重 积 分

二重积分的计算

主讲　武忠祥 教授

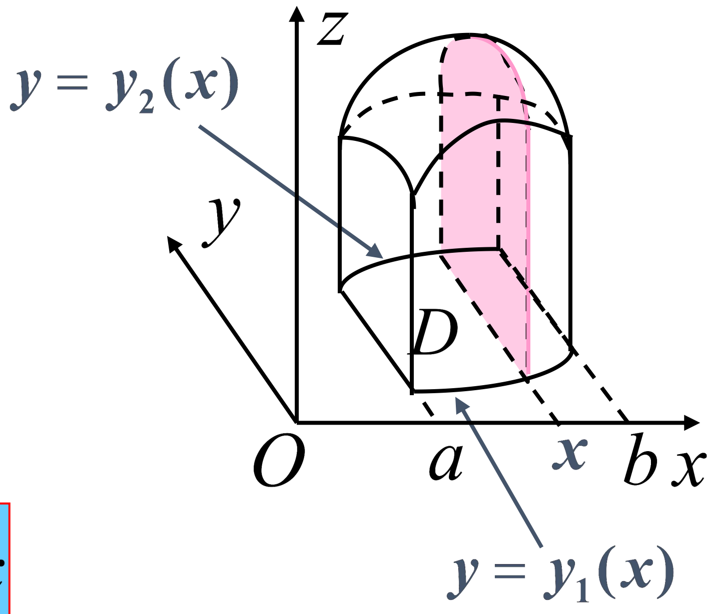
一、利用直角坐标计算二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

(1) X 型区域: $(\sigma)=\{(x,y)\mid a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



$$\boxed{\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx}$$

称为**累次积分**,或称**二次积分**

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) Y 型区域: $(\sigma)=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$

$$\boxed{\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right]\mathrm{d}\,y}$$

$$\boxed{=\int_c^d \mathrm{d}\,y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.}$$

例1 计算 $\iint\limits_{(\sigma)}(x+y)d\sigma$, 其中 $(\sigma)=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le 2\}.$

[3]

例2 计算 $\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 (σ) 为直线 $x=1, y=0$,及抛物线 $y=x^2$所围成的区域.

$[\dfrac{26}{105}]$

例3 计算 $\iint\limits_{(\sigma)}\dfrac{y^2}{x^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 (σ) 是由 $xy=1, y=x, y=2$ 围成的区域.

$[\dfrac{9}{4}]$

例4 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} e^{y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 (σ) 为直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的区域.

$[\frac{1}{2}(e-1)]$

二、利用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta\quad (0\le\rho<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi)$$

$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}\left[(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\rho^2\Delta\theta\right]=\rho\Delta\rho\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\Delta\theta.$$

$$\boxed{\Delta\sigma\approx\rho\Delta\rho\Delta\theta.}\qquad \boxed{d\sigma=\rho d\rho d\theta.}$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

例5 计算 $I=\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 (σ) 为不等式 $1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0$ 所确定的区域.

$[\frac{15}{8}\pi]$

例6 计算 $I=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 (σ) 是由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴所围成的区域.

$[\frac{16}{9}]$

例7 计算 $\iint\limits_{(\sigma)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$,其中 (σ) 为圆域 $x^2+y^2 \le a^2$. $[\pi(1-e^{-a^2})]$

内容小结

1．利用直角坐标计算

1）先 y 后 x $\qquad \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

2）先 x 后 y $\qquad \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$

2．利用极坐标计算

1）先 ρ 后 θ $\qquad \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

【注】适合用极坐标计算的二重积分的特征

（1）适合用极坐标计算的被积函数:

$$f(\sqrt{x^2+y^2})$$

（2）适合用极坐标的积分域：如

$$x^2+y^2\le R^2;\ \ r^2\le x^2+y^2\le R^2;\ x^2+y^2\le 2ax;\ \ x^2+y^2\le 2by;$$

作业

P156　1 (2), (4);　2 (3), (4);　5;　6 (2), (4);

11(2), (4);　13 (3), (4);　14 (2), (3);

15 (1), (4);