NUM 6

Krzysztof Buczek

3 stycznia 2021

1 Metoda Interpolacji Wielomanowej Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a to metoda przyliżania funkcji. Wielomian Lagrange'a jest stopnia n i przyjmuje w n+1 punktach (węzłach interpolacji) wartości takie same jak przybliżana funkcja. Innymi słowy metoda ta pozwala nam wyznaczyć wzór wielomianu przechodzącacego przez zadane punkty.
$W_n(x_i) = \sum\limits_{j=0}^{n} y_j \Phi_j(x_i)$

$\Phi_j(x_i)$ zachowuje się jak delta Kroneckera. Jeśli i = j, to równa się 1. Jeśli i $\neq$ j, to daje 0.

Interpolacja wielomianowa jest jednoznaczna, czyli nie ważne jaką przyjmiemy metodę interpolacji, zawsze otrzymamy ten sam wielomian dla tych samych węzłów interpolacji.

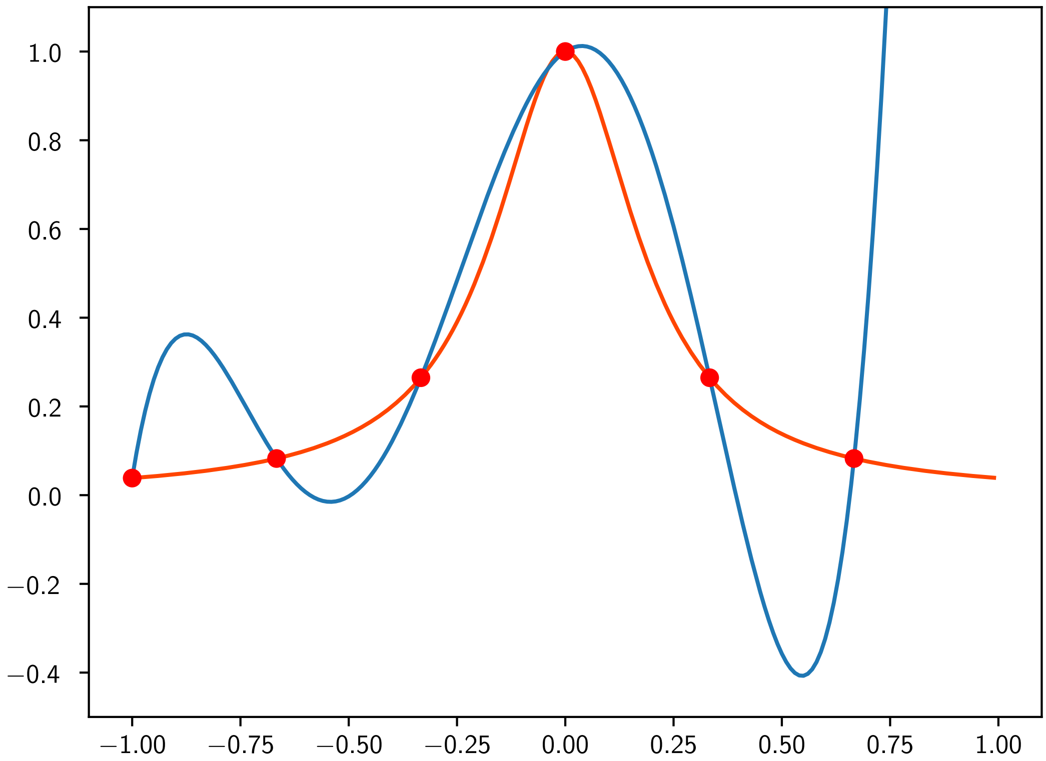
2 $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

We wszystkich wykresach kolory funkcji oznaczają:
niebieska linia - wielomian interpolacyjny uzyskwany przy pomocy metody Lagrange'a
pomarańczowa linia - dokładny wykres funkcji

