第一章　函数与极限

第五节　极限运算法则

定理1 两个无穷小的和是无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 有限个无穷小的积仍是无穷小.

定理3 若 $\lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B$, 那么:

$$\lim\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad (B\neq 0)$$

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 那么

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 那么

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

定理4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab;$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}.$ （$b \neq 0$)

【例1】 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x)$

【例2】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^3-3x+5}$

【例3】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-3x+2}$

【例4】 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x}{x^3-3x+2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\quad\cdots\quad+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\quad\cdots\quad+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

定理5 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A, \lim \psi(x) = B$, 那么 $A \geq B$.

定理6 设 $y = f[g(x)]$ 是由 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 复合而成,

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = a$, 当 $x \in U(x_0, \delta_0)$ 时,

$g(x) \neq u_0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = a$.

内容小结

1. 极限运算法则

$\left.\begin{array}{l}\text{（1）无穷小运算法则}\\ \text{（2）极限四则运算法则}\\ \text{（3）复合函数极限运算法则}\end{array}\right\}$ 注意使用条件

2. 求函数极限的方法

（1）分式函数极限求法

$1)\ x \to x_0$ 时，用代入法（ 要求分母不为 0 ）

$2)\ x \to x_0$ 时，对 $\frac{0}{0}$ 型 ，约去分母零因子

$3)\ x \to \infty$ 时 ，分子分母同除最高次幂 "抓大头"

（2）复合函数极限求法 —— 设中间变量

作业

P45：1（12）（13）（14）；3；4；5.