Université Paris 6 Mardi 5 Novembre 2013

MASTER IAD–M1–MOG

Examen réparti 1

(Durée 2h - Notes de cours autorisées)

Exercice 1 Chemins et affectations [1 + 1.5 + 2.5 + 3 = 8 pts]

On considère le réseau de voies ferrées représenté par le graphe G de la figure 1 et on étudie les possibilités pour aller de New-York (NY) à Los Angeles (LA). Sur le graphe G, les sommets représentent le point de départ (NY), le point d'arrivée (LA) et les villes de transit dans lesquelles un changement de train est nécessaire, à savoir Boston (Bos), Chicago (Chi), Dallas (Dal), Denver (Den) et San Francisco (SF). Les valeurs situées près des arcs représentent les temps de transport t_{ij} (exprimés en heures) pour le train direct qui va de i à j. Ces temps peuvent être différents dans un sens et dans l'autre. Dans l'exercice, on néglige les temps d'attente lors des changements de train.

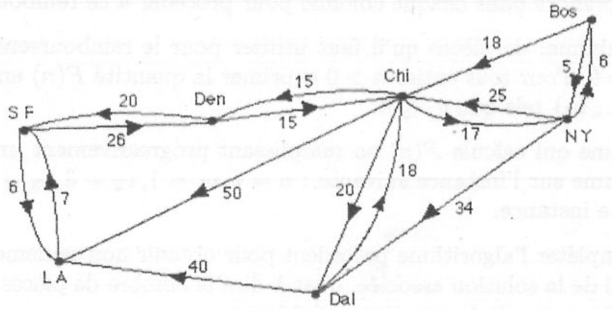

FIGURE 1 – Graphe G

1°) En utilisant un algorithme de votre choix (que vous préciserez) déterminer, sans tenir compte des durées, un chemin qui minimise le nombre de changements de trains pour aller de New York à Los Angeles. Quel est la durée du trajet associé ?

2°) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer un chemin qui soit le plus rapide possible pour aller de New York à Los Angeles et donner sa valeur.

3°) On considère les deux ensembles de villes suivants : $X = \{\text{NY, Bos, Chi, Dal, Den, SF}\}$ et $Y = \{\text{Bos, Chi, Dal, Den, SF, LA}\}$. On s'intéresse maintenant au problème d'affectation à coût minimum entre les éléments de X et ceux de Y, en définissant la matrice des coûts de la manière suivante :

$$\forall i \in X, \forall j \in Y, \quad c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ t_{ij} & \text{si } i \neq j \text{ et l'arc } (i,j) \text{ existe dans } G \\ +\infty & \text{si } i \neq j \text{ et l'arc } (i,j) \text{ n'existe pas dans } G \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice des coûts de terme général c_{ij}.

b) Expliquer pourquoi on peut associer, à chaque chemin élémentaire de NY à LA dans G, une affectation de même valeur entre les éléments de X et de Y. A quelle solution du problème d'affectation correspond le chemin (NY, Bos, Chi, Dal, LA) ?

c) Effectuer l'initialisation et la première itération de l'algorithme Hongrois pour le problème considéré.

4°) Après quelques itérations de cet algorithme, on parvient à la matrice suivante :

	Bos	Chi	Dal	Den	SF	LA
NY	0	1	0	∞	∞	∞
Bos	0	0	∞	∞	∞	∞
Chi	∞	0	10	0	∞	35
Dal	∞	28	0	∞	∞	35
Den	∞	30	∞	0	20	∞
SF	∞	∞	∞	20	0	0

Poursuivre l'algorithme Hongrois pour déterminer l'affectation de coût minimum. Montrer que cette affectation correspond à un chemin élémentaire de G allant de NY à LA (on précisera ce chemin et sa durée). En déduire qu'il n'existe pas de chemin plus rapide pour aller de New-York à Los-Angeles et donc qu'on a trouvé un chemin optimal (on prendra soin de justifier précisément la réponse). Comparer alors le résultat obtenu à celui de la question 2°).