2.1 Jednorodne węzły interpolacji

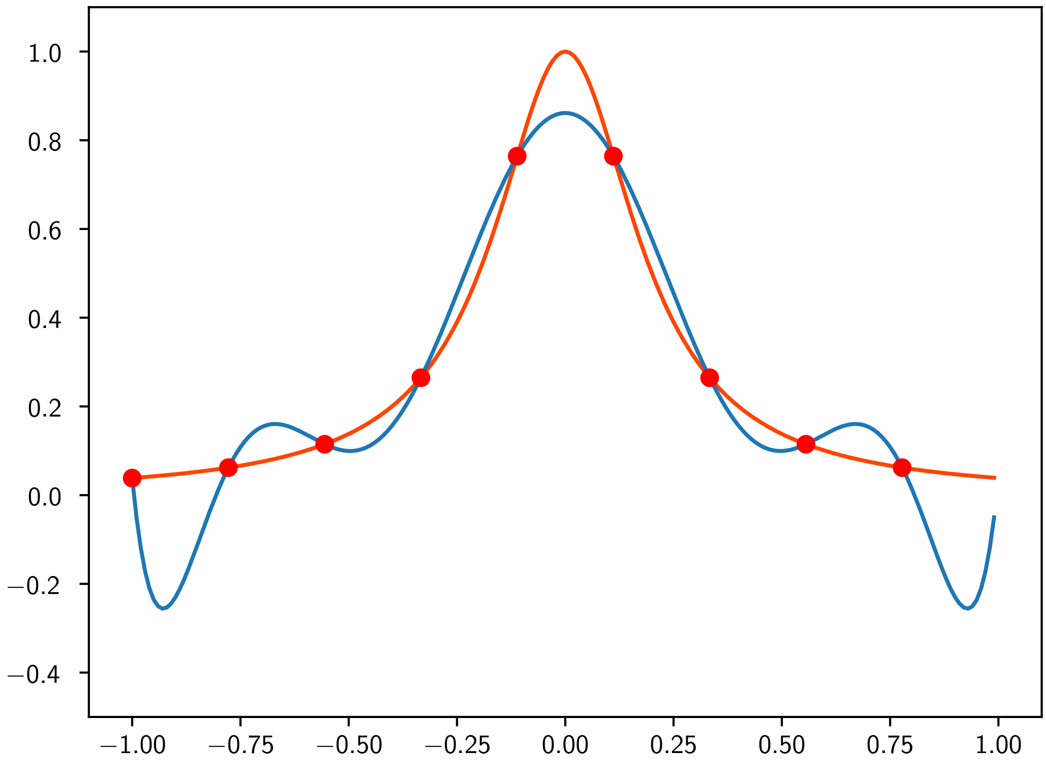
Wszystkie węzły są oddalone od siebie z taką samą odległością względem osi x, dzięki wykorzystaniu wzoru $x_i = -1 + 2 * \frac{i}{n+1}, \qquad i = 0, ..., n, \qquad x_i \in < -1, 1 >$
Podając stopień n, dostajemy n+1 węzłów interpolacyjnych (numerujemy węzły od punktu x_0 do x_n).

