

第二章 导数与微分

第四节 隐函数及由参数方程确定的函数的导数

主讲 武忠祥 教授

一、隐函数的导数

显函数: $y = \cos x, \quad y = \frac{x}{1+x}$

隐函数: $3y + x + 1 = 0$

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

一般的 $F(x, y) = 0 \Rightarrow y = f(x) \quad F(x, f(x)) \equiv 0$

例1 求由方程 $y^5 + 2y - x = 0$ 确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数.

例2 设 $y = f(x)$ 由 $y = 1 + xe^y$ 所确定, 求 $y''(0)$.

例3 设 $y = (1 + x^2)^{\sin x}$ 求 y' .

例4 设 $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$ 求 y' .

二、由参数方程所确定的函数的导数

定理 设 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 在 (α, β) 上可导, $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

若 $\varphi(t), \psi(t)$ 二阶可导, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

例5 设 $\begin{cases} y = \ln(1+t^2) \\ x = \arctan t. \end{cases}$ 求 y', y''

例6 已知摆线（旋轮线）的参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$
求摆线在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程与法线方程。

三、相关变化率

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad F(x, y) = 0$$

例7 设有一个倒置的圆锥形容器,其底面圆直径为10cm,高为5cm,
现以每秒 3cm^3 给容器中加水.试求 $t = 1$ 秒时水面上升的速率.

内容小结

1. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导
2. 对数求导法： 适用于幂指函数及某些用连乘, 连除表示的函数
3. 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导
4. 相关变化率问题
 - 1) 列出依赖于 t 的相关变量关系式
 - 2) 等式两端对 t 求导

作业 P108: 2; 3(3)(4); 4(1)(3); 8(3)(4); 11.