Exercice 2 Programmation dynamique [2 + 2 + 2 = 6 pts]

On s'intéresse à l'optimisation d'un distributeur automatique en ce qui concerne la tâche de rendu de monnaie. Pour une somme n entière due à un client, on souhaite minimiser le nombre de pièces utilisées sachant qu'on dispose en machine de m colonnes de pièces. Chaque colonne $i \in \{1, \ldots, m\}$ ne contient que des pièces de valeur v_i (en nombre suffisant) en supposant que $v_1 = 1$ et que les v_i sont des entiers tels que $v_1 < v_2 < \ldots < v_m$. On souhaite proposer un algorithme de programmation dynamique qui permette de déterminer le nombre minimal de pièces qu'il faut utiliser pour le remboursement d'une somme donnée et combien de pièces on doit prendre dans chaque colonne pour procéder à ce remboursement.

1°) Soit $F(n)$ le nombre minimal de pièces qu'il faut utiliser pour le remboursement d'une somme n. Il est naturel de poser $F(0) = 0$. Pour tout entier $n > 0$ exprimer la quantité $F(n)$ en fonction des quantités $F(n - v_j)$ pour les $j \in \{1, ..., m\}$ tels que $v_j \leq n$.

2°) En déduire un algorithme qui calcule $F(n)$ en remplissant progressivement un tableau de dimension $n + 1$. Dérouler cet algorithme sur l'instance suivante : $n = 6, v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 4$ et donner le nombre de pièces optimal pour cette instance.

3°) Expliquer comment compléter l'algorithme précédent pour obtenir non seulement le nombre de pièces optimal, mais aussi le détail de la solution associée, c'est-à-dire le nombre de pièces à prendre dans chaque colonne. Illustrer cela sur l'instance de la question précédente.

Exercice 3 Flots [2 + 2 + 2 = 6 pts]

Un centre de formation souhaite analyser sa capacité de formation concernant un cursus qu'il propose en deux ans. La première année dite préparatoire propose 3 classes P1, P2, P3 pouvant admettre au plus 10, 40 et 60 élèves en début de premier semestre. A partir du second semestre de la première année un certain nombre d'élèves de P2 (pas plus de 30) peuvent être réorientés en P1. A l'issue de la première année, au plus 40 élèves de P1 et 30 élèves de P2 peuvent être admis en S1, et au plus 10 élèves de P2 et 40 de P3 peuvent être admis en S2. Sachant que la capacité d'accueil des classes S1 et S2 est limitée respectivement à 90 et 40, on souhaite étudier le potentiel de formation de cette structure, c'est-à-dire le nombre maximal d'étudiants que l'on peut former dans ce cursus en deux ans et déterminer comment il faut organiser les flux d'étudiants pour cela.

1°) Modéliser ce problème comme un problème de flot maximum dans un réseau à sept sommets que l'on dessinera puis calculer un flot maximum.

2°) Si l'on voulait tenir compte du coût de réorientation d'un étudiant (induit par un passage éventuel de P2 vers P1), ce coût étant proportionnel au nombre d'étudiants réorientés, quelle serait l'organisation optimale des flux pour maximiser le flot d'étudiants en minimisant les coûts ? (on cherchera à déduire de la question précédente un flot maximum à coût minimum en travaillant dans le graphe d'écart).

3°) Pour augmenter le potentiel de formation on envisage l'une des deux modifications suivantes :
- augmenter la capacité d'accueil en classe P1 de 40 étudiants,
- augmenter la capacité d'accueil en classe S2 de 40 étudiants.

En repartant de la question 1 et sans tenir compte des coûts de réorientation, quelle serait la modification la plus intéressante, parmi les deux envisagées ci-dessus, pour augmenter la capacité de formation. Quel serait son impact sur le nombre maximal d'étudiants formés ? Identifiez alors les contraintes qu'il faudrait relâcher pour faire mieux.