2021考研高等数学0基础课

高等数学精讲

主讲：武忠祥教授

老师简介

主讲人

武忠祥老师

- 李永乐考研团队

核心成员

- 原西安交通大学数学系教授
- 美国爱荷华大学访问学者
- 面向二十一世纪国家级重点教材

《工科数学分析基础》主编

- 曾获国家优秀教材等奖

《考研数学复习全书》

《高等数学辅导讲义》等畅销书主编

- 拥有十余年考研辅导经验

老师简介

@武忠祥考研

公众号：武忠祥考研

第一章　函数与极限

第二节　数列的极限

一、数列极限的定义

二、收敛数列的性质

一、数列极限的定义

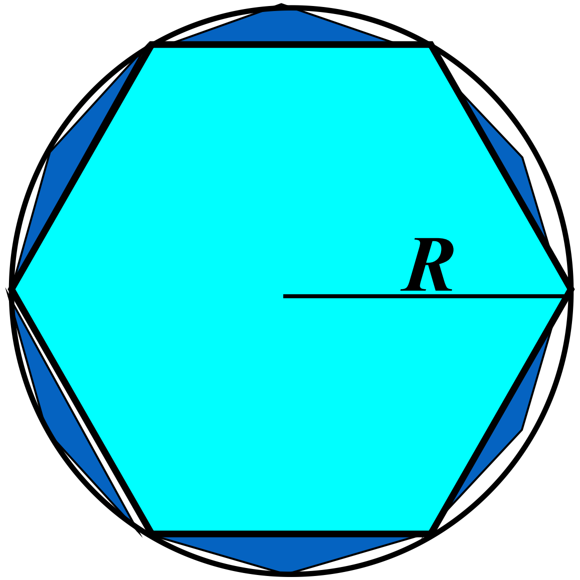
引例 圆的面积——割圆术

正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正 $6\times 2^{n-1}$ 形的面积 A_n



$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Longrightarrow S$

数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 记为 $\{x_n\}$

例如 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ $\quad x_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ $\quad x_n = \frac{n}{n+1}$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$ $\quad x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$

$2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ $\quad x_n = 2^n$

$1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ $\quad x_n = (-1)^{n+1}$

数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ **记为** $\{x_n\}$

问题: 当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一确定的数值?如果是,这个数值等于多少?

例 $x_n = \dfrac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

定义 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$, 时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon.$

几何意义：$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$, 时, 有 $x_n\in U(a,\varepsilon).$

【注】1） ε 的作用；

2） N 的作用及 N 与 ε 的关系；

【例1】用定义证明下列极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0.\quad (|q|<1)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

二，收敛数列的性质

1）唯一性：收敛数列的极限是唯一的；

2）有界性：收敛数列必有界；

3）保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a>0$（或 $a<0$），则 $\exists N$,

当 $n>N$, 时, 都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$），

推论 如果存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），

则 $a \geq 0$（或 $a \leq 0$),

4）收敛数列与其子列之间的关系

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = a.$$

内容小结

1. 数列极限的 "$\varepsilon-N$" 定义及应用

2. 收敛数列的性质：

唯一性 ； 有界性 ； 保号性；

任一子数列收敛于同一极限

作业

P26　2； 3； 6; 7； 8；