曲线积分与曲面积分

对坐标的曲面积分

主讲　武忠祥 教授

一、对坐标的曲面积分的概念与性质

双侧曲面

有向曲面的投影

$$(\Delta S)_{xy}\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0,\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0,\\ 0, & \cos\gamma=0.\end{cases}$$

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

$$\Phi=S\left|\vec{v}\right|\cos\theta=S\vec{v}\cdot\vec{n}$$

$$\Delta\Phi_i\approx\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\Delta S_i$$

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\Delta S_i$$

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

定义 设 Σ 是光滑的有向曲面,

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

性质 1) $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

2) $\iint\limits_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

二、对坐标的曲面积分的计算法

直接法:

(1)设曲面： Σ: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$

$$\boxed{\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}\sigma}$$

(2)设曲面： $\Sigma: x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$

$$\boxed{\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

(3)设曲面： $\Sigma: y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$

$$\boxed{\iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm \iint\limits_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x}$$

例1 计算面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$,其中 $\sum$ 为长方体 $\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\}$ 的表面外侧.

$[(a+b+c)abc]$

例2 计算面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xyz\,dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\geq 0, y\geq 0)$ 的外侧.

$[\frac{2}{15}]$

三、两类曲面积分的关系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathrm{A}}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,S$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} [P(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial x}) + Q(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial y}) + R(x,y,z(x,y))]dxdy$$

例3 计算面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$,其中 Σ 为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧. $[8\pi]$

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}[P(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial x})+Q(x,y,z(x,y))(-\frac{\partial z}{\partial y})+R(x,y,z(x,y))]dxdy$$

内容小结

1. 定义 $$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

2. 性质 $$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

3. 计算方法

设曲面： $\Sigma:\ z = z(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}\sigma}$$

4.两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

作业

P231　3 (1) ,(2) , (4) ;　4 (1), (2)