c) OBB 중심에서 평면까지의 부호 있는 거리는 $k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{c} + d$이다. 만일 $|k| \leq r$이면 구는 평면과 교차한다. 만일 $k < -r$이면 OBB는 평면의 뒤에 있는 것이다. 만일 $k > r$이면 OBB는 평면의 앞에 있는 것이며, 구는 평면의 양의 반공간과 교차한다.

(d) AABB의 경우 $\mathbf{r}_0 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (0, 0, 1)$이다. 따라서:

$$\begin{aligned} r &= |a_0\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}| + |a_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}| + |a_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}| \\ &= |a_0 n_x| + |a_1 n_y| + |a_2 n_z| \end{aligned}$$

제20장

6. 상자(직육면체) $[l, r] \times [b, t] \times [n, f]$를 상자 $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$로 사상하는 행렬을 유도하라. 이 행렬은 '중심을 벗어난(off-centered, 즉, 상자의 중심이 시야 공간의 원점이 아닌)' 직교투영 시야 입체에 해당한다. 이와는 대조적으로, §20.2에서 유도한 직교투영 행렬은 '중심에 놓인(on-centered)' 직교투영 시야 입체에 해당한다.

해답:

세 좌표성분 모두에 대해, 하나의 구간을 다른 어떤 구간으로 다시 사상해야 한다. 이 문제를 한 좌표성분에 대해서만 풀어서 일반해를 얻은 후 그것을 다른 좌표성분들에 적용할 수 있다. 문제가 요구하는 사상은 $[s, t] \rightarrow [u, v]$이다. 이것이 $g(x) = ax + b$의 형태라고(즉 비례와 이동으로 구성되어 있다고) 가정하자. 주어진 조건은 $q(s) = u$이고 $g(t) = v$라는 것이다. 이로부터 다음과 같은 연립방정식을 세워서 a와 b를 구하면 된다.

$$as + b = u$$

$$at + b = v$$

첫 방정식은 $b = u - as$임을 의미한다. 이를 둘째 방정식에 대입하면 a가 나온다.

$$at + u - as = v$$

$$a(t - s) = v - u$$

$$a = \frac{v - u}{t - s}$$

b도 마찬가지 방식으로 구한다.

$$\begin{aligned} b &= u - as \\ &= u - \frac{v-u}{t-s}s \\ &= \frac{u(t-s) - vs + us}{t-s} \\ &= \frac{ut - us - vs + us}{t-s} \\ &= \frac{ut - vs}{t-s} \end{aligned}$$

따라서

$$g(x) = \frac{v-u}{t-s}x + \frac{ut-vs}{t-s}$$

이다. 이 공식을 문제에 주어진 구간들에 적용하면 다음과 같은 변환들이 나온다.

$$[l,\ r] \to [-1,\ 1]$$

$$x' = \frac{2}{r-l}x + \frac{l-r}{r-l}$$

$$[t,\ b] \to [-1,\ 1]$$

$$y' = \frac{2}{t-b}y + \frac{b-t}{t-b}$$

$$[n,\ f] \to [0,\ 1]$$

$$z' = \frac{1}{f-n}z + \frac{-n}{f-n}$$

다음은 이를 행렬로 표현한 것이다.

$$[x',\ y',\ z',\ 1] = [x,\ y,\ z,\ 1]\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f-n} & 0 \\ \frac{l-r}{r-l} & \frac{b-t}{t-b} & \frac{-n}{f-n} & 1 \end{bmatrix}$$

7. 제17장에서 원근투영 행렬에 맞는 선택(picking) 방법을 배웠다. 중심을 벗어난 직교 투영에 맞는 선택 공식을 유도하라.

