概率论与数理统计

Ⅰ. 随机试验 → 样本点 → 随机事件A → 概率P(A) → 古典概型, 几何概型
样本空间　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　伯努里概型

随机事件A：关系, 运算, 规律

概率P(A)：定义, 性质, 五大公式, 条件概率

Ⅱ. 随机变量 → 一维X / 二维(X,Y) → 离散型 → 分布(律) / 连续型 → 密度 → 分布函数 → 数字特征 → 大数定律, 中心极限定理

二维(X,Y)：独立, 条件

分布函数：常见分布 B.P.U.E.N, 函数的分布

数字特征：期望, 方差, 协方差, 相关系数

Ⅲ 简单随机样本 → 统计量 → 参数估计 → 点估计 → 矩估计法, 最大似然估计法
$\boxed{\text{区间估计}}$
$\boxed{\text{假设检验}}$
$\boxed{\text{评估}}$

统计量：$\bar{X}, S^2, \chi^2, t, F$，正态总体抽样分布

近十年考题分布		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
2011年	数学一		4题—23分	1题—11分
	数学三		4题—30分	1题—4分
2012年	一	1—4	3—19	1—11
	三	1—4	3—26	1—4
2013年	一		3—19	2—15
	三		4—23	1—11
2014年	一	1—4	2—15	2—15
	三	1—4	2—22	2—8
2015年	一	1—4	3—19	1—11
	三	1—4	2—15	2—15
2016年	一		3—19	2—15
	三	2—8	2—15	1—11
2017年	一	1—4	2—15	2—15
	三	1—4	2—15	2—15
2018年	一	1—4	2—15	2—15
	三	1—4	2—15	2—15
2019年	一	1—4	3—19	1—4
	三	1—4	3—19	1—11
2020年	一	1—4	3—19	1—11
	三	1—4	3—19	1—11

I. 随机事件与概率

1. 主要考点：随机事件的关系、运算和规律，概率性质，条件概率，事件独立性，五大公式。

2. 典型例题分析。

例1 (16) 设A,B为两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则

(A) $P(\bar{B}|\bar{A})=1$. (B) $P(A|\bar{B})=0$. (C) $P(A\cup B)=1$. (D) $P(B|A)=1$.

例2 (17) 设A,B为随机事件，若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是

(A) $P(B|A)>P(B|\bar{A})$. (B) $P(B|A)<P(B|\bar{A})$. (C) $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$. (D) $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$.

例3 (00) 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ______.

例4. 已知 $P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$，则 $P(A|B)+P(B|A)$ 最小可能取值等于

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1.

例5.(03) 已知甲、乙两箱装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品，从甲箱中取3件产品放入乙箱后求：

(1) 乙箱中次品件数X的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

例6.(18) 设随机事件A与B相互独立，A与C相互独立，$BC=\varnothing$，若 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$，则 $P(C)=$ ____.

Ⅱ 第二章 随机变量及其分布

1. 主要考点：离散型和连续型随机变量，分布函数，分布律，概率密度，常见分布，随机变量函数的分布，随机变量独立。

2. 典型例题分析：

例1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从 $U[0,3]$，则 $P\{\min(X,Y)<1\}=$ ____

例2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$(\sigma>0)$，且 $P\{X<\sigma\}>P\{X>\sigma\}$，则 $\frac{\mu}{\sigma}$ 的值

(A) 小于1.　(B) 等于1.　(C) 大于1.　(D) 不能确定.

例3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从参数为1的指数分布，则 $P\{\max(X,Y)>1\}=$ ____

例4. (05) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则

(A) $a=0.2$, $b=0.3$　(B) $a=0.4$, $b=0.1$　(C) $a=0.3$, $b=0.2$　(D) $a=0.1$, $b=0.4$.

例15 (09) 袋中有一个红球，两个黑球，三个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一个球，以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

(Ⅰ) 求 $P\{X=1 \mid Z=0\}$；　　(Ⅱ) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布。

例16 (07) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

，记 $U=\max\{X, Y\}$，$V=\min\{X, Y\}$。

(1) 求 (U, V) 的概率分布；　　(2) 求 U 与 V 的协方差 $\mathrm{cov}(U, V)$。

例17. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则随机变量 $|X|$ 的概率密度为

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.　　(B) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$.

(C) $f_1(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x\geq 0; \\ 0, & x<0. \end{cases}$　　(D) $f_1(x)=\begin{cases} f(x)+f(-x), & x\geq 0; \\ 0, & x<0. \end{cases}$

例4 8.(17)设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F(x)$为X的分布函数，EX为X的数学期望，则$P\{F(X)>EX-1\}=$______.

例4 9.(13)设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0<x<3, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令随机变量$Y=\begin{cases}2, & X\le 1, \\ X, & 1<X<2, \\ 1, & 2\le X.\end{cases}$

(Ⅰ)求Y的分布函数；(Ⅱ)求概率$P\{X\le Y\}$.

例4 10. 设随机变量X服从指数分布$E(1)$，在$X=x$（$x>0$）的条件下，随机变量Y的条件概率密度为$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{x-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$.

例11.(14) 设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)$ $(i=1,2)$.

(Ⅰ) 求Y的分布函数$F_Y(y)$；　　(Ⅱ) 求EY.

例12. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；(Ⅱ) 求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$。

Ⅱ. 第二章 随机变量的数字特征

1. 主要考点：数学期望，方差，协方差，相关系数；

常用分布的数字特征，随机变量函数的数字特征

2. 典型例题分析

例1. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E[(X-2)^2e^{2X}]=$ ______.

