多元函数微分法及其应用

全微分

主讲　武忠祥 教授

一、全微分的定义

定义（全微分） 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域 $U(x,y)$ 内有定义.如果

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微.**

$$dz=Adx+Bdy$$

定理1（必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则

则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在,且

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

例1 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

连续且偏导数存在，但不可微性.

例1 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

连续且偏导数存在，但不可微性.

用定义判定可微性

$a)$ $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 是否都存在?

$b)$ $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否为零?

定理2（充分条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 连续,则函数在该点可微.

【分析】只要证 $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$

【证】 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = f_x'(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x$$

由 $f_x'(x,y)$在点 (x_0,y_0) 连续可知

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$$

同理 $f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_y'(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2\Delta y$

则 $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$

内容小结

1. 微分定义

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

2. 重要关系

一元函数

连续　　可导

可微

多元函数

连续　　可偏导

可微

偏导数连续

作业

P77　1 (3) , (4) ; 2; 3 ; 5 ;