해답:

선택된 점의 화면 공간 좌표가 (s_x, s_y)라고 하자. 뷰포트 변환을 역으로 적용하면 그 점의 NDC 공간 좌표가 나온다.

$$x_{ndc} = \frac{2s_x}{w} - 1$$

$$y_{ndc} = -\frac{2s_y}{h} + 1$$

직교투영 행렬은 시야 입체를 시야 공간에서 NDC 공간으로 변환한다. 중심을 벗어난 직교투영 변환은 다음과 같다.

$$[x_v,\ y_v,\ z_v,\ 1]\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f-n} & 0 \\ \frac{l-r}{r-l} & \frac{b-t}{t-b} & \frac{-n}{f-n} & 1 \end{bmatrix} = [x_{ndc},\ y_{ndc},\ z_{ndc},\ 1]$$

특히, 이로부터 다음 두 등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{2x_v}{r-l} + \frac{l-r}{r-l} = x_{ndc}$$

$$\frac{2y_v}{t-b} + \frac{b-t}{t-b} = y_{ndc}$$

다음은 이 두 등식을 이용해서 시야 공간 좌표 (x_v, y_v)를 (s_x, s_y)로 표현하는 과정이다.

$\frac{2x_v}{r-l} + \frac{l-r}{r-l} = x_{ndc}$	$\frac{2y_v}{t-b} + \frac{b-t}{t-b} = y_{ndc}$
$\frac{2x_v}{r-l} = x_{ndc} - \frac{l-r}{r-l}$	$\frac{2y_v}{t-b} = y_{ndc} - \frac{b-t}{t-b}$
$x_v = \frac{r-l}{2} x_{ndc} - \frac{r-l}{2} \cdot \frac{l-r}{r-l}$	$y_v = \frac{t-b}{2} y_{ndc} - \frac{t-b}{2} \cdot \frac{b-t}{t-b}$
$x_v = \frac{x_{ndc} - \mathbf{P}_{30}}{\mathbf{P}_{00}}$	$y_v = \frac{y_{ndc} - \mathbf{P}_{31}}{\mathbf{P}_{11}}$
$x_v = \frac{\frac{2s_x}{w} - 1 - \mathbf{P}_{30}}{\mathbf{P}_{00}}$	$y_v = \frac{-\frac{2s_y}{h} + 1 - \mathbf{P}_{31}}{\mathbf{P}_{11}}$

따라서, 시야 공간에서의 선택 광선은 $\mathbf{r}(t) = (x_v, y_v, 0) + t(0, 0, 1)$이다. 직교투영에서 모든 광선은 z 축 방향 $(0, 0, 1)$과 평행임을 주목하기 바란다.

예제 코드:

```
Ray3 CalcWorldPickRay(XMMATRIX P, Point s, Size viewport)
{
    float sx = (float)s.X;
    float sy = (float)s.Y;

    float w = (float)viewport.Width;
    float h = (float)viewport.Height;

    float x = (2.0f*sx/w - 1.0f)/P(0,0) - P(3,0)/P(0,0);
    float y = (-2.0f*sy/h + 1.0f)/P(1,1) - P(3,1)/P(1,1);

    Ray3 pickRay;

    pickRay.Origin = XMFLOAT3(x, y, 0.0f);
    pickRay.Direction = XMFLOAT3(0.0f, 0.0f, 1.0f);

    return pickRay;
}
```

참고: 이상의 해답은 중심을 벗어난 직교투영 행렬은 물론이고 중심에 놓인 직교투영 행렬에도 적용된다. 이는 중심에 놓인 직교투영이 중심을 벗어난 직교투영의 한 특수 사례일 뿐이기 때문이다.

제22장

3. 벡터 (2, 1)을 복소수 곱셈을 이용해서 30°만큼 회전하라.

해답:

$$\mathbf{z} = 2 + i$$

$$\mathbf{z}_2 = (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{z}' = \mathbf{z}\mathbf{z}_2 &= (2 + i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\\ &= \sqrt{3} + i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\\ &= \frac{2\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i\end{aligned}$$

이것이 정답인지는 회전행렬로도 같은 결과가 나오는지 보면 확인할 수 있다.

$$[2,1]\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix} = [2,1]\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = \left[\frac{2\sqrt{3}-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right]$$

5. $\mathbf{z} = a + ib$라고 할 때 $|\mathbf{z}|^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}$임을 보여라.

