Corrigé exo 1

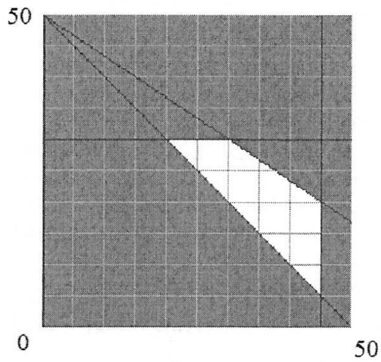
1°) Soient x, y les quantités en litre par jour de produit P_1 et P_2 fabriqués. Pour les contraintes de temps il faut diviser les quantités produites par les vitesses de filtrage. Ainsi pour M_2 par exemple on a : $x/3+y/2 \leq 25$. La modélisation donne :

$$\max\ z = x + 2y$$

$$\begin{cases} x + y \geq 50 \\ x \leq 45 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ y \leq 30 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

2°) La représentation graphique est la suivante :



La solution optimale est $(x, y) = (30, 30)$

3°) Il faut étudier comment varie la solution en fonction de k lorsque la fonction objectif est $z = x + ky$. On voit que si $k = 3/2$ alors la fonction objectif est perpendiculaire à la contrainte 3 et toute la face joignant (30, 30) à (45,20) est optimale. Donc $(30, 30)$ reste optimal tant que $k \geq 3/2$ sinon c'est $(45, 20)$ qui est optimal.

Corrigé exo 2

1°) Il faut résoudre :

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - Ma$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ -x_1 + x_2 + e_2 = 4 \\ -3x_1 + x_2 - e_3 + a = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, a \geq 0$$

On démarre avec comme variables de base $\{e_1, e_2, a\}$. On a $a = 2 + 3x_1 - x_2 + e_3$. L'objectif en fonction des variables hors base s'écrit donc : $z = -2M + (2-3M)x_1 + (3+M)x_2 - Me_3$, d'où le tableau suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a	
e_1	2	1	1	0	0	0	8
e_2	-1	1	0	1	0	0	4
a	-3	1	0	0	-1	1	2
	$2-3M$	$3+M$	0	0	$-M$	0	$2M$

x_2 entre en base et a sort. On obtient :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a	
e_1	5	0	1	0	1	-1	6
e_2	2	0	0	1	1	-1	2
x_2	-3	1	0	0	-1	1	2
	11	0	0	0	3	$-3-M$	-6

on élimine a une fois pour toute, x_1 entre en base et e_2 sort :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	0	1	$-5/2$	$-3/2$	1
x_1	1	0	0	$1/2$	$1/2$	1
x_2	0	1	0	$3/2$	$1/2$	5
	0	0	0	$-11/2$	$-5/2$	-17

La solution optimale est donc $(x_1^*, x_2^*) = (1, 5)$ de valeur 17.

2°) Le dual $\mathcal{D}$ s'écrit :

$$\min z' = 8y_1 + 4y_2 - 2y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

La forme standard est donc :

$$\min z' = 8y_1 + 4y_2 - 2y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 - s_1 = 2 \\ y_1 + y_2 - y_3 - s_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

La solution du dual s'obtient par le théorème des écarts complémentaires ou même directement à partir du tableau optimal du primal, on a : $y_1^* = 0, y_2^* = 11/2, y_3^* = 5/2$. Les variables en base sont donc y_2 et y_3.

3°) La modification proposée change la fonction objectif du dual de la manière suivante : $\min z' = 16y_1 + 6y_2$ en laissant les contraintes inchangées. Exprimons z' en fonction des variables hors base à l'optimum de $\mathcal{D}$. En additionnant la première contrainte de la forme standard de $\mathcal{D}$ à 3 fois la seconde contrainte (voir question précédente) il vient : $2y_2 = 11 - 5y_1 + s_1 + 3s_2$ donc $6y_2 = 33 - 15y_1 + 3s_1 + 9s_2$. On a alors :

$$z' = 16y_1 + 6y_2 = 33 + y_1 + 3s_1 + 9s_2$$

La solution $y_1^* = 0, y_2^* = 11/2, y_3^* = 5/2$ reste donc optimale pour $\mathcal{D}'$ puisque tous les profits marginaux sont positifs. Ensuite, pour trouver la solution optimale de $\mathcal{P}'$ il suffit d'appliquer le théorème des écarts complémentaires. Comme $y_2^* > 0$ et $y_3^* > 0$ les contraintes (2) et (3) de $\mathcal{P}'$ sont actives à l'optimum d'où :

$$\begin{aligned} -x_1^* + x_2^* &= 6 \\ -3x_1^* + x_2^* &= 0 \end{aligned}$$

De là on tire $x_1^* = 3$ et $x_2^* = 9$, c'est la solution optimale de $\mathcal{P}'$ de valeur 33.