2.1.1 n = 5



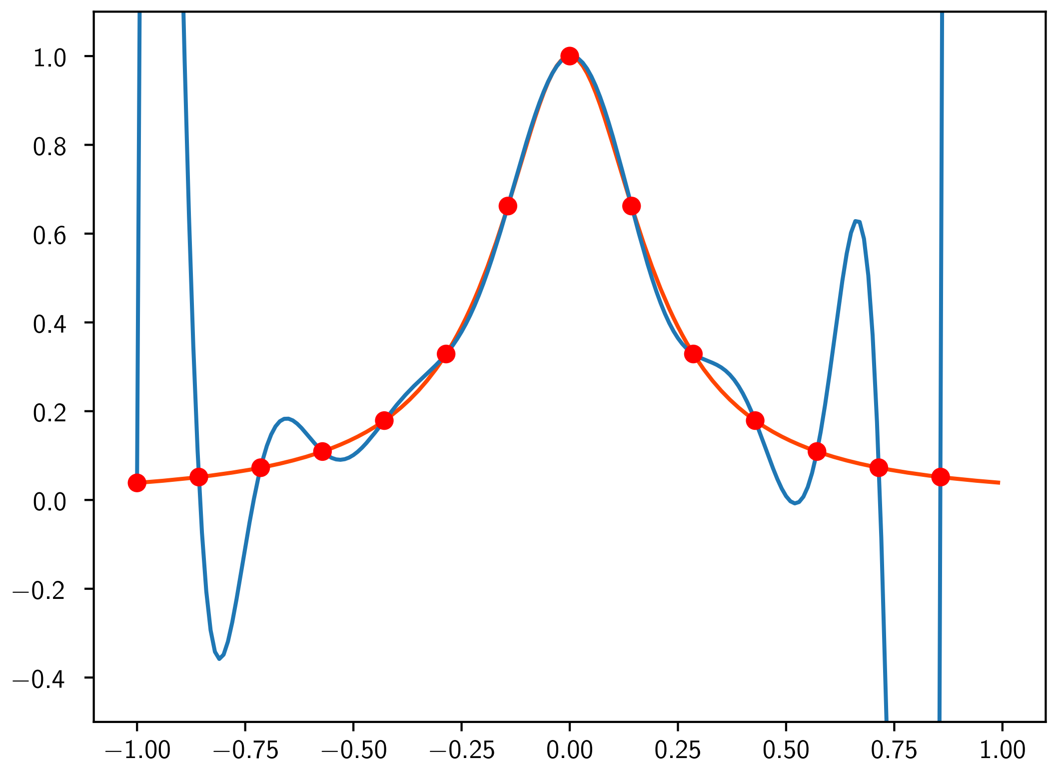
Przy sześciu węzłach, wykres mocno odbiega od funkcji pierwotnej.

2.1.2 n = 8



Wykres dla n = 8 wydaje się być optymalną wartością dla wyznaczenia rówania wielomianu interpolacyjnego. Wielomian interpolacyjny jest w miarę dokładny na środku przedziału. Dla n = 9 wykres wielomianu interpolacyjnego zaczyna mocno oscylować na końcach przedziału. Oscylacje Rungego zwiększają się wraz z ilością węzłów interpolacyjnych, ale środek przedziału coraz lepiej odwzrorowuje pierwotną funkcję.

2.1.3 n = 13

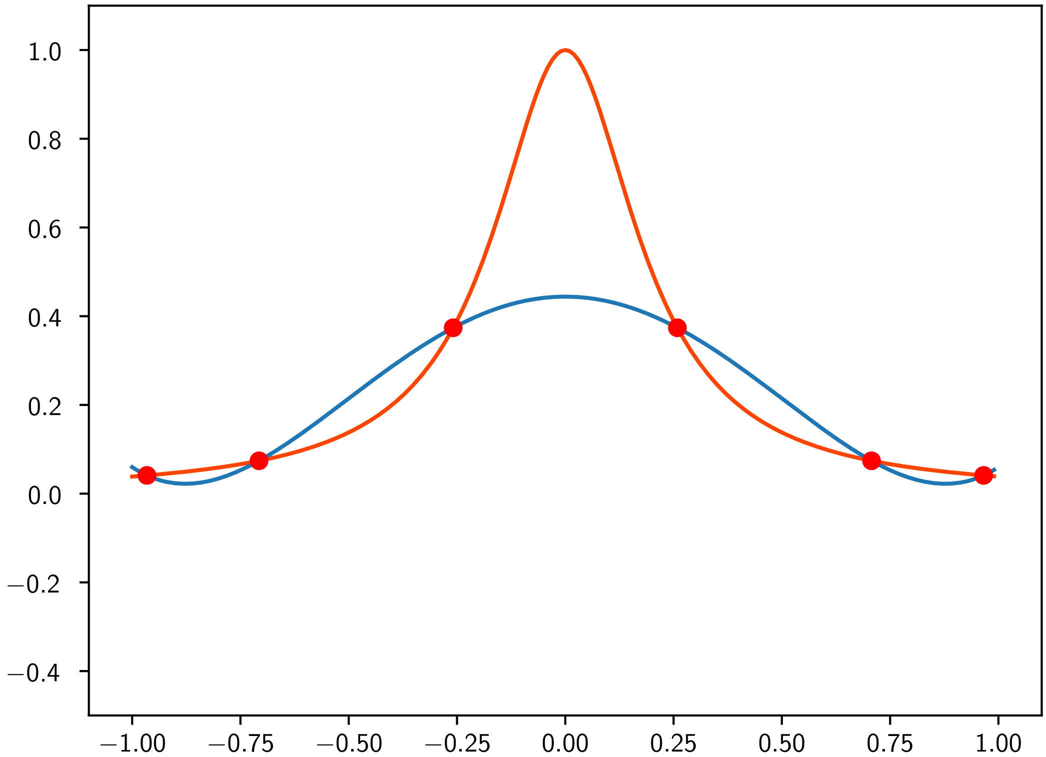


Przy 14 węzłach możemy zaobserwować bardzo duże oscylacje na końcach przedziału.

