曲线积分与曲面积分

高斯公式

主讲　武忠祥 教授

一、高斯公式

定理 设空间有界闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成的，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在该区域上具有一阶连续偏导数，则

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv}$$

例1 计算面积分 $I = \iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$，其中 Σ 为长方 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$ 的表面外侧. $[(a+b+c)abc]$

例2 计算面积分

$$I=\iint\limits_{(S)} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+x^3+y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(1) (S)为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧. $[\frac{12\pi R^5}{5}]$

(2) (S)为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

三、散度

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

例3 向量场 $\mathbf{u}(x,y,z)=xy^2\mathbf{i}+ye^z\mathbf{j}+x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$

在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{u}=$ ________. [2]

内容小结

1. 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

2. 散度

$$\mathbf{div A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

作业

P239　1 (2), (4), (5);

3 (1)(3);