NUM 5

Krzysztof Buczek

9 grudnia 2020

1 Opis problemu

Problem polega na obliczeniu wektora x = A^{-1}b. Macierz A jest macierzą wstęgową, która zawiera 2 pasy pod diagonalą, diagonalę i 2 pasy nad diagonalą elementów niezerowych.

2 Metoda Jacobiego:

Metodę iteracyjną Jacobiego wyrażamy wzorem:

$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum\limits_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(n)})$

Aby metoda ta była zbieżna, musi spełniać 1 warunek:

1. Macierz musi być silnie diagonalnie dominująca. W naszym przypadku warunek ten jest spełniony, gdyż każdy wyraz na diagonali jest większy od wartości bezwzględnej sumy wszystkich pozostałych elementów w tym samym wierszu.

3 Metoda Gaussa-Seidla:

Metodę iteracyjną Gaussa-Seidla wyrażamy wzorem:

$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum\limits_{j<i} x_j^{(n+1)} - \sum\limits_{j>i} x_j^{(n)})$

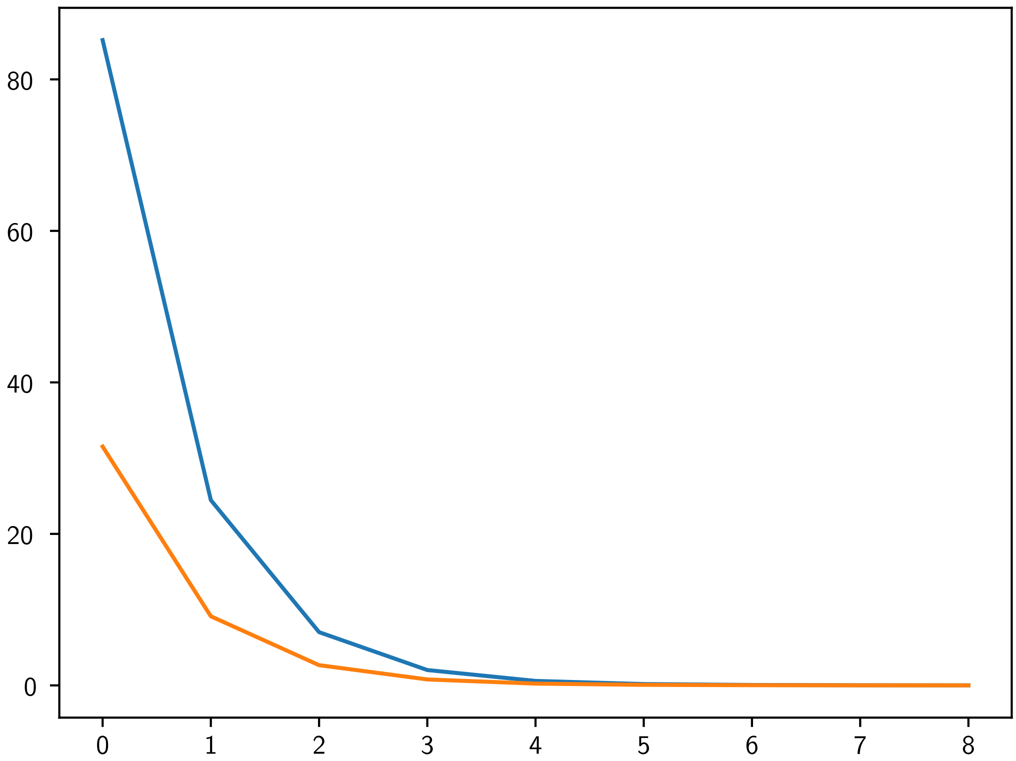
Aby metoda ta była zbieżna, musi spełniać 2 warunki zbieżności:

1. Macierz jest symetryczna.
2. Macierz jest dodatnio określona.

4 Porównanie obu metod

Metoda Gaussa-Seidla jest szybsza od metody Jacobiego, gdyż wykorzystuje do obliczeń najnowsze wyniki z n+1 kroku iteracji. Metoda Jacobiego ma jednak jedną przewagę, można ją łatwo zrównoleglić. To powoduje, że możemy jej użyć do obliczeń na procesorach wielowątkowych, gdzie będzie znacznie szybsza od metody Gaussa-Seidla.

niebieska linia - metoda Jacobiego
pomaranczowa linia - metoda Gaussa-Jordana



Oś y = $\|x - x^*\|$, gdzie x* to wartość dokładna. Oś x to numer iteracji. Wektor początkowy = 0. Z wykresu możemy odczytać, że metoda Gaussa-Jordana w każdej iteracji ma mniejszy błąd od wyniku dokładnego, niż metoda Jacobiego. Dla zadanej macierzy rzadkiej, obie metody zbiegają się w 5 iteracji. Każda następna iteracja zmienia wynik w sposób prawie niezauważalny.

5 Sprawdzenie wyniku

Wynik sprawdziłem przy pomocy biblioteki numerycznej NumPy dla macierzy N = 6. Wynik nie jest identyczny.Większa ilość iteracji powoduje tylko nieznaczną zmianę wyniku końcowego.

