

第七章 微分方程

第一节 一阶线性微分方程

主讲 武忠祥 教授

一、线性方程

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad \text{非齐次}$$

$$y' + p(x)y = 0 \quad \text{齐次}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

例1 $y' - \frac{2}{x}y = x^2$

$$y = x^2(x + C)$$

例2 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y}$

$$x = Ce^y - y - 1$$

二、伯努利方程

$$y' + p(x)y = Q(x)y^\alpha$$

例3 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$

$$yx \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right] = 1$$

例4 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^2 y^3}$

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

方法1 先解齐次方程,再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

2. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

令 $u = y^{1-n}$, 化为线性方程求解.

作业

P320 1 (3) , (6) , (9) ; 2 (5) ; 7(1),(3);
8 (2) , (4) ,