第六章　定积分的应用

定积分在几何上的应用

主讲　武忠祥 教授

能用定积分解决的问题特征

1）非均匀连续分布在 $[a,b]$ 上的量.

2）所求量对区间有可加性.

一、平面图形的面积

例1 求曲线 $y^2 = x$ 与 $y = x^2$ 所围面积. $[\frac{1}{3}]$

例2 求曲线 $y^2 = 2x$ 与 $y = x - 4$ 围成面积.　　　[18]

例3 求摆线一拱 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴所围成面积.

$[3\pi a^2]$

例4 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围面积. $[\frac{3}{2}\pi a^2]$

二、体积

1.旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

例5 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

$[\dfrac{4}{3}\pi ab^2]$

例6 计算由摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x

图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积.

$[5\pi^2 a^3; 6\pi^3 a^3]$

2.平行截面积为已知的立体的体积

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

例7 计算由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成椭球体的体积. $[\frac{4}{3}\pi abc]$

三、平面曲线的弧长

1.弧长的定义

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right\| \qquad s = \lim_{\lambda \to 0} s_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right\|$$

2.弧长的计算

1) $C: y = y(x), \quad a \le x \le b. \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

2) $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta. \quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$

3) $C: \rho = \rho(\theta), \ \alpha \le \theta \le \beta. \quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$

例8 计算旋轮线一拱 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长. $\quad (8a)$

例9 求曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}\ (0 \le x \le 1)$ 的弧长.

例10 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta \ (a>0)$ 相应于 $0 \le \theta \le 2\pi$ 一段的弧长.

$$\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})]$$

内容小结

1. 平面图形的面积

$$
\text{边界方程}\begin{cases}\text{直角坐标方程}\\ \text{参数方程}\\ \text{极坐标方程} \qquad A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^{2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{cases}
$$

2. 体积

1）旋转体的体积

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$$

2）平行截面积为已知的立体的体积

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

3. 平面曲线的弧长

弧微分: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小

1) $C: y = y(x),\quad a \le x \le b.\qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

2) $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \le t \le \beta.\qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$

3) $C: \rho = \rho(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta.\qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$

作业

P286: 3 ; 5 ; 7 ; 11; 12; 13

15 (3) , (4) ;19; 20;

24; 25;