해답:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} &= (a + ib)(a - ib)\\ &= a^2 - abi + abi - b^2i^2\\ &= a^2 + b^2\\ &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2\\ &= |\mathbf{z}|^2\end{aligned}$$

6. $\mathbf{M}$이 2 × 2 행렬이라고 하자. 만일 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$이면(즉, $\mathbf{M}$이 회전행렬이면), 그리고 오직 그럴 때에만 $\det \mathbf{M} = 1$이고 $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$라는 명제를 증명하라. 이 명제는 주어진 행렬이 회전행렬인지 판정하는 한 방법이 된다.

해답:

$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$라고 하자. 그리고 det $\mathbf{M}$ = 1이고 $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$라고 가정하자.

det $\mathbf{M}$ = 1이므로, 그리고

$$\mathbf{MM}^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로, 다음 등식들이 성립한다.

$$M_{11}^2 + M_{12}^2 = 1$$
$$M_{21}^2 + M_{22}^2 = 1$$
$$M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1$$

이로부터 다음 두 등식을 얻는다.

$$(M_{11}^2 + M_{12}^2) + (M_{21}^2 + M_{22}^2) = 2$$
$$2(M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}) = 2$$

이제 한 등식에서 다른 등식을 빼서 다음과 같이 정리한다.

$$M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{21}^2 + M_{22}^2 - 2M_{11}M_{22} + 2M_{12}M_{21} = 0$$
$$(M_{11}^2 - 2M_{11}M_{22} + M_{22}^2) + (M_{12}^2 + 2M_{12}M_{21} + M_{21}^2) = 0$$
$$(M_{11} - M_{22})^2 + (M_{12} + M_{21})^2 = 0$$

마지막 식의 두 항은 음수일 수 없으므로, 반드시

$$M_{11} = M_{22}$$

이고

$$M_{21} = -M_{12}$$

이다. 따라서 행렬 $\mathbf{M}$은 다음과 같은 형태이다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

마지막으로, det $\mathbf{M} = A^2 + B^2 = 1$이므로 $A = \cos\theta$이고 $B = \sin\theta$인 θ가 반드시 존재한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

이번에는 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$라고 가정하자. 그러면

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 $\det \mathbf{M} = 1$이고 $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$이다. 다른 말로 하면, 모든 회전행렬은 반드시 행렬식이 1인 직교행렬이며, 행렬식이 1인 모든 직교행렬은 반드시 회전행렬이다.

7. 두 사원수 $\mathbf{p} = (1, 2, 3, 4)$와 $\mathbf{q} = (2, -1, 1, -2)$에 대해 다음 연산들을 수행하라.

(a) $\mathbf{p} + \mathbf{q}$

(b) $\mathbf{p} - \mathbf{q}$

(c) $\mathbf{pq}$

(d) $\mathbf{p}^*$

(e) $\mathbf{q}^*$

(f) $\mathbf{p}^*\mathbf{p}$

(g) $\|\mathbf{p}\|$

(h) $\|\mathbf{q}\|$

(i) $\mathbf{p}^{-1}$

(j) $\mathbf{q}^{-1}$

해답:

(a) $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (3, 1, 4, 2)$

(b) $\mathbf{p} - \mathbf{q} = (-1, 3, 2, 6)$

(c) $$\mathbf{pq} = \begin{bmatrix} p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_4 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ -7 \\ -11 \end{bmatrix}$$

(d) $\mathbf{p}^* = (-1, -2, -3, 4)$

(e) $\mathbf{q}^* = (-2, 1, -1, -2)$

(f) $\mathbf{p}^*\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

(g) $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{30}$

(h) $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2+2^2} = \sqrt{10}$

(i) $\mathbf{p}^{-1} = \dfrac{\mathbf{p}^*}{\|\mathbf{p}\|^2} = \dfrac{(-1,-2,-3,4)}{30}$