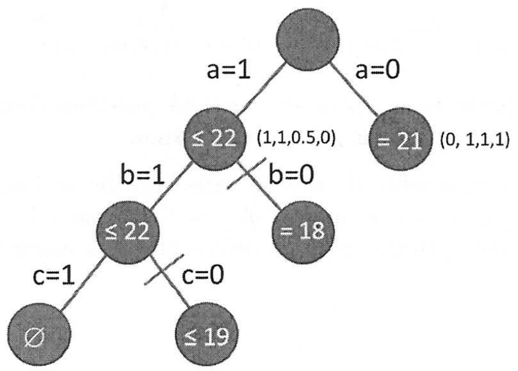
4°) Du tableau optimal du simplexe obtenu à la question 1 on tire :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 1/2e_2 - 1/2e_3 \\ x_2 &= 5 - 3/2e_2 - 1/2e_3 \end{aligned}$$

De là on on tire : $z_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = 5 - 4\lambda + (\lambda - 3/2)e_2 - 1/2e_3$. Comme $\lambda < 1$ les coûts marginaux sont strictement négatifs. On reste donc sur l'optimum trouvé à la question 1. Seule change la valeur de la fonction objectif à l'optimum. On a : $z_\lambda^* = 5 - 4\lambda$

Corrigé exo 3

Si l'on calcule les rapports "utilité sur coût" on obtient l'ordre suivant :
$a(1.6) > b(1.57) > c(1.5) > d(1.33)$ on développe alors le B&B



La solution optimale est donc $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 1)$ de valeur 21.

Corrigé exo 4

1°) La solution x est réalisable et vaut 6. La solution x' vaut 5 mais n'est pas réalisable. La solution x'' vaut 5 et est réalisable. C'est donc la plus intéressante parmi les 3.

2°) On note x_{ij} le nombre de pièges installés dans la case (i, j) (du fait de la fonction objectif il n'y en aura jamais plus d'un mais c'est pas la peine d'en faire une contrainte)

Les contraintes en ligne i s'écrivent alors, pour $i = 1, \ldots, 4$:

$$x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j+2} \geq 1, \quad j = 1, 2$$

Les contraintes en colonne j s'écrivent alors, pour $j = 1, \ldots, 4$:

$$x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i+2,j} \geq 1, \quad i = 1, 2$$

l'objectif est $\min z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} x_{i,j}$

il faut aussi ajouter les contraintes de non-négativité $x_{i,j} \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, 4$, pour $j = 1, \ldots, 4$

3°) Le dual fait apparaitre une variable duale par contrainte. Notons $y_{i,j}, j = 1, 2$ les variables duales associées aux contraintes de la ligne i, et $y'_{i,j}, i = 1, 2$ les variables duales associées aux contraintes de la colonne j. L'objectif s'écrit alors :

$$\max z' = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} y_{i,j} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} y'_{i,j}$$

Les contraintes s'écrivent alors :
$y_{1,1} + y'_{1,1} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 1$
$y_{1,1} + y_{1,2} + y'_{1,2} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 2$
$y_{1,1} + y_{1,2} + y'_{1,3} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 3$
$y_{1,2} + y'_{1,4} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 4$
$y_{2,1} + y'_{1,1} + y'_{2,1} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $2, 1$
etc...
Celle qui est demandée dans l'énoncé est "pas deux taupes dans la case $2, 2$" soit :
$y_{2,1} + y_{2,2} + y'_{1,2} + y'_{2,2} \leq 1$

Pour une formulation plus systématique (qui n'était pas demandée dans les questions), on peut procéder comme suit. Notons $S(y)$ (resp. $S(y')$) l'ensemble des variables intervenant dans la contrainte du primal associée à la variable duale y (resp. y'), les contraintes s'écrivent alors :

$$\forall i, \forall j, \quad \sum_{(k,l)\ :\ x_{i,j} \in S(y_{k,l})} y_{k,l} + \sum_{(k',l')\ :\ x_{i,j} \in S(y'_{k',l'})} y'_{k',l'} \leq 1$$

Les variables $y_{k,l}$ et $y'_{k',l'}$ représentent toutes les positions possibles (horizontales et verticales) d'une taupe sur la grille et valent 1 si une taupe est présente et 0 sinon.

Le dual consiste à maximiser le nombre de taupes dans la grille en l'absence de piège. Une solution réalisable évidente est $y_{1,1} = y_{2,1} = y_{3,1} = y_{4,1} = y'_{1,4} = 1$ qui vaut 5 et est réalisable dans le dual. La solution x'' du primal est donc optimale pour $\mathcal{P}$ puisqu'elle a la même valeur qu'une solution duale réalisable.