# 第一章　函数与极限

## 第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

## 一、无穷小

**定义1** 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零, 则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量.

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

**注** 1. 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆;

2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

**定理1** $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ 其中 $\lim \alpha(x) = 0.$

## 二、无穷大

**定义2** 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

即：若对任意给定的 $M > 0$，总存在 $\delta > 0$，当

$0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$.

**正无穷大：** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

**负无穷大：** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

**无穷大量的几何意义.**

1）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 则 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的**垂直渐近线.**

2）若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ 则 $y = a$ 为 $y = f(x)$ 的**水平渐近线.**

**定理2** 在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大；

## 内容小结

1. 无穷小与无穷大的定义

2. 无穷小与函数极限的关系

3. 无穷小与无穷大的关系

### 作业

P38 6; 7; 8.