NUM 7

Krzysztof Buczek

11 stycznia 2021

1 Iterpolacja metodą naturalnych splajnów kubicznych

Interpolacja metodą splajnów kubicznych polega na sklejaniu ze sobą wielomianów 3 stopnia w każdym przedziale $< x_i, x_{i+1} >, i = 1, 2, ..., n-1$. Splajn jako całość nie jest wielomianem.

W splajnach mamy n+1 węzłów interpolacji, gdzie n-1 węzłów jest wewnętrznymi punktami zszycia. Gdy splajn kubiczny spełnia warunek, że drugie pochodne na brzegach: $\xi_0 = \xi_n = 0$, to możemy go nazywać naturalnym.

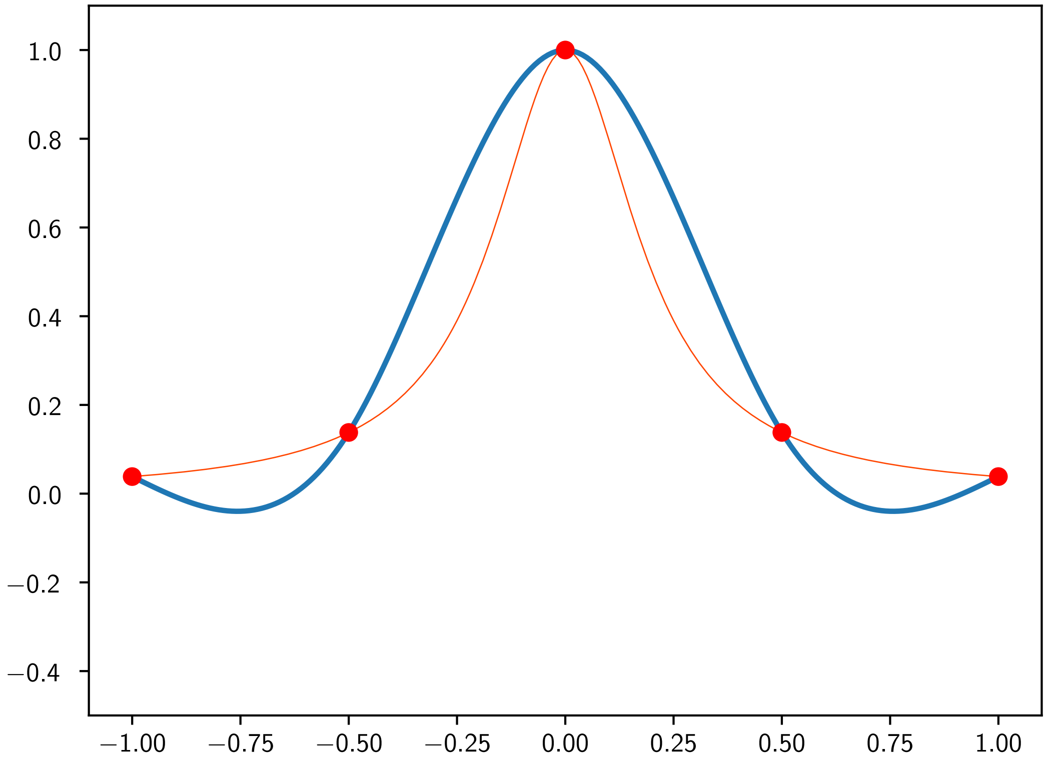
Zaletą splajnu kubicznego jest jego złożoność obliczeniowa, która wynosi O(N). Jest to mniej niż złożoność obliczeniowa wielomianu interpolacyjnego metodą Lagrange'a, która wynosi O(N^2). Co więcej w metodzie interpolacji metodą splajnów kubicznych nie występują oscylacje Rungego, co możemy zaobserwować na poniższych wykresach.

2 Wykresy interpolacji funkcji $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

We wszystkich wykresach kolory funkcji oznaczają:
niebieska linia - wielomian interpolacyjny uzyskwany przy pomocy złączenia splajnów kubicznych
pomarańczowa linia - dokładny wykres funkcji

