2021考研高等数学0基础课

高等数学精讲

主讲：武忠祥教授

老师简介

主讲人

武忠祥老师

■ 李永乐考研团队

核心成员

■ 原西安交通大学数学系教授

■ 美国爱荷华大学访问学者

■ 面向二十一世纪国家级重点教材

《工科数学分析基础》主编

■ 曾获国家优秀教材等奖

《考研数学复习全书》

《高等数学辅导讲义》等畅销书主编

■ 拥有十余年考研辅导经验

老师简介

@武忠祥考研

公众号：武忠祥考研

第一章　函数与极限

第三节　函数的极限

一、函数极限的定义

二、函数极限的性质

一、函数极限的定义

1.自变量趋于有限值时函数的极限

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义

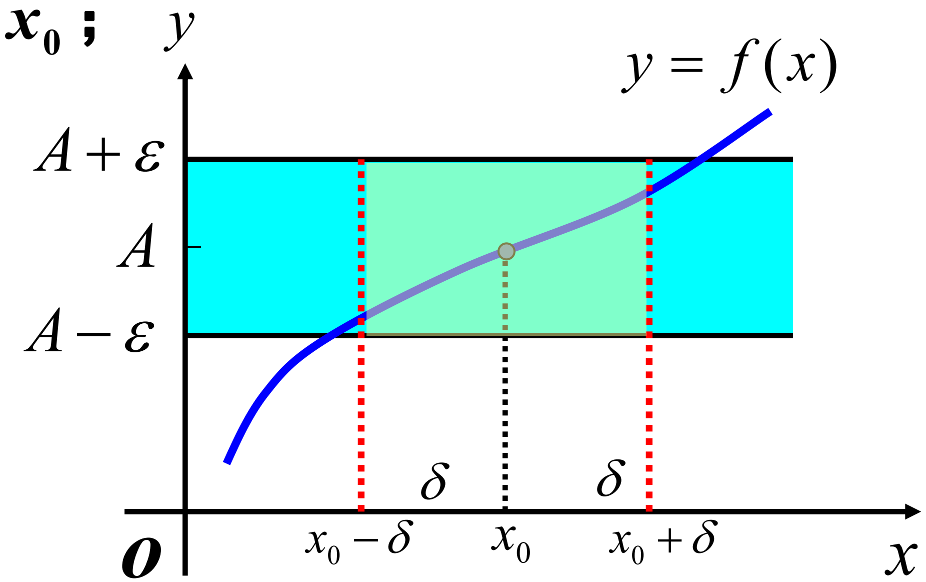
若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

则称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限. 记作 $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A}$

【注】1） ε 的任意性，ε 与 δ 的作用；

2） $x \to x_0$，但 $x \neq x_0$；

几何意义



【例1】用定义证明 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)=f(x_0-0)$

若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)=f(x_0+0)$

若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A}$$

2.自变量趋于无穷大时函数的极限

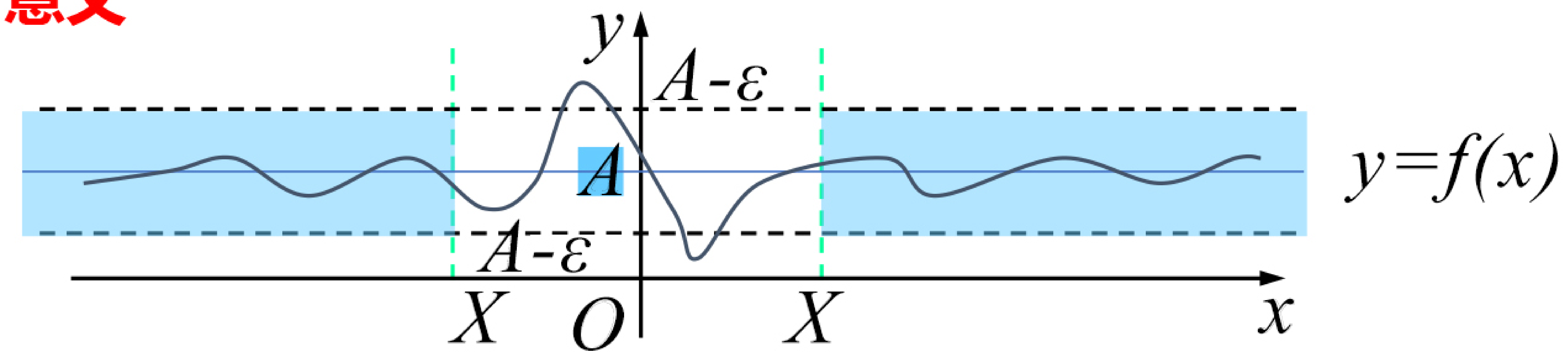
定义 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\quad \forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 当 $x>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ $\quad \forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 当 $x<-X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ $\quad \forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 当 $|x|>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

几何意义



直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

【例2】用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A}$ $\forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 当 $|x|>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

【例3】 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

二，函数极限的性质 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

1) 唯一性：

2) 局部有界性：

$\exists M>0$ 与 $\delta>0$，使得 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)|\le M$

3) 局部保号性：

如果 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论1 如果存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\ge 0$

（或 $f(x)\le 0$），那么 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.

推论1 如果 $A\ne 0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

4) 函数极限与数列极限的关系：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$;

内容小结

1. 极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,∃时刻,从此时刻以后,

恒有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. （见下表）

过　程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n>N$	$\lvert x\rvert>N$	$x>N$	$x<-N$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			

过　程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

2. 极限的性质

唯一性 ； 有界性 ； 保号性;

作业

P33　4; 11; 12.