第三章　微分中值定理与导数应用

第一节　微分中值定理

主讲　武忠祥 教授

一、罗尔定理

定义（极值） 若 $\exists\delta>0$，使得

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\geq f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极小值**.

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\leq f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极大值**.

费马引理 若 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值,且 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则

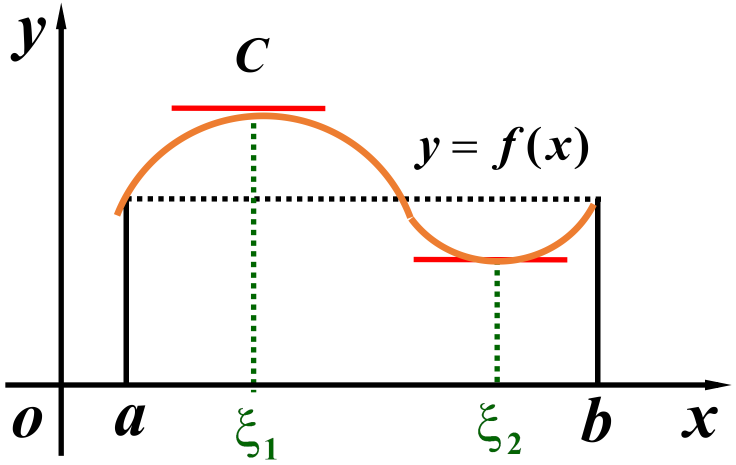
$$f'(x_0)=0$$

罗尔定理 若 1） f 在 $[a,b]$上连续;

2） f 在 (a,b) 内可导;

3） $f(a)=f(b)$,

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$



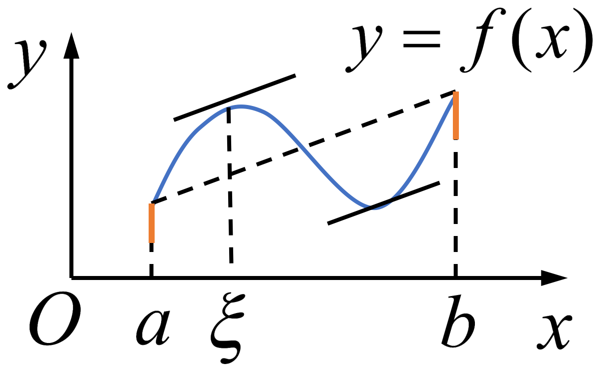
费马(1601 – 1665)

法国数学家，他是一位律师，数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛，博览群书并善于思考，在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论，他提出的费马大定理:

"当 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 无非零整数解"

历经358年，直到1993年才由美国普林斯顿大学的安德鲁.怀尔斯教授经过十年的潜心研究才得到解决 .费马引理是后人从他研究解决最值的方法中提炼出来的.

二、拉格朗日中值定理



拉格朗日中值定理 若

1) f 在 $[a,b]$ 上连续;

2) f 在 (a,b)内可导,

则 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

注: 1) $a>b, a<b$ 结论都成立.

2) $f(b)-b(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a) \qquad (0<\theta<1)$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'[x_0+\theta\Delta x]\Delta x \qquad (0<\theta<1)$$

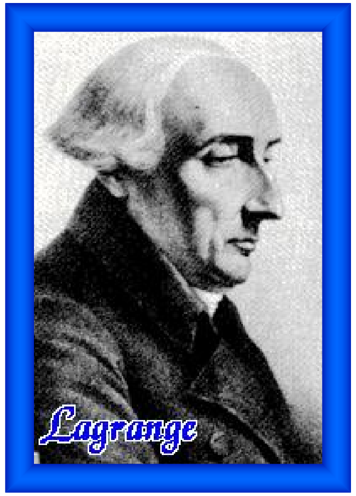
有限增量公式

推论 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内可导，则在

I 上 $f(x)\equiv C \Leftrightarrow f'(x)\equiv 0$

拉格朗日 (1736-1813)

法国数学家.他在方程论，解析函数论，及数论方面都作出了重要的贡献，近百余年来，数学中的许多成就都可直接或间接地追溯到他的工作,他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

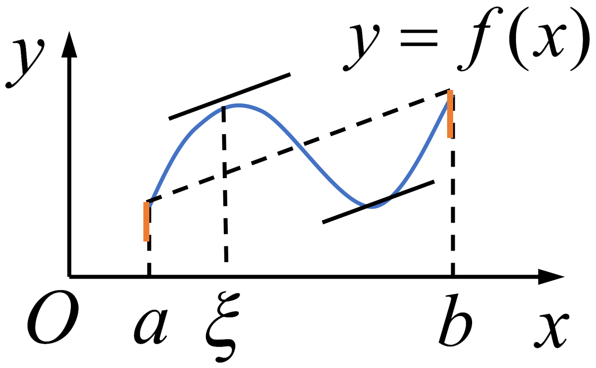


例1 试证 $|\sin x-\sin y| \le |x-y|$

例2 证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

例3 证明：当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}.$

三、柯西中值定理



柯西中值定理 若

1）f,F 在 $[a,b]$上连续；

2）f,F 在 (a,b) 内可导，且 $\forall x\in(a,b)$, $F'(x)\neq 0$,

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

内容小结

1. 意义

建立局部和整体的关系

2. 关系

罗尔定理　　拉格朗日中值定理　　柯西中值定理

3. 应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

作业 P132：5；6；7；8；10；11；12.