2021考研高等数学0基础课

高等数学精讲

主讲：武忠祥教授

第一章　函数与极限

第六节　极限存在法则

两个重要极限

主讲　武忠祥 教授

老师简介

主讲人

武忠祥老师

■ 李永乐考研团队

核心成员

■ 原西安交通大学数学系教授

■ 美国爱荷华大学访问学者

■ 面向二十一世纪国家级重点教材

《工科数学分析基础》主编

■ 曾获国家优秀教材等奖

《考研数学复习全书》

《高等数学辅导讲义》等畅销书主编

■ 拥有十余年考研辅导经验

老师简介

@武忠祥考研

公众号：武忠祥考研

1. 夹逼准则

准则 I 如果数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

（1）存在 N，当 $n>N$ 时, $x_n \le y_n \le z_n$;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

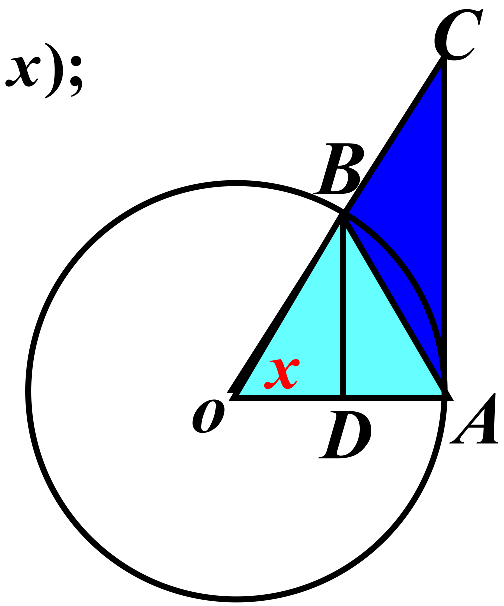
【例1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\quad+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$.

准则 I' 如果

（1）当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \le g(x) \le h(x)$;

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$,

则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.



【例2】求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

【例3】证明极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

【例4】求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

【例5】求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

【例6】求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

2. 单调有界准则

准则II 单调有界数列必有极限.

即单调增(减)有上(下)界的数列必有极限.

【例7】 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在

【证】 $$(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\quad(1+\frac{1}{n})\cdot 1$$

$$<(\frac{n+1+1}{n+1})^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

原数列单调增.

$$\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\quad(1+\frac{1}{n})<(\frac{n+1+1}{n+2})^{n+2}=1.$$

$(1+\frac{1}{n})^n\le 4.$ 原数列上有界.

【例8】 证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e.$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

内容小结

1. 两个极限存在准则

（1） 夹逼准则

（2） 单调有界准则

2. 两个重要极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ $\lim\limits_{x\to \Delta}\dfrac{\sin \Delta}{\Delta}=1$ （$\Delta\neq 0$）

（2） $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\lim\limits_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e$ （$\Delta\neq 0$）

作业

P52：1(4) (5) (6);2 (2) (3); 4(2) (3) (5).