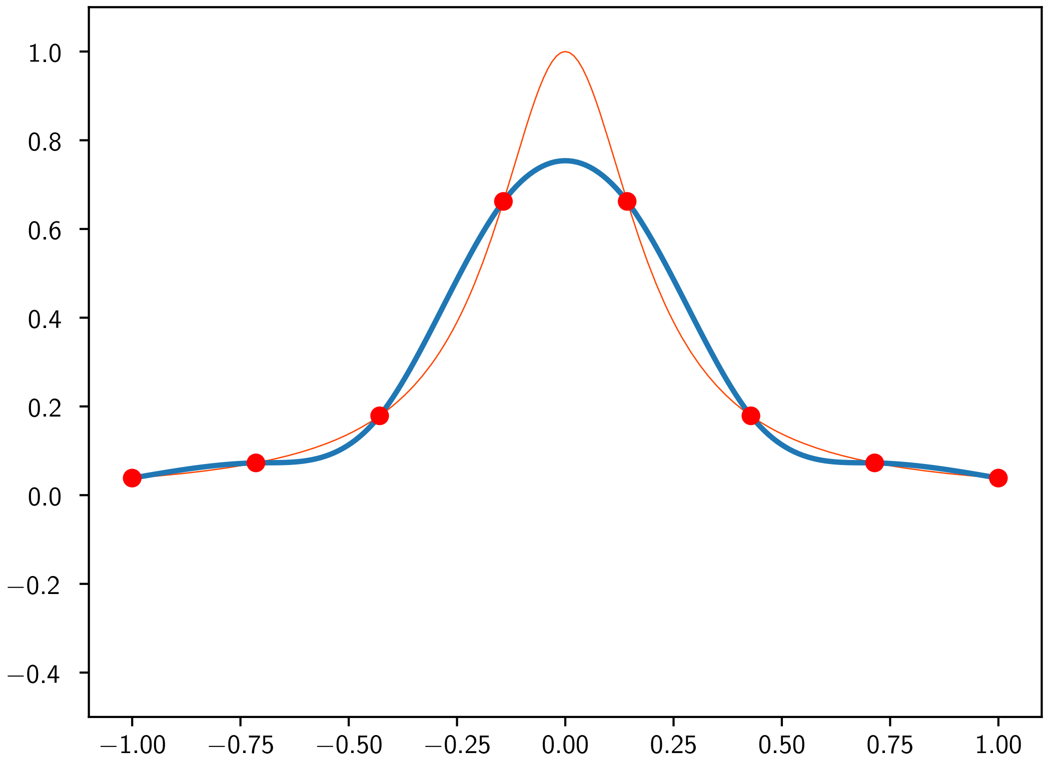
Wszystkie węzły są oddalone od siebie z taką samą odległością wzdłóż osi x - węzły jednorodne, dzięki wykorzystaniu wzoru $x_i = -1 + 2 * \frac{i}{n}, \qquad i = 0, ..., n, \qquad x_i \in < -1, 1 >$
Podając stopień n "wielomianu" (splajn jako całość nie jest wielomianem) interpolacyjnego, dostajemy n+1 węzłów interpolacyjnych. Numeruję węzły od punktu x_0 do x_n.
s(x) - funkcja interpolowana metodą naturalnych splajnów kubicznych
f(x) - funkcja pierwotna (dokładna)

2.1 n = 4



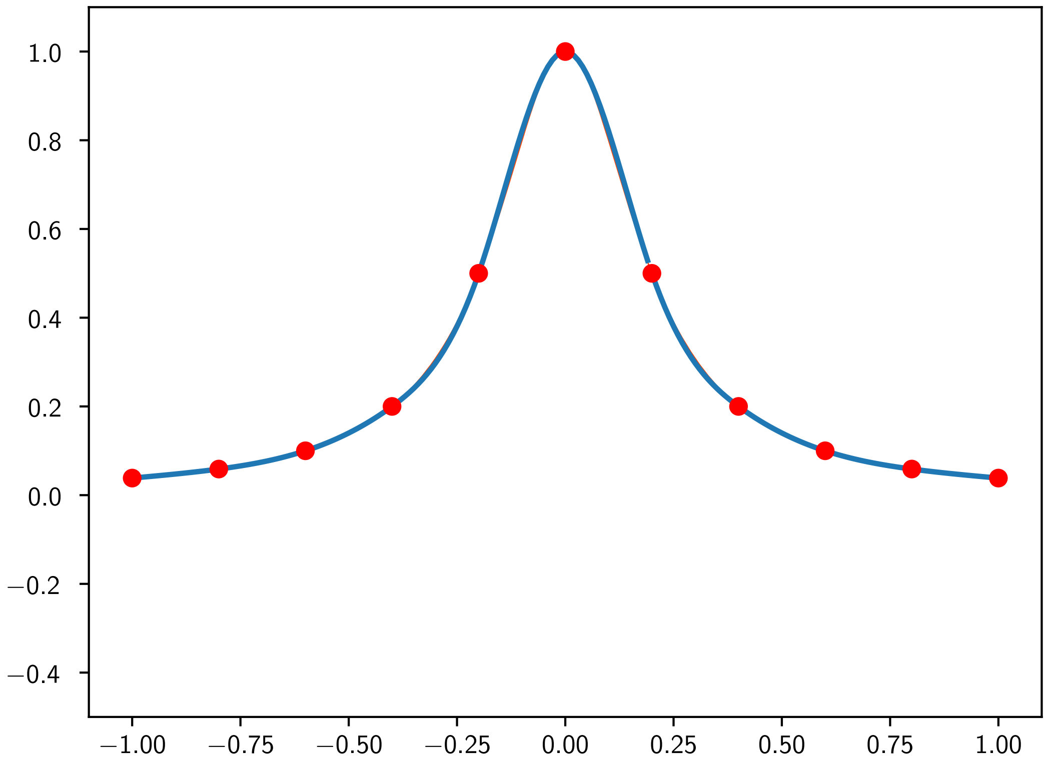
Przy 5 węzłach funkcja interpolacyjna słabo odwzorowuje funkcję pierwotną. Różnica $|f(x) - s(x)|$ jest tutaj największa.

