2021年考研冲刺班讲义（高等数学）

主讲　武忠祥　教授

考研数学全国平均成绩

	2015年	2016年	2017年	2018年	2019年
数学一	78.8	60.6	79.5	65.1	65.7
数学二	77.4	60.5	81.1	60.1	71.9
数学三	77.1	62.5	69.9	61.1	76.8

第一章　函数　极限　连续

重点题型：

1. 极限　　2. 无穷小量阶的比较　　3. 间断点及其类型

1. 极限

1）极限的概念、性质及存在准则

【例1】 设有数列 x_n 与 y_n，以下结论正确的是

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$；

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$；

（C）若 $x_n y_n$ 有界，则必有 x_n 与 y_n 都有界；

（D）若 $x_n y_n$ 无界，则必有 x_n 无界或 y_n 无界；

【例2】设 $x_n \neq 0, n = 1,2,\cdots, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$(　　).

(A)为无穷大　　(B)为无穷小

(C)为有限常数　　(D)无法判断

【解1】

【解2】

【解3】

2）求极限

（1）函数的极限

常考题型：

7 种不定式，即$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，

重点：$\frac{0}{0}$和1^{∞}

常用方法：

1. $\frac{0}{0}$型： 1）洛必达法则 2）等价无穷小代换 3）泰勒公式

2. 1^{∞}型： 三步曲

1） $1^{\infty}=\lim(1+\alpha)^{\beta}$;

2） $\lim\alpha\beta=A$;

3） 原式$=e^{A}$.

常用结论：

1）常用的等价无穷小$(x\to 0)$

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1;$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},\quad a^{x}-1\sim x\ln a,$$

$$x-\sin x\sim\frac{x^{3}}{6},\qquad \arcsin x-x\sim\frac{x^{3}}{6}$$

$$\tan x-x\sim\frac{x^{3}}{3},\qquad x-\arctan x\sim\frac{x^{3}}{3}$$

$$x-\ln(1+x)\sim\frac{x^{2}}{2}$$

若$f(x)$和$g(x)$在$x=0$的某邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$则

$$\int_{0}^{x}f(t)dt\sim\int_{0}^{x}g(t)dt$$

2）等价无穷小代换的原则

1）乘、除关系可以换；

2）加、减关系在一定条件下可以换；

若$\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且$\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq1$. 则$\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$.

若$\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且$\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq-1$. 则$\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$.

3）常用的泰勒公式

（1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$　　（2）$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

（3）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$　　（4）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$

（5）$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

【例 1】已知$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\left(\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\right)^2}{[\tan x-\arcsin x]\sin x^2}$.

【解】原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\left(\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\right)^2}{[\tan x-\arcsin x]x^2}$.　　（等价代换）

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\right)^2}{[(\tan x-x)-(\arcsin x-x)]x}\qquad（\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1,）$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\right)^2}{\left[(\frac{1}{3}x^3)-(\frac{1}{6}x^3)\right]x}\qquad（等价代换）$$

$$=6\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\right)^2}{x^4}$$

又　$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^{x-t}f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^{-t}f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}f(x)}{2x}=\frac{1}{2}$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\left(\int_0^x e^{x-t}f(t)dt\right)^2}{[\tan x-\arcsin x]\sin x^2}=\frac{3}{2}$$

【例 2】极限 $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$ ____________.

【分析】这是一个“1^∞”型极限，三步曲.

【解】因为 $\left(\dfrac{x}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\dfrac{x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^3}\qquad(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

则 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

（2）数列的极限

常考题型及方法：

1. n 项和；

方法：1）夹逼原理　　2）定积分定义　　3）级数求和

2. 递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 定义的数列

方法 1 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛（常用单调有界准则），然后令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限得 $a=f(a)$，由此求得极限 a.

方法 2 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 然后等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限解得 a, 最后再证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

一般来说，当数列 $\{x_n\}$ 具有单调性时用方法 1，而当数列 $\{x_n\}$ 不具有单调性或单调性很难判定时用方法 2. 单调性判定常用有三种方法

1）若 $x_{n+1}-x_n \geq 0\,(\leq 0)$，则 $\{x_n\}$ 单调增（单调减）；

2）若 $x_n>0$，且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\geq 1\,(\leq 1)$，则 $\{x_n\}$ 单调增（单调减）；

3）设数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots), x_n \in I$ 所确定

（1）若 $f(x)$ 在 I 上单调增，则

当 $x_1 \leq x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调增；

当 $x_1 \geq x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调减.

（2）若 $f(x)$ 在 I 上单调减，则 $\{x_n\}$ 不单调.

【例 1】 求下列极限

1）$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{e}{e^n+n}+\dfrac{e^2}{e^n+2n}+\cdots+\dfrac{e^n}{e^n+n^2}]$.

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\cdots+n)}}$.

【解】 1）$\dfrac{\frac{e(1-e^n)}{1-e}}{e^n+n^2} \leq [\dfrac{e}{e^n+n}+\dfrac{e^2}{e^n+2n}+\cdots+\dfrac{e^n}{e^n+n^2}] \leq \dfrac{\frac{e(1-e^n)}{1-e}}{e^n+n}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{e}{e^n+1^2}+\dfrac{e^2}{e^n+2^2}+\cdots+\dfrac{e^n}{e^n+n^2}]=\dfrac{e}{e-1}$

$$2)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\cdots+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n^2(n+1)}{2}}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}})=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

【例 2】 设 $x_n=(1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n}{n^2})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

【解】 $\ln x_n=\ln(1+\dfrac{1}{n^2})+\ln(1+\dfrac{2}{n^2})+\cdots\ln(1+\dfrac{n}{n^2})$

当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，则

$$\frac{k}{n^2+n} \le \frac{k}{n^2+k} = \frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}} < \ln(1+\frac{k}{n^2}) < \frac{k}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} \le \ln x_n \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} = \frac{1}{2}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n = \frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{\frac{1}{2}}$.

【例 3】 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, n = 1,2,\cdots$.

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$.

【解】 (1) 由 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, n = 1,2,\cdots$. 及归纳法可知 $x_n > 0$. 则数列 $\{x_n\}$ 下有界,

又 $\quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1-e^{-x_n}}{x_n} = \frac{e^0 - e^{-x_n}}{x_n} = e^{\xi} < 1 \quad (-x_n < \xi < 0)$

或 $\quad x_{n+1} - x_n = (1 - x_n) - e^{-x_n} \le 0 \qquad (e^x \ge 1 + x)$

则 $\{x_n\}$ 单调减.

或由递推函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$, $f'(x) = e^{-x} > 0$, 则 $\{x_n\}$ 单调，又

$$0 < x_n = 1 - e^{-x_{n-1}} < 1$$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \ge 0$ 且满足 $a = 1 - e^{-a}$, 易知 $a = 0$ 是其解.

令 $f(x) = x - 1 + e^{-x}$, 则 $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，所以 $a = 0$ 是方程 $a = 1 - e^{-a}$ 在

$[0,+\infty)$ 上的唯一解，故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$

（2） $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-e^{-x_n})}{x_n - 1 + e^{-x_n}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-e^{-x})}{x-1+e^{-x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-1+e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^{-x}} = 2$$

【例 4】 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

【分析】 令 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 则 $x_{n+1} = f(x_n)$，且 $x_n > 0$, 显然 $f(x)$ 在 $x>0$ 处单调减，则 $\{x_n\}$ 不具有单调性. 令 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 则 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x_n}$, 即 $a = \frac{1}{1+a}$, 则 $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, 由题设知

$x_n > 0$, 则 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 以下证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【解】 由题设知

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+a}\right| = \left|\frac{x_{n-1}-a}{(1+x_{n-1})(1+a)}\right| \le \frac{|x_{n-1}-a|}{1+a}$$

$$\le \frac{|x_{n-2}-a|}{(1+a)^2} \le \cdots \le \frac{|x_1 - a|}{(1+a)^{n-1}}$$

又 $1+a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a)^{n-1}} = 0$,

故 $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. 无穷小量阶的比较

常用方法：

1. 洛必达法则　　2. 等价无穷小代换　　3. 泰勒公式

【例 1】 当 $x \to 0$ 时，下列无穷小中最高阶的是

（A） $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ ，　　（B） $e^{\sin x} - e^{\tan x}$

