无穷级数

常数项级数审敛法

主讲 武忠祥 教授

一、正项级数及其审敛法

定理1（基本定理） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 上有界

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $S_n \to +\infty$

定理2（比较法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数，且

$a_n \le b_n$

则 1） $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

2） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

定理3（比较法的极限形式）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是两个正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ ，则

1）当 $0 < \lambda < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散

2）当 $\lambda = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

3）当 $\lambda = +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

例1 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性，$(p > 0)$

例2 判别下列级数敛散性

1） $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

3） $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

定理4（比值法）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ ，则

1）当 $\rho<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

2）当 $\rho>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

定理5（根值法）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ ，则

1）当 $\rho<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

2）当 $\rho>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

定理6（极限审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，

1）如果 $\lim_{n\to\infty} na_n = l > 0(+\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

2）如果 $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l(p > 1, 0 \le l < +\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例3 **判别下列级数敛散性**

1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(x>0)$

二、交错级数及其审敛法

定理7（Leibniz准则）

若　1） $a_{n+1} \le a_n$　　2） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且 $s \le a_1, |r_n| \le a_{n+1}$

例4 判别下列级数敛散性

1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$　$(p>0)$　　2） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

三、绝对收敛与条件收敛

定理8（绝对收敛准则）

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ 收敛}$$

绝对收敛： 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

条件收敛： 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

例5 讨论下列级数的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$

2） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$

内容小结

(1)正项级数 $(\sum_{n=1}^{\infty}u_n, u_n \ge 0)$

基本定理： $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ s_n 上有界

1) 比较判别法： 设 $u_n \le v_n$， 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}v_n \text{发散}$$

2) 比较法极限形式： 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l\ (0 \le l \le +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

②若 $l = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

③若 $l = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

3) 比值法：设 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n \begin{cases} \text{收敛}, & \rho<1, \\ \text{发散}, & \rho>1, \\ \text{不一定}, & \rho=1, \end{cases}$

4) 根值法：设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n \begin{cases} \text{收敛}, & \rho<1, \\ \text{发散}, & \rho>1, \\ \text{不一定}, & \rho=1, \end{cases}$

(2)交错级数 $(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0)$

莱不尼兹准则：若（1）u_n 单调减；（2）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

(3)任意项级数

1) 绝对收敛与条件收敛概念

（1） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，此时称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

（2） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

绝对收敛的级数一定收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

作业

P271 1 (1), (3), (5) ;

2 (2), (3), (4) ;

3 (1), (2) ;

4 (1), (3), (5), (6) ;

5 (2), (3), (5)