

第七章 微分方程

常系数非齐次线性微分方程

主讲 武忠祥 教授

常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

$$1. f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$$

$$\text{令 } y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

$$2. f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$$

$$\text{令 } y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]. \quad m = \max\{l, n\}$$

【例1】 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解.

【解】

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3}$$

【例2】 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = x e^{2x}$ 的通解.

【解】

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(2x + x^2)e^{2x}$$

【例3】 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$ 的通解.

【解】

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{-3}{25} + \frac{1}{10}x\right) \cos x - \left(\frac{17}{50} + \frac{3}{10}x\right) \sin x$$

内容小结

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

$$1. f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$$

$$\text{令 } y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

$$2. f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$$

$$\text{令 } y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]. \quad m = \max\{l, n\}$$

可推广到高阶常系数线性非齐次方程求通解。

作业

P354 1 (1) , (5) , (6) , (10) ;

2 (2) , (4) ;

6