(j) $\mathbf{q}^{-1} = \dfrac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2} = \dfrac{(-2,1,-1,-2)}{10}$

```
XMVECTOR p = XMVectorSet(1.0f, 2.0f, 3.0f, 4.0f);
XMVECTOR q = XMVectorSet(2.0f, -1.0f, 1.0f, -2.0f);

XMVECTOR a = p + q;
XMVECTOR b = p - q;
XMVECTOR c = XMQuaternionMultiply(q,p );
XMVECTOR d = XMQuaternionConjugate(p)
XMVECTOR e = XMQuaternionConjugate(q);
XMVECTOR f = XMQuaternionMultiply(XMQuaternionConjugate(p),p);
XMVECTOR g = XMQuaternionLength(p);
XMVECTOR h = XMQuaternionLength(q);
XMVECTOR i = XMQuaternionInverse(p);
XMVECTOR j = XMQuaternionInverse(q);

cout << "p + q = " << a << endl;
cout << "p - q = " << b << endl;
cout << "pq = " << c << endl;
cout << "p* = " << d << endl;
cout << "q* = " << e << endl;
cout << "p*p = " << f << endl;
cout << "||p|| = " << g << endl;
cout << "||q|| = " << h << endl;
cout << "invP = " << i << endl;
cout << "invQ = " << j << endl;
```

9. 단위 사원수 $\mathbf{q} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$을 극좌표로 표현하라.

해답:

$$w = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

$$\mathbf{n} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)}{\sin(120°)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\mathbf{q} = (\sin(120^\circ)(1,\ 0,\ 0),\ \cos(120^\circ))$$

10. 축 $(1,\ 1,\ 1)$에 대한 45° 회전을 나타내는 단위 사원수를 구하라.

해답:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{n},\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= \left(\sin(22.5^\circ)\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \cos(22.5^\circ)\right)\\ &= (.22094,\ .22094,\ .22094,\ .92388)\end{aligned}$$

분모의 2는 원하는 회전각이 2θ(식 22.3 참고)가 아니라 θ라는 점 때문에 도입한 것이다.

```
XMVECTOR p = XMQuaternionRotationAxis(
               XMVectorSet(1.0f, 1.0f, 1.0f, 0.0f),
               XMConvertToRadians(45.0f));
cout << "p = " << p << endl;
```

11. 축 $(0,\ 0,\ -1)$에 대한 60° 회전을 나타내는 단위 사원수를 구하라.

해답:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{n},\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= (\sin(30^\circ)(0,\ 0,\ -1),\ \cos(30^\circ))\\ &= \left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

분모의 2는 원하는 회전각이 2θ(식 22.3 참고)가 아니라 θ라는 점 때문에 도입한 것이다.

12. 사원수 $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$과 $\mathbf{q} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$에 대해 $\text{slerp} = \left(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \frac{1}{2}\right)$을 구하고, 그 결과가 단위 사원수인지 확인하라.

해답:

$\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = 1$임은 쉽게 확인할 수 있으므로 구체적인 설명은 생략한다. 이 두 사원수 사이의 각도는 다음과 같이 주어진다.

$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

$$\mathrm{slerp}(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ t) = \frac{\sin((1-t)\theta)\mathbf{a}+\sin(t\theta)\mathbf{b}}{\sin\theta}$$

따라서,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = \mathrm{slerp}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q},\ \tfrac{1}{2}) &= \frac{\sin(15^\circ)\mathbf{p}+\sin(15^\circ)\mathbf{q}}{\sin 30^\circ} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathbf{p}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathbf{q}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) + \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{2\sqrt{2}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

이다. 보간된 사원수 $\mathbf{r}$이 단위 길이임은 다음과 같이 간단히 확인할 수 있다.

