第三章　微分中值定理与导数应用

第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性

主讲　武忠祥 教授

一、函数单调性的判别方法

定理1 设函数$f(x)$在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则

(1)如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$, 且等号只在有限个点上成立,

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2)如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$, 且等号只在有限个点上成立,

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少;

例1 确定 $f(x)=e^x-x-1$ 的增减区间

例2 试证 $x > 0$ 时，$x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$

二、曲线的凹凸性与拐点

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的;如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

定理2 设函数$f(x)$在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,

(1)若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

(2)若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

例3 判定曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

例4 **求下列曲线的凹、凸区间及拐点**

1) $f(x)=x^4-6x^3+12x^2+x+1;$

2) $g(x)=e^{-x^2};$

3) $h(x)=\sqrt[3]{x};$

内容小结

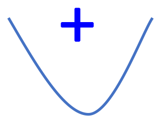
1.可导函数单调性判别

$f'(x) > 0,\ x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递增

$f'(x) < 0,\ x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上单调递减

2.曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凹



$f''(x) < 0, x \in I \Longrightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 I 上向上凸

拐点 — 连续曲线上的凹凸分界点

作业 P150：3(2)(4)(7)；4；5(2)(4)；6；10(1)(2)；11(3)；13; 14; 16.