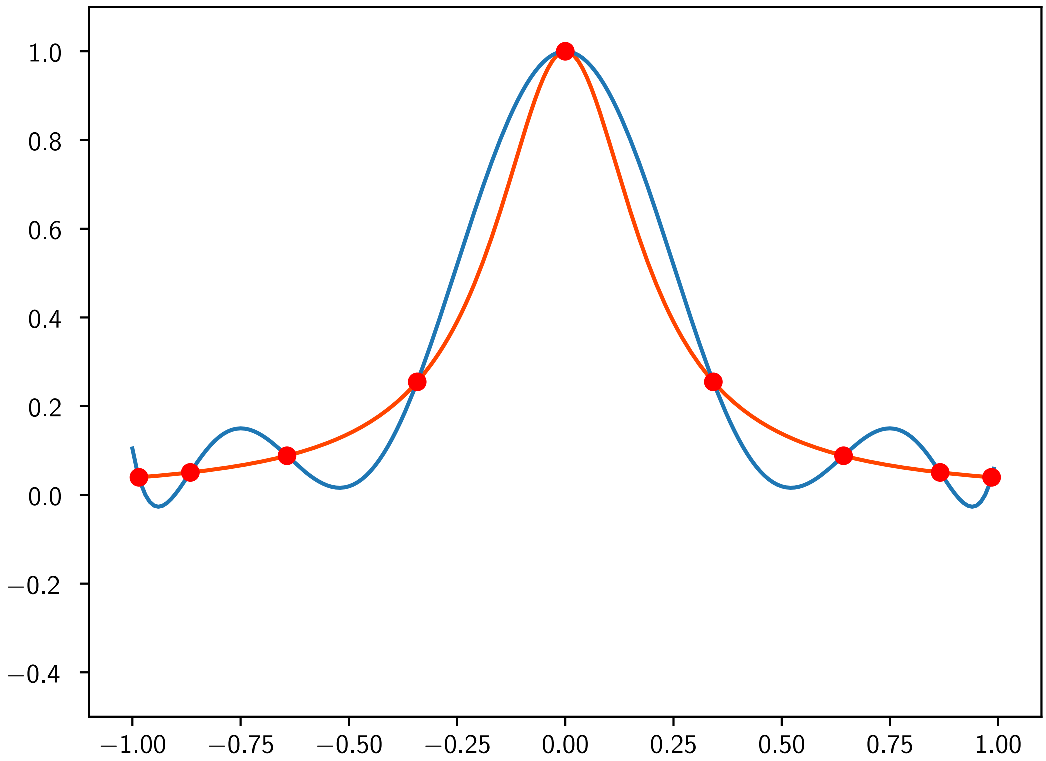
2.2 Niejednorone węzły interpolacji

Możemy wybrać funkcję, która będzie coraz gęściej próbkowała węzły interpolacji, im będzie bliżej krawędzi przedziału. W tym przypadku wykorzystujemy funkcję:
$x_i = cos(\pi \frac{2i+1}{2(n+1)}), \qquad i = 0, ..., n, \qquad x_i \in < -1, 1 >$

