第二章　导数与微分

第二节　函数的求导法则

主讲　武忠祥 教授

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理1 设 $u(x), v(x)$ 都可导，则

1） $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2） $(uv)' = u'v + uv'$

3） $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

例1 设 $y = 2^x + \sqrt{x}\ln x + 3\cos x + \ln 2$，求 y'

例2 试证下列结论

$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$

二、反函数的求导法则

定理 2 设区间 I 上严格单调且连续的函数 $x=f(y)$ 在 y 处可导，且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应点可导, 且

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

例3 求 $y=\arcsin x \quad (x\in[-1,1])$ 导数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

三、复合函数的求导法则

定理3（链式法则） 设 $u=g(x)$ 在 x 可导， $y=f(u)$

在对应 u 处可导，则 $y=f[g(x)]$ 在 x 处可导，且

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

例4 求下列函数的导数

1） $y=\sin x^2$　　2） $y=2\cos^2\frac{1}{x}$

3） $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$　　4） $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

5） $y=f(\sin^2 x)+g(e^x)$，其中 f,g 可导

四、基本求导法则与导数公式

1. 基本初等函数的导数公式

1） $(C)' = 0$

2） $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

3） $(a^x)' = a^x \ln a$

4） $(e^x)' = e^x$

5） $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6） $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

7） $(\sin x)' = \cos x$

8） $(\cos x)' = -\sin x$

9） $(\tan x)' = \sec^2 x$

10） $(\cot x)' = -\csc^2 x$

11） $(\sec x)' = \sec x \tan x$

12） $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

13） $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14） $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15） $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16） $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u(x), v(x)$ 都可导，则

1） $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2） $(uv)' = u'v + uv'$

3） $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

3. 反函数的求导法则

设区间 I 上严格单调且连续的函数 $x = f(y)$ 在 y 处可导，且

$f'(y) \neq 0$，则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在对应点可导，且

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

4. 复合函数求导法则

设 $u=g(x)$ 在 x 可导， $y=f(u)$ 在对应 u 处可导，则

$y=f[g(x)]$ 在 x 处可导，且

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

例5 求下列函数的导数

1. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$ $\qquad (\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}})$

2. $y=(1+x^2)^{\sin x}$

内容小结

1. 基本初等函数的导数公式

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

3. 反函数的求导法则

4. 复合函数求导法则

作业 P94：6；7；8；（单号小题）

9；14