无穷级数

函数展开为幂级数

主讲　武忠祥 教授

函数的幂级数展开

定理1 如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

该式称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**泰勒级数**.

定理2 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内任意阶可导, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开为泰勒级数的 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0.$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

中的余项.

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

f 在 x_0 处的泰勒展开式

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

f 的麦克劳林展开式

函数 $f(x)$ 展开为 $x-x_0$ 的幂级数的步骤

第一步 $$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

第二步 考查 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$

是否成立.

常用初等函数的麦克劳林展开式

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \quad + \frac{x^n}{n!} +$ $x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \quad + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$ $x \in (-\infty, +\infty)$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \quad + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} +$ $x \in (-\infty, +\infty)$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \quad + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} +$ $x \in (-1, 1)$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \quad + \frac{\alpha(\alpha-1) \quad (\alpha-n+1)}{n!} x^n +$

$x \in (-1, 1)$

例1 将 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-2}$ 展开为 x 的幂级数。

例2 将函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

【解】 $f(x)=\sin[\dfrac{\pi}{4}+(x-\dfrac{\pi}{4})]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+\cos(x-\dfrac{\pi}{4})]$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

例3 将 $f(x)=\ln(2x-x^2)$ 在 $x=1$ 展开为幂级数。

例4 将 $f(x)=\arctan x$ 展开为 x 的幂级数。

内容小结

1. 函数展开为幂级数的两种方法

1）直接展开法

第一步 $$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

第二步 考查 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$

是否成立.

2）间接展开法

根据函数展开为幂级数的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质（四则运算，逐项求导，逐项积分）及变量代换等方法，求得所给函数的展开式.

2. 几个常用的展开式

(1) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\quad+x^n+\quad; \qquad (-1<x<1)$$

(2) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\quad+\frac{x^n}{n!}+ \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

(3) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\quad+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+ \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

(4) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\quad+\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}+ \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

(5) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\quad+\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}+ \qquad (-1<x\le 1)$$

(6) $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\quad+\frac{\alpha(\alpha-1)\quad(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$(-1<x<1)$$

作业

P289　2 (2) , (3) , (5) , (6) ;

3 (2) ;　4 ;　6