2.2 n = 7



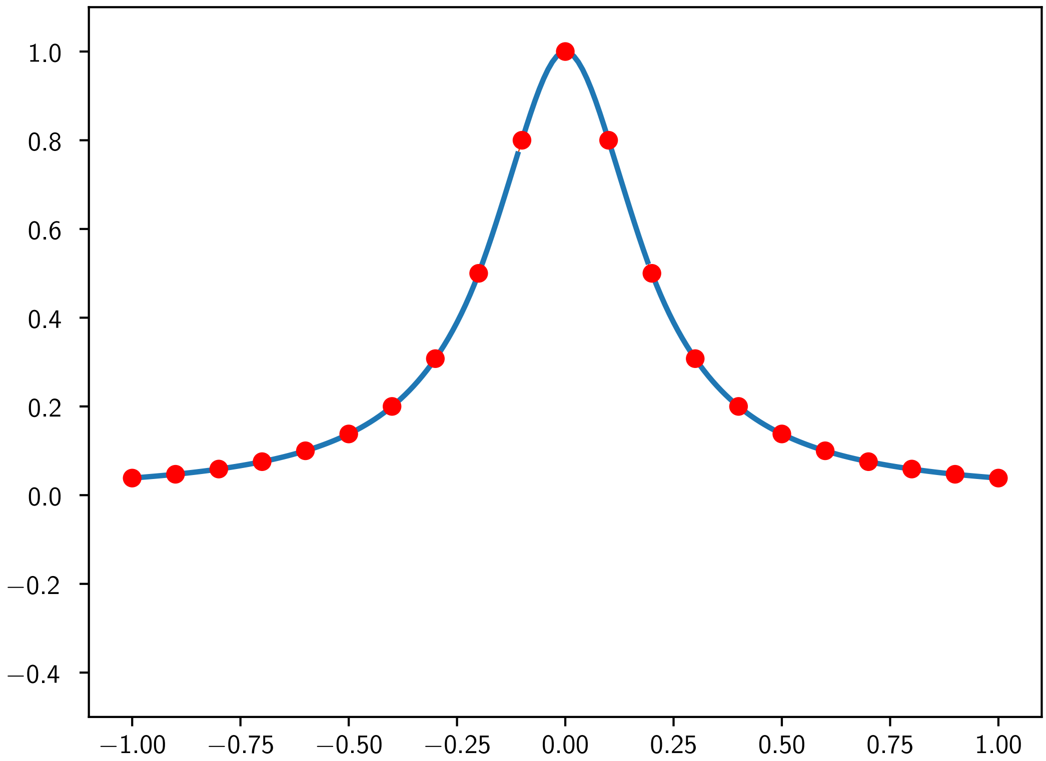
Przy 8 węzłach, wykres mocno odbiega, ale coraz lepiej odwzorowuje funkcje pierwotną.

2.3 n = 10



10 węzłów wydaje się być wartością optymalną. Wykres funkcji interpolowanej niemal całkowicie pokrywa się z funkcją pierwotną.

2.4 n = 20



Wzrasta dokładność funkcji. Błąd funkcji splajnów kubicznych poprawił się nieznacznie w porównaniu do 10 węzłów. Dla 20 węzłów różnica $|f(x) - s(x)|$ jest najmniejsza z dotychczasowych przypadków. Zwiększając liczbę węzłów, różnica będzie się zmniejszać.

3 Wnioski z obserwacji wykresów

W przeciwieństwie do interpolacji wielomianowej, w interpolacji metodą naturalnych splajnów kubicznych nie występują oscylacje Rungego na końcach przedziału. Dzięki temu wraz ze wzrostem ilości węzłów funkcji interpolowanej, różnica między nią, a funkcją pierwotną ciągle się zmniejsza.