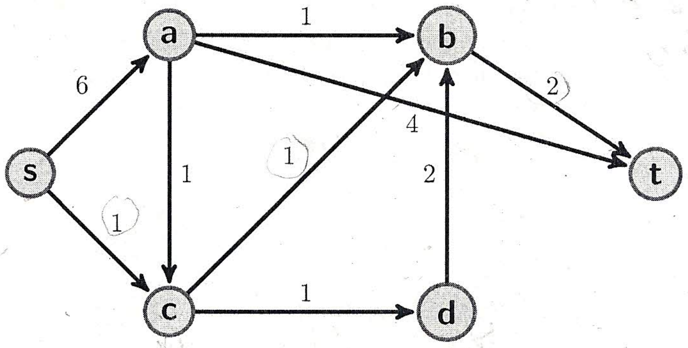
Examen réparti 2 MOGPL — 6 janvier 2017

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Tout autre document est interdit. Les téléphones doivent être éteints et rangés.

Exercice 1 (plus courts chemins) [9 points]

Etant donné un graphe orienté pondéré, une source s et une destination t, il peux exister plusieurs plus courts chemins entre s et t. Notre objectif est de déterminer tous les arcs qui font partie d'un plus court chemin.

(a) **[2 points]** On considère le graphe ci-dessous.



Quels sont les arcs qui font partie d'un plus court chemin ? (on ne demande pas de justification particulière)

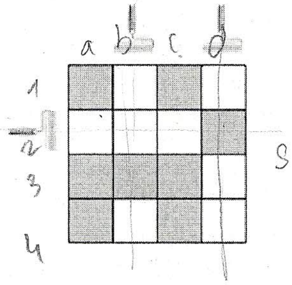
(b) **[3 points]** Pour un sommet v, notons $d[s,v]$ la longueur d'un plus court chemin de s à v, et $d[v,t]$ la longueur d'un plus court chemin de v à t. A partir de ces valeurs, est-il possible de déterminer si un arc donné (u,v) fait partie d'un plus court chemin de s à t ? Comment ?

(c) **[2 points]** En déduire un algorithme pour résoudre le problème de détermination de tous les arcs faisant partie d'un plus court chemin. On expliquera de manière détaillée la méthode utilisée pour calculer les valeurs $d[s,v]$ et $d[v,t]$. dijkstra ou bell man ford

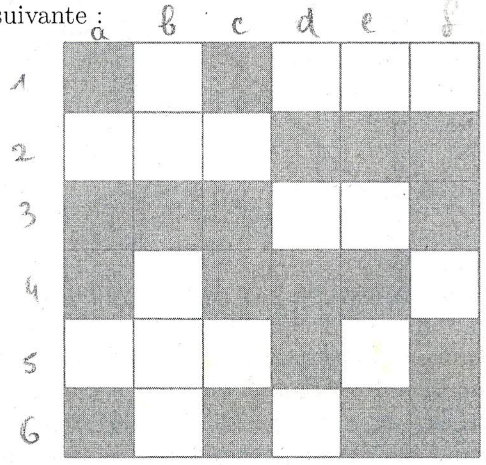
(c) **[2 points]** Appliquer l'algorithme de la question (c) dans le cas de l'exemple de la question (a). On détaillera le calcul des valeurs $d[s,v]$. On donnera ensuite les valeurs $d[v,t]$ sans détailler le calcul, puis la solution.

Exercice 2 (flots, couverture) [6 points]

On se donne une grille avec des cellules noires et blanches. On souhaite déterminer un sous-ensemble des lignes et des colonnes de cardinalité minimum, tel que si on les colorie en noir, alors on obtient une grille ne contenant que des cellules noires. En d'autres termes, chaque cellule blanche appartient à une ligne ou une colonne sélectionnée. Dans l'exemple suivant, en coloriant une ligne et deux colonnes, on obtient une grille noire.



(a) **[2 points]** On souhaite résoudre le problème en le modélisant comme un problème de *couverture des arêtes par les sommets de cardinalité minimum* dans un graphe biparti. Pour ceci, on va interpréter la grille comme la matrice d'adjacence d'un graphe biparti. Il y aura un sommet pour chaque ligne et un sommet pour chaque colonne. Pour chaque cellule blanche il y aura une arête entre la ligne et la colonne correspondantes. Dessiner le graphe obtenu pour la grille suivante :



(b) **[4 points]** Calculer la solution optimale pour la grille de la question (a) en utilisant comme étape intermédiaire le calcul d'un flot maximum dans un réseau de transport approprié. Pour ceci calculer d'abord un flot maximum. En déduire une coupe minimum et finalement une couverture de cardinalité minimum.

Exercice 3 (programmation dynamique) [7 points]

On se donne n objets a_i $(1 \leq i \leq n)$ de poids entiers $p(a_1), \ldots, p(a_n)$. Est-il possible de les partager en deux ensembles de même poids total P ? Les poids étant entiers une condition nécessaire pour que ce soit possible est que la somme des poids des n objets soit paire : $2P$.

(a) **[2 points]** On considère le problème pour les données suivantes : $n = 6, p(a_1) = 1, p(a_2) = 5, p(a_3) = 3, p(a_4) = 4, p(a_5) = 2, p(a_6) = 1$ et $P = 8$. Est-il est possible de partitionner l'ensemble de ces éléments en deux sous-ensembles de poids 8 chacun ?

(b) **[3 points]** On appelle $T(i, j)$, $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq P$, l'expression booléenne : "étant donnés les i premiers éléments de l'ensemble, il existe un sous-ensemble de ces i éléments dont la somme des poids est j". Etablir la relation de récurrence générale permettant de déterminer les valeurs $T(i, j)$ pour tout i compris entre 1 et n et j entre 0 et P. Expliquer la relation de récurrence proposée. Comment doit-on initialiser cette récurrence ?

(c) **[2 points]** Appliquer la méthode de programmation dynamique basée sur la formule de récurrence établie à la question (b) pour l'exemple de la question (a). Donner le tableau et expliquer comment il est rempli.