LRC - Examen réparti n° 1

Énoncé avec éléments de correction

Les informations données ici ne fournissent que des indications de solution et, en aucun cas un modèle de corrigé

1 Logique classique

Exercice 1 – Logique propositionnelle - syntaxe – *2 points*
Considérer la formule $F_1 = ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$
Démontrer $\vdash F_1$ en utilisant le système de Hilbert (voir les rappels en annexe) et en justifiant chaque étape de la démonstration.
Indications de solution : La démonstration fait appel au schéma d'axiome **SA1** avec $A = (q \to r)$ et $B = p$, puis le schéma d'axiome **SA2** et enfin le théorème de déduction.

Exercice 2 – Logique propositionnelle - sémantique – *4 points*
Considérer la formule $F_2 = ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r))$

1. Montrer en ayant recours aux tables de vérité que $\models F_2$
2. Montrer que $\models F_2$ avec la méthode des tableaux.
3. Mettre $\neg F_2$ sous *Forme Normale Conjonctive* (*FNC*), c'est-à-dire sous la forme d'une conjonction de clauses, autrement dit d'une conjonction de disjonctions.
4. Montrer que $\models F_2$ en appliquant la règle de résolution.

Exercice 3 – Logique du premier ordre – *2 points*
Considérer les deux formules $F_3 = \exists x \forall y (P(x) \wedge Q(x, y))$ et $F_4 = \forall x \exists y (P(x) \wedge Q(x, y))$. Trouver dans le domaine des entiers naturels :

1. Un modèle de F_4 qui n'est pas un modèle de F_3
2. Un modèle de F_3 et de F_4

Indications de solution : Il suffit par exemple, d'interpréter $P(x)$ comme *x est positif* (ou comme *Toujours vrai*) et $Q(x, y)$ comme y est le double de x pour obtenir un modèle de F_4 qui n'est pas un modèle de F_3. En interprétant toujours $P(x)$ comme x est positif (ou comme *Toujours vrai*) mais $Q(x, y)$ comme y est un multiple de x, on a un modèle de F_3 et F_4.

2 Graphes conceptuels

Considérons les connaissances suivantes :

a) Toutes les équipes de football comportent au plus 22 joueurs
b) Il y a au plus 11 joueurs de chaque équipe sur le terrain (autrement dit, toutes les équipes de football comportent au plus 11 joueurs sur le terrain)
c) Il y a toujours au moins un gardien de but de chaque équipe sur le terrain
d) Les remplaçants et les joueurs sur le terrain sont des joueurs
e) Les joueurs sont soit sur le terrain, soit des remplaçants
f) Les gardiens de but sont des joueurs

On veut représenter les connaissances a), b), c), d), e) et f) à l'aide de graphes conceptuels.

Exercice 4 – *1 point*

Donner le treillis des types où doivent se traduire, entre autres, les connaissances exprimées dans les propositions d) et f).
Il doit contenir les concepts *équipe*, *remplaçant*, *joueur*, *joueur sur le terrain* et *gardien de buts.*

Indications de solution :

entité > équipe, joueur
joueur > joueur_sur_le_terrain, remplaçant, gardien_de_buts

Exercice 5 – *2 points*

Représenter les propositions a), b) et c) à l'aide de graphes conceptuels en donnant la forme linéaire.

Les concepts à utiliser sont ceux de l'exercice précédent. En ce qui concerne les relations, outre *comporte* pour établir le lien entre les équipes et les joueurs qui lui appartiennent, on utilisera *comporteSurLeTerrain*, qui établit aussi le lien entre une équipe et les joueurs en indiquant les joueurs qui se trouvent sur le terrain.

Remarque : on pourra utiliser comme référent le quantificateur universel `@every` (ou ∀) (`[chat : @every]` et `[chat :∀]` signifient l'un et l'autre tous les chats) et les quantificateurs généralisés `@n` (`[chat: @7]` veut dire 7 chats), `@<n` (`[chat:@<7]`, moins de 7 chats) et `@>n` (`[chat:@>7]`, plus de 7 chats)

Indications de solution :

a) `[équipe:@every]->(comporte)->[joueurs:@<23]`
b) `[équipe:@every]->(surLeTerrain)->[joueurs:@<12]` =
`[équipe:@every]->(surLeTerrain)->[joueurs_sur_le_terrain:@<12]`
c) `[équipe:@every]->(surLeTerrain)->[gardiens_de_buts]`

3 Logiques de description

Exercice 6 – *3 points*

Traduire les connaissances a), b), c), d), e) et f) dans la logique de description $\mathcal{ALCN}$ dont la syntaxe est rappelée en annexe.