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$$

$R_{\mathbf{p}}$가 회전축이 $(1,0,0)$, 회전각이 $2\theta = 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$인 회전이고 $R_{\mathbf{q}}$는 회전축이 $(1,0,0)$, 회전각이 $2\theta = 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$인 회전임을, 그리고 $R_{\mathbf{r}}$은 회전축이 $(1,0,0)$이고 회전각이 $2\theta = 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$인 회전임을 주목하자. 90°는 60°와 120°의 딱 중간인데, 이는 보간 매개변수가 $\frac{1}{2}$(중점에 해당)이라는 점과 잘 부합한다.

```
XMVECTOR p = XMVectorSet(0.5f, 0.0f, 0.0f, sqrt(3.0)/2.0f);
XMVECTOR q = XMVectorSet(sqrt(3.0)/2.0f, 0.0f, 0.0f, 0.5f);

XMVECTOR r = XMQuaternionSlerp(p, q, 0.5f);
cout << "r = " << r << endl;
```

14. $\mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*\mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + q_4^2$임을 증명하라.

해답:

$\mathbf{q} = (\mathbf{u}, w) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\mathbf{q}\mathbf{q}^* &= (\mathbf{u}, w)(-\mathbf{u}, w)\\ &= (-w\mathbf{u} + w\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (-\mathbf{u}), w^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\\ &= (\mathbf{0}, \|\mathbf{u}\|^2 + w^2)\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + w^2\\ &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2\end{aligned}$$

이다. 사원수의 벡터부가 $\mathbf{0}$(영벡터)임을 주목하기 바란다. 그래서 사원수를 하나의 실수로 변환해서(§22.2.4 참고) 정리했다. $\mathbf{q}^*\mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$임도 마찬가지 방식으로 증명하면 된다.

16. 다음 성질들을 증명하라.

(a) $(\mathbf{p}\mathbf{q})^* = \mathbf{q}^*\mathbf{p}^*$

(b) $(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^*$

(c) $s \in \mathbb{R}$에 대해 $(s\mathbf{q})^* = s\mathbf{q}^*$

(d) $\|\mathbf{p}\mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|$

해답:

$\mathbf{p} = (\mathbf{u}, a)$이고 $\mathbf{q} = (\mathbf{v}, b)$라고 하자. 그러면 $\mathbf{p}^* = (-\mathbf{u}, a)$이고 $\mathbf{q}^* = (-\mathbf{v}, b)$이다.

(a) $$\begin{aligned}\mathbf{q}^*\mathbf{p}^* &= (-\mathbf{v}, b)(-\mathbf{u}, a)\\ &= (b(-\mathbf{u}) + a(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{u}), ba - (-\mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{u}))\\ &= (-b\mathbf{u} - a\mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}, ba - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\\ &= (-a\mathbf{v} - b\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}, ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\\ &= (\mathbf{p}\mathbf{q})^*\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* &= (-\mathbf{u} - \mathbf{v}, a + b))\\ &= (-\mathbf{u}, a) + (-\mathbf{v}, b)\\ &= \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c) } (s\mathbf{q})^* &= (s\mathbf{v}, sb)^* \\
&= (-s\mathbf{v}, sb) \\
&= s(-\mathbf{v}, b) \\
&= s\mathbf{q}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d) } \|\mathbf{pq}\|^2 &= (\mathbf{pq})(\mathbf{pq})^* \\
&= \mathbf{pqq}^*\mathbf{p}^* \\
&= \mathbf{p}\|\mathbf{q}\|^2\mathbf{p}^* \\
&= \mathbf{pp}^*\|\mathbf{q}\|^2 \\
&= \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 \\
\therefore \|\mathbf{pq}\| &= \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|
\end{aligned}$$

17. $\mathbf{a} \cdot \dfrac{\sin((1-t)\theta)\mathbf{a} + \sin(t\theta)\mathbf{b}}{\sin\theta} = \cos(\mathrm{t}\theta)$를 대수적으로 증명하라. 여기서 θ는 **a**와 **b** 사이의 각도이다.

