第七章　微分方程

第二节　常系数齐次线性微分方程

主讲　武忠祥 教授

二阶齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

1）不等实根： $r_1 \neq r_2$ $\qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2）相等实根： $r_1 = r_2 = r$ $\qquad y = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$

3）共轭复根： $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\qquad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例1 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

例2 求微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解.

例3 求微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解.

1.单实根 r :　　$C\mathrm{e}^{rx}$

2. k 重实根 r :　　$\mathrm{e}^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$

3.单复根 $a \pm \mathrm{i}\beta$:　　$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

4. k 重复根 $a + \mathrm{i}\beta$:　　$\mathrm{e}^{\alpha x}[(C_{11} + C_{12}x + \cdots + C_{1k}x^{k-1})\cos \beta x$

$+ (C_{21} + C_{22}x + \cdots + C_{2k}x^{k-1})\sin \beta x]$

例3 求微分方程 $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' = 0$ 的通解.

解 $y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$.

内容小结

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

1）不等实根： $r_1 \neq r_2$ $\qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2）相等实根： $r_1 = r_2 = r$ $\qquad y = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$

3）共轭复根： $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\qquad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解．

作业　P346　1 (3) , (6) , (10) ；

2 (2) , (3) , (6) ;　3