UPMC Année 2017-2018	**LRC - TD n°1**	M1 ANDROIDE M1 DAC

Exercice 1 – Sémantique, d'après *Lassaigne & de Rougemont*

1. Soit $F = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.
   F et $\neg F$ sont-elles satisfiables ? Sont-elles des tautologies ? Justifier.
2. Trouver une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.
3. Soit F' obtenue en remplaçant p par $\neg p$ (et réciproquement). F' est-elle conséquence de F ? F est-elle conséquence de F' ? Justifier.

Exercice 2 – Méthode des tableaux sémantiques

Que peut-on dire des formules suivantes en utilisant la méthode des tableaux sémantiques ?

- $F_1 = a \wedge \neg(b \rightarrow a)$
- $F_2 = ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \rightarrow (\neg b \rightarrow ((a \wedge b) \vee c))$
- $F_3 = \neg((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a))$
- $F_4 = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \vee ((c \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$
- $F_5 = (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow c))$
- $F_6 = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$

Exercice 3 – Preuves de Hilbert

1. Justifier chaque étape de la démonstration ci-dessous dans le système formel de Hilbert et identifier le résultat démontré :

F_1	p	[ ]
F_2	$\neg q \rightarrow r$	[ ]
F_3	$\neg\neg p \rightarrow \neg r$	[ ]
F_4	$(\neg\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$	[ ]
F_5	$r \rightarrow \neg p$	[ ]
F_6	$(r \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$	[ ]
F_7	$\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$	[ ]
F_8	$(\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$	[ ]
F_9	$(\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	[ ]
F_{10}	$\neg q \rightarrow \neg p$	[ ]
F_{11}	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	[ ]
F_{12}	$p \rightarrow q$	[ ]
F_{13}	q	[ ]

2. En utilisant le théorème de la déduction, rappelé ci-dessous :

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \text{ alors } A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$$

   établir que $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Exercice 4 – Preuve de Hilbert

Démontrer les théorèmes suivants dans le système formel de Hilbert :

1. $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$
2. $\vdash \neg\neg B \rightarrow B$
3. $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Exercice 5 – Sémantique

Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes que l'on peut former avec n variables propositionnelles ?

Quelles sont-elles pour $n = 1$?