해답:

증명의 관건은 다음 삼각함수 항등식을 적용하는 것이다.

$$\sin((1-\mathrm{t})\theta) = \sin(\theta - t\theta) = \sin(\theta)\cos(t\theta) - \cos(\theta)\sin(t\theta)$$

이를 이용해서 주어진 등식을 전개, 정리하면 증명이 완성된다.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \cdot \frac{\sin((1-\mathrm{t})\theta)\mathbf{a} + \sin(t\theta)\mathbf{b}}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin((1-\mathrm{t})\theta)\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \sin(t\theta)\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin((1-\mathrm{t})\theta) + \sin(t\theta)\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin(\theta)\cos(t\theta) - \cos(\theta)\sin(t\theta) + \sin(t\theta)\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin(\theta)\cos(t\theta)}{\sin\theta} \\
&= \cos(t\theta)
\end{aligned}$$

부록 C

1. $\mathbf{p}(t) = (1, 1) + t(2, 1)$이 어떤 좌표계를 기준으로 한 반직선이라고 하자. $t = 0.0, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$에서의 이 반직선의 점들을 그래프로 표시하라.

해답:

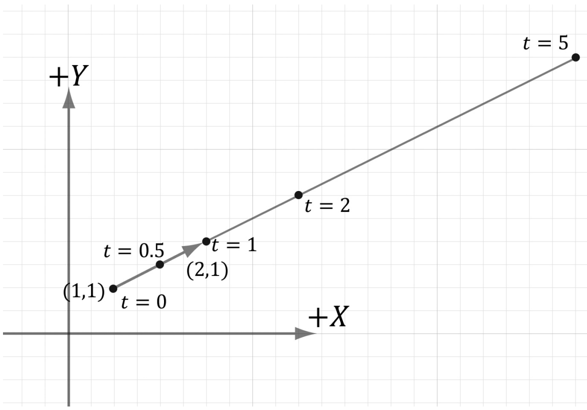


그림 D.14 반직선의 점들.

3. 다음의 두 점들 각각에 대해, 두 점을 통과하는 직선의 벡터 방정식을 구하라.

(a) $\mathbf{p}_1 = (2, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (4, 1)$

(b) $\mathbf{p}_1 = (4, -2, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (2, 3, 2)$

해답:

(a) $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (4, 1) - (2, -1) = (2, 2)$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}_1 + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\\ &= (2, -1) + t(2, 2)\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (2, 3, 2) - (4, -2, 1) = (-2, 5, 1)$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}_1 + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\\ &= (4, -2, 1) + t(-2, 5, 1)\end{aligned}$$

5. $\mathbf{L}(t) = (4, 2, 2) + t(1, 1, 1)$이 하나의 선이라고 하자. 다음 점들 각각에 대해 선과 점 사이의 거리를 구하라.

(a) $\mathbf{q} = (0, 0, 0)$

(b) $\mathbf{q} = (4, 2, 0)$

(c) $\mathbf{q} = (0, 2, 2)$

해답:

연습문제 4의 공식을 적용하면 된다.

$$d = \frac{\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$= \frac{\|(0, 0, 0) - (4, 2, 2)) \times (1, 1, 1)\|}{\|(1, 1, 1)\|}$$

$$= \frac{\|(-4, -2, -2) \times (1, 1, 1)\|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\|(0, 2, -2)\|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$d = \frac{\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$= \frac{\|(4, 2, 0) - (4, 2, 2)) \times (1, 1, 1)\|}{\|(1, 1, 1)\|}$$

$$= \frac{\|(0, 0, -2) \times (1, 1, 1)\|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\|(2, -2, 0)\|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$d = \frac{\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

$$= \frac{\|(0, 2, 2) - (4, 2, 2)) \times (1, 1, 1)\|}{\|(1, 1, 1)\|}$$

$$= \frac{\|(-4, 0, 0) \times (1, 1, 1)\|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\|(0,\ 4,\ -4)\|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

7. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -5\right)$가 하나의 평면이라고 하자. 이 평면과 점 $(3\sqrt{3},\ 5\sqrt{3},\ 0)$, $(2\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0)$ 사이의 공간 관계를 각각 밝혀라.

