曲线积分与曲面积分

对坐标的曲线积分

主讲　武忠祥 教授

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

引例 **变力沿曲线作功** $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$

$$\Delta W_i \approx \vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

定义 **设** L **是** xOy **面内从点** A **到点** B **的一条有向光滑曲线弧.**

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

$$= \int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{s}$$

性质

1） $\int_L [\alpha \vec{F}_1(x,y) + \beta \vec{F}_2(x,y)] \cdot d\vec{r} = \alpha \int_L \vec{F}_1(x,y) \cdot d\vec{r} + \beta \int_L \vec{F}_2(x,y) \cdot d\vec{r}$

2） $\int_L \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} + \int_{L_2} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r}$

3） $\int_{L^-} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = -\int_L \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r}$

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理 设光滑有向曲线 L 的参数方程是

$$x = x(t), y = y(t)$$

$t = \alpha$ 对应于 L 的起点 $A, t = \beta$ 对应于 L 的终点 B

又设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在曲线 L 上连续，则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

特别的， 若曲线 L 的方程是 $y = y(x)$

$x = a$ 对应于 L 的起点 $A, x = b$ 对应于 L 的终点 B

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx$$

例1 计算 $I=\int_L xydx+(x+y)dy$

其中 L 是曲线 $xy=1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(2,\frac{1}{2})$ 的弧段.

$(\frac{5}{8}-\ln 2)$

例2 计算 $I=\int_{(C)}(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$

其中 (C) 分别为

（1）上半圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 沿逆时针方向； (πa^2)

（2）从点 $A(a,0)$ 到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

例3 计算 $I=\int_{(C)} 2xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y$

其中起点和终点分别为 $O(0,0)$ 和 $B(1,1)$ 的积分路径 (C) 为：

（1）抛物线 $y=x^2$；　　（2） 直线段 $y=x$

(3) 依次联结 $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$ 的有向折线。

三、两类曲线积分的关系

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{s}$$

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}ds$$

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_L A_\tau ds$$

内容小结

1. 定义 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$

2. 性质 $\int_{L(\overset{\frown}{AB})} Pdx + Qdy = -\int_{L(\overset{\frown}{BA})} Pdx + Qdy$

3. 计算方法

直接法; 设 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$，则

$$\boxed{\int_L Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt}$$

设 $L: y = y(x),\ x \in [a,b]$ 则

$$\boxed{\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx}$$

4.两类线积分的联系:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos\alpha + Q \cos\beta) ds$$

作业

P203　3　(2),　(4),　(6),　(7) ;

4 ;　　5 ;　　7 ;　　8