（C） $e^{x^2}-\cos x$　　　　　　　　（D） $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$

【解】

（A） $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$　　　　（2 阶）

或 $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=[\sqrt{1+x^2}-1]-[\sqrt{1-x^2}-1]$

$\sim[\frac{1}{2}x^2]-[-\frac{1}{2}x^2]=x^2$

（B） $e^{\sin x}-e^{\tan x}=e^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)\sim\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3$　　　　（3 阶）

或 $e^{\sin x}-e^{\tan x}=e^{\xi}(\sin x-\tan x)\sim\sin x-\tan x$

（C） $e^{x^2}-\cos x=[1+x^2+o(x^2)-(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2))]=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$　　（2 阶）

或 $e^{x^2}-\cos x=[e^{x^2}-1]-[\cos x-1]\sim x^2-[-\frac{1}{2}x^2]=\frac{3}{2}x^2$

（D） $(\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt)'=\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}x^3$　　　　（3 阶）

原无穷小是 4 阶，

或:由于 $\frac{\sin t^2}{t}\sim t$，则

$$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt\sim\int_0^{1-\cos x}tdt=\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{1}{8}x^4$$

或:当 $x\to0$ 时, $\frac{\sin x^2}{x}$ 是 1 阶, $1-\cos x$ 是 2 阶, 则 $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$ 是 $2(1+1)=4$ 阶.

故选（D）

【注】本题中利用了确定无穷小量阶的几种常用方法：

1）等价代换　　2）洛必达法则（求导法）　　3）泰勒公式　　4）根式有理化

【例 2】已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin mx(m>0)$ 在原点处相切，且当 $x\to0$ 时 $F(x)=\int_0^x[\int_0^t f(t-u)du]dt$ 与 x^n 是等价无穷小，则

$(A)\quad m=2,n=3$　　　　$(B)\quad m=3,n=3$

中国大学MOOC

$(C)\quad m=3,n=2$ $\qquad\qquad$ $(D)\quad m=6,n=3$

【解 1】直接法 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^t f(t-u)du]dt}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-u)du}{nx^{n-1}}$ （洛比达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(v)dv}{nx^{n-1}}$$ （变量代换 $x-u=v$）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{n(n-1)x^{n-2}}$$ （洛比达法则）

由于曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin mx$ 在原点处相切，则 $f(0)=0, f'(0)=m.$ 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=m$$

则 $m=6,n=3.$

【解 2】

3．间断点及其类型

【例 1】求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x|x+1|}{\ln|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 的间断点并指出类型.

【解】 在 $x=\pm 1$ 处，$f(x)$ 没定义，$x=0$ 是分段函数的分界点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x|x+1|}{\ln|x|}=\infty$，则 $x=1$ 为无穷间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{-(x+1)}{\ln|x|}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{-1}{\frac{1}{x}}=1$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x+1}{\ln|x|}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{\frac{1}{x}}=-1$$

$x=-1$ 为跳跃间断点.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x|x+1|}{\ln|x|}=0,$ 则 $x=0$ 为可去间断点.

第二章　一元函数微分学

重点题型及方法：

1. 导数定义　　　　2. 求导数（隐函数、参数方程、高阶导数）

3. 函数性态（单调性、极值与最值、凹向与拐点、渐近线）

4. 方程的根

方法：存在性；1) 零点定理　　2) 罗尔定理

　　　个数：　1) 单调性　　　2) 罗尔定理的推论

5. 证明函数不等式

方法：1）单调性

　　　2）拉格朗日中值定理

　　　3）最大最小值

6. 微分中值定理的证明题（3 种常见类型）

1）证明存在一个中值点 $\xi\in(a,b)$，使 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$

方法：构造辅助函数用罗尔定理

构造辅助函数的常用方法

(1) 分析法（还原法）

根据对欲证的结论 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$ 的分析，确定辅助函数 $g(x)$，使

$$g'(x)=F[x,f(x),f'(x)]$$

(2) 微分方程法

欲证： $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$

1）求微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的通解 $H(x,y)=C$

2）设辅助函数：　$g(x)=H(x,f(x))$

常用的辅助函数

1）欲证　$\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$，令 $F(x)=x^n f(x)$；

2）欲证　$\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$；　这里 n 为正整数。

3）欲证　$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$；

特别地：

欲证 $f'(\xi)+f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{x}f(x)$;

欲证 $f'(\xi)-f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{-x}f(x)$;

4）欲证 $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)\,(\alpha\neq 0)$;

5）欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$;

6)欲证 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$，令 $F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x)$;

2）证明存在两个中值点 $\xi,\eta\in(a,b)$，**使** $F[\xi,\eta,f(\xi),f(\eta),f'(\xi),f'(\eta)]=0$

方法：（1）不要求 $\xi\neq\eta$：

在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）

（2）要求 $\xi\neq\eta$：

将区间 $[a,b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

3）证明存在一个中值点 $\xi\in(a,b)$，**使** $F[\xi,f^{(n)}(\xi)]\geq 0\,(n\geq 2)$

方法：用带拉格朗日余项的泰勒公式，其中 x_0 选题目中提供函数值和导数值信息多的点。

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\right]^n=$ ________.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，α_n,β_n 为趋于零的正项数列，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}.$$

【解】 由 $f(x)$ 在 x_0 可导知，

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.\qquad（其中 \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0）$$

则 $f(x_0+\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)\alpha_n+\alpha\alpha_n$ （其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=0$）

$f(x_0-\beta_n)=f(x_0)-f'(x_0)\beta_n-\beta\beta_n$ （其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta=0$）

$$\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)+\frac{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$\left|\frac{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right|\le\frac{\alpha_n|\alpha|}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{\beta_n|\beta|}{\alpha_n+\beta_n}\le|\alpha|+|\beta|\to 0$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)$

【例 3】 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线过点 $(1,2)$，则

$$\lim_{x\to 0}[\cos x+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{x^2}}=(\quad)$$

（A）e （B）$e^{-\frac{1}{2}}$ （C）$e^{\frac{1}{2}}$ （D）e^2

【解 1】 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=f'(0)x,$

由题设知 $f(0)=0, f'(0)=2.$ 本题所求极限是“1^∞”型，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=-\frac{1}{2}+\frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

【解 2】

【例 4】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin x|^n+|\cos x|^n}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内不可导点的个数为

（A）1 个； （B）2 个； （C）3 个； （D）4 个.

【解】

【注】 本题利用了结论：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le i\le m}a_i,\text{ 其中 } a_i>0\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

【例5】设 $x=t^3+2t+1, t-\int_1^{y+t} e^{-u^2}du=0$.求

（I）$\dfrac{dy}{dt}|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dt^2}|_{t=0}$;

（II）$\dfrac{dy}{dx}|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$.　　　　（数三不要求）

【解】（I）由 $t-\int_1^{y+t} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 知，当 $t=0$ 时，$y=1$.

等式　$t-\int_1^{y+t} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 两端对 t 求导可得

$$1-e^{-(y+t)^2}(y'+1)=0$$

将 $t=0, y=1$ 代入上式得 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=e-1$，

等式 $1-e^{-(y+t)^2}(y'+1)=0$ 两端对 t 再求导可得

$$2(y+t)e^{-(y+t)^2}(y'+1)^2-e^{-(y+t)^2}y''=0$$

将 $t=0, y=1, \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=e-1$ 代入上式得 $\left.\dfrac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=2e^2$.

