重 积 分

三重积分

主讲　武忠祥 教授

一、三重积分的概念

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\xi_k)\Delta v_k$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

$$\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz]d\sigma}$$

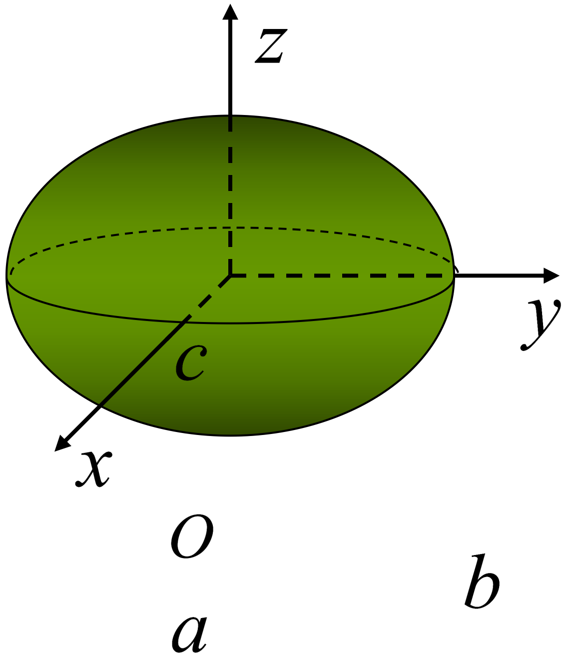
例1 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} xyzdv$，其中 Ω 由坐标面 $x=0,y=0,z=0$ 和平面 $x+y+z=1$ 所围成.

$[\frac{1}{720}]$

例2 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域.

例3 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv,\quad \Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}.\quad [\frac{4}{15}\pi abc^3]$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_a^b\Big[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,d\sigma\Big]dz}$$



2. 利用柱坐标计算三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$$0 \le \rho < +\infty$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

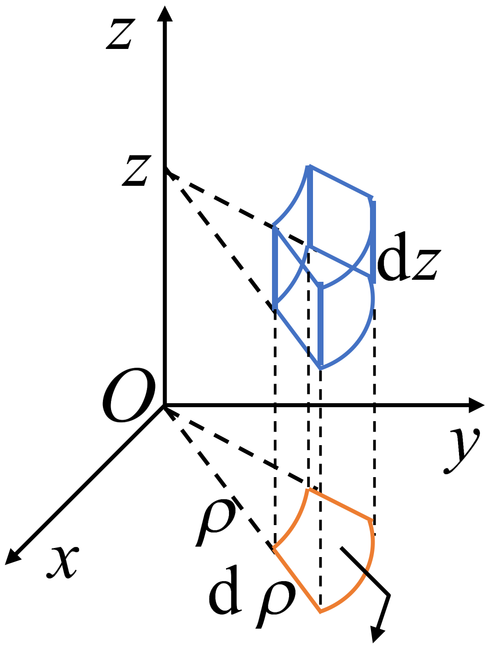
$$-\infty < z < +\infty$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\boxed{dv = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$\boxed{= \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$



例4 计算 $I=\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$,其中 (V) 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0$ 所围成.

例5 计算 $I=\iiint\limits_{(V)}z\,\mathrm{d}V$,其中 (V) 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=3z$ 所围成.

$[\frac{13\pi}{4}]$

3. 利用球坐标计算三重积分

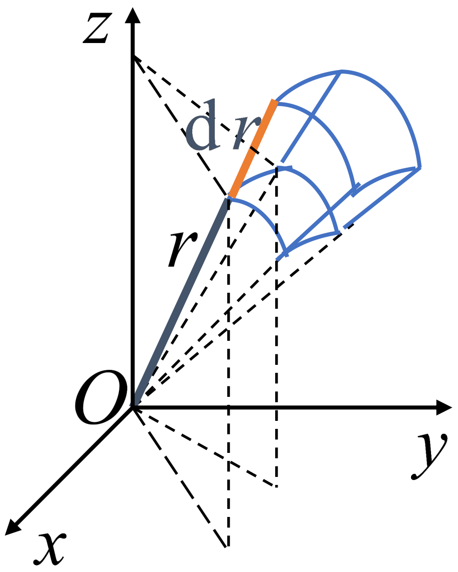
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$0 \le r < +\infty$$

$$0 \le \varphi \le \pi$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$$\boxed{dv = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$\boxed{= \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.}$$

例6 设 (V) 为球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间区域,求 (V) 的体积.

例7 计算 $I=\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$,其中 (V) 由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 所围成.

内容小结

三重积分计算计算

1）直角坐标:

i）先一后二;

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

ii）先二后一;

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

2）柱坐标:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$$

3）球坐标:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{dv} = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

作业

P166　1(2),(3),(4);　4;　5;

7;　8;　9 (2);

10 (2) ;　11 (1), (4)