Université Paris 6

MASTER IAD–M1–MOG

Mardi 7 Janvier 2014

Examen réparti 2

(Durée 2h - Notes de cours autorisées)

Exercice 1 : PL en nombres entiers [2 + 1 + 2 = 5 pts]

Un caviste dispose de deux types de bouteilles de champagne supérieur, les champagnes millésimés et les champagnes non millésimés. Il souhaite proposer des colis de bouteilles pour les fêtes de Noël. Il envisage deux types de colis :

- le colis 1 est composé d'une bouteille de champagne millésimé et de 3 bouteilles de champagne non millésimé et est proposé à 80 Euros
- le colis 2 est composé de deux bouteilles de champagne millésimé et de 4 bouteilles de champagne non millésimé et est proposé à 120 Euros

Sachant qu'il lui reste seulement 10 bouteilles de champagne millésimé et de 25 bouteilles de champagne non millésimé, on souhaite savoir combien de colis de chaque type il doit constituer pour maximiser le revenu lié à la vente des colis.

1°) Modéliser ce problème comme un programme linéaire en variables entières.

2°) Résoudre graphiquement la relaxation continue du problème.

3°) Résoudre le problème en nombres entiers à l'aide d'une procédure de séparation/évaluation.

Exercice 2 : PL et dualité [1 + 1.5 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1.5 = 9 pts]

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant :

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & +\,2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & +\,x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & -\,x_2 & \leq & 3 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1°) Déterminer le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ (on notera y_1, y_2, y_3 les variables duales).

2°) Déterminer par une méthode simple la solution optimale x' du problème $\mathcal{P}'$ déduit de $\mathcal{P}$ en ajoutant la contrainte additionnelle $x_1 = x_2$. Déterminer de manière similaire la solution optimale y' du problème $\mathcal{D}'$ déduit de $\mathcal{D}$ en ajoutant les contraintes additionnelles $y_1 = 2y_2 = 2y_3$. En vous servant des solutions x' et y' déterminer un encadrement de la valeur optimale z^* de la fonction objectif de $\mathcal{P}$ (on prendra soin de justifier précisément pourquoi les valeurs obtenues sont bien une borne inférieure et une borne supérieure respectivement).

3°) Représenter graphiquement le polyèdre des contraintes de $\mathcal{P}$. Mettre le problème $\mathcal{P}$ sous forme standard et déterminer la base associée au sommet de coordonnées (0, 3).

4°) En utilisant la méthode révisée du simplexe à partir de la base obtenue à la question précédente, résoudre le problème $\mathcal{P}$ et vérifier la solution par une résolution graphique.

5°) Déduire de la question précédente la solution optimale de $\mathcal{D}$.

6°) En repartant de la base optimale obtenue à la question 4°), déterminer une solution optimale du problème $\mathcal{P}''$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en remplaçant la fonction objectif par : $z = x_1 + 2x_2$.

7°) On modifie maintenant le problème $\mathcal{P}$ en remplaçant le second membre des contraintes (6, 2, 3) par (6, 3, 2). En vous servant du dual $\mathcal{D}$ et de la question 5°), déterminer la solution optimale du problème ainsi modifié. Vérifier graphiquement la solution trouvée.

Exercice 3 : Plus court chemin sous contrainte $[1 + 1 + 2 + 2 = 6$ pts$]$

On considère un graphe $G = (V, E)$ où l'ensemble des sommets est $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et dans lequel chaque arc $e \in E$ est valué par un couple (l_e, t_e) où l_e représente la longueur de l'arc e et t_e le temps qu'il faut pour le parcourir. On souhaite trouver le plus court chemin de v_1 à v_n sachant que l'on dispose au plus de T unités de temps pour réaliser ce parcours.

1°) Pour tout arc e du graphe, on note $x_e \in \{0, 1\}$ la variable de décision qui vaut 1 si l'arc e appartient au chemin solution et 0 sinon. On souhaite formuler le problème de plus court chemin sous contrainte de temps comme un programme mathématique en variables 0-1 noté $\mathcal{P}$ en s'inspirant de la formulation d'un problème de flot de valeur 1 à coût minimum. Le problème $\mathcal{P}$ consiste donc à minimiser la quantité $\sum_{e \in E} l_e x_e$ sous les contraintes de flots classiques et la contrainte additionnelle $\sum_{e \in E} t_e x_e \leq T$. Ecrire le programme $\mathcal{P}$ correspondant au graphe (a) (graphe de gauche dans la Figure 1 ci-dessous) dans le cas où le temps imparti pour le trajet de v_1 à v_6 est $T = 10$.

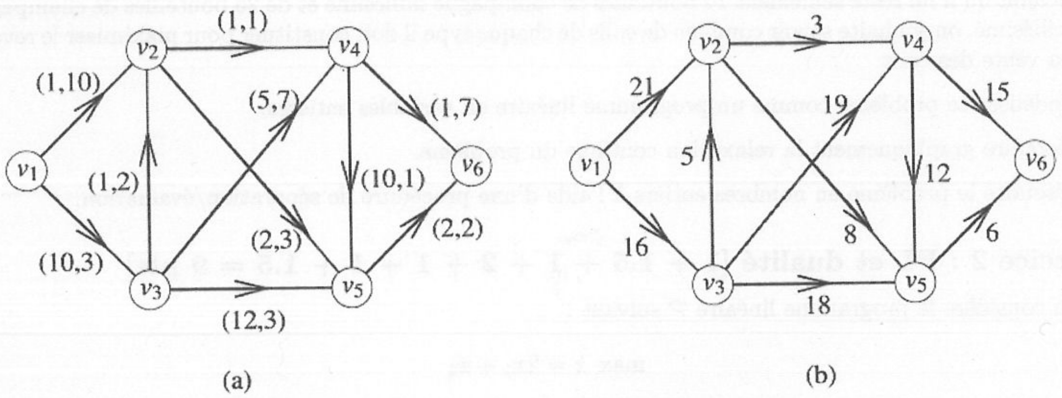

FIGURE 1 – Graphes (a) et (b)

2°) Pour revenir à un problème de flot normal on utilise une relaxation Lagrangienne qui consiste à inclure la contrainte de temps sous forme d'une pénalité dans la fonction objectif du programme $\mathcal{P}$. Pour cela, on choisit une valeur $\mu \geq 0$ et on définit un nouveau programme mathématique $\mathcal{P}_\mu$ à partir de $\mathcal{P}$ en supprimant la contrainte de temps et en remplaçant la fonction objectif par la suivante :

$$\min \sum_{e \in E} l_e x_e - \mu(T - \sum_{e \in E} t_e x_e)$$

Expliquez pourquoi la résolution du programme $\mathcal{P}_\mu$ revient à chercher un chemin de v_1 à v_n dans le graphe G_μ déduit du graphe initial en valuant chaque arc $e \in E$ par la quantité $l_e + \mu t_e$.

3°) En utilisant un algorithme du cours, déterminer le plus court chemin dans le graphe G_1 obtenu pour $\mu = 1$. Déduire de ce résultat une borne inférieure de la valeur optimale du problème initial $\mathcal{P}$ (on prendra soin de justifier précisément pourquoi c'est une borne inférieure). Le chemin trouvé correspond t-il à une solution réalisable du problème $\mathcal{P}$?

4°) On choisit maintenant $\mu = 2$ ce qui conduit à considérer le graphe G_2 représenté en Figure 1 (b) (graphe de droite). Determiner les plus courts chemins de v_1 à v_6 dans ce graphe. En déduire une solution optimale du problème initial $\mathcal{P}$ (on prendra soin de justifier précisément la réponse).