2.2.1 $\mathbf{n = 5}$

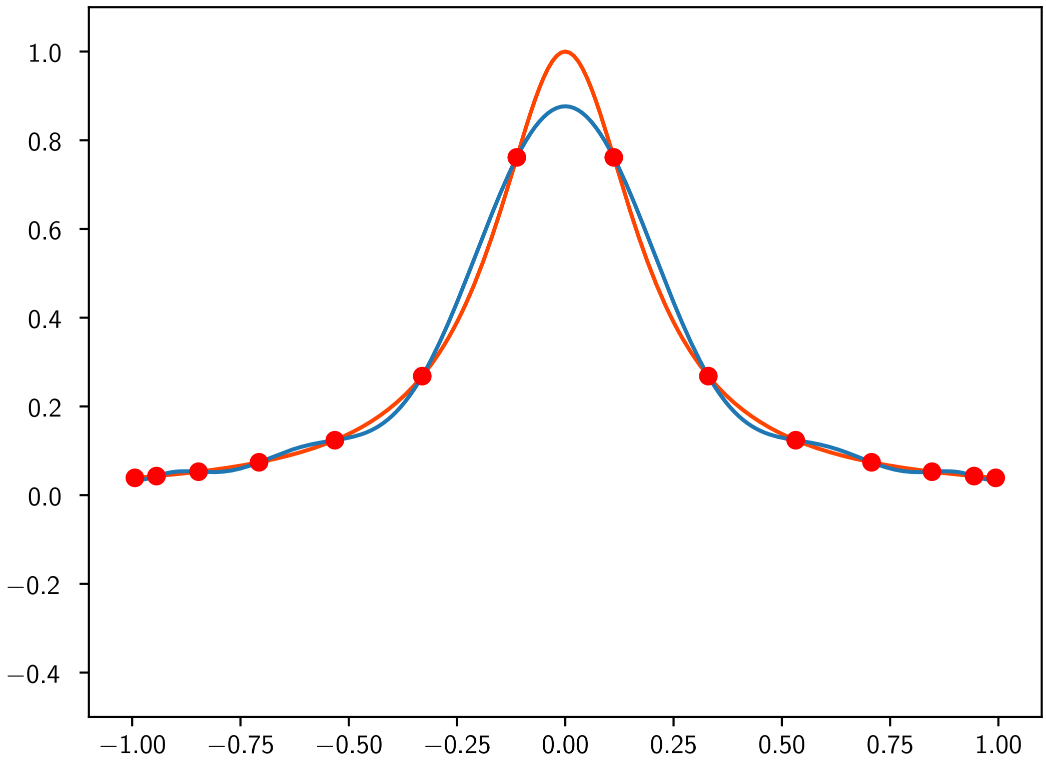


2.2.2 n = 8



Wraz ze wzrostem liczby węzłów, wzrasta dokładność naszej funkcji względem funkcji pierwotnej.

2.2.3 n = 13



Dla większej ilości węzłów, funkcja interpolacyjna jest coraz bardziej zbliżona do funkcji pierwotnej. Dzięki zastowowaniu wzoru na niejednorodne węzły interpolacji, nie otrzymujemy oscylacji Rungego na końcach przedziałów, gdyż węzły są położone w coraz bliższym sąsiedztwie (gęściej próbkujemy punkty) wraz ze wzrostem odległości od punktu x = 0. Dla tej funkcji jest to bardziej optymalna metoda wyboru siatki interpolacyjnej od metody z jednorodnymi węzłami interpolacji.