（II）由 $x=t^3+2t+1$ 可知

$$x'(0)=(3t^2+2)|_{t=0}=2, x''(0)=(6t)|_{t=0}=0$$

则　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{y'(0)}{x'(0)}=\dfrac{e-1}{2}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{y''(0)x'(0)-x''(0)y'(0)}{x'^3(0)}=\dfrac{e^2}{2}$

【例6】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{x^3}, x\neq 0\\ a, \quad x=0\end{cases}$ 连续, 则 $f''(0)$　　　　（　）

（A）等于 0　　（B）不存在　　（C）等于 $\dfrac{1}{60}$　　（D）等于 $-\dfrac{a}{10}$

【解】 选（D）

$$f(x)=\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)}{x^3} \qquad (x\neq 0)$$

$$=\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots$$

由此可知，$a=f(0)=\frac{1}{6}$，$f''(0)=(-\frac{1}{5!})\cdot 2!=-\frac{1}{60}=-\frac{a}{10}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+2)+e^{x^2}]}{1-\cos x}=4$，则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的（ ）

(A)不可导点，　　(B)驻点且是极大值点.

(C)驻点且是极小值点.　　(D)可导的点但不是驻点.

【解 1】 由于 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+2)+e^{x^2}]}{1-\cos x}=4$，则 $f(2)=0$. 且当 $x\to 0$ 时

$$\ln[f(x+2)+e^{x^2}]=\ln[1+(f(x+2)+e^{x^2}-1)]\sim f(x+2)+e^{x^2}-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+2)+e^{x^2}]}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)+e^{x^2}-1}{\frac{1}{2}x^2}=2[\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}]$$

$$=2[\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x^2}+1]=4$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x^2}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(2+x)-f(2)}{x}}{x}=1，则\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}=0$$

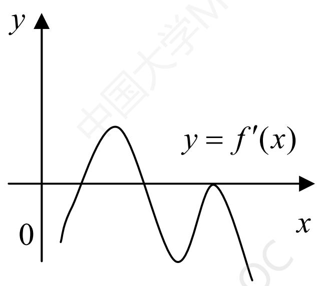
即 $f'(2)=0, x=2$ 为驻点，

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x^2}=1>0$，由极限的保号性知，在 $x=0$ 的某去心邻域内，

$f(x+2)>0$，即 $f(x+2)>f(2)$，从而，$f(x)$ 在 $x=2$ 处取极小值，故应选（C）.

【解 2】

【例 8】设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数，其导函数 $f'(x)$ 的图形如下图，令函数 $y=f(x)$ 的驻点的个数为 l，极值点的个数为 m，曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 n，则（　）



（A）$l=m=n=3$　　　　（B）$l=m=n=2$

（C）$l=3,m=2,n=3$　　　　（D）$l=3,m=2,n=1$

【解】选（C）.

1）找驻点就是找 $f'(x)=0$ 的点，即曲线 $y=f'(x)$ 与 x 轴的交点，显然是 3 个；

2）找极值点是要在以上 3 个驻点中找两侧一阶导数变号的驻点，显然是 2 个；

3）找拐点首先找 $f''(x)=0$ 的点，即曲线 $y=f'(x)$ 上有水平切线的点，显然是 3 个，但这三个点是否是拐点需考查其两侧 $f''(x)$ 是否变号，这可通过考查这些点两侧 $f'(x)$ 增减性是否发生变化来确定，由上图可知 3 个拐点。

【例 9】曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线条数为（ ）

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　(D) 4

【解 1】 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}=+\infty$，则 $x=0$（y 轴）为一条垂直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{2+x^2}}{x}=1=a_1$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}[e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}-e^{\frac{1}{x}}x+e^{\frac{1}{x}}x-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}(\sqrt{1+x^2}-x)+\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}+\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1=b_1$$

则 $y=x+1$ 为一条斜渐近线.

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}}{x}=-1=a_2$

$$\lim_{x\to-\infty}[e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}+x]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}+e^{\frac{1}{x}}x-e^{\frac{1}{x}}x+x]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}[\sqrt{1+x^2}+x] - \lim_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} - \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1}{x} = -1 = b_2$$

则 $y=-x-1$ 为原曲线一条渐近线. 原曲线有三条渐近线，故应选（C）.

【解 2】

【例 10】方程 $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x^3 - x$ 的实根个数为（ ）

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　(D) 4

【解 1】令 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt - x^3 + x$，显然 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，从而，原方程在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上实根个数相同，因此，只需讨论 $(0,+\infty)$ 上实根个数。

又　$f(0)=0, f'(x)=e^{-x^2}-3x^2+1$

$$f'(0)=2>0, \lim_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$$

$$f''(x)=-2xe^{-x^2}-6x<0 \qquad x\in(0,+\infty)$$

则存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$, 使 $f'(x_0)=0$，且

当 $x\in(0,x_0)$ 时，　$f'(x)>0$

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，　$f'(x)<0$

$f(x_0)>0$，$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

则原方程在区间 $(0,x_0)$ 上无实根，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上有唯一实根,故原方程共有三个实根.

【解 2】

【注】本题用到一个常用结论：若 $f(x)$ 为奇（偶）函数，则函数 $f(x)$ 的零点关于原点对称.

【例 11】 设有方程 $e^x = ax^2 (a>0)$, 则下列结论正确的是（ ）

（A）当 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时，原方程有两个实根；

(B) 当 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，原方程有一个实根；

(C) 当$a > \dfrac{e^2}{4}$时，原方程有三个实根；

(D) 当$a > \dfrac{e^2}{4}$时，原方程有四个实根.

【解】 原方程变形得 $x^2 e^{-x} = \dfrac{1}{a}$，令$f(x) = x^2 e^{-x} - \dfrac{1}{a}$.（分离参数）

令$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2-x) = 0$，得$x = 0, x = 2$.

当 $x \in (-\infty, 0)$时，$f'(x) < 0, f(x)$单调减.

当 $x \in (0,2)$时，$f'(x) > 0, f(x)$单调增.

当 $x \in (2,+\infty)$时，$f'(x) < 0, f(x)$单调减.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 e^{-x} - \frac{1}{a}) = +\infty$$

$$f(0) = -\frac{1}{a} < 0,\ f(2) = \frac{4}{e^2} - \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} < 0$$

则 1）当$0 < a < \dfrac{e^2}{4}$时，一个实根；

2）当$a = \dfrac{e^2}{4}$时，两个实根；

3）当$a > \dfrac{e^2}{4}$时，三个实根.

选 C

【注】 这是一个带参数的方程根的问题，其核心思想是将参数分离出来。

【例 12】 设$x > 0, x \neq 1$, 试证 $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

【证】 令$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x$，即$f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0 \qquad (x > 0, x \neq 1)$$

而$f(1) = 0$,

则当$0<x<1$时，$f(x)<0,$ 当$1<x<+\infty$时，$f(x)>0,$

故 $\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad (x>0, x\neq 1)$

【注】单调性是证明函数不等式最常用的方法.

【例 13】设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且$f(0)\cdot f(1)>0, f(1)+\int_0^1 f(x)dx=0$，试证：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=\xi f(\xi)$.

【证】 令$F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)$，由积分中值定理可知存在$c\in(0,1)$，使

$$f(1)+f(c)=0$$

由此可知$f(c)\neq 0,$ 否则$f(1)=0,$ 与题设$f(0)\cdot f(1)>0$矛盾，不妨设$f(c)>0,$ 则

$$f(1)<0, f(0)<0,$$

由连续函数的零点定理知存在$a\in(0,c), b\in(c,1),$ 使

$$f(a)=f(b)=0$$

即$F(a)=F(b)$，由罗尔定理可知存在$\xi\in(a,b),$ 使$F'(\xi)=0,$

即 $$e^{-\frac{\xi^2}{2}}f'(\xi)-e^{-\frac{\xi^2}{2}}\xi f(\xi)=0$$

故 $$f'(\xi)=\xi f(\xi).$$

【例 14】 设$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|\leq 1$，又$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$。证明在$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)+f(\xi)=0$.