例2 (15) 设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2$, $EY=1$, $DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$

(A) -3. (B) 3. (C) -5. (D) 5.

例3. (96) 设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量，则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=$ ____.

例4. (98) 设两个随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为0，方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，则随机变量 $|X-Y|$ 的方差. $D(|X-Y|)=$ ____.

例15.（20）设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$.　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$.　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

例16（20）设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,3,\cdots$，Y 表示 X 被3除的余数，则 $EY=$ ______.

例17（14）设随机变量 X,Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$，$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

求：(I) (X,Y) 的概率分布；　(II) $P\{X+Y\leq 1\}$.

Ⅱ 第三章，大数定律，中心极限定理

1. 主要考点：切比雪夫不等式，三个大数定律，两个中心极限定理。

2. 典型例题分析：

例1. 设随机变量X的密度函数$f(x)$满足$\int_0^{\infty} f(x)dx=1$，$\int_0^{\infty} xf(x)dx=1$，$\int_0^{\infty} x^2f(x)dx=\frac{4}{3}$.

则根据切比雪夫不等式有 $P\{X\geq 2\}\leq$ ______.

例2.(02) 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则根据Levy-Lindberg中心极限定理，当n充分大时，S_n近似服从正态，只要$X_1,X_2,\cdots,X_n$

(A) 有相同的数学期望.　　(B) 有相同的方差.

(C) 服从同一指数分布.　　(D) 服从同一离散型分布.

例3 (03) 设总体X服从参数为2的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本，则当$n\to+\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于 ______.

Ⅲ 数理统计

1. 主要考点：简单随机样本，统计量，样本均值$\bar{X}$，样本方差S^2；

   正态总体的常用抽样分布，χ^2分布，t分布，F分布，分位数；

   矩估计，最大似然估计；

   (数一) 估计量评估，显著性检验，两类错误，

2. 典型例题分析

例1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，则数学期望

$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(nX_j-\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]\right\}=$ ______.

例2(02) 设随机变量X和Y服从标准正态分布，则

(A) $X+Y$ 服从正态分布.　　(B) X^2+Y^2服从χ^2分布.

(C) X^2和Y^2都服从χ^2分布.　　(D) X^2/Y^2服从F分布.

例3(13) 设随机变量 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定α $(0<\alpha<0.5)$，常数C满足

$P\{X>C\}=\alpha$，则 $P\{Y>C^2\}=$

(A) α.　(B) $1-\alpha$.　(C) 2α.　(D) $1-2\alpha$.

例4.(15) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值，则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.　　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.　　(D) $mn\theta(1-\theta)$.

例15. 近年的矩估计和最大似然估计考题

(97) $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(99) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(00) $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$

(02) $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

(02)

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

,

(04) $F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta} & x>\alpha;\\ 0 & x\le\alpha,\end{cases}$

(06) $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1;\\ 1-\theta, & 1\le x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(07) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta;\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)} & \theta\le x<1;\\ 0 & 其他.\end{cases}$

(09) $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x} & x>0;\\ 0 & 其他.\end{cases}$

(11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty.$

(12) $f(z,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<z<+\infty$

(13) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(14) $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\ge 0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(15) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(17) $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right), & z\ge 0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(18) $f(x;\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, \quad -\infty<x<+\infty.$

(19) $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu;\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$

例6. 设总体 $X \sim P(\lambda)$，利用总体 X 的如下样本：1, 2, 2, 4, 3，

求 λ 的矩估计值和最大似然估计值.

例7. 设总体 X 的密度 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}$，$-\infty<x<+\infty$，利用总体 X 的如下样本值

1028, 968, 1007, 1001

求 (I) μ 的矩估计；

(II) μ 的最大似然估计.

例18. 写出相应的似然函数

① $X\sim P(\lambda)$ 样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

$$L=\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i)!}e^{-n\lambda}.$$

②

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

样本值 3,1,3,0,3,1,2,3.

$$L=\theta^2[2\theta(1-\theta)]^2\theta^2(1-2\theta)^4.$$

③

X	0	1
P	$1-p$	p

样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

$$L=p^{n\bar{x}}(1-p)^{n(1-\bar{x})}.$$

④ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

$$L=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

⑤ $X\sim U[a,b]$ 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

$$L=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_1,\cdots,x_n\le b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

⑥ $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

$$L=\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}, & 0<x_1,\cdots,x_n<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

⑦ $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta;\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$ 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

$$L=\begin{cases}2^n e^{-2n(\bar{x}-\theta)}, & x_1,\cdots,x_n\ge\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

⑧ $F(x)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha;\\ 0 & x\le\alpha.\end{cases}$ $\alpha>0,\ \beta>1$ 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

$\alpha=1$时, $f(x;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1;\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$

$$L=\begin{cases}\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_1,\cdots,x_n>1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$\beta=2$时, $f(x;\alpha)=\begin{cases}\frac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha;\\ 0 & x\le\alpha.\end{cases}$

$$L=\begin{cases}\frac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1\cdots x_n)^3}, & x_1,\cdots,x_n>\alpha;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

⑨ $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

$$L=\begin{cases}\lambda^{2n}x_1\cdots x_n e^{-n\lambda\bar{x}}, & x_1,\cdots,x_n>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

⑩ $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$, 样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$

$$L=\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$$

⑪ $f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $L=$

⑫ $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $L=$

⑬ $f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leq x\leq 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $L=$

⑭ $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Z_i=|X_i-\mu|$, 样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$. $L=\prod_{i=1}^{n} f_Z(z_i,\sigma)=$

⑮ $f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$ $-\infty<x<+\infty$ $L=$