曲线积分与曲面积分

格林公式及其应用

主讲　武忠祥 教授

一、格林公式

定理1 设平面有界闭域 (σ) 由分段光滑的曲线所围成 (σ) 的边界曲线记为 (C)，函数 P,Q 在 (σ) 上连续,则

$$\oint_{(+C)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

例1 计算 $\int_{(C)} xy^2\,\mathrm{d}y - yx^2\,\mathrm{d}x$，其中

(1) (C)为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 沿逆时针方向；

(2) (C)为上半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$，方向从 $A(R,0)$ 到 $B(-R,0)$.

例2 证明：由一条分段光滑的简单闭曲线 (C) 所围成平面域 (σ) 的面积为

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\oint_{(+C)} x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x.}$$

例3 设 (C) 为不通过原点的任意分段光滑的逆时针简单闭曲线，

计算积分 $I = \oint_{(C)} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$.

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

$$\int_{(C)} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{(A)}^{(B)} P\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}\,y$$

定理2 设 (σ) 为一平面**单连域**，$P(x,y),Q(x,y)$ 有一阶连续偏导数

则,线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 (σ) 内与积分路径无关的充要条件是

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x,y)\in(\sigma).}$$

三、二元函数的全微分求积

定理2 设 (σ) 为一平面**单连域**，$P(x,y),Q(x,y)$ 有一阶连续偏导数，则，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 (σ) 内为某一函数的 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\in(\sigma).}$$

推论 设 (σ) 为一平面**单连域**，$P(x,y),Q(x,y)$ 有一阶连续偏导数则,线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 (σ) 内与积分路径无关的充要条件是在 (σ) 内为某一函数的 $u(x,y)$,使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$

例1 验证 $(3x^2-6xy)dx+(3y^2-3x^2)dy$ 是某个函数的全微分，

并求该函数.

解法一（用线积分求）

解法二（用偏积分求）

解法三（用凑全微分法求）

例2 设 (C) 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上由 $A(-a,0)$ 点到 $B(a,0)$ 点的上半椭圆.计算下列积分

1) $\displaystyle\int_{(C)} e^{xy}(xy+1)dx+e^{xy}x^2dy;$

2) $\displaystyle\int_{(C)} \frac{(x+y)dy-(y-x)dx}{x^2+y^2};$

例3 计算 $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{x\,\mathrm{d}\,x+y\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

内容小结

1.格林公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

2.线积分与路径无关

1）判定：$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ （区域 D 单连通）

2）计算：

- 改换路径；

b）利用原函数 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1)$

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x,y)$$

求原函数方法:①偏积分;②凑微分.

作业

P216　2 (1)；　3；　4；

6 (1) , (3)；7 (2) ,(4)；

8 (1), (3);　9；10（1）；