第三章　微分中值定理与导数应用

第三节　泰勒公式

主讲　武忠祥 教授

若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $\Delta y \approx dy$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

问题： 若 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导,是否存在 n 次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

使 $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$

结论： $a_0 = f(x_0)$, $\quad a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 1,2\cdots n$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

定理1(Taylor定理) 设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可微，则

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)}$$

上式称为带Peano余项的Taylor公式；

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

$f(x)$ 在 x_0 处的 n 次Taylor多项式

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ $f(x)$ 的Peano余项

缺点：1）只给出余项的定性描述，不能进行定量分析；

2) 适用范围小.

若 $f(x)$ 在区间 I 中可微，$x_0\in I$，$x\in I$，

$\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$ $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

定理2(Taylor定理) 设 $f(x)$ 在区间 I 中 $n+1$ 阶可导，

$x_0 \in I$，则 $\forall x \in I, \exists \xi \in I$ （ξ 在 x_0 与 x 之间），使

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

上式称为**带Lagrange余项的Taylor公式**；

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

称为 $f(x)$ **的Lagrange余项**

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \theta\in(0,1)$$

若 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$，则 $\left|R_n(x)\right|=\dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\le\dfrac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$

若 $x_0=0$，则

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

上式称为 $f(x)$ 的Maclaurin公式

几个初等函数的Maclaurin公式

1） $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ $\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

2） $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$

3） $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$

4） $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{x}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}(1+\theta x)^{-n-1}$

5) $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad x\in(-1,+\infty)$$

内容小结

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

1）Peano余项 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$

2）Lagrange余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

小结：1．本质：用多项式逼近 $f(x)$

用已知点的信息表示未知点

2．Peano：定性；局部

3．Lagrange：定量；整体

4．Lagrange定理是Taylor定理的特例.

四大中值定理

前三个建立 $f(x)$ 与一阶导数的关系；

Tayloy 建立 $f(x)$ 与高阶导数之间的关系。

例1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$

例2 设 $f''(x) > 0$, 当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 x 是等价无穷小.

证明：当 $x \neq 0$ 时，$f(x) > x$.

作业 P143：4; 5; 10(1)(3);