第一章　函数与极限

第九节　连续函数的运算

与初等函数的连续性

主讲　武忠祥 教授

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

定理1 设函数 f, g 在 x_0 连续，则

$f \pm g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}\quad (g(x_0) \neq 0)$ 都在 x_0 连续

例1 证明：$\tan x, \cot x$ 在其定义域内是连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理2（反函数的连续性） 设 $f:[a,b]\to R$ 是严格单调增（减）的连续函数. 则其反函数在 $[f(a),f(b)]$, $([f(b),f(a)])$ ，上也是连续的.

例2 证明：$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, arc\cot x$ 在其定义域内是连续的.

定理3（复合函数的连续性） 设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成，若 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$f(u)$ 在 u_0 连续，$u_0=g(x_0)$，则 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续.

三、初等函数的连续性

定理4 基本初等函数在其定义域内是连续；

定理5 初等函数在其定义区间内是连续；

例3 证明下列结论

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad 2)\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0)$$

$$3)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad 4)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

当 $x\to 0$ 时： $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$

常用的等价无穷小

$$\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2 \qquad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$$

$$a^x-1\sim x\ln a$$

例4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

“1^{∞}”型极限常用结论

若 $\lim \alpha(x)=0,\ \lim \beta(x)=\infty,$ 且 $\lim \alpha(x)\beta(x)=A$

则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$

可以归纳为以下三步:

1)写标准形式　　原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)};$

2)求极限　　$\lim \alpha(x)\beta(x)=A;$

3)写结果　　原式 $=e^{A}.$

例5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ \arctan\dfrac{x}{x-2} & x>0. \end{cases}$ 的连续性并指出间断点类型.

内容小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性.

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

作业 P65：3(7)(8); 4 (4)(5)(6)(7); 5；