Université Paris 6 Vendredi 7 Novembre 2014

Master ANDROIDE–M1–MOGPL

Examen réparti 1

Durée 2h - Notes de cours et TD autorisées

Le barême est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 : modélisation et résolution graphique [2 + 1.5 + 1.5 = 5 pts]

Une fabrique artisanale normande produit deux jus de pommes P_1 et P_2. Chaque jour la production totale de jus de pomme doit être d'au moins 50 litres mais peut aller au delà. Le jus de pomme P_1 doit être filtré au rythme de 3 litres par minute, par la machine M_1 puis par la machine M_2. Le jus de pomme P_2 doit quant à lui être filtré plus lentement, au rythme de 2 litres par minute, d'abord par la machine M_2 puis par la machine M_3. Le producteur n'a qu'un accès limité à ces machines qu'il partage avec d'autres. Chaque jour il dispose de 15 minutes sur la machine M_1, de 25 minutes sur la machine M_2 et de 15 minutes sur la machine M_3. Sachant que le bénéfice lié à la vente d'un litre de produit P_2 rapporte deux euros et que celui lié à la vente d'un litre de produit P_1 rapporte un euro, on souhaite trouver le plan de production journalier optimal.

1°) Modéliser le problème par un programme linéaire.

2°) Représenter graphiquement le polyèdre des contraintres et faire une résolution géométrique du problème.

3°) Soit $k > 0$ le bénéfice lié à la vente d'un litre de produit P_2. Expliquer comment varie la solution du problème en fonction de k, le bénéfice lié au produit P_1 restant de 1 euro par litre.

Exercice 2 : simplexe, dualité, sensibilité [2.5 + 2 + 2 + 1.5 = 8 pts]

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1°) Résoudre $\mathcal{P}$ par la méthode du simplexe (on utilisera la méthode des variables pénalisées pour déterminer une base réalisable initiale).

2°) Mettre $\mathcal{P}$ sous forme canonique puis formuler son dual $\mathcal{D}$. Mettre $\mathcal{D}$ sous forme standard. Déduire de la question 1 la solution optimale de $\mathcal{D}$ et la base associée.

3°) Le second membre des contraintes de $\mathcal{P}$ est modifié, on remplace $(8, 4, 2)$ par $(16, 6, 0)$. Soit $\mathcal{P}'$ le nouveau programme linéaire obtenu et $\mathcal{D}'$ son dual. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer la solution optimale de $\mathcal{D}'$ puis en déduire la solution optimale de $\mathcal{P}'$.

4°) Soit $\mathcal{P}_\lambda$ la variante de $\mathcal{P}$ obtenue en considérant la fonction objectif suivante : $z_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pour $\lambda \in]0, 1[$. En vous servant de la question 1, montrer que la solution optimale de $\mathcal{P}_\lambda$ ne dépend pas de λ. Donner alors, en fonction de λ, la valeur z^*_λ de la fonction objectif de $\mathcal{P}_\lambda$ à l'optimum.

Exercice 3 : séparation et évaluation [3 pts]

Un responsable d'équipe de recherche souhaite consacrer un budget de 14 Keuros pour financer des missions de recherche à l'étranger pour les membres de son équipe. Quatre personnes $\{a, b, c, d\}$ ont déposé une demande de mission dont l'utilité a été évaluée. Le tableau suivant résume le coût de ces missions et leur utilité (évaluée sur une échelle de 1 à 12).

	a	b	c	d
utilité	8	11	6	4
coût (Keuros)	5	7	4	3

On souhaite déterminer quelle est la sélection de projets qui maximise l'utilité totale des missions (somme des utilités des missions sélectionnées) tout en respectant l'enveloppe budgétaire indiquée. Après avoir formulé ce problème comme un programme linéaire en variables 0-1, résoudre le problème par une méthode de séparation évaluation (on calculera les bornes par résolution de la relaxation continue du problème ; on rappelle qu'il n'est pas nécessaire de recourir à l'algorithme du simplexe pour trouver la solution de la relaxation continue d'un tel problème).