3 $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$

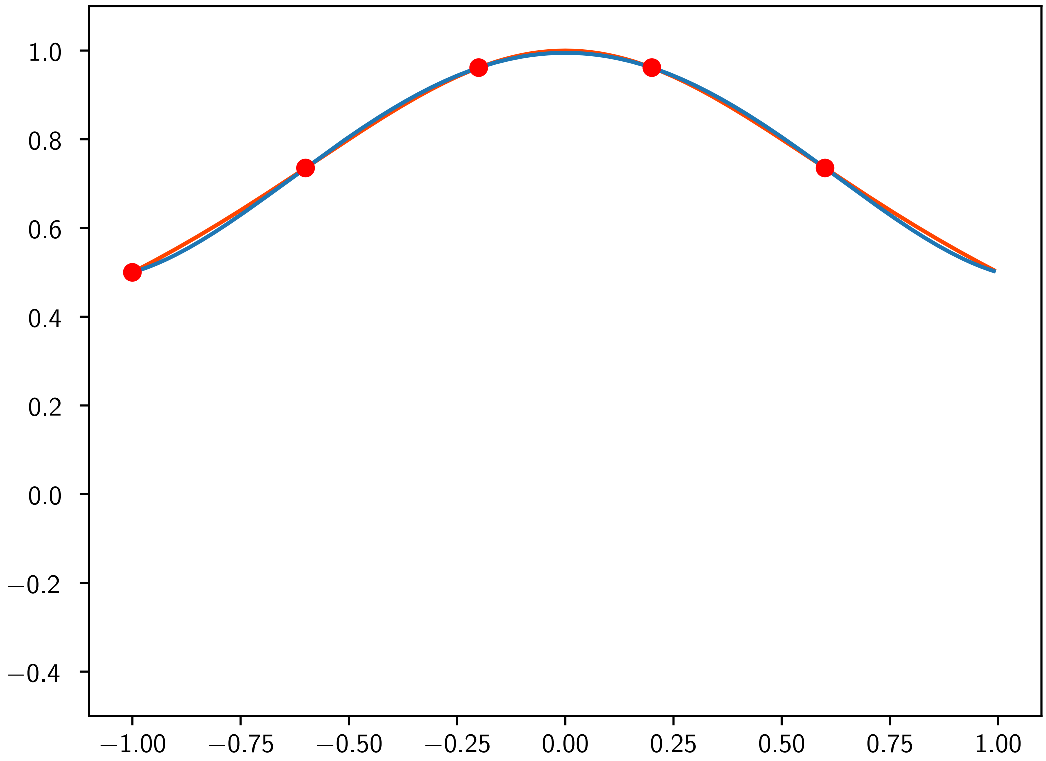
Ta funkcja różni się od poprzedniej tylko współczynnikiem przed zmienną x^2 (wcześniej była pomonożona przez liczbę 25).

We wszystkich wykresach kolory funkcji oznaczają:
niebieska linia - wielomian interpolacyjny uzyskwany przy pomocy metody Lagrange'a
pomarańczowa linia - dokładny wykres funkcji

3.1 Jednorodne węzły interpolacji

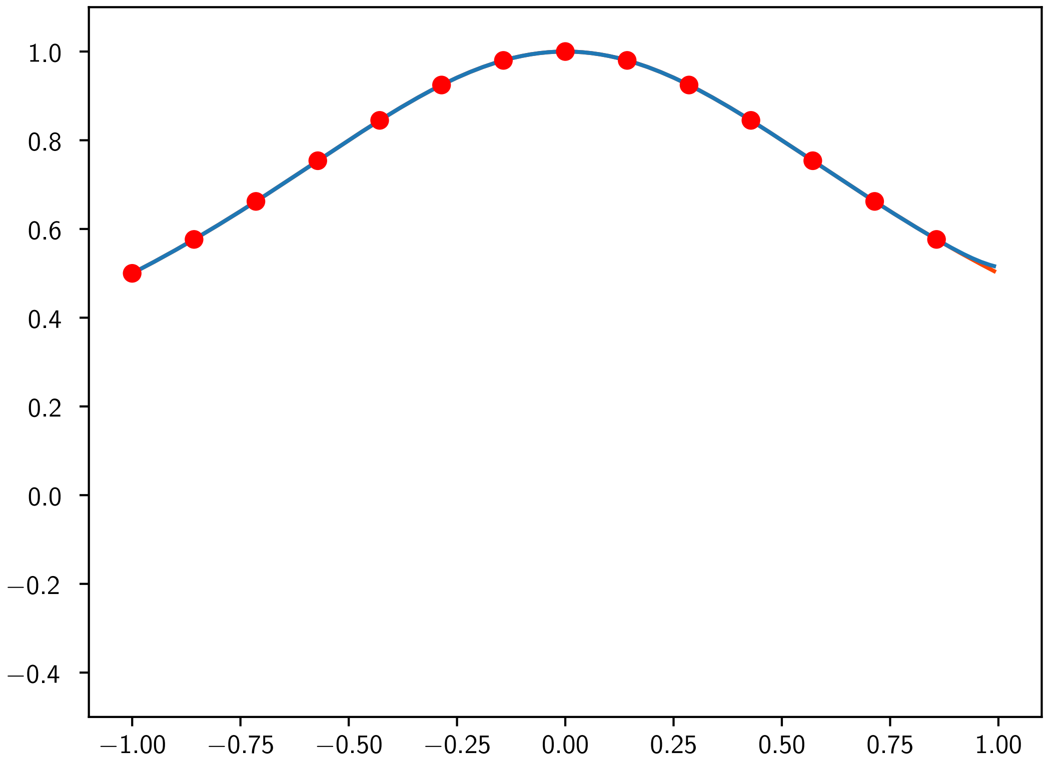
Wszystkie węzły są oddalone od siebie z taką samą odległością względem osi x, dzięki wykorzystaniu wzoru $x_i = -1 + 2 * \frac{i}{n+1}, \qquad i = 0, ..., n, \qquad x_i \in < -1, 1 >$
Podając stopień n, dostajemy n+1 węzłów interpolacyjnych (numerujemy węzły od punktu x_0 do x_n).

