Université Paris 6 Vendredi 4 Novembre 2016
MASTER ANDROIDE–M1–MOGPL

Examen réparti 1

Durée 2h - Notes de cours et TD autorisées
Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 : modélisation et résolution [2+2+2+2+2=10 pts]

Un constructeur automobile dispose d'un budget de 4000 K€ pour diffuser de la publicité à la télévision et dans la presse (1 K€ = 1000 €). On estime que la diffusion d'un spot publicitaire à la télévision touche 100 milliers de personnes par minute de diffusion et que chaque publicité parue dans un journal va être vue par 80 milliers de personnes. Le responsable du service marketing estime que pour assurer une présence minimum dans les médias face à la concurrence il faut au moins programmer 5 minutes de diffusion à la télévision et publier 50 fois la publicité dans la presse. Sachant qu'une minute à la télévision coûte 80 K€ et qu'une publicité dans la presse coûte 50 K€ on souhaite déterminer quel est le plan de diffusion permettant de maximiser le nombre total de personnes exposées à la publicité du constructeur.

1°) Modéliser le problème ci-dessus par un programme linéaire que l'on présentera sous forme canonique (pour simplifier, on admettra que l'on peut utiliser ici des variables continues).

2°) En utilisant la première phase de la méthode en deux phases vue en cours, déterminer une base réalisable pour ce problème et donner la solution associée. Cette base est-elle optimale ?

3°) Déterminer la base associée à la solution qui consiste à diffuser 5 minutes de spot télévisé et à publier 72 fois la publicité dans la presse. Exprimer la fonction objectif du programme linéaire en fonction des variables hors base, en déduire qu'il s'agit d'une solution optimale. Est-ce la seule solution optimale ?

4°) Anticipant une baisse de lecteurs de la presse écrite, on souhaite étudier comment va évoluer la solution optimale du problème si l'impact d'une diffusion dans la presse diminue. Pour cela on suppose que chaque annonce dans un journal va être lue par $80 - p$ milliers de personnes où $p \in [0, 80]$. Déterminer jusqu'à quelle valeur de p la solution trouvée à la question précédente reste optimale.

5°) Pour mieux faire face à la présence croissante des marques concurrentes à la télévision, le responsable du marketing souhaite maintenant une diffusion d'au moins 10 minutes à la télévision. En même temps, son budget publicité se trouve malheureusement diminué et tombe à 3800 K€ (en revanche on suppose comme au début de l'exercice que chaque annonce dans un journal touche 80 milliers de personnes). La solution optimale doit certainement se trouver modifiée par ces nouvelles données. Sans calculer explicitement cette nouvelle solution optimale, déterminer (en vous servant de la dualité) le coût induit par ces nouvelles contraintes (coût mesuré en nombre de personnes qui ne seront plus exposées à la publicité).

Exercice 2 : résolution d'un PLNE [4 pts]

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & \leq & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \end{array} \right.$$

$$x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}$$

Résoudre $\mathcal{P}$ par la méthode de séparation et évaluation vue en cours (les solutions optimales des relaxations continues des problèmes considérés à chaque étape seront obtenues par résolution graphique). On séparera en priorité l'ensemble pour lequel la borne est la meilleure, et en cas d'ex-aequos on donnera la priorité à l'ensemble le plus profond dans l'arborescence de recherche. On prendra soin de présenter l'arborescence de recherche en indiquant les solutions des relaxations continues et les bornes entières obtenues à chaque pas de l'algorithme.

Exercice 3 : résolution d'un jeu [2 + 1 + 1.5 + 1.5 = 6 pts]

Deux joueurs 1 et 2 misent simultanément en choisissant une pièce de a€ ou b€ (avec $a \neq b$). Si les mises des deux joueurs sont identiques alors le joueur 1 gagne la pièce de son adversaire, sinon c'est le joueur 2 qui gagne la pièce misée par le joueur 1.

1°) Donner la matrice des gains pour ce jeu (du point de vue du joueur 1) puis écrire les deux programmes linéaires (duaux l'un de l'autre) qui correspondent à la recherche des stratégies mixtes optimales des deux joueurs.

2°) Montrer, par un argument simple, que le joueur 1 n'a pas de stratégie optimale pure (c'est-à-dire que jouer toujours la même pièce n'est pas une stratégie optimale).

3°) En vous servant du résultat de la question précédente et du théorème des écarts complémentaires, déterminer la stratégie mixte optimale du joueur 2.

4°) Déterminer la stratégie mixte optimale du joueur 1.