第三章　微分中值定理与导数应用

第五节　函数的极值与最值

主讲　武忠祥 教授

一、函数的极值及其求法

定义（极值） 若 $\exists\delta>0$，使得

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\ge f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极小值**.

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\le f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极大值**.

定理1（极值的必要条件）

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则

$$f'(x_0)=0$$

定理2（极值的第一充分条件）

设 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 内可导,且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续）

（1）若 $x<x_0$ 时， $f'(x)\geq 0; x>x_0$ 时， $f'(x)\leq 0$, 则 f 在 x_0 处取极大值.

（2）若 $x<x_0$ 时，$f'(x)\leq 0; x>x_0$ 时，$f'(x)\geq 0$, 则 f 在 x_0 处取极小值.

（3）若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧不变号，则 f 在 x_0 无极值.

定理3（极值的第二充分条件）设 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$

（1）当 $f''(x_0)<0,\quad f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

（2）当 $f''(x_0)>0,\quad f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

例1 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值

例2 求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解 $y'=x^{2/3}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-1/3}=\frac{5x-2}{3x^{1/3}}$

二、最大值与最小值问题

（1）求连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值

第一步：求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点和不可导的点

$x_1, x_2, \cdots x_n$;

第二步：求出函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n), f(a), f(b)$;

第三步：比较以上各点函数值.

（2）最大最小值的应用题

第一步：建立目标函数

第二步：

例3 求 $f(x)=2x^3-3x^2$ 在 $[-1,2]$ 上最大值和最小值

例4 证明不等式 $\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1,(x\in[0,1],p>1).$

例5 在半径为 R 的球中内接一直圆锥,试求圆锥的最大体积.

$$\left(\frac{32}{81}\pi R^3\right)$$

内容小结

1.连续函数的极值

(1) 极值可疑点： $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

(2) 第一充分条件

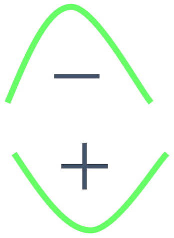
$f'(x)$ 过 x_0 由正变负 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由负变正 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值



2.连续函数的最值

（1）求连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值

（2）最大最小值的应用题

作业 P161：1(1)(3)(8)(9)；3；6(2)；11；15;