【证】 令$F(x)=f^2(x)+f'^2(x).$

由拉格朗日定理知：

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=f'(a) \qquad a\in(-2,0)$$
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(b) \qquad b\in(0,2)$$

$$|f'(a)|\leq\frac{1}{2}(|f(0)|+|f(-2)|)\leq 1,$$
$$|f'(b)|\leq\frac{1}{2}(|f(0)|+|f(2)|)\leq 1$$

$F(a)=f^2(a)+f'^2(a)\le 2.\qquad F(b)=f^2(b)+f'^2(b)\le 2.$

而 $F(0)=f^2(0)+f'^2(0)=4$

$F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in(a,b), F(x)$ 在 ξ 点取到它在 $[a,b]$上的最大值，从而

$F'(\xi)=0$， 即 $2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$.

但 $f'(\xi)\ne 0$，否则 $F(\xi)=f^2(\xi)\le 1<F(0)$，与 $F(\xi)$ 是最大值矛盾.

【注】本题用了费马引理：若 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0.$

【例 15】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0,|f'(x)|\le|f(x)|$, 试证 $f(x)\equiv 0.$

【例 16】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明

1) 在 $(0,1)$ 内存在 ξ, η, 使 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$;

2) 存在 ξ 和 η. 满足 $0<\xi<\eta<1$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=2$.

【证】1) 由拉格朗日中值定理得 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)\qquad \xi\in(0,1)$

即 $1=f'(\xi)$

由柯西中值定理得

$$\frac{f^2(1)-f^2(0)}{1^2-0^2}=\frac{2f(\eta)f'(\eta)}{2\eta}\qquad \eta\in(0,1)$$

即 $1=\dfrac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}$

则 $f'(\xi)=\dfrac{f(\eta)f'(\eta)}{\eta}$, 故 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$.

2)【分析】设 $0<c<1$, 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi) \qquad \xi\in(0,c)$$

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta) \qquad \eta\in(c,1)$$

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\frac{f(c)-f(0)}{c}+\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(c)}{c}+\frac{1-f(c)}{1-c}$$

若取 $c=\frac{1}{2}$ 原题得证。

【证】 由拉格朗日中值定理知,

$$\frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=f'(\xi) \qquad \xi\in(0,\frac{1}{2})$$

$$\frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=f'(\eta) \qquad \eta\in(\frac{1}{2},1)$$

则 $f'(\xi)+f'(\eta)=\dfrac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0}+\dfrac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=2$

【例 17】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导. 且 $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$，证明:

$$|f'(x)|\le 2 \qquad (0\le x\le 2)$$

【证】$f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x_0-x)^2$

在上式中分别令 $x_0=0$ 和 $x_0=2$ 得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2 \qquad (1)$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(2-x)^2 \qquad (2)$$

（2）式减（1）式得

$$f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(2-x)^2-f''(\xi_1)x^2]$$

$$|f'(x)|\le\frac{|f(0)|+|f(2)|}{2}+\frac{1}{4}[|f''(\xi_2)|(2-x)^2+|f''(\xi_1)|x^2]$$

$$\le 1+\frac{1}{4}[(2-x)^2+x^2]\le 1+\frac{1}{4}\cdot 4=2$$

【例 18】（仅数三要求）设某产品的成本函数为 $C(q)=\alpha q^2+2q+\beta$, 需求函数为

$q=\dfrac{1}{\gamma}(4-p)$，其中C为成本，q为需求量（即产量），p为该商品的单价，α,β,γ

都是正常数，求：

（1）利润最大的产量和最大利润；

（2）需求对价格的弹性；

（3）需求对价格的弹性的绝对值为 1 时的产量。

【解】（I）利润$L=R-C=pq-\alpha q^2-2q-\beta$

$$=(4-qr)q-\alpha q^2-2q^2-2q-\beta=-(\alpha+\gamma)q^2+2q-\beta.$$

令$\dfrac{dL}{dq}=-2(\alpha+\gamma)q+2=0$，解之得$q_0=\dfrac{1}{\alpha+\gamma}$且$L''(q_0)=-2(\alpha+\gamma)<0,$

故当产量$q_0=\dfrac{1}{\alpha+\gamma}$时，利润最大，且最大利润为$L(q_0)=\dfrac{1}{\alpha+\gamma}-\beta$.

（II）需求对价格弹性为 $\varepsilon=p\dfrac{q'(p)}{q(p)}=p\dfrac{-\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}(4-p)}=-\dfrac{p}{4-p}$.

（III）当$|\varepsilon|=1$时，有$|-\dfrac{p}{4-p}|=\dfrac{p}{4-p}=1$，解得$p=2$，此时产量$q=\dfrac{1}{\gamma}(4-2)=\dfrac{2}{\gamma}$.

第三章　一元函数积分学

重点题型及方法：

1. 计算不定积分、定积分及反常积分

方法：

1）计算不定积分和反常积分

（1）换元法　　（2）分部积分

2）计算定积分

（1）$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$；　　（2）换元法；

（3）分部积分法；　　（4）利用奇偶性，周期性

（5）利用公式

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{偶}\\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{奇}\end{cases}$

(2) $\int_0^{\pi}x f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

2. 变上限定积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

1）连续性：若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续。

2）可导性：若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导且

$$(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t)'=f(x).$$

一般的：$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$

有关 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在一点处的连续性和可导性的结论：

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $x=x_0\in(a,b)$ 外均连续,则在点 $x=x_0$ 处

	$f(x)$		$F(x)=\int_a^x f(t)dt$
1)	连续	$\longrightarrow$	可导,且 $F'(x_0)=f(x_0)$
2)	可去	$\longrightarrow$	可导,且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$
3)	跳跃	$\longrightarrow$	连续但不可导,且 $F'_-(x_0)=f(x_0^-),F'_+(x_0)=f(x_0^+)$

【例】(2013 年 2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点;

（B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点;

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导;

（D） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

3）**奇偶性**：（1）若 $f(x)$ 为奇函数，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数。

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数。

3. 定积分应用(几何、物理（数三不要求））

4. 与定积分有关证明题

【例 1】下列函数在指定区间上不存在原函数的是

（A） $f(x)=\int_0^x |t|dt, \quad x\in(-\infty,+\infty).$

（B） $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases} \quad x\in(-\infty,+\infty).$

（C） $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases} \quad x\in(-\infty,+\infty).$

（D） $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x-1, & x\geq 0, \end{cases} \quad x\in(-\infty,+\infty).$

【注】几个重要结论：

1） $f(x)$ 在区间 I 上连续 $\rightarrow$ $f(x)$ 在 I 上有原函数；

2） $f(x)$ 在区间 I 上不连续 $\overset{\times}{\rightarrow}$ $f(x)$ 在 I 上不存在原函数；

3） $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点 $\rightarrow$ $f(x)$ 在 I 上不存在原函数；

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x; x\leq 0 \\ x^2+a; x>0 \end{cases}$，则 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ 在 $x=0$ 处

（A）极限存在但不连续；　　（B）连续但不可导；

（C）可导；　　（D）是否可导与 a 的取值有关.

【解 1】 $F(x)=\begin{cases} \int_{-1}^x e^t dt, & x\leq 0, \\ \int_{-1}^0 e^t dt+\int_0^x (t^2+a)dt, & x>0, \end{cases}$

$$=\begin{cases} e^x-\dfrac{1}{e}, & x\leq 0, \\ (1-\dfrac{1}{e})+\dfrac{x^3}{3}+ax, & x>0, \end{cases}$$

$F(0^-)=1-\frac{1}{e},F(0^+)=1-\frac{1}{e}=F(0)$, 则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处都连续.

$F'_-(0)=1,F'_+(0)=a.$

故应选(D).

【解 2】显然, 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 当 $a\neq 1$ 时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,. 所以, 无论 a 取何值, $F(x)$ 在 $x=0$ 处都连续. 而当 $a=1$ 时, $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 当 $a\neq 1$ 时, $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 故应选(D).

【例 3】 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx=$__________________.

【解 1】 原式 $-\int \arcsin x\mathrm{d}\frac{1}{x}$

$$=-\frac{\arcsin x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

【解 2】 令 $x=\sin t$,

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{t}{\sin^2 t}d\sin t=-\int t\mathrm{d}\frac{1}{\sin t}\\&=-\frac{t}{\sin t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sint}}\\&=-\frac{t}{\sin t}-\ln|\csc t+\cot t|+C.\end{aligned}$$

【例 4】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2 x+\int_0^x e^{-t^2}dt]\sin^2 xdx=$______________.

