2021线性代数考前练习

基本功提要

1.矩阵的秩

$r(\boldsymbol{A})=r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0,每 $r+1$ 阶(如果有)子式全为 0.

$r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式不为 0.

$r(\boldsymbol{A})<3 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中每一个 3 阶子式全为 0.

$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 列秩 $=\boldsymbol{A}$ 行秩.

公式:① $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$;② $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}), k \neq 0$;③ $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$;

④ $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B}))$,特别地,如 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B}), r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$;

⑤ $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$;⑥ 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$($n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列);

特别地,如 $r(\boldsymbol{A})=1$,(1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{n}-\sum a_{ii}\lambda^{n-1}$,(2) $\boldsymbol{A}^{2}=\sum a_{ii}\boldsymbol{A}$.

2.如何证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(1) 定义法　对 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 用乘或重组证出必有 $k_i=0(i=1,2,\cdots,s)$.

(2) 秩　设法证 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)=s$.

(3) 反证法

3. $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非 0 解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$(未知数的个数).

齐次方程组线性无关解向量的个数:$n-r(\boldsymbol{A})$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的结构:$\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$.

4.如何求特征值、特征向量.

(1) 定义法　$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$

(2) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$(或 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$),$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

(3) 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$;由 $\boldsymbol{B\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P\alpha})$.

5. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow k$ 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量.

6.实对称矩阵有哪些定理,如何做题?

7.如何用正交变换化二次型为标准形?

1. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{AB}\right)^{*}\right|=$ ________.

2. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 如秩 $r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=1$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$ ________.

3. 已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\end{vmatrix}$，则其所有代数余子式的和 $\sum A_{ij}=$ ________.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维非零列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$ ________ .

5. 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行与第 3 行互换得矩阵 $\boldsymbol{B}$，把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=$ ________ .

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&2&2&0\\2&0&0&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解________.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&a&4-a\end{bmatrix}$ 且秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则齐次方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解________ .

8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的三个解，秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.　(B) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.

9. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系还可以是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_3,5\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件.　　　　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　　　(D) 既非充分也非必要条件.

11. 解方程组 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+a)x_2+x_3=a\\ x_1+x_2+(1+a)x_3=a^2\end{cases}$.

当 a 为何值时，方程组无解？当 a 为何值时，方程组有解，并在有解时求其所有的解.

12. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $(1,-2,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(1,3,2,0)^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 判断 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，说明理由.

(Ⅱ) 判断 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，说明理由.

(Ⅲ) 求方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\gamma}$ 的通解.

13. 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(Ⅰ) 证明任一个 4 维列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

(Ⅱ) 如 $\boldsymbol{\beta}=(1,-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$ 是 3 阶正交矩阵，有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 3 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\gamma}_2=$ ________.

15. 不能相似对角化的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.　　(C) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

16. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-a&2\\3&0&4\end{bmatrix}$ 可逆，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量.

(Ⅰ) 求 a 的值.

(Ⅱ) 求 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值与特征向量.

(Ⅲ) 判断 $\boldsymbol{A}^*$ 能否相似对角化，如能则求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，如不能则说明理由.

(Ⅳ) 如 $\boldsymbol{\beta}=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

17. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=1$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量；

(Ⅲ) 判断矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$?

18. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=n$.

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(Ⅲ)如 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=k$,求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 的值.

19. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵,有 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\2 & -1\\4 & 1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 不可逆.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量.

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(Ⅲ)若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 的规范形是 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$,求 k.

20. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，则下列矩阵中和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同但不相似的是

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&0\\3&0&1\end{bmatrix}$.

21. 二次型 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的标准形不能是

(A) $2y_1^2+3y_2^2$. (B) $2y_1^2-5y_3^2$. (C) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. (D) $y_1^2+y_2^2-3y_3^2$.

22. 已知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3(a<0)$. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根.

(Ⅰ) 求 a 的值.

(Ⅱ) 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形，并写出所用坐标变换.

23. 已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是线性无关的 3 维列向量，并满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=6\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=6\boldsymbol{\alpha}$.

(Ⅰ) 写出二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下的标准形.

(Ⅱ) 如 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,3,0)^{\mathrm{T}}$，求此二次型并求坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化二次型为规范形.

24. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是迹为 1 的 3 阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}$.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(Ⅱ) 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 表达式；

(Ⅲ) 判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$ 是否合同？

参考答案

1. $-\frac{32}{81}$　2. -2　3. 2　4. -2　5. $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$　6. $k_1(0,-1,1,0)^T+k_2(-1,0,0,1)^T$

7. $k_1(1,0,-1)^T+k_2(5,3,4)^T$　8. C　9. C　10. A

11. 当 $a=0$ 时，$k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T$；当 $a\neq 0$ 且 $a\neq -3$ 时，唯一解 $\left(-\frac{a+1}{a+3},\frac{2}{a+3},\frac{a^2+2a-1}{a+3}\right)^T$；

当 $a=-3$ 时，方程组无解.

12. $(5,-3,1,0)^T+k_1(-1,2,-1,1)^T+k_2(2,3,1,0)^T$.

13. 略　14. $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$　15. D

16. (Ⅰ) $a=-1$；　(Ⅱ) $6,3,2$；$k_1(1,-1,-1)^T$，$k_2(-2,2,3)^T$，$k_3(-1,2,3)^T$；

(Ⅲ) $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 3\end{bmatrix}$；　(Ⅳ) $\begin{bmatrix}6^n+4\cdot 3^n-2^{n+2}\\ -6^n-4\cdot 3^n+2^{n+3}\\ -6^n-2\cdot 3^{n+1}+3\cdot 2^{n+2}\end{bmatrix}$.

17. $\lambda_1=\lambda_2=1$，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1(k_1\neq 0)$；$\lambda_3=0$，$k_2\boldsymbol{\alpha}_2(k_2\neq 0)$.　不能相似对角化.

18. (Ⅲ) $(-1)^k 2^n$.

19. (Ⅰ) 2，$k_1(1,1,2)^T$；-1，$k_2(1,1,-1)$；-2，$k_3(1,-1,0)^T$，$k_i\neq 0$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{bmatrix}$ 时 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$.

(Ⅲ) $k\in(2,4)$.

20. B　21. B

22. (Ⅰ) $a=-\frac{1}{2}$　(Ⅱ) $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$　(Ⅲ) $k>\frac{3}{2}$.

23. (Ⅰ) $6y_1^2-6y_3^2$　(Ⅱ) $f=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3-8x_2x_3$，$y_1^2-y_2^2$.

24. (Ⅰ) $1,1,-1$　(Ⅱ) $x_1^2-2x_2x_3$　(Ⅲ) 合同.