第三章　微分中值定理与导数应用

第六节　函数图形的描绘

主讲　武忠祥 教授

利用导数描绘函数图形的步骤

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其奇偶性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形 .

曲线的渐近线

1)若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$,或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$) 那么

$y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线.**

2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,那么 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的**垂直渐近线.**

3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$, 那么 $y=ax+b$ 是

$y=f(x)$ 的**斜渐近线.**

例1 求曲线 $y=\dfrac{(x-1)e^{x}}{e^{x}-1}$ 的渐近线.

例2 设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，求

（1）函数的增减区间及极值；（2）函数图像的凹凸区间及拐点；
（3）渐近线； （4）作出其图形.

解 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 当 $x=-\sqrt[3]{4}$ 时，$y=0$

（1）$y'=1-\dfrac{8}{x^3}$,故驻点为 $x=2$,

所以，$(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$ 为增区间，$(0,2)$ 为减区间，$x=2$ 为极小点,极小值为 $y=3$

（2）$y''=\dfrac{24}{x^4}>0$,故 $(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$ 均为凹区间,无拐点.

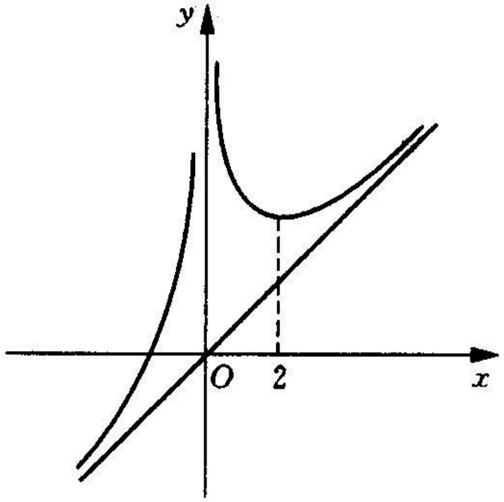

图 2－6

（3）因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1=a \quad \lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0=b$$

内容小结

1．函数图形的描绘 ———— 按作图步骤进行

2．曲线渐近线的求法

水平渐近线 ； 垂直渐近线;

斜渐近线

作业 P167：1；4；