Exercice 4 : modélisation et dualité [1 + 2 + 2 = 5 pts]

On dispose d'un jardin représenté par une grille carrée 4×4. Malheureusement ce jardin est souvent envahi de taupes. Dans l'exercice on supposera qu'une taupe occupe 3 cases successives en ligne ou en colonne. Pour chasser ces taupes, nous disposons de pièges qu'il s'agit de disposer dans certaines cases de notre jardin. Sachant qu'une case possédant un piège ne peut être occupée par une taupe, on souhaite déterminer quel est le nombre minimal de pièges à placer sur la grille (et dans quelles cases faut-il les installer) pour faire en sorte qu'aucune taupe ne puisse se placer sur la grille.

1°) Parmi les solutions ci-dessous qui indiquent le nombre de pièges installés dans chaque case, quelles sont celles qui assurent qu'aucune taupe ne puisse se placer sur la grille. Quelle est la meilleure de ces trois solutions ?

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad x' = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad x'' = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2°) Modéliser le problème de la recherche du nombre minimal de pièges à placer sur la grille (pour empêcher tout placement de taupe) par un programme linéaire en variables entières ; pour cela on utilisera des variables $x_{i,j}$ qui représentent le nombre de pièges installés en case (i, j) (ligne i, colonne j) ; il convient de remarquer que, du fait de l'objectif il n'y aura jamais plus d'un piège par case dans la solution optimale, il n'est donc pas utile de rajouter une contrainte dans le modèle linéaire pour limiter le nombre de pièges par case ; enfin, on ne listera pas les contraintes une par une mais on donnera les contraintes à satisfaire sur la ligne i et sur la colonne j de la grille.

Par la suite, on admettra que la résolution en variables *continues* du problème fournit naturellement une solution optimale entière ; on notera $\mathcal{P}$ le programme linéaire en variables continues associé.

3°) Formuler l'objectif du dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ et donner, à titre d'exemple, la contrainte du dual associée à la variable primale $x_{2,2}$. Donner une interprétation du dual dans le contexte de l'exercice. Après avoir montré qu'en l'absence de piège, on peut facilement placer 5 taupes sur la grille, utiliser un résultat de dualité pour déterminer le nombre optimal de pièges et une solution associée.

Corrigé exo 1

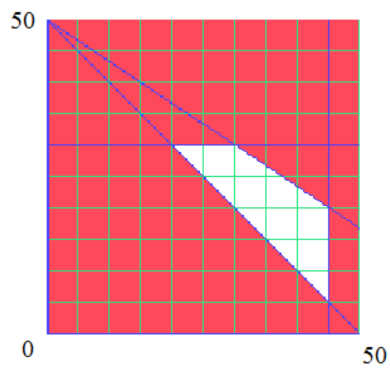
1°) Soient x, y les quantités en litre par jour de produit P_1 et P_2 fabriqués. Pour les contraintes de temps il faut diviser les quantités produites par les vitesses de filtrage. Ainsi pour M_2 par exemple on a : $x/3+y/2 \leq 25$. La modélisation donne :

$$\max \ z = x + 2y$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & \geq & 50 \\ x & & & \leq & 45 \\ 2x & + & 3y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 30 \end{array} \right.$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

2°) La représentation graphique est la suivante :



La solution optimale est $(x, y) = (30, 30)$

3°) Il faut étudier comment varie la solution en fonction de k lorsque la fonction objectif est $z = x+ky$. On voit que si $k = 3/2$ alors la fonction objectif est perpendiculaire à la contrainte 3 et toute la face joignant (30, 30) à (45,20) est optimale. Donc $(30, 30)$ reste optimal tant que $k \geq 3/2$ sinon c'est $(45, 20)$ qui est optimal.