해답:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} - 5 = 0$$

평면 방정식은 $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} - 5 = 0$이다. 주어진 점들을 이 방정식의 좌변에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{0}{\sqrt{3}} - 5 = 3 \Rightarrow \text{평면의 앞쪽}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 5 = 0 \Rightarrow \text{평면에 있음}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{0}{\sqrt{3}} - 5 = -5 \Rightarrow \text{평면의 뒤쪽}$$

9. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$가 하나의 평면이라고 하자. 점 $(0,\ 1,\ 0)$을 이 평면에 반사시킨 점을 구하라.

해답:

§C.4.9의 공식을 적용하려면 평면의 한 점 $\mathbf{p}_0$이 필요한데, 연습문제 8에서 구한 점 $(3,-2,0)$을 사용하기로 한다.

$\mathbf{n} = \left\|\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\right\| = 1$이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_0)\mathbf{n} \\ &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + d)\mathbf{n} \end{aligned}$$

이제 §C.4.9의 공식을 적용하면 답이 나온다.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{p} - 2\text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \\ &= \mathbf{p} - 2\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + d)\mathbf{n} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{p} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{n}$$

$$= (0,\ 1,\ 0) - \frac{12}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

$$= (0,\ 1,\ 0) + (6,\ -6,\ 0)$$

$$= (6,\ -5,\ 0)$$

10. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -5\right)$가 하나의 평면이고 $\mathbf{r}(t) = (-1,\ 1,\ -1) + t(1,\ 0,\ 0)$이 하나의 반직선이라고 하자. 이 반직선과 평면의 교점을 구하라. 그리고 XMPlaneIntersectLine 함수를 이용한 짧은 프로그램을 작성해서 독자의 답을 확인하라.

해답:

$$t_0 = \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0 - d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 5}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$\mathbf{r}(1 + 5\sqrt{3}) = (-1,\ 1,\ -1) + (1 + 5\sqrt{3})(1,\ 0,\ 0)$$

$$= (-1,\ 1,\ -1) + (1 + 5\sqrt{3},\ 0,\ 0)$$

$$= (5\sqrt{3},\ 1,\ -1)$$

평면 방정식에 $(5\sqrt{3},\ 1,\ -1)$을 대입해 보면 이 교점이 실제로 평면의 한 점임을 알 수 있다.

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} - 5 = 0 \Rightarrow \text{평면에 있음}$$

다음은 이 해답을 확인해 보는 프로그램이다.

```
#include <windows.h> // FLOAT 정의를 위해
#include <DirectXMath.h>
#include <iostream>
using namespace std;

// XMVECTOR 객체를 cout으로 출력하기 위해
// << 연산자를 중복적재한다.
ostream& operator<<(ostream& os, FXMVECTOR v)
{
    XMFLOAT4 dest;
    XMStoreFloat4(&dest, v);
```

```
    os << "(" << dest.x << ", " << dest.y << ", " << dest.z <<
        ", " << dest.w << ")";
    return os;
}

int main()
{
    XMVECTOR p0 = XMVectorSet(-1.0f, 1.0f, -1.0f, 1.0f);
    XMVECTOR u = XMVectorSet(1.0f, 0.0f, 0.0f, 0.0f);

    // 평면 방정식의 (A, B, C, D) 성분을 직접 지정해서
    // 평면을 구축한다.
    float s = 1.0f / sqrtf(3);
    XMVECTOR plane = XMVectorSet(s, s, s, -5.0f);

    // 이 함수는 반직선이 아니라 선분을 받는다. 그래서 반직선을
    // p0 + 100*u에서 잘라서 선분을 만든다.
    XMVECTOR isect = XMPlaneIntersectLine(plane, p0, p0 + 100*u);
    cout << isect << endl;
    return 0;
}
```

출력은 다음과 같다(수치는 동차좌표이다. 즉, 점의 경우 $w = 1$이다).

```
(8.66025, 1, -1, 1)
계속하려면 아무 키나 누르십시오. . .
```

$5\sqrt{3} \approx 8.66025$이므로, 프로그램의 결과는 앞의 계산과 부합한다.