2021考研高等数学0基础课

高等数学精讲

主讲：武忠祥教授

老师简介

主讲人

武忠祥老师

- 李永乐考研团队

核心成员

- 原西安交通大学数学系教授
- 美国爱荷华大学访问学者
- 面向二十一世纪国家级重点教材

《工科数学分析基础》主编

- 曾获国家优秀教材等奖

《考研数学复习全书》

《高等数学辅导讲义》等畅销书主编

- 拥有十余年考研辅导经验

老师简介

@武忠祥考研

公众号：武忠祥考研

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一、映射

二、函数

一、映射

二、函数

1. 函数概念

定义 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有一个确定的 y 和它对应，则称 x 是 y 的**函数**，记为 $y = f(x)$. 常称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为**定义域**.

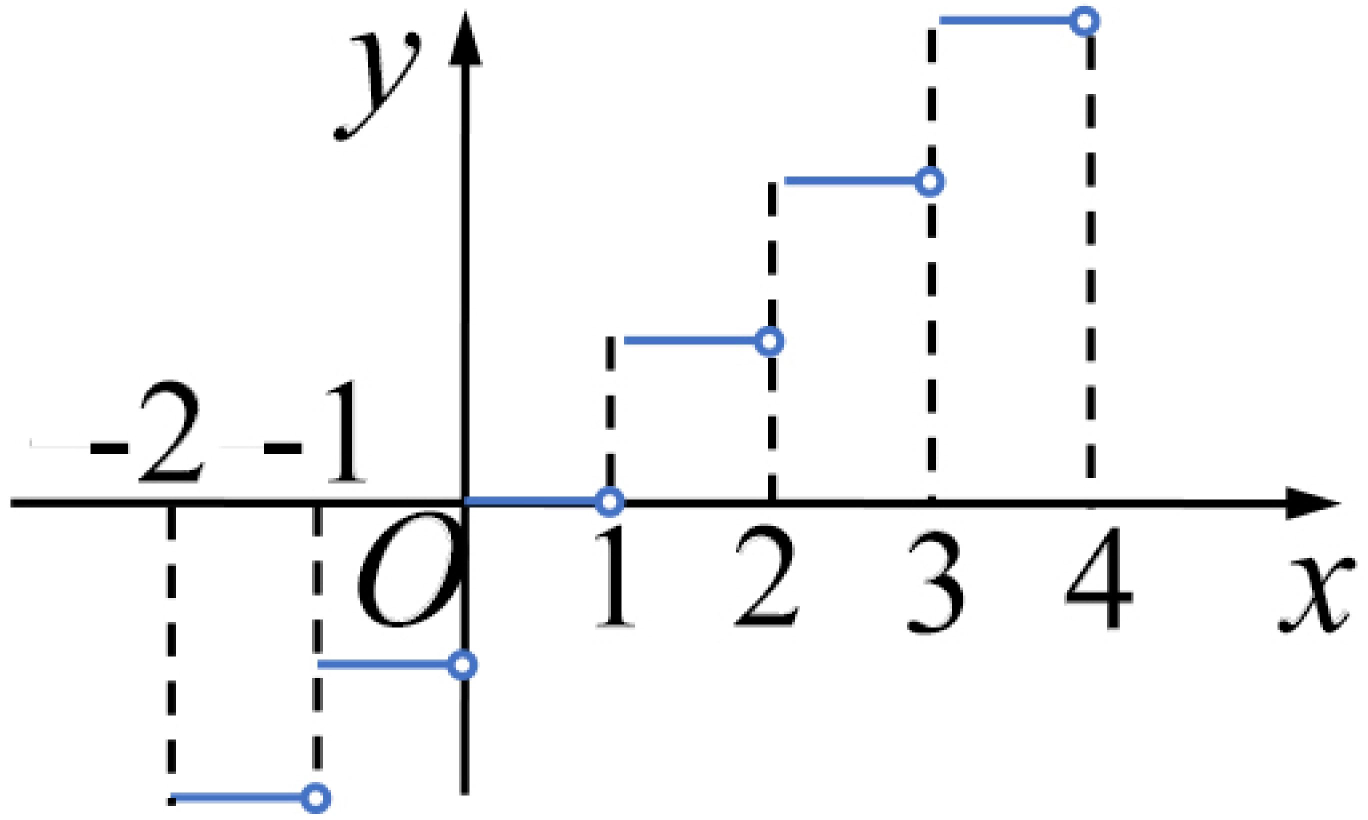
定义域 $D_f = D.$

值域 $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

【注】函数概念有两个基本要素：**定义域**、**对应法则**.

