第五章　定积分

微积分基本公式

主讲　武忠祥 教授

一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2) - s(T_1) \qquad s'(t) = v(t)$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad s'(t) = v(t)$$

二、积分上限的函数及其导数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad x\in[a,b]$

定理1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x).$$

定理2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上的一个原函数.

例1　1）设 $\Phi(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ ，求 $\Phi'(x)$

2）设 $F(x)=\int_{\sin x}^{1} e^{-t^2}dt$，求 $F'(x)$.

一般的：若 $\varphi(x),\psi(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，则

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t\ )dt}{x(\sqrt{1+x^3}-1)}$

三、牛顿—莱布尼兹公式

定理3（Newton-Leibniz公式） 设 $F(x)$ 为连续函数 $f(x)$

在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

微积分基本公式

例3 计算下列积分

1） $\int_0^{\pi} \sin x dx$

2） $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

例4 证明积分中值定理： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad a < \xi < b$$

内容小结

1.积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

2.积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$

3.微积分基本公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = F'(\xi)\underbrace{(b-a) = F(b)-F(a)}_{\text{微分中值定理}}}_{\text{牛顿－莱布尼茨公式}}$$

牛顿－莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系

作业

P244： 3 ; 4 ; 5 (3) ;

8 (8) , (11) , (12) ;

9 ; 10； 11； 12