第二章　导数与微分

第五节　函数的微分

主讲　武忠祥 教授

一、微分的定义

引例 $f(x)=x^2$

$$\Delta f(x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

定义 若 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$ 则称 $f(x)$

在 x_0 点**可微**，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 点的**微分**.

记为 $dy=A\Delta x$

dy 是 Δy 的**线性主部**

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是

$f(x)$ 在点 x_0 处可导，且有

$$\mathrm{d}\,y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}\,x.$$

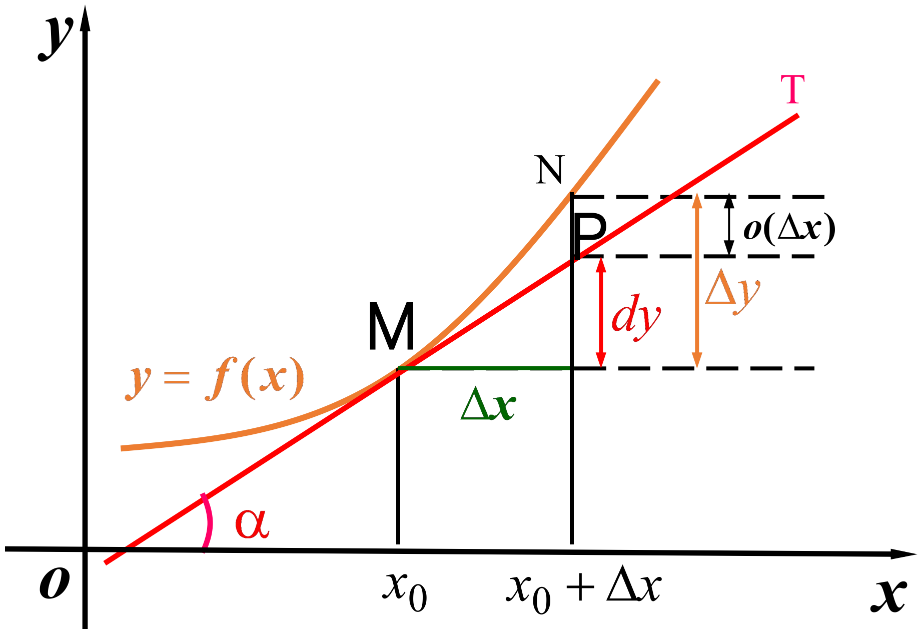
二、微分的几何意义

微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示

曲线 $y = f(x)$ 的切线上的增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta y \approx dy$$



三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

1）基本初等函数的微分公式

2）四则运算法则. 设 u 和 v 都可微，则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad\qquad d(uv) = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \qquad (v \neq 0)$$

2）复合函数微分法则（微分形式不变性）

设 $y=f(u)$ 可微，$u=g(x)$ 可微，则 $y=f(g(x))$ 可微，且

$dy=y'_x dx \qquad dy=y'_u du$

例1 求下列函数的微分

1） $y=\ln(1+x^2)$　　2） $y=e^{x+1}\cos(x+2)$

例2 填空 $d(\qquad)=\sin 2x dx$

$d(\qquad)=xe^{x^2}dx \qquad d(\qquad)=\dfrac{\ln x}{x}dx$

内容小结

1. 微分概念

微分的定义及几何意义

可微 $\rightleftarrows$ 可导

2. 微分运算法则

微分形式不变性： $$\mathrm{d}f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}u$$

（ u 是自变量或中间变量 ）

作业 P120：2；3(2)(4)(6)；4(1)(3)(5)(7)；