第一章　函数与极限

第十节　闭区间上连续函数性质

主讲　武忠祥 教授

一、有界性与最大最小值定理

定理1（最大最小值定理） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

定理2（有界性定理） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

二、零点定理与介值定理

定理3（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且

$f(a)f(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

定理4（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且

$f(a)\neq f(b)$, μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值, 则至

少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=u$.

推论: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上能取得介于它的最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例1 证明方程 $x = a\sin x + b$, 其中 $a>0, b>0$, 至少有一个正根,并且它不超过 $a+b$.

例2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a<c<d<b$. 试证至少存在一个 $\xi \in [c,d]$, 使 $3f(c)+2f(d)=5f(\xi)$.

内容小结

四个定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续

定理1（最大最小值定理）

定理2（有界性定理）

定理3（零点定理）

定理4（介值定理）

作业 P70：1; 2; 4 ; 5;