Épreuve du mardi 27 février 2007

1.— On considère un call C sur un actif S ; le prix d'exercice est K et l'échéance T. Le rendement sans risque sur la période $[0, T]$ est r. Le marché est supposé sans opportunité d'arbitrage.
Montrer les deux inégalités *strictes* suivantes :

a.

$$C_0 > S_0 - Ke^{-rT}.$$

b.

$$C_0 < S_0.$$

2.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 40$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}3$ et $d = 0{,}8$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 5\%$. On utilisera l'approximation $e^r \approx 1 + r$.
a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.
b. Un trader vend un put européen de prix d'exercice $K = 45$ € et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du put à la date $t = 0$.
c. On suppose que l'actif sous-jacent subit une baisse suivie d'une hausse puis d'une baisse : détailler les opérations de couverture effectuées par le trader.
d. S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ? Si oui, quelle serait la prime à payer pour ce put ?
e. Quelle serait la prime d'un call européen de même prix d'exercice et de même échéance ?

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 8 – 12

Épreuve du jeudi 10 mai 2007

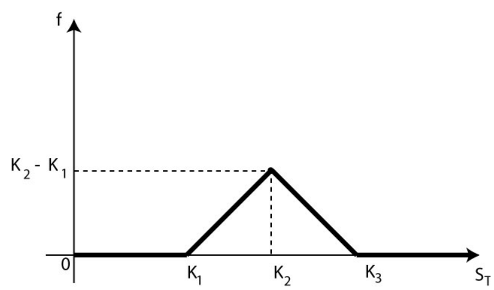
1.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}16 \times S_t dt + 0{,}32 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 30$ € et où les coefficients 0,16 et 0,32 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S.
Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit compris entre 30 € et 34 € au bout de trois mois.

2.— **a.** Dessiner le pay-off d'un portefeuille contenant un call acheté de strike $K_1 > 0$ et deux calls vendus de même strike $K_2 > K_1$. Les calls ont tous même sous-jacent et même maturité.

b. Déterminer un portefeuille constitué de quatre calls européens (achetés ou vendus) sur un même sous-jacent S, ayant même maturité T et dont le pay-off est représenté par le diagramme ci-dessous *(butterfly) :*



où $K_2 = (K_1 + K_3)/2$ *i.e.* K_2 est le milieu de $[K_1, K_3]$.

3.— On considère une option qui peut être répliquée en achetant un put et deux calls, tous les trois européens, de même maturité et de même strike *(strap).*

a. Dessiner le pay-off de cette option.
b. On se donne un actif S dont la dynamique est celle d'un brownien géométrique dans un marché de Black-Merton-Scholes. Sur un an le rendement sans risque est $r = 6\%$ et la volatilité de S est $\sigma = 30\%$. La valeur de S à $t = 0$ est $S_0 = 20$ €.
Un trader vend un strap ayant S comme sous-jacent. La maturité est $T = 6$ mois, le strike est $K = 20$ €. Calculer le prix de l'option à la date $t = 0$.
c. On rappelle que le delta d'un call est $\Delta_{call} = N(d_1)$ (notations habituelles). Quel est le delta d'un put ? (justifier la réponse)
d. Le trader décide de couvrir l'option à l'aide d'un portefeuille delta neutre. Déterminer le portefeuille de couverture qu'il se constituera à la date $t = 0$.

4.— On se place dans le modèle Black-Merton-Scholes standard, dont on adopte les notations habituelles. Une compagnie financière met sur le marché un dérivé dont le pay-off est $f_T = \log S_T$.

a. Déterminer le prix f_0 de ce dérivé à la date $t = 0$.
b. Déterminer le prix f_t de ce dérivé à une date t quelconque, $0 \leq t \leq T$.
Les résultats seront exprimés en fonction de r, σ, t, T et S_t.

---

durée : 3h — barème approximatif : 4 - 5 - 7 - 4

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$

Épreuve du jeudi 14 juin 2007
durée : 2h

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}1$ et $d = 0{,}9$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.
a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.
b. Un trader vend un call européen de prix d'exercice $K = 20$ € et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du call à la date $t = 0$.
c. On suppose que l'actif sous-jacent subit deux hausses consécutives puis une baisse : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.
d. Quelle serait la prime d'un put européen de même prix d'exercice et de même échéance ? S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ?
e. Un trader a acheté le put européen précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture. À la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté à l'insu du marché : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1{,}4$ et le facteur de baisse $d' = 0{,}6$. Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ?