NumPy:
x = [0.17157962 0.37225332 0.56503914 0.73310637 0.82603484 1.6757813]

Wynik metody Jacobiego po 6 iteracjach:
x = [0.17485427980851373, 0.3555421931070443, 0.599349657920588, 0.7956911964119074, 0.8015569478607567, 1.6797682709522872]

Wynik metody Gaussa-Seidla po 6 iteracjach:
x = [0.1748487321647684, 0.3555535538715646, 0.5993510791343954, 0.7956866581715003, 0.8015585668684322, 1.6797680338324226]

6 Wynik dla N = 100, po 6 iteracjach

Metoda Jacobiego:
x = [0.17111319328896935, 0.3559254917259081, 0.5908632006181909, 0.7781429978965572, 0.9466344972086255, 1.1299747036158494, 1.3201570000482226, 1.5058320294598735, 1.689089677355694, 1.8736520543591795, 2.059041906499022, 2.244088124908275, 2.428860111479533, 2.6137040033303474, 2.7986360006619067, 2.9835638383892884, 3.168464065896442, 3.353356628631311, 3.538257770694545, 3.7231655116802536, 3.908070516373457, 4.092971559383851, 4.277873548062913, 4.46277760538609, 4.647681290685984, 4.832583976995615, 5.017486830165386, 5.202390141060511, 5.38729337056602, 5.572196398506434, 5.757099467358217, 5.942002622140798, 6.126905756450753, 6.311808855140241, 6.496711963865036, 6.681615086985187, 6.866518205314019, 7.0514213179624115, 7.236324432837223, 7.4212275499021585, 7.606130665958998, 7.791033781190868, 7.975936896868326, 8.160840012849098, 8.345743128637235, 8.530646244316733, 8.715549360077825, 8.900452475876698, 9.085355591641658, 9.270258707393934, 9.455161823160056, 9.64006493893025, 9.824968054694887, 10.009871170458291, 10.194774286223893, 10.379677401989833, 10.56458051775492, 10.749483633519928, 10.934386749285261, 11.119289865050606, 11.304192980815829, 11.489096096581058, 11.673999212346326, 11.85890232811159, 12.043805443876847, 12.228708559642099, 12.413611675407353, 12.598514791172613, 12.783417906937869, 12.968321022703124, 13.153224138468383, 13.338127254233639, 13.523030369998894, 13.707933485764151, 13.892836601529408, 14.077739717294664, 14.262642833059923, 14.447545948825178, 14.63244906459043, 14.817352180355691, 15.002255296120948, 15.187158411886202, 15.372061527651459, 15.55696464341672, 15.741867759181973, 15.926770874947229, 16.11167399071249, 16.296577106477745, 16.481480222242997, 16.666383338008256, 16.85133003598006, 17.037300759035144, 17.231916377511226, 17.45354215811333, 17.66676604445484, 17.762180689493064, 18.071244710305695, 18.142494080984715, 16.91841440279026, 26.4843622603376]

Metoda Gaussa-Seidla:
x = [0.17280299109551212, 0.35733746267724414, 0.5927923461216215, 0.7803822602462039, 0.9487036966476022, 1.1322020274829276, 1.3228307049201626, 1.5086760734538898, 1.69194084571248, 1.8767045332383667, 2.0623800562351158, 2.24758863983763, 2.432483933757429, 2.617523670726749, 2.8026672868295983, 2.9877666717594074, 3.172833276785802, 3.3579131924287666, 3.5430026819345297, 3.7280882973842875, 3.913171492325622, 4.098255738696527, 4.283340399229655, 4.468424819151982, 4.653509288217976, 4.838593784790242, 5.023678179788307, 5.20876259140478, 5.393847074265294, 5.578931538961039, 5.76401596400316, 5.949100401212424, 6.134184858218428, 6.319269308260506, 6.504353749055021, 6.6894381935271605, 6.874522642119693, 7.059607088866826, 7.244691533845162, 7.429775979715828, 7.614860426322079, 7.799944872509322, 7.985029318399356, 8.170113764481355, 8.355198210680152, 8.540282656792883, 8.725367102860984, 8.910451548966927, 9.095535995089422, 9.280620441195575, 9.465704887295791, 9.650789333402948, 9.83587377951215, 10.020958225618452, 10.206042671724083, 10.391127117830909, 10.576211563937939, 10.761296010044484, 10.94638045615097, 11.13146490225766, 11.316549348364354, 11.501633794470969, 11.686718240577589, 11.871802686684239, 12.056887132790884,

12.24197157889752, 12.427056025004157, 12.612140471110799, 12.79722491721744, 12.982309363324076,
13.167393809430713, 13.352478255537354, 13.537562701643994, 13.722647147750633, 13.907731593857271,
14.092816039963912, 14.277900486070555, 14.462984932177193, 14.64806937828383, 14.833153824390466,
15.018238270497108, 15.203322716603749, 15.388407162710386, 15.573491608817024, 15.758576054923665,
15.943660501030307, 16.12874494713694, 16.313829393243584, 16.49891392296117, 16.684000403600873,
16.86913501218855, 17.055063460642323, 17.247082087271167, 17.45572583103649, 17.644513197154797,
17.7435215254058, 18.09590024391418, 18.14045433172525, 16.91857324621887, 26.484445295812026]