3.1.1 n = 4



W tym przypadku, pomimo zastsowania siatki jednorodnej, błąd interpolacyjny jest bardzo mały.

3.1.2 n = 13

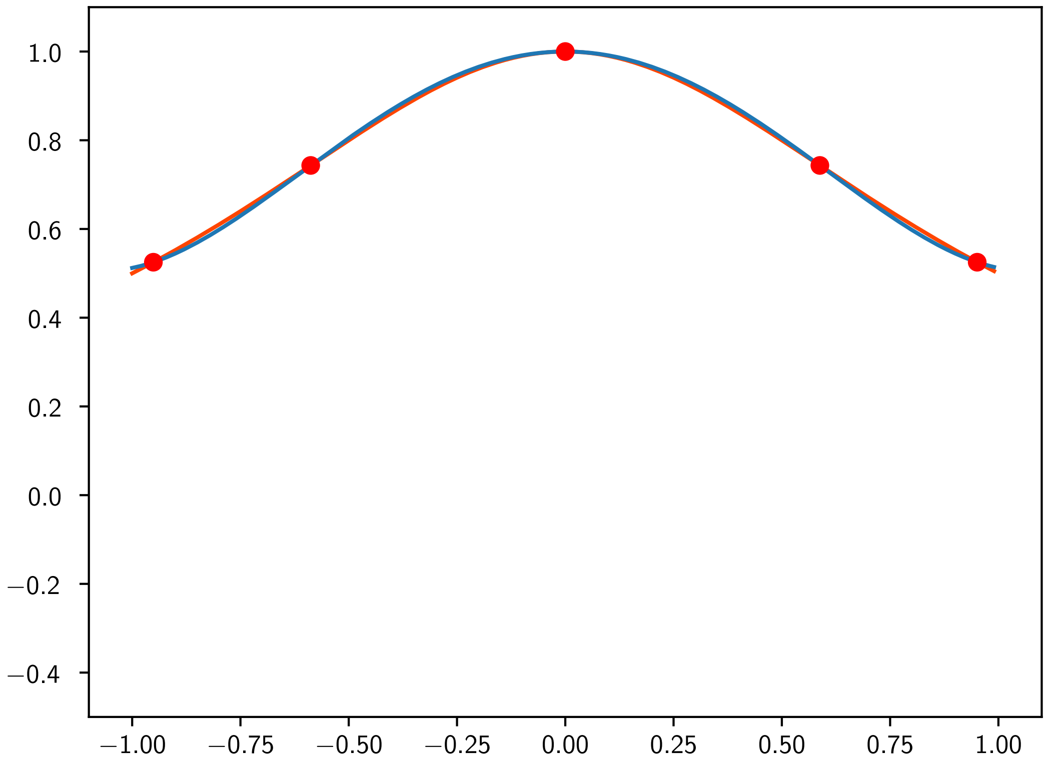


Zwiększenie liczby węzłów nie powoduje powstania oscylacji Rungego.

