NUM 4

Krzysztof Buczek

2020-11-27

1 Opis problemu

Problem polega na obliczeniu wektora y = A^{-1}b. Macierz A zawiera same 10 na diagonali oraz same 8 na pasie nad diagonalą. Reszta miejsc jest zapełniona liczbą 1. Wektor b zawiera liczbę 5 na wszystkich miejscach.

2 Wzór Shermana-Morrisona i rozkład LU

Aby efektywnie obliczyć macierz A można skorzystać ze wzoru Shermana:

$(B + uv^T)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u}$

Wzór ten możemy podstawić do naszego równania:

$y = A^{-1}b = (B + uv^T)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u}$

Aby wkorzystać powyższy wzór muszę obliczyć równania:

$$\begin{cases} z' = B^{-1}u \\ z = B^{-1}b \end{cases}$$

Mnożę oba równania przez macierz B i otrzymuję:

$$\begin{cases} Bz' = u \\ Bz = b \end{cases}$$

Powyższy układ równań mogę rozwiązać stosując faktoryzację LU, gdyż w obu równaniach wykorzystuję tą samą macierz B. Wartość wektora b znamy z treści zadania. Aby obliczyć wartości macierzy B i wektora u muszę skorzystać z równania:

A = B + uv^T

Wektor u zawiera tylko 1. Wynikiem mnożenia wektorów uv^T jest macierz zawierająca same 1. Aby powyższa równość była prawdziwa, macierz B musi być macierzą wstęgową. Na diagonali zawiera same 9. Na pasie nad diagonalą zawiera tylko 7.

Znając wartość macierzy B i wektora u mogę rozwiązać układ równań. Stosuję faktoryzację LU dla macierzy B. W naszym przypadku niezerowe elementy macierzy L i U to:
u_{ii}
$u_{i,i+1}$

Dowolny wyraz macierzy U możemy wyrazić wzorem:
$u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k<i} l_{ik} u_{kj}$

Macierz L zawiera same 0, dlatego powyższy wzór skraca się do poniższej postaci:
$u_{ii} = a_{ii} \qquad\qquad i = 1, 2, ..., N$

$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} \qquad i = 1, 2, ..., N$

Po obliczeniu wektorów z i z', mogę je wstawić do wzoru Shermana-Morrisona. Gdy mam już obliczone wszystkie wartości we wzrorze, mogę wyliczyć wektor y, który jest rozwiązaniem zadania.

3 Złożoność obliczeniowa i wykorzystanie pamieci

Dzięki wykorzystaniu wzoru Shermana Morrisona, faktoryzację LU można przeprowadzić na macierzy wstęgowej B, a nie gęstej A. Dzięki temu opercja znalezienia macierzy LU jest wielkości O(N) (w przypadku macierzy gęstej O(N^3)). Obliczenie każdego miejsca wektora y ze wzoru Shermana-Morrisona zajmuje O(1), czyli wyliczenie całego wektora jest rzędu O(N). Całkowity koszt wyliczenia równania jest rzędu O(2N). Kolejną zaletą wykorzystania wzoru Shermana-Morrisona jest to, że w żadnym momencie rozwiązania nie musimy przechowywać w pamięci komputera macierzy gęstej wypełnionej w większości samymi jedynkami.

4 Sprawdzenie wyniku

Wynik sprawdziłem przy pomocy biblioteki numerycznej NumPy dla macierzy N = 4.

y =[0.15634395670475043, 0.3625977149729405, 0.09741431148526752, 0.43836440168370416]

5 Wynik dla N = 50

y = [0.07525844089350037, 0.07525904117533852, 0.07525826938440369, 0.07525926168703423, 0.07525798586936636, 0.07525962620636797, 0.07525751720165161, 0.07526022877914404, 0.07525674246522518, 0.07526122486883524, 0.07525546177847939, 0.07526287146607977, 0.07525334472487927, 0.07526559339213706, 0.07524984510566277, 0.07527009290255826, 0.07524406002083556, 0.07527753086876468, 0.07523449692142722, 0.07528982628228975, 0.07521868853260927, 0.07531015135362706, 0.07519255629803279, 0.07534374994093965, 0.07514935811434514, 0.07539929046282381, 0.0750779488719227, 0.07549110234593845, 0.07495990502220382, 0.07564287300986267, 0.07476477131144413, 0.0758937592094108, 0.07444220334059656, 0.07630848945764337, 0.07390897873572605, 0.07699406394961972, 0.07302752581747077, 0.0781273605588052, 0.07157043017708939, 0.08000076923929544, 0.06916176187360193, 0.08309762848663654, 0.0651800856984491, 0.08821692642611872, 0.058598131204829124, 0.09667943934648732, 0.04771775745006959, 0.11066849131689238, 0.029731833488120224, 0.13379325069654147]