第一章　函数与极限

第八节　函数连续性与间断点

主讲　武忠祥 教授

一、函数的连续性

定义（连续） 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**连续**.

左连续： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

右连续： $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

连续 $\Leftrightarrow$ **左连续且右连续**

$f(x)$ 在区间上连续 ；

【例1】 试证：$\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

二、函数的间断点

$f(x)$ 在 x_0 处连续

1） $f(x)$ 在 x_0 有定义

2） $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在

3） $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

间断点

$f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义

间断点分类：

第一类间断点：（左、右极限都存在）

1）**可去间断点：** $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$

2）**跳跃间断点：** $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$

第二类间断点（左、右极限至少有一个不存在）

【例2】判断下列函数的间断点 $x=0$ 的类型

$1)\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　　（可去）

$2)\ f(x)=\operatorname{sgn} x$　　（跳跃）

$3)\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$　　（振荡）

$4)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　（无穷）

内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \rightleftarrows \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$$\rightleftarrows \underbrace{f(x_0^-)=f(x_0)}_{\text{左连续}}=\underbrace{f(x_0^+)}_{\text{右连续}}$$

2. $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型

第一类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限都存在

第二类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限至少有一个不存在

作业 P61：3; 4; 5；6..