【解】 e^{-t^2} 偶函数, 则 $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 奇函数.

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}.$$

【例 5】 设 $a>0$ 则 $\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}dx=$______________.

【解 1】 原式 $=\int_0^{2a}x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x$

$$\underline{\underline{x-a=a\sin t}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)a^3\cos^2 t\mathrm{d}t=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}a^3$$

【解 2】 原式 $=\int_0^{2a} x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{2a}[(x-a)+a]\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x$$

$$=a\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a^3 \qquad \text{（几何意义）}$$

【注】 解 2 中用到一个结论：若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x-x_0)dx=0.$ 事实上该结论是 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ 的平移，如 $\int_0^2 (x-1)^3 dx=0,\int_1^3 \sin^5(x-2)dx=0.$

【例 6】 计算积分 $\int_0^a x^3\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$

【解】 $\int_0^a x^3\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx \qquad$（令 $\sqrt{\frac{x}{a-x}}=t$）

$$=2a^4\int_0^{+\infty}\frac{t^8}{(t^2+1)^5}dt \qquad (t=\tan u)$$

$$=2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u du=\frac{35}{128}\pi a^4$$

【例 7】 已知反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛，则

(A) $0<\alpha<2$ (B) $1<\alpha<2$

(C) $2<\alpha<3$ (D) $1<\alpha<3$

【解】 选（D）

由于 $x=0$ 是无界点，则将原积分为两个反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$$

由于当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x^2)\sim x^2$, 则反常积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 与 $\int_0^1\frac{x^2}{x^\alpha}dx=\int_0^1\frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ 同敛散，

而要使 $\int_0^1\frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ 收敛，$\alpha-2<1$，则由 $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛可得 $\alpha<3.$

由于反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\le 1$ 时发散，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty$, 则当 $\alpha\le 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 发散，而当 $\alpha>1$ 时，$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^\varepsilon}$，其中

$\varepsilon > 0, \alpha - \varepsilon > 1,$ 由于 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}}$ 收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\varepsilon}} = 0,$ 则 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}} dx$ 收敛，故要使反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}} dx$ 收敛，则 $1 < \alpha < 3.$

【评注】 这里用到两个基本结论：

（1）$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx; \begin{cases} p > 1 & 收敛 \\ p \le 1 & 发散 \end{cases}, \quad (a > 0)$ ；

（2）$\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^p} dx = \begin{cases} p < 1 & 收敛 \\ p \ge 1 & 发散 \end{cases}.$

【例 8】 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且 $f(x)\int_0^x f(x-t)dt = \sin^4 x$ ，求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

【解】 令 $x - t = u$ ，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

$$f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \sin^4 x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的平均值为 $\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$

【例 9】 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)\mathrm{d}x$, 则

A） $I_1 < 1 < I_2$　　　　B） $1 < I_1 < I_2$

C） $I_2 < 1 < I_1$　　　　D） $I_1 < I_2 < 1$

【解】 由 $\sin x < x,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$

知 $\sin(\sin x) < \sin x,\ \cos(\sin x) > \cos x$ ，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1.$$

故选（A）

【例 10】 过原点作曲线 $y=e^x$ 的切线 L,，切线 L 与曲线 $y=e^x$ 及 x 轴围成平面域为 D.

1）求区域 D 的面积 A.

2）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_1.

3）求区域 D 绕 $x=1$ 旋转一周所得旋转体的体积 V_2.

【解】 1) 设过原点的切线为 $y=kx$，则

$$\begin{cases} kx=e^x \\ k=e^x \end{cases}，由此得 x=1,k=e,$$

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^e dy\int_{\ln y}^{\frac{y}{e}}dx=\int_0^e\left(\frac{y}{e}-\ln y\right)dy=\frac{e}{2}$$

2）$V_1=\pi\int_{-\infty}^1 e^{2x}dx-\dfrac{\pi}{3}e^2=\dfrac{\pi e^2}{6}$

3）$V_2=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma=2\pi\iint_D(1-x)d\sigma$

$$=\pi\int_0^e\left[(1-\ln y)^2-(1-\frac{y}{e})^2\right]dy$$

$$=\pi\left(y\ln^2 y-4y\ln y+4y+\frac{y^2}{e}-\frac{y^3}{3e^2}\right)\Bigg|_0^e=\frac{5}{3}\pi e$$

【注】 平面域 D 绕直线 L（L 不穿过 D) 旋转所得体积为

$$V=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma$$

其中 $r(x,y)$ 为 D 中的点 (x,y) 到直线 L 的距离.

【例 11】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 证明 $\exists\xi\in(0,1)$. 使 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0.$

【证 1】令 $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，则

$$F(0)=F(1)=0$$

由罗尔定理知 $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $F'(\xi)=0$

$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2 f(x)-x^2 f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

则 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0.$

【证 2】$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2 d\int_0^x f(t)dt$

$$=x^2\int_0^x f(t)dt\Big|_0^1-2\int_0^1[x\int_0^x f(t)dt]dx$$

$$=x^2\int_0^x f(t)dt\Big|_0^1-2\int_0^1[x\int_0^x f(t)dt]dx$$

$$=\int_0^1 f(t)dt-2\int_0^1[x\int_0^x f(t)dt]dx$$

则 $\int_0^1[x\int_0^x f(t)dt]dx=0$

由积分中值定理得 $\int_0^1[x\int_0^x f(t)dt]dx=\xi\int_0^{\xi} f(t)dt \qquad \xi\in(0,1)$

则 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0.$

【例 12】设曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le n\pi, n=1,2\cdots)$ 和 x 轴所围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n.

（Ⅰ）求 S_n;

（Ⅱ）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$.

【解】（Ⅰ）$S_n=2\pi\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx \qquad$（令 $x=n\pi-t$）

$$=2\pi\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt=2n\pi^2\int_0^{n\pi}|\sin t|dt-S_n$$

$$S_n=n\pi^2\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=n^2\pi^2\int_0^{\pi}\sin t dt=2n^2\pi^2$$

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$

$$=2\pi^2\lim_{n\to\infty}[\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}]$$

$$=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(\frac{1}{n})^2}{1+(\frac{1}{n})^3}+\frac{(\frac{2}{n})^2}{1+(\frac{2}{n})^3}+\cdots+\frac{(\frac{n}{n})^2}{1+(\frac{n}{n})^3}\right]$$

$$=2\pi^2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{2\pi^2}{3}\ln 2$$

【例 13】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx,$ 试证存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)].$

【证】 由 $\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$ 得，

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$$

则 $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$，由积分中值定理得

$$\frac{2}{3}f(c)=\frac{2}{3}f(\eta)\qquad c\in(0,\frac{2}{3}),\eta\in(\frac{2}{3},1)$$

从而 $f(c)=f(\eta)$

令 $F(x)=e^{g(x)}[f(x)-f(\eta)]$

显然 $F(x)$ 在区间 $[c,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，则存在 $\xi\in(c,\eta)$，使

$$F'(\xi)=0$$

即 $\qquad f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)].$

【例 14】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $\left|f'(x)\right|<M,$ 证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}$$

【证】 $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|$

$$=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx-\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})dx\right|$$

中国大学MOOC

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f'(\xi_k)\right|\left|x-\frac{k}{n}\right|dx \qquad \text{（拉格朗日中值定理）}$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{k}{n}-x)dx = M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}$$

第四章　多元函数微分学

重点题型及方法

1. 连续、偏导数、全微分的概念及关系

2. 复合函数及隐函数求导法

3. 多元函数的极值与最值

　1）极值（无条件极值、条件极值）

　2）最值（理论、应用）

【例 1】设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义,且

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

(A）不连续；　　(B）两个偏导数都存在；

(C）两个偏导数存在但不可微；　　(D）是否可微与 a 的取值有关.

