Université Paris 6 Vendredi 9 Juin 2017

MASTER ANDROIDE–M1–MOGPL

Examen 2ème session (Partie 1)

Durée 2h - Notes de cours et TD autorisées

Exercice 1 : Modélisation par la PL [4 pts]

Un grand parfumeur souhaite composer deux nouveaux parfums P_1 et P_2 à partir de 4 composants de base B_1, B_2, B_3, B_4. Les deux parfums ciblent des clientèles différentes qui imposent des contraintes différentes dans la composition. Ainsi le parfum P_1 doit contenir au moins 10% de composant B_1 et au moins 20% de composant B_2. De même le parfum P_2 doit contenir au moins 30% de composant B_3 et au plus 40% de composant B_4. Le parfumeur dispose d'un stock comprenant un litre de B_1, deux litres de B_2, trois litres de B_3 et quatre litres de B_4 et l'on souhaite mélanger ces composants pour produire au moins 3 litres de chaque parfum (il s'agit de minima, on peut bien entendu produire plus si c'est avantageux). Sachant que les composants B_1 et B_3 coûtent chacun 1000 Euros le litre, que les composants B_2 et B_4 coûtent chacun 500 Euros le litre et que l'on souhaite mettre sur le marché le parfum P_1 au prix de 2000 Euros le litre et le parfum P_2 au prix de 3000 Euros le litre, on souhaite déterminer la politique de mélange maximisant le bénéfice du parfumeur.

Modéliser ce problème comme un programme linéaire. On prendra soin de bien expliciter les variables de décision, les contraintes et la fonction objectif du problème.

Exercice 2 : PL, dualité, résolution [6 pts]

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant :

$$\min\ z = 200\,x_1 + 300\,x_2$$
$$s.c. \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 \geq 60 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 \geq 120 \\ 6\,x_1 + 2\,x_2 \geq 150 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

1° Effectuer une résolution graphique de $\mathcal{P}$.

2° Formuler le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ et déterminer sa solution optimale en se servant de la question précédente.

3° On considère maintenant le problème $\mathcal{P}'$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en ajoutant la variable x_3 de la manière suivante :

$$\min\ z = 200\,x_1 + 300\,x_2 + 190\,x_3$$
$$s.c. \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \geq 60 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \geq 120 \\ 6\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \geq 150 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

En vous servant de la dualité et des questions précédentes, déterminer la solution optimale de $\mathcal{P}'$.

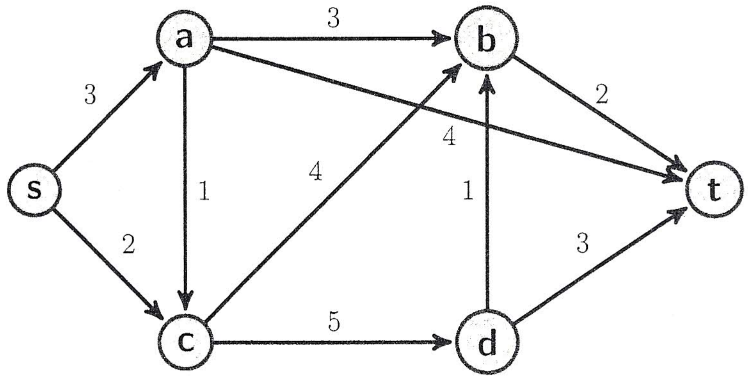
4° On considère le problème $\mathcal{P}''$ déduit de $\mathcal{P}$ en remplaçant le second membre des contraintes $(60, 120, 150)$ par $(30, 120, 180)$. Montrer que la solution optimale de $\mathcal{D}$ reste optimale pour le problème $\mathcal{D}''$ dual de $\mathcal{P}''$. En déduire une solution optimale de $\mathcal{P}''$.

Rattrapage de MOGPL–Partie Graphes 9 juin 2017

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Tout autre document est interdit. Les téléphones doivent être éteints et rangés.

Exercice 1 (plus courts chemins) [5 points]

(a) **[2 points]** On considère le graphe ci-dessous. Calculer un plus court chemin de s vers tous les autres sommets en utilisant l'algorithme de Dijkstra sous forme de tableau. Donner le tableau utilisé.



Donner le plus court chemin entre s et chaque autre sommet ainsi que son coût.

(b) **[1 point]** On aimerait résoudre le problème de plus court chemin à destination unique. Dans ce problème on se donne un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ et un sommet destination t et on souhaite calculer un plus court chemin de chaque sommet du graphe vers le sommet t. Comment doit-on tranformer le graphe G de telle sorte à ce que l'on puisse calculer ces chemins en utilisant l'algorithme de Dijkstra ? (On ne souhaite pas modifier l'algorithme de Dijsktra, mais pouvoir l'utiliser sur un nouveau graphe construit de manière adéquate. Justifier votre réponse.)

(c) **[2 points]** Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté pondéré $G = (V, E)$. Supposons qu'on a déterminé les plus courtes chaînes à partir d'un sommet s. On suppose maintenant que le poids de chaque arête est incrémenté d'un nombre constant $k > 0$. Les plus courtes chaînes dans G restent des plus courtes chaînes après la modification des poids ? Si oui, donner une preuve, sinon un contre exemple.

Exercice 2 (programmation dynamique) [5 points]

On se donne un m-uplet $S = (d_1, d_2, \ldots, d_m)$, où d_i représente la valeur de la i-ème pièce avec $d_1 = 1$. On considère une variante du problème du rendu de monnaie dans laquelle on souhaiterait déterminer le nombre de façons différentes $C(n)$ de rendre la monnaie pour une somme donnée d'unités n, où n est entier positif. Par exemple si $S = \{1, 2, 3\}$, il existe 4 façons différentes, $C(4) = 4$: $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}$. Si $S = \{1, 6, 10\}$, $C(5) = 1$, $C(9) = 2$, $C(10) = 3$ et $C(12) = 4$.

(a) **[1 point]** Si $S = \{1, 6, 10\}$, calculer $C(20)$. Lister les différentes manières de rendre la monnaie.

(b) **[2 points]** On appelle $C(i, j)$, le nombre de façons différentes de rendre la monnaie pour une somme donnée d'unités i si l'indice maximum de l'élément utilisé est j, avec $0 \leq j \leq m$. Etablir la relation de récurrence générale permettant de déterminer les valeurs $C(i, j)$. Expliquer la relation de récurrence proposée. Comment doit-on initialiser cette récurrence ?

(c) **[2 points]** Appliquer la méthode de programmation dynamique basée sur la formule de récurrence établie à la question (b) pour l'exemple suivant : $S = \{1, 2, 3\}$ où on cherche $C(4)$. Donner le tableau et expliquer comment il est rempli.