3.2 Niejednorone węzły interpolacji

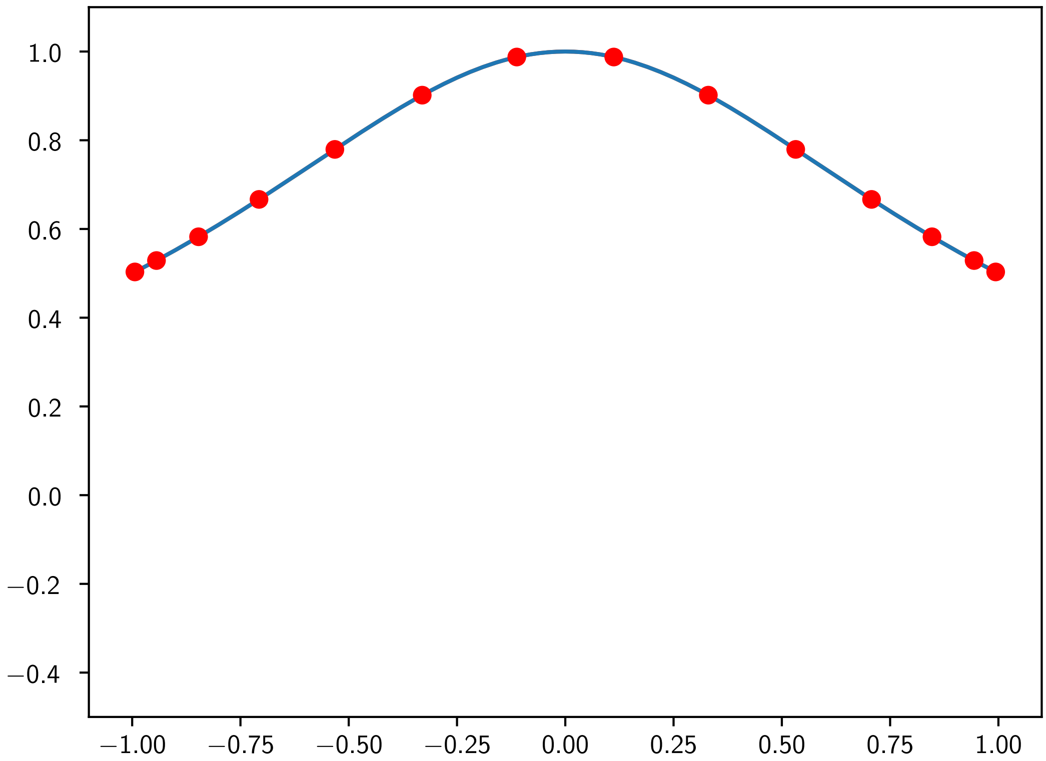
Możemy wybrać funkcję, która będzie coraz gęściej próbkowała węzły interpolacji, im będzie bliżej krawędzi przedziału. W tym przypadku wykorzystujemy funkcję:
$x_i = cos(\pi \frac{2i+1}{2(n+1)}), \qquad i = 0, ..., n, \qquad x_i \in < -1, 1 >$

3.2.1 n = 4



Wykres jest prawie taki sam, jak w przypadku siatki jednorodnej.

3.2.2 n = 13



Ten przypadek pokazuje, że istnieją funkcje, w których nie występują oscylacje Rungego dla siatki jednorodnej.Metoda z siątką jednorodną oraz z siatką niejednorodną mają podobną dokładność, lecz wyliczenie siatki jednorodnej jest prostrze do obliczenia.

4 Podsumowanie

Może się wydawać naturalne, że im więcej weźmiemy węzłów interpolacyjnych, tym dokładniejszy otrzymamy wielomian interpolacyjny. Jednak powyższe wykresy wielomianów interpolacyjnych pierwszej funkcji pokazują, że tak się nie dzieje w przypadku węzłów jednorodnych, gdyż zachodzi tam efekt oscylacji Rungego. Błąd interpolacji wielomianowej możemy kontrolować jednynie przez odpowiedni dobór węzłów interpolacyjnych, dlatego często lepiej jest wybrać metodę z niejednorodnymi węzłami interpolacji. Druga funkcja pokazuje, że istnieją funkcje w których nie zachodzą oscylacje Rungego dla siatki węzłów jednorodnych. W takich przypadkach lepiej jest wybrać metodę jednorodną, gdyż wyliczenie współrzędnych węzłów może być prostrze od metody z węzłami niejednorodnymi.