【例1】函数

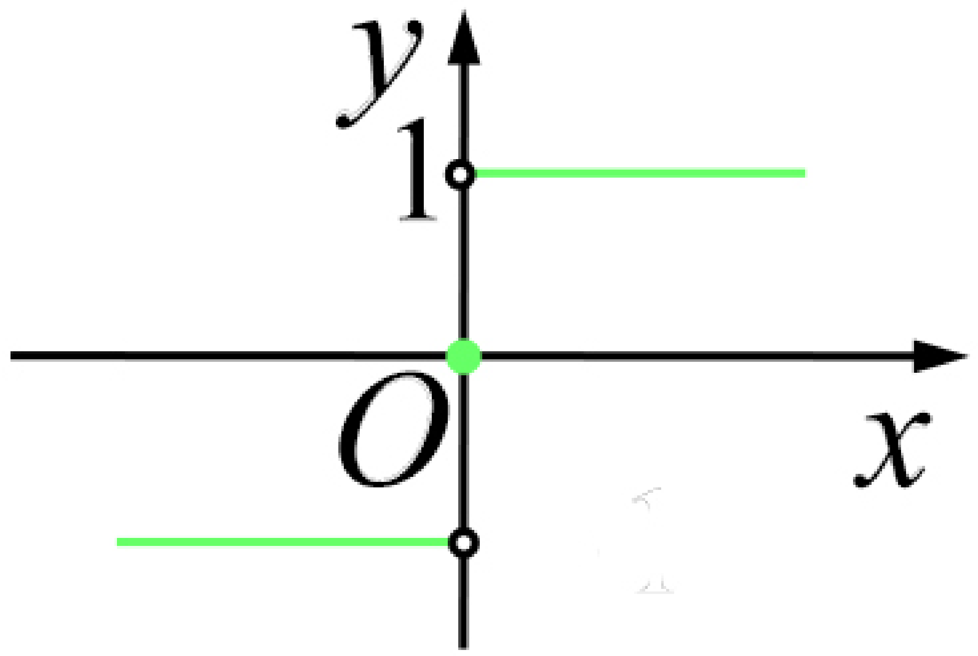
$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$



称为**绝对值函数**.

【例2】函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



称为**符号函数**.

【例3】设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**.

2. 函数的几种特性

（1）函数的有界性

设 $X \subset D$

有上界：$\forall x \in X, f(x) \le M_1$

有下界：$\forall x \in X, f(x) \ge M_2$

有界：$\forall x \in X, |f(x)| \le M$　　有界 $\Leftrightarrow$ 有上界且有下界

无界：$\forall M > 0, \exists x_0 \in X,$ 使 $|f(x_0)| > M$

（2）函数的单调性

设区间 $I \subset D$

单调增：$\forall x_1, x_2 \in I,$ 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$

单调减：$\forall x_1, x_2 \in I,$ 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$