Les concepts atomiques à utiliser sont ceux de l'exercice précédent, les rôles atomiques correspondent aux deux relations *comporte* et *comporteSurLeTerrain.*

Remarque 1 : pour traduire c) on exprimera le fait que l'intersection de *Joueur sur le terrain* et de *Gardien de buts* n'est pas vide.

Remarque 2 : pour traduire e), on prendra bien soin d'exprimer aussi que les concepts *Joueur sur le terrain* et *Remplaçant* sont exclusifs.

Indications de solution :

a) Toutes les équipes de football comportent au plus 22 joueurs : $Equipe \sqsubseteq \exists^{\leq 22} comporte.Joueurs$

b) Il y a au plus 11 joueurs sur le terrain de chaque équipe (c'est-à-dire, toutes les équipes de football comportent au plus 11 joueurs sur le terrain) : $Equipe \sqsubseteq \exists^{\leq 11} comporte.Joueurs\_sur\_le\_terrain$ ou $Equipe \sqsubseteq \exists^{\leq 11} surLeTerrain.Joueurs$

c) Il y a toujours au moins un gardien de but de chaque équipe sur le terrain : $\neg(Gardien\_de\_buts \sqcap Joueurs\_sur\_le\_terrain \sqsubseteq \bot)$

d) Les remplaçants et les joueurs sur le terrain sont des joueurs : $Remplacants \sqsubseteq Joueurs$, $Joueurs\_sur\_le\_terrain \sqsubseteq Joueurs$.

e) Les joueurs sont soit des remplaçants, soit sur le terrain : $Joueurs \sqsubseteq Remplacants \sqcup Joueurs\_sur\_le\_terrain$ et $Remplacants \sqcap Joueurs\_sur\_le\_terrain \sqsubseteq \bot$

f) Les gardiens de but sont des joueurs : $Gardiens\_de\_buts \sqsubseteq Joueurs$

Exercice 7 *2 points*

Démontrer à l'aide de la méthode des tableaux que f) découle de c) et de d).

Indications de solution : Il suffit d'ajouter à c) et d) la négation de la conclusion, à savoir $\neg(Gardien\_de\_buts \sqsubseteq Joueurs)$, ce qui donne $Gardien\_de\_buts \sqcap \neg Joueurs$. On part donc de : $Gardien\_de\_buts \sqcap \neg Joueurs$, $Joueurs\_sur\_le\_terrain \sqsubseteq Joueurs$ et $Gardien\_de\_buts \sqcap Joueurs\_sur\_le\_terrain$. En appliquant la règle $R_{\sqcap}$ deux fois on obtient : $Gardien\_de\_buts$, $\neg Joueurs$, $\neg Joueurs\_sur\_le\_terrain \sqcup Joueurs$ et $Joueurs\_sur\_le\_terrain$. En appliquant la règle $R_{\sqcup}$ on obtient alors deux tableaux qui contiennent, chacun, un clash.

4 Logique modale

Exercice 8 – *4 points* On définit une structure de Kripke $M = \langle W, R, I \rangle$, avec $n+1$ ($n \geq 1$) mondes $W = \{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$. La relation est définie telle que $\forall i \in \{1, n\}$: $(w_i, w_0) \in R$ et $(w_i, w_i) \in R$. Enfin, à partir du langage $P = \{a, b, c\}$, la fonction d'interprétation est donnée par $I(a) = \{w_0\}$, $I(b) = \{w_1, \ldots, w_n\}$, et $I(c) = \emptyset$. Indiquez si les formules suivante sont vraies :

1. $M \models \neg c$
2. $M \models a \rightarrow \Box c$
3. $M \models \Diamond a \rightarrow \Box\Box b$
4. $M \models \Diamond^k a \vee \neg b$ (où $\Diamond^k$ est un enchaînement de $k > 0$ modalités $\Diamond$)

Indications de solution :

oui, c n'est vraie en aucun monde

oui, dans le seul monde où a est vrai w_0, on a aucun monde accessible, donc trivialement $\Box c$ est vrai.

non, on peut se placer dans un monde $w_i (i \neq 0)$, et atteindre en deux arcs w_0 où b est faux.

oui, dans les mondes où b est vrai (w_i où $i \neq 0$), on peut satisfaire la première partie de la disjonction en bouclant $n-1$ fois en w_i puis en arrivant en w_0 avec la dernière transition.