NUM 3

Krzysztof Buczek

2020-11-17

1 Opis problemu

Problem polega na obliczeniu wektora y = A^{-1}x oraz wyznacznika macierzy A. Macierz A jest macierzą wstęgową. Zawiera 1 pas pod diagonalą oraz 2 pasy nad diagonalą niezerowych elementów.

2 Rozkład LU

Koszt obliczeniowy faktoryzacji LU dla macierzy gęstej jest rzędu O(N^3). Dlatego Rozkład LU stosujemy przeważnie gdy macierz A się nie zmienia, a zmieniają się tylko wyrazy wolne równania.

Dowolny wyraz macierzy U możemy wyrazić wzorem:
$u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k<i} l_{ik} u_{kj}$

Dowolny wyraz macierzy L możemy wyrazić wzorem:
$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k<j} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$

W naszym przypadku niezerowe elementy macierzy L i U to:
$l_{ii} = 1$
$l_{i+1,i}$
u_{ii}
$u_{i,i+1}$
$u_{i,i+2}$

Korzystając z powyższych wzorów, wyprowadzam wzory na niezerowe elementy macierzy LU (pomijając diagonalę macierzy L):

$$l_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i} - \sum\limits_{k<i} l_{i+1,k} u_{ki}}{u_{ii}} = a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i}, \qquad i = 2, 3, ..., N-1$$

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k<i} l_{ik} u_{ki} = a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i}, \qquad i = 2, 3, ..., N$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} - \sum_{k<i} l_{ik} u_{k,i+1} = a_{i,i+1} - l_{i,i-1} u_{i-1,i+1}, \qquad i = 2, 3, ..., N-1$$

$$u_{i,i+2} = a_{ij} - \sum_{k<i} l_{ik} u_{k,i+2} = a_{i,i+2}, \qquad i = 2, 3, ..., N-2$$

Każdy ze wzorów wykonujemy w czasie liniowym O(1), gdyż suma się redukuje w zadanej macierzy wstęgowej A. Wzory te wykonujemy N razy, gdyż musimy je obliczyć dla każdego indeksu.

Cała operacja znalezienia macierzy LU zajmuje O(N), czyli znacznie mniej niż koszt obliczeniowy macierzy gęstej O(N^3).

Wzory te możemy wykorzystać tylko dla $i >= 2$, gdyż obliczamy je na podstawie wyrazów poprzednich. Wyrazy dla i = 1 musimy zainicjalizować wykorzystując wzory ogólne:
$u_{11} = a_{11}$
$u_{12} = a_{12}$
$u_{13} = a_{13}$
$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$

3 Wyznacznik macierzy A

A = LU, stąd:

det A = det LU = det L * det U = 1 * det U = det U = $\prod_{i=1}^{N} u_{ii}$

4 Wykorzystanie pamieci i działanie programu

Macierz A jest macierzą rzadką. Zawiera niezerowe elementy tylko na diagonali oraz na przylegających do niej pasach. Diagonala ma N elementów. Oba pasy przylegające do diagonali mają N - 1 elementów. Pas liczb o 1 miejsce wyżej od pasa przylegającego zawiera N - 2 elementów. W sumie wszystkich elementów niezerowych jest: N + 2*(N-1) + N - 2 = 4N - 4. . Gdybym do zapisu tej macierzy wykorzystał zwykłą macierz, wykorzystałbym N^2 komórek pamięci, gdyż przechowywałbym w niej wszystkie zera. Opisywaną macierz rzadką lepiej jest zapamiętać przy pomocy 4 wektorów, aby zaoszczędzić pamięć komputera. W moim programie, nadpisuję wyrazy macierzy A (którą przechowuję we wcześniej wspomnianych 4 wektorach) obliczonymi wyrazami macierzy L i U. Z tego powodu muszę zainicjalizować wyłącznie wyraz l_{21}. Po wyliczeniu macierzy L i U rozwiązuję układ 2 równań: Lz = x, Uy = z. Przy rozwiązywaniu pierwszego równania, wartości wektora z podstawiam pod wartości wektora x, w celu zaoszczędzenia pamięci. To samo robię w drugim rówaniu, wartości wektora y podstawiam pod wartości wektora z.

5 Sprawdzenie wyniku

Wynik sprawdziłem przy pomocy biblioteki numerycznej NumPy dla macierzy N = 3.

det A = 1.7079999999999997
y = (-0.04391101, 1.58079625, 2.23653396)

6 Wynik dla N = 100

det A = 78240161.00959387
y = [0.03287133486041395, 1.3396227980963753, 2.066480295894664, 2.825543605175336, 3.557571715528883, 4.284492868897645, 5.00721018451999, 5.727664002754518, 6.446615582748809, 7.164554400995276, 7.881773878242026, 8.598465868371878, 9.314759799907844, 10.030746230199034, 10.74649032115277,

11.462040127963592, 12.177431844626687, 12.892693237901542, 13.60784595684208, 14.322907124390252, 15.03789045794619, 15.75280707355121, 16.467666073000725, 17.182474979167374, 17.897240063340146, 18.611966594532937, 19.32665903159678, 20.041321172855753, 20.75595627381683, 21.47056714061568, 22.185156204831525, 22.899725583859315, 23.61427712998635, 24.328812470561147, 25.043333041083297, 25.757840112626393, 26.472334814693667, 27.186818154368854, 27.901291032443737, 28.615754257064278, 29.33020855532933, 30.04465458319117, 30.75909293394065, 31.473524145507586, 32.18794870676451, 32.902367062989086, 33.61677962061327, 34.331186751365145, 35.04558879589254, 35.75998606694211, 36.47437885215638, 37.18876741654113, 37.90315200464761, 38.617532842507245, 39.331910139350974, 40.04628408914067, 40.7606548719361, 41.47502265511775, 42.189387594482916, 42.90374983523002, 43.6181095128443, 44.33246675389621, 45.04682167676243, 45.76117439227791, 46.47552500432681, 47.189873610378676, 47.904220301975755, 48.61856516517662, 49.33290828096055, 50.047249725596565, 50.761589570980924, 51.47592788494589, 52.19026473154275, 52.904600171301595, 53.61893426146981, 54.33326705623165, 55.04759860691019, 55.761928962153874, 56.47625816810818, 57.19058626857465, 57.90491330515779, 58.61923931740096, 59.33356434291259, 60.04788841748285, 60.76221157519233, 61.47653384851288, 62.1908552684013, 62.9051758643867, 63.61949566465193, 64.33381469610926, 65.04813298447127, 65.76245055431694, 66.47676742915336, 67.19108363147355, 67.9053991828134, 68.61971410401006, 69.33402833257784, 70.04833794418792, 70.7650588638003, 71.53915685603329]