（3）函数的奇偶性

设 D 关于原点对称

偶函数： $f(-x)=f(x) \quad x\in D$

奇函数： $f(-x)=-f(x) \quad x\in D$

【注】偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，

且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

（4）函数的周期性

定义 若存在实数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$

则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**. 使得上式成立的最小正数 T

称为**最小正周期**，简称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

【例4】狄利克雷函数

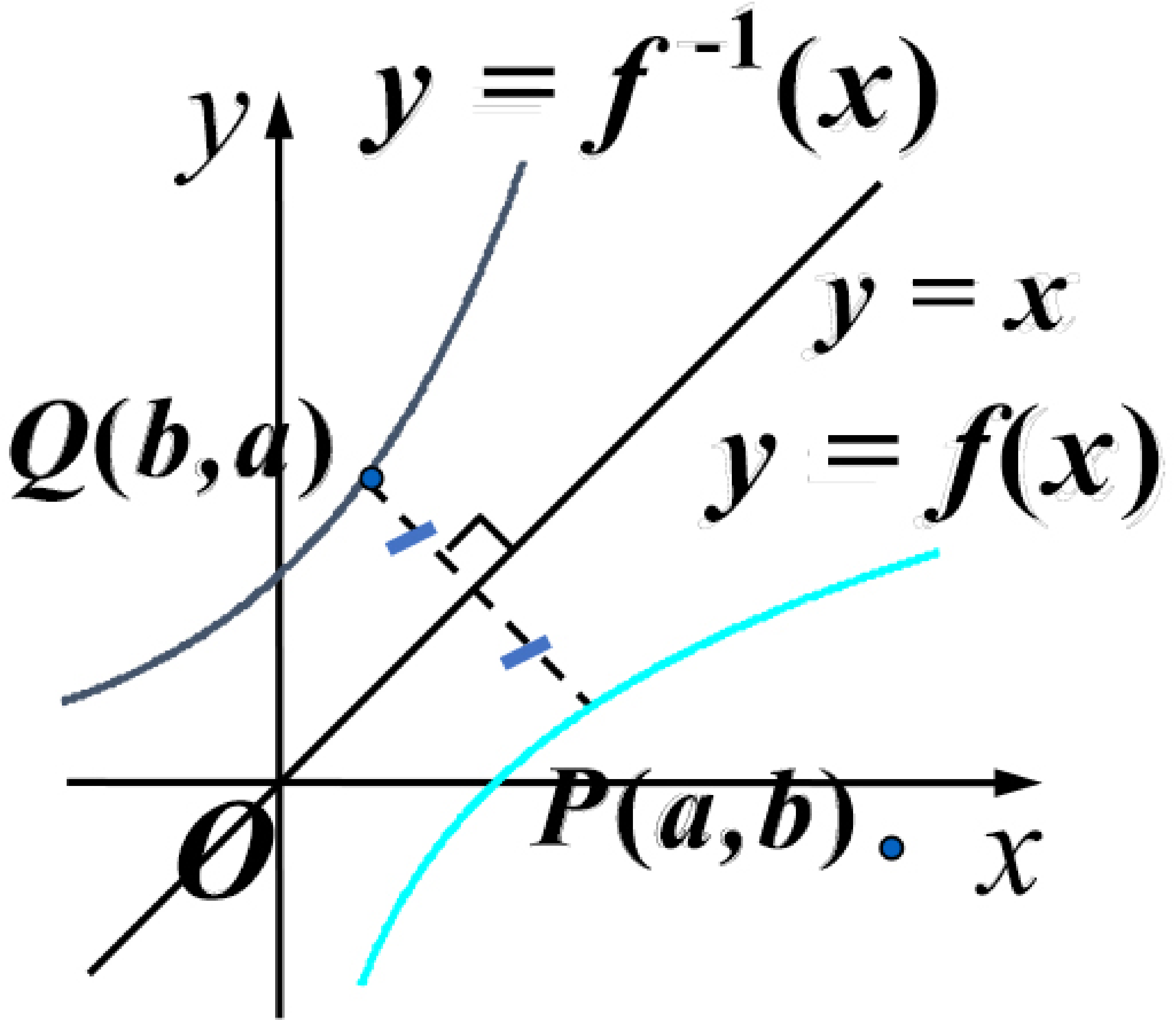
$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in Q^c.\end{cases}$$

3. 反函数与复合函数

反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y. 若对任意 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$ 称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

【注】函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.



复合函数

定义 设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f, u=g(x)$ 的定义域为 D_g

值域为 R_g, 若 $D_f \cap R_g \neq \phi$, 则称函数 $y=f[g(x)]$ 为函数

$y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数. 它的定义域为

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

【例5】 设 $g(x)=\begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $g[f(x)]$

及 $f[g(x)]$.

4. 函数的运算

$$f \pm g: \qquad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$f \cdot g: \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g}: \qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

【例6】 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$, 证明必存在 $(-l,l)$, 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$, 使得 $f(x) = g(x) + h(x)$

5. 初等函数

定义 将幂函数 ，指数, 对数, 三角, 反三角统称为**基本初等函数**. 了解它们的定义域, 性质, 图形.

幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ 为实数）；

指数函数 $y = a^{x}$ （ $a > 0,\ a \neq 1$ ）

对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

三角函数 $y = \sin x$ $y = \cos x,$ $y = \tan x$ $y = \cot x$

反三角函数 $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x,$

定义 由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数, 称为**初等函数**.

内容小结

1. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases} \text{定义域} \\ \text{对应法则} \end{cases}$

2. 函数的特性 —— 有界性，单调性，
奇偶性，周期性

3. 复合函数与反函数

4. 基本初等函数与初等函数

作业

P16　6;　7 (4),(5),(6);　8;
9 (1),(2),(5); 12 ; 13;