【解 1】 直接法　应选（D）

1）若 $a=0$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 即

$$f(x,y)-f(0,0)=o(\rho)$$

由微分的定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

2）若 $a\ne 0$, 则在 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$ 中，令 $y=0,x\to 0$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}=a$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=a$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-a$$

则 $f_x'(0,0)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微, 故应选（D）.

【解法 2】排除法 令 $f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}$, 显然 $f(x,y)$ 满足题设条件，但在 $(0,0)$ 点连续. 故（A）不正确.

若 $a=0$, 则 $f(x,y)\equiv 0$, 显然 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处两个偏导数存在且可微，故（C）不正确.

若 $a\neq 0$, 则 $f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,0)=a|x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 $f_x'(0,0)$ 不存在, 则(B)不正确, 故应选（D）.

【例 2】 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+\dfrac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=1$ 确定，则 $dz\big|_{(0,0)}=$ ________.

【解】 $dz\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}(dx+2dy).$

【例 3】 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 确定，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

【解 】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'-\dfrac{z}{x^2}F_2'}{\dfrac{1}{y}F_1'+\dfrac{1}{x}F_2'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{-\dfrac{z}{y^2}F_1'+F_2'}{\dfrac{1}{y}F_1'+\dfrac{1}{x}F_2'}$,

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(z-xy)$

【例 4】 设函数 $f(x,y)$ 有连续二阶偏导数. 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$，且在极坐标系下可表成 $f(x,y)=g(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f(x,y)$.

【解】 由于 $f(x,y)=g(\rho)=g(\sqrt{x^2+y^2})$，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g'(\rho)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=g'(\rho)\cdot\frac{x}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=g''(\rho)\frac{xy}{\rho^2}-g'(\rho)\frac{xy}{\rho^3}$$

$$=g''(\rho)\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}-g'(\rho)\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^3},$$

代入$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$化简得

$$g''(\rho)-\frac{1}{\rho}g'(\rho)=0.$$

即 $$\rho g''(\rho)-g'(\rho)=0,\qquad \left(\frac{g'(\rho)}{\rho}\right)'=0.$$

$$\frac{g'(\rho)}{\rho}=C_1$$

可解得$g(\rho)=C_1\rho^2+C_2$，从而$f(x,y)=C_1(x^2+y^2)+C_2.$

【例 5】设$f(x,y)$有二阶连续导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，证明$g(x,y)$在$(0,0)$取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值.

【解】由题设$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$知

$$f(x,y)=-(x-1)-y+o(\rho)\qquad 其中\ \rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

则 $$f(1,0)=0\quad f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$$

$$g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x,g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y,$$

$$g'_x(0,0)=0,g'_y(0,0)=0.$$

$$g''_{x^2}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2,$$

$$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x,$$

$$g''_{y^2}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2y+2f'_2,$$

$$A=g''_{x^2}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2, B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1,$$

$$C=g''_{y^2}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2,$$

$AC-B^2=3>0$，且 $A<0$，故 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，且 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值.

【注】 求 $A=g''_{x^2}(0,0),B=g''_{xy}(0,0),\ C=g''_{y^2}(0,0)$ 有更简单的方法。

由 $g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x$ 知， $g'_x(x,0)=2xf'_2(1,x^2).g'_x(0,y)=yf'_1(1,y^2)$ 则

$g''_{x^2}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2.\ g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1.$

同理 $g'_y(0,y)=2yf'_2(1,y^2)$, 则 $g''_{y^2}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2.$

【例 6】 设函数 $z=z(x,y)$ 的微分 $dz=(2x+12y)dx+(12x+4y)dy$，且 $z(0,0)=0$，求函数 $z=z(x,y)$ 在 $4x^2+y^2\le 25$ 上的最大值。

【解】 由 $dz=(2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 知， $z=x^2+12xy+2y^2$

令 $\begin{cases} z_x=2x+12y=0 \\ z_y=12x+4y=0 \end{cases}$

驻点：$(0,0),z(0,0)=0$

$$F(x,y,\lambda)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25)$$

$$\begin{cases} F_x=2x+12y+8\lambda x=0 & (1) \\ F_y=12x+4y+2\lambda y=0 & (2) \\ F_\lambda=4x^2+y^2-25=0 \end{cases}$$

由（1）和（2）式知：

$\begin{cases} (1+4\lambda)x+6y=0 \\ 6x+(2+\lambda)y=0 \end{cases}$ 且有非零解.

则 $\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix}=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-\dfrac{17}{4}$

$\lambda_1=2$ 时，驻点 $P_1(2,-3),P_2(-2,3),z=-50.$

$\lambda_2=-\dfrac{17}{4}$时，驻点$P_3(\dfrac{3}{2},4),P_4(-\dfrac{3}{2},-4),z=\dfrac{425}{4}$.

比较得 $z_{\max}=\dfrac{425}{4}$

第五章 二重积分

重点题型及方法：

1. 二重积分计算

方法：1）直角坐标 2）极坐标 3）奇偶性及对称性

2. 累次积分交换次序及计算

3. 二重积分的性质（不等式）

【例 1】 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\rho^2d\rho+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=$__________.

【解】原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2d\rho=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{6}$

【例 2】累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$等于

（A） $\int_0^1dy\int_y^{1-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$ （B） $\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$

（C） $\int_0^2d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$

（D） $\int_0^{\sqrt{2}}d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\theta+\int_{\sqrt{2}}^2d\rho\int_0^{\arccos\frac{\rho}{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\theta$

【解】选（D）.

【例 3】 $\int_0^1dy\int_y^1\sqrt{x^2-y^2}dx=$______________.

【解】原式$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{12}$ （$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{\pi a^2}{4}$）

【例 4】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[\int_1^{\frac{1}{n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{2}{n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{n-1}{n}}e^{-y^2}dy]=$____________.

【解】原式$=\int_0^1dx\int_1^xe^{-y^2}dy=-\int_0^1dy\int_0^ye^{-y^2}dx=-\int_0^1ye^{-y^2}dy$

$=\dfrac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{e}-1)$

【例 5】已知 $f'(t)=\int_0^t dx\int_0^x \frac{f(y)}{t-y}dy+e^t$,且 $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(x)=$ ____________.

$$[f(t)=\frac{e^t}{2}(t+1)]$$

【例 6】计算 $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x+2y\}$.

【解 1】由 $x^2+y^2\le 2x+2y$ 知，$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$

令 $x-1=u, y-1=v,\quad D:u^2+v^2\le 2.$

$$\text{原式}=\iint\limits_D [u+1+(v+1)^2]\mathrm{d}\sigma=4\pi+\iint\limits_D v^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=4\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_D (u^2+v^2)\mathrm{d}\sigma=5\pi.$$

【解 2】由 $x^2+y^2\le 2x+2y$ 知，$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$

令 $x-1=\rho\cos\theta, y-1=\rho\sin\theta,$

$$\text{则}\iint\limits_D (x+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}[1+\rho\cos\theta+(1+\rho\sin\theta)^2]\rho d\rho=5\pi$$

【例 7】计算积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}[\sin\theta+\cos\theta\sqrt{1+\rho^2\sin^2\theta}]\rho^2 d\rho.$

【解】原式 $=\iint\limits_D [y+x\sqrt{1+y^2}]d\sigma$

其中 D 是由 $x^2+y^2=2y\ (y\ge 1), y=x, y=-x$ 所围成的区域.

$$\iint\limits_D [y+x\sqrt{1+y^2}]d\sigma=2\int_0^1 dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}}ydy=\int_0^1[(1+\sqrt{1-x^2})^2-x^2]dx$$

$$=\int_0^1[2-2x^2]dx+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$$

【例 8】已知平面域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\}$, 记

$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy, I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy, I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, 则

(A) $I_3<I_2<I_1$.　　(B) $I_2<I_1<I_3$.

(C) $I_1<I_2<I_3$.　　(D) $I_2<I_3<I_1$.

解题思路 本题是要比较同一区域上 3 个二重积分的大小，由二重积分的不等式性质可知，只要比较 3 个二重积分的被积函数的大小即可.

