第二章　导数与微分

第一节　导数概念

主讲　武忠祥 教授

一、引例

1. 变速直线运动瞬时速度

2. 曲线的切线

二、导数的定义

定义： 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称 $f(x)$ 在 x_0 点可导.

$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

若以上极限不存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导；

若极限为无穷大，则称 $f(x)$ 在 x_0 处导数为无穷大.

左导数：$f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

右导数：$f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数存在且相等

区间上可导： $f(x)$在区间 I 的每一点上都可导；

导函数： $f'(x) \quad x \in I$

例1 **证明下列各式**

(1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}\ (x>0)$

(2) $(a^{x})' = a^{x}\ln a\ (a>0, a\neq 1)$

(3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

三、导数的几何意义

导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处**切线的斜率**

切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

例2 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

四、可导与连续的关系

可导 $\xrightarrow{\quad}$ 连续

可导 $\xleftarrow{\times}$ 连续

例3 考查下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

(1) $f(x)=|x|$

(2) $g(x)=x^{\frac{1}{3}}$

(3) $h(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

内容小结

1. 导数的实质： 增量比的极限；

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$;

3. 导数的几何意义： 切线的斜率；

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导；

5. 求导数最基本的方法： 由定义求导数.

6. 判断可导性
   - 不连续，一定不可导.
   - 连续
     - 直接用定义；
     - 看左右导数是否存在且相等.

作业 P83：4；5；6；7；13；16；17；18