Corrigé exo 2

1°) Il faut résoudre :

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - Ma$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcccccl} 2x_1 & + & x_2 & +e_1 & & & & = 8 \\ -x_1 & + & x_2 & & +e_2 & & & = 4 \\ -3x_1 & + & x_2 & & & -e_3 & +a & = 2 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, a \geq 0$$

On démarre avec comme variables de base $\{e_1, e_2, a\}$. On a $a = 2+3x_1-x_2+e_3$. L'objectif en fonction des variables hors base s'écrit donc : $z = -2M + (2-3M)x_1 + (3+M)x_2 - Me_3$, d'où le tableau suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a	
e_1	2	1	1	0	0	0	8
e_2	-1	1	0	1	0	0	4
a	-3	1	0	0	-1	1	2
	$2-3M$	$3+M$	0	0	$-M$	0	$2M$

x_2 entre en base et a sort. On obtient :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	a	
e_1	5	0	1	0	1	-1	6
e_2	2	0	0	1	1	-1	2
x_2	-3	1	0	0	-1	1	2
	11	0	0	0	3	$-3-M$	-6

on élimine a une fois pour toute, x_1 entre en base et e_2 sort :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	0	1	$-5/2$	$-3/2$	1
x_1	1	0	0	$1/2$	$1/2$	1
x_2	0	1	0	$3/2$	$1/2$	5
	0	0	0	$-11/2$	$-5/2$	-17

La solution optimale est donc $(x_1^*, x_2^*) = (1, 5)$ de valeur 17.

2°) Le dual $\mathcal{D}$ s'écrit :

$$\min z' = 8y_1 + 4y_2 - 2y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

La forme standard est donc :

$$\min z' = 8y_1 + 4y_2 - 2y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 - s_1 = 2 \\ y_1 + y_2 - y_3 - s_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

La solution du dual s'obtient par le théorème des écarts complémentaires ou même directement à partir du tableau optimal du primal, on a : $y_1^* = 0, y_2^* = 11/2, y_3^* = 5/2$. Les variables en base sont donc y_2 et y_3.

3°) La modification proposée change la fonction objectif du dual de la manière suivante : $\min z' = 16y_1 + 6y_2$ en laissant les contraintes inchangées. Exprimons z' en fonction des variables hors base à l'optimum de $\mathcal{D}$. En additionnant la première contrainte de la forme standard de $\mathcal{D}$ à 3 fois la seconde contrainte (voir question précédente) il vient : $2y_2 = 11 - 5y_1 + s_1 + 3s_2$ donc $6y_2 = 33 - 15y_1 + 3s_1 + 9s_2$. On a alors :

$$z' = 16y_1 + 6y_2 = 33 + y_1 + 3s_1 + 9s_2$$

La solution $y_1^* = 0, y_2^* = 11/2, y_3^* = 5/2$ reste donc optimale pour $\mathcal{D}'$ puisque tous les profits marginaux sont positifs. Ensuite, pour trouver la solution optimale de $\mathcal{P}'$ il suffit d'appliquer le théorème des écarts complémentaires. Comme $y_2^* > 0$ et $y_3^* > 0$ les contraintes (2) et (3) de $\mathcal{P}'$ sont actives à l'optimum d'où :

$$\begin{array}{ll} -x_1^* & +x_2^* = 6 \\ -3x_1^* & +x_2^* = 0 \end{array}$$

De là on tire $x_1^* = 3$ et $x_2^* = 9$, c'est la solution optimale de $\mathcal{P}'$ de valeur 33.

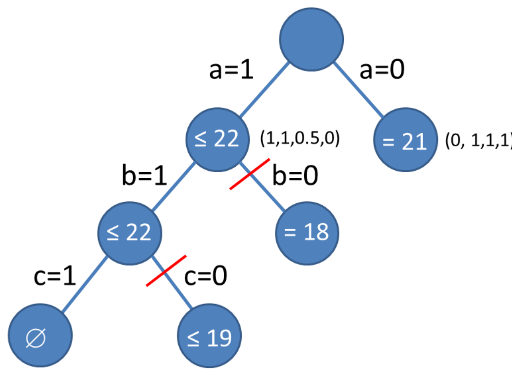
4°) Du tableau optimal du simplexe obtenu à la question 1 on tire :