【解】应选（A）

令 $\sqrt{x^2+y^2}=r\ (0\le r\le \frac{\pi}{2})$, 只要比较 $r, \sin r, 1-\cos r$ 的大小.

显然 $\sin r < r$

又 $\sin r \ge \sin^2 r = 1-\cos^2 r \ge 1-\cos r$

则 $I_3 < I_2 < I_1$，故应选（A）.

【例 9】已知平面域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le \frac{\pi}{2}\}$, 记 $I_1=\iint\limits_D (2x^2+\tan xy^2)dxdy$,

$I_2=\iint\limits_D (x^2y+2\tan y^2)dxdy,\ I_3=\iint\limits_D (|xy|+y^2)dxdy$, , 则

(A) $I_3 > I_2 > I_1$；　　(B) $I_1 > I_2 > I_3$；

(C) $I_2 > I_1 > I_3$；　　(D) $I_3 > I_1 > I_2$.

解题思路 本题也是要比较同一区域上 3 个二重积分的大小, 但要直接比较 3 个二重积分的被积函数的大小很困难. 此时要注意到其积分域有很好的对称性. 既关于两个坐标轴对称, 也关于直线 $y=x$ 对称.

【解】应选（C）

由于 $\tan xy^2$ 是 x 的奇函数，x^2y 是 y 的奇函数，，则

$$\iint\limits_D \tan xy^2 dxdy = 0, \qquad \iint\limits_D x^2 ydxdy,$$

$$I_1=\iint\limits_D 2x^2dxdy, \quad I_2=\iint\limits_D 2\tan y^2dxdy,$$

由于积分域 D 关于 $y=x$ 对称，则

$$I_2=\iint\limits_D 2\tan y^2dxdy=\iint\limits_D 2\tan x^2dxdy>\iint\limits_D 2x^2dxdy=I_1$$

$$I_3=\iint\limits_D (|xy|+y^2)dxdy<\iint\limits_D (\frac{x^2+y^2}{2}+y^2)dxdy$$

$$=\iint\limits_D (\frac{x^2+x^2}{2}+x^2)dxdy$$

$$=\iint_D 2x^2dxdy=I_1$$

则 $I_3<I_1<I_2$，故应选（C）.

第六章　　微分方程

重点题型及方法：

1. **解方程（可分离变量、齐次、线性及高阶线性常系数）**
2. **综合题**
3. **应用题（几何）**

【例 1】 方程 $x\ln xdy+(y-\ln x)dx=0$ 满足初始条件 $y|_{x=e}=1$ 的特解为________.

【解】 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x\ln x}=\frac{1}{x}$$

解此线性方程得　$y=\frac{1}{2}(\ln x+\frac{1}{\ln x})$

【例 2】 已知方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，则方程 $y''+ay'+by=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 的特解为____________.

【解】 应填 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}+xe^x)$

由方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 可知，该方程的特征方程有特征根 $r_{1,2}=\pm1$, 则其特征方程为 $r^2-1=0$, 从而 $a=0,b=-1$.

设方程 $y''-y=e^x$ 的特解为 $y^*=axe^x$, 代入该方程得 $a=\frac{1}{2}$.

则方程 $y''-y=e^x$ 的通解　$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$.

由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2},C_2=-\frac{1}{2}$. 则所求特解为 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}+xe^x)$.

【例 3】 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $x-t=u$, 则 $\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x (x-u)f(u)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

$$\int_0^x f(t)dt=x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du,$$

等式两端对 x 求导得

$$f(x)=1+\int_0^x f(u)du,$$

$f'(x)=f(x)$，

又 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

【例 4】 已知 $y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+e^x$ 是某二阶线性非齐次方程的三个特解，求该微分方程及通解。

【解】 $y_2-y_1=x^2$，$y_3-y_1=e^x$ 为齐次方程的两个线性无关的特解，则所求方程通解为 $y=C_1x^2+C_2e^x+3$。

$$y=C_1x^2+C_2e^x+3 \qquad (1)$$

（1）式求导得 $\quad y'=2C_1x+C_2e^x \qquad$（2）

再求导得 $\quad y''=2C_1+C_2e^x \qquad$（3）

$(3)-(2)$ 得 $\quad y''-y'=2C_1(1-x) \qquad$（4）

$(1)-(2)$ 得 $\quad y-y'=C_1(x^2-2x)+3 \qquad$（5）

联立（5）式和（4）式消去 C_1 得

$$(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=6(1-x)$$

【例 5】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，且满足微分方程 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$. 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 围成区域 D 的面积为 2，求：

1） $f(x)$；

2）使 D 绕 x 轴旋转一周而成旋转体体积为最小的 a.

【解】 1）解线性方程 $\quad xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$ 得

$$f(x)=Cx+\frac{3}{2}ax^2$$

由 $\quad 2=\int_0^1(Cx+\frac{3}{2}ax^2)\mathrm{d}x$ 知，$C=4-a$，

$$f(x)=(4-a)x+\frac{3}{2}ax^2.$$

2）$V(a)=\pi\int_0^1[(4-a)x+\frac{3}{2}ax^2]^2\mathrm{d}x$

$$=\pi(\frac{16}{3}+\frac{a}{3}+\frac{1}{30}a^2)$$

$V'(a)=\pi(\frac{1}{3}+\frac{a}{15})=0,$得$a=-5.$ $V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0,$则在$a=-5$处取极小值，又是唯一驻点，则$a=-5$时，$V$ 最小.

第七章　无穷级数

重点题型及方法:

1. 数项级数敛散性的选择题
2. 数项级数的证明题（仅数一）
3. 幂级数
   1）收敛半径、收敛区间、收敛域
   2）幂级数展开
   3）幂级数求和

【例 1】级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$收敛的充要条件是( )

（A）$\alpha>1.$　　　　（B）$\alpha>1,\beta>1.$

（C）$\alpha\geq1,\beta>1.$　　　　（D）$\alpha>1$或$\alpha=1,\beta>1.$

【解】选（D）

若$\alpha<1,$则存在充分小的正数$\varepsilon>0,$使得$\alpha+\varepsilon<1,$此时

$$\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}=\frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}\cdot\frac{n^{\varepsilon}}{\ln^{\beta}n}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{\ln^{\beta}n}=+\infty,$则当$n$充分大时，$\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}>\frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$，而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$发散，则级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$发散.

若$\alpha>1,$则存在充分小的正数$\varepsilon>0,$使得$\alpha-\varepsilon>1,$此时

$$\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}=\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\cdot\frac{1}{n^{\varepsilon}\ln^{\beta}n}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\varepsilon}\ln^{\beta}n}=0^{+},$则当$n$充分大时，$\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}<\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$，而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$收敛，则级数

中国大学MOOC

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$收敛.

若$\alpha=1,$则级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\beta}n}$与反常积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\beta}x}$同敛散，又

令$\ln x=u,$则

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\beta}x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^{\beta}}$$

则$\beta\le 1$时，$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^{\beta}}$发散，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\beta}n}$发散；$\beta>1$时，$\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^{\beta}}$收敛，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\beta}n}$收敛.

【例 2】 下列命题正确的是

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty,$则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散可推得$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散；

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0,$则级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛可推得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0,$则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$至少有一个收敛；

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1,$则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$至少有一个发散；

【解】 应选（D）

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$中至少有一个不成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$至少有一个发散；

【例 3】 设有命题

1）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}a_n$收敛；

2）若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\quad(n=1,2\cdots)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

3）若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ne 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散；

4）若 $a_n \le b_n \le c_n \quad (n=1,2\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

则上述命题中正确的个数为

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3.

【解】 只有命题（4）正确，故应选（B）.

【例 4】设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1.$

（I）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，并求其和;

（II）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

【证】（I）令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$,则

$$S_n=[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]+\cdots+[f(n)-f(n-1)]$$

$$=f(n)-f(0)$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1-f(0)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，且其和为 $1-f(0)$.