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & 1 - 1/2e_2 - 1/2e_3 \\ x_2 & = & 5 - 3/2e_2 - 1/2e_3 \end{array}$$

De là on on tire : $z_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = 5 - 4\lambda + (\lambda - 3/2)e_2 - 1/2e_3$. Comme $\lambda < 1$ les coûts marginaux sont strictement négatifs. On reste donc sur l'optimum trouvé à la question 1. Seule change la valeur de la fonction objectif à l'optimum. On a : $z_\lambda^* = 5 - 4\lambda$

Corrigé exo 3

Si l'on calcule les rapports "utilité sur coût" on obtient l'ordre suivant :
$a(1.6) > b(1.57) > c(1.5) > d(1.33)$ on développe alors le B&B



La solution optimale est donc $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 1)$ de valeur 21.

Corrigé exo 4

1°) La solution x est réalisable et vaut 6. La solution x' vaut 5 mais n'est pas réalisable. La solution x'' vaut 5 et est réalisable. C'est donc la plus intéressante parmi les 3.

2°) On note x_{ij} le nombre de pièges installés dans la case (i, j) (du fait de la fonction objectif il n'y en aura jamais plus d'un mais c'est pas la peine d'en faire une contrainte)

Les contraintes en ligne i s'écrivent alors, pour $i = 1, \dots, 4$:

$$x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j+2} \geq 1, \quad j = 1, 2$$

Les contraintes en colonne j s'écrivent alors, pour $j = 1, \dots, 4$:

$$x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i+2,j} \geq 1, \quad i = 1, 2$$

l'objectif est $\min z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} x_{i,j}$

il faut aussi ajouter les contraintes de non-négativité $x_{i,j} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, 4$, pour $j = 1, \dots, 4$

3°) Le dual fait apparaitre une variable duale par contrainte. Notons $y_{i,j}, j = 1, 2$ les variables duales associées aux contraintes de la ligne i, et $y'_{i,j}, i = 1, 2$ les variables duales associées aux contraintes de la colonne j. L'objectif s'écrit alors :

$$\max z' = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} y_{i,j} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} y'_{i,j}$$

Les contraintes s'écrivent alors :
$y_{1,1} + y'_{1,1} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 1$
$y_{1,1} + y_{1,2} + y'_{1,2} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 2$
$y_{1,1} + y_{1,2} + y'_{1,3} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 3$
$y_{1,2} + y'_{1,4} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $1, 4$
$y_{2,1} + y'_{1,1} + y'_{2,1} \leq 1$ pas deux taupes sur la case $2, 1$
etc...
Celle qui est demandée dans l'énoncé est "pas deux taupes dans la case $2, 2$" soit :
$y_{2,1} + y_{2,2} + y'_{1,2} + y'_{2,2} \leq 1$

Pour une formulation plus systématique (qui n'était pas demandée dans les questions), on peut procéder comme suit. Notons $S(y)$ (resp. $S(y')$) l'ensemble des variables intervenant dans la contrainte du primal associée à la variable duale y (resp. y'), les contraintes s'écrivent alors :

$$\forall i, \forall j, \sum_{(k,l)\ :\ x_{i,j} \in S(y_{k,l})} y_{k,l} + \sum_{(k',l')\ :\ x_{i,j} \in S(y'_{k',l'})} y'_{k',l'} \leq 1$$

Les variables $y_{k,l}$ et $y'_{k',l'}$ représentent toutes les positions possibles (horizontales et verticales) d'une taupe sur la grille et valent 1 si une taupe est présente et 0 sinon.

Le dual consiste à maximiser le nombre de taupes dans la grille en l'absence de piège. Une solution réalisable évidente est $y_{1,1} = y_{2,1} = y_{3,1} = y_{4,1} = y'_{1,4} = 1$ qui vaut 5 et est réalisable dans le dual. La solution x'' du primal est donc optimale pour $\mathcal{P}$ puisqu'elle a la même valeur qu'une solution duale réalisable.