（II）由 $f''(x)<0$ 可知，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，则 $f'(x)$ 下有界.否则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$, 又

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi) \qquad (x<\xi<x+1) \qquad (1)$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ 可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)-\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$ 可知，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi)=-\infty$, 矛盾.则 $f'(x)$ 下有界. 又 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，由（1）式知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 则 $f'(x)\ge 0$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 为正项级数，又

$$f(n)-f(n-1)=f'(\xi) \qquad (n-1<\xi<n)$$

$$> f'(n)$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$也收敛.

【例 5】已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$条件收敛，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n}(x+1)^{2n-1}$的收敛区间为__________.

【解】由$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$条件收敛可知，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n (x+1)^n$在$x=1$处条件收敛. 则其收敛半径为$2$，故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n}(x+1)^{2n-1}$的收敛半径也为$\sqrt{2}$，故其收敛区间为$(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$.

【例 6】将$f(x)=\frac{x}{x^2+7x+6}$在$x=4$处展开为幂级数.

【解】

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)(x+6)}=\frac{1}{5}(\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x+1})$$

$$=\frac{3}{25}\frac{1}{1+\frac{x-4}{10}}-\frac{1}{25}\frac{1}{1+\frac{x-4}{5}} \qquad (-1<x<9)$$

【例 7】 将$\arctan\frac{4+x^2}{4-x^2}$展开为$x$的幂级数.

【解】

$$f'(x)=\frac{8x}{16+x^4}=\frac{x}{2}\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^4}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n} \qquad (|x|<2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n+1} \qquad (|x|<2)$$

$$f(x)-\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x(\frac{x}{2})^{4n+1}dx$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2}(\frac{x}{2})^{4n+2}$$

【例 8】 求幂级数$x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$的收敛域及和函数.

【解】 易求得收敛域为$[-1,1]$.

令 $S(x)=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$

$$S'(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$=1+2x\arctan x$$

$$S(x)=\int_0^x(1+2x\arctan x)\mathrm{d}x=(1+x^2)\arctan x.$$

【例 9】 已知$a_0=1,a_1=\frac{1}{2}$，且当$n\geq 2$，有$na_n=[\frac{1}{2}+(n-1)]a_{n-1}$. 证明当$|x|<1$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求其和函数.

【解】 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\frac{1}{2}+n)}{n+1}\right|=1$，所以当$|x|<1$时幂级数收敛.

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{2}+(n-1)]a_{n-1}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-a_0]+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$$

$$=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x).$$

解微分方程$\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{1}{2(1-x)},S(0)=1$得$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

故幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

第八章　多元微积分续（数一）

重点题型及方法：

1. 第二型线积分计算

方法：1）平面线积分

（1）直接法　　（2）格林公式

（3）补线用格林公式　　（4）线积分与路径无关

2）空间线积分

（1）直接法　　（2）斯托克斯公式

（3）化空间线积分平面线积分

2. 第二型面积分计算

方法：1）直接法　　2）高斯公式　　3）补面用高斯公式

3. 三重积分及第一型线面积分计算

【例 1】求过直线$\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-y-2z+3=0 \end{cases}$且与曲线$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处的切线平行的平面.

【解】　设所求平面为$x+2y+z-1+\lambda(x-y-2z+3)=0$

即　$(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(1-2\lambda)z-1+3\lambda=0$

其法线向量为$\vec{n}=(1+\lambda,2-\lambda,1-2\lambda)$

曲线$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处的切向量为

$$\vec{\tau}=(1,-1,-1)\times(1,1,2)=(-1,-3,2)$$

由题设知$\vec{n}\perp\vec{\tau}$,则

$$-(1+\lambda)-3(2-\lambda)+2(1-2\lambda)=0$$

得$\lambda=-\frac{5}{2}$,代入$(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(1-2\lambda)z-1+3\lambda=0$得

$$3x-9y-12z+17=0$$

【例 2】设$u=3x^2y-2yz+z^3, v=4xy-z^3$则$u$在点$P(1,-1,1)$处沿$gradv$方向的方向导

数为 ___________.

【解 】 $\mathrm{grad}v=\{-4,4,-3\}$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(-6)\frac{-4}{\sqrt{41}}+1\cdot\frac{4}{\sqrt{41}}+5\cdot\frac{-3}{\sqrt{41}}=\frac{13}{\sqrt{41}}$$

【补充】$div(gradv)\big|_{(1,-1,1)}=$ _________. $rot(gradv)\big|_{(1,-1,1)}=$ _________.

【例 3】 设 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 其周长为 L, 则

$\oint_C (bx+ay+1)^2 ds=$ ___________.

【解】 原式 $=\oint_C (b^2x^2+a^2y^2+1)\mathrm{d}s$

$$=a^2b^2\oint_C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}s+L$$

$$=(a^2b^2+1)L.$$

【例 4】 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则 $\iint_\Sigma (z+|x|)^2 dS$

【解】 原式 $=\iint_\Sigma (x^2+z^2)\mathrm{d}S=\dfrac{2}{3}\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$

$$=\frac{8\pi}{3}R^4$$

【例 5】 计算线积分 $I=\int_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 为由点 $A(-1,0)$ 经点 $B(1,0)$ 到点 $C(-1,2)$ 的路径, $\overset{\frown}{AB}$ 为下半圆周, $\overline{BC}$ 为直线.

【解】 由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x^2+y^2\neq 0)$，则

$$\oint_{L+\overline{CA}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

其中 Γ 为椭圆 $4x^2+y^2=1$ 沿逆时针方向，从而

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}-\oint_{\overline{CA}}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$=\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{-1\mathrm{d}y}{4+y^2}=\frac{7}{8}\pi.$$

【例 6】设 $f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上二阶连续可微，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$，计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})dxdy.$

【解】 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 沿逆时针方向，考虑线积分

$$I=\oint_L(x^2+y^2)(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x)$$

$$=\oint_L\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$=\iint_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})d\sigma \qquad \text{（格林公式）}$$

又 $$I=\oint_L(x^2+y^2)(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x)$$

$$=2\iint_D(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\sigma+\iint_D(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma \qquad \text{（格林公式）}$$

则 $$\iint_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})d\sigma=2\iint_D(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\sigma+\iint_D(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

即 $$\iint_D(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[1-(x^2+y^2)]\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[1-(x^2+y^2)]e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2e}$$

【例 7】 计算 $\oiint\limits_\Sigma\frac{(9y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy}{\sqrt{y-x^2-z^2}}$，其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所产生的曲面，它的法线向量与 y 轴的正向夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

【解】 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ （$1\le y\le 3$）绕 y 轴旋转一周所产生的曲面方程为

$x^2+z^2=y-1$，即 $y-x^2-z^2=1$，则

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{(9y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy}{\sqrt{y-x^2-z^2}}$$

$$=\oint\!\!\oint_{\Sigma}(9y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

补平面 $S:\begin{cases} x^2+z^2\le 2, \\ y=3, \end{cases}$ 其法线方向与 y 轴正向相同。

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma}(9y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\oint\!\!\oint_{\Sigma+S}\ =\oint\!\!\oint_{S}$$

$$=\iiint_V(9y+1-4y-4y)dV-\iint_D 2(1-9)dxdz$$

$$=\int_1^3(y+1)\pi(y-1)dy+32\pi=\frac{116\pi}{3}$$

【例 8】设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 则 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}=$ ________.

[12π]

【例 9】 曲面片 $\sum: z^2=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的形心为 __________.

【解】 $$\bar{z}=\frac{\iint_{\Sigma}zdS}{\iint_{\Sigma}dS}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\sqrt{2}d\rho}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{2}d\rho}=\frac{2}{3}$$

则形心为 $(0,0,\frac{2}{3})$.

附录： 高等数学重要定理的证明

1. 一元函数连续、可导、可微之间关系的证明；
2. 罗尔定理；
3. 拉格朗日定理；
4. 微积分基本定理；$(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)'=f(x)$.
5. 牛顿莱布尼兹公式；

6. 积分中值定理：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = f(c)(b-a) \quad (a<c<b)$

7. 广义积分中值定理：$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$

8. 多元函数可微的充分条件；

9. 比值判别法；（仅数一要求）

10. 格林公式；（仅数一要求）

中国大学MOOC