2.— On se place dans un marché (B, S) soumis aux hypothèses Black-Scholes-Merton. Un trader achète à la date $t = 0$ une part de l'actif S et vend un call européen c ayant S comme sous-jacent *(stratégie de call couvert)*.
Le prix spot de l'actif est $S_0 = 28{,}20$€. La maturité est $T = 1$ mois, soit un douzième d'année. Le taux sans risque annuel est $r = 6\%$ et la volatilité annuelle de S est $\sigma = 30\%$. Enfin le prix strike est 30€.

a. Calculer le prix du call c contenu dans cette stratégie.
b. Déterminer le coût à la date $t = 0$ de cette stratégie.
c. Déterminer la perte maximale que peut enregistrer le trader. Déterminer de même son gain maximum possible.
d. Déterminer le point mort de cette stratégie, c'est-à-dire la valeur S_T de l'actif S à l'expiration telle que le trader n'enregistre ni gain ni perte.
e. Quel est le rendement de cette stratégie si le sous-jacent atteint les 30€ ?

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique.

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0, T]$, est donné par la formule

$$c(t, s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}$$

et

$$d_2 = d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}.$$

Épreuve du lundi 17 mars 2008

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à deux étapes. On suppose que $S_0 = 40$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}15$ et $d = 0{,}9$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 5\%$. On utilisera l'approximation $e^r \approx 1 + r$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. On considère le call européen sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 40$ € et d'échéance $T = 2$, la fin de la seconde période. Déterminer le prix du call à la date $t = 0$ ainsi que les prix du call à la date intermédiaire $t = 1$.

c. On constate sur le marché un prix de 5 € pour ce call à la date $t = 0$. Quelle stratégie d'arbitrage mettra-t-on en œuvre pour tirer profit de ce prix ?

2.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 30$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}08$ et $d = 0{,}93$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 3\%$. On utilisera l'approximation $e^r \approx 1 + r$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. On considère le put *américain* sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 28$ € et d'échéance $T = 3$. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

c. Déterminer la date à laquelle l'exercice du put est optimal. Préciser la ou les valeurs du put et du sous-jacent lors de l'exercice optimal.

On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max\big(B_{\delta t}^{-1}\mathbf{E}_q(p_{t+\delta t}|S_t), (K - S_t)_+\big)$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt.

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 10 – 10

Épreuve du lundi 28 avril 2008

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}10 \times S_t dt + 0{,}40 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 50$€ et où les coefficients 0,10 et 0,40 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité du rendement sur un an de l'actif S.
Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 58€ au bout de six mois.

2.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est celle d'un brownien géométrique. La volatilité du rendement sur un an est $\sigma = 30\%$, le prix à la date $t = 0$ est $S_0 = 40$€. Par ailleurs, le rendement annuel de l'actif sans risque B est $r = 5\%$.
À $t = 0$ un trader achète une part de sous-jacent qu'il compte revendre dans un an. Il s'assure contre une baisse du sous-jacent en achetant un put de strike $K_p = 40$€ et il finance cette assurance en vendant un call de strike $K_c = 45$€. Le put et le call sont tous les deux de maturité $T = 1$ an (option synthétique *collar*).

a. Calculer le prix du put et celui du call.

b. Le trader liquide sa position à l'échéance. Quels sont ses gains et pertes maximaux possibles à cette date ?

3.— On considère deux calls c_1 et c_2 de même strike $K = 40$€ sur un même sous-jacent S vérifiant $S_0 = 40$€ mais de maturités différentes : le call c_1 est de maturité $T_1 = 3$ mois tandis que le call c_2 est de maturité $T_2 = 6$ mois.
L'actif S est supposé suivre une dynamique de brownien géométrique dont le rendement est de volatilité annuelle σ constante égale à 30%. Le rendement annuel de l'actif sans risque B est $r = 5\%$.
À la date $t = 0$ un trader *vend* le call c_1 et *achète* le call c_2 *(spread calendaire)*. On notera $f(t, s)$ le prix du spread à la date t et pour le prix de sous-jacent $S_t = s$.

a. Déterminer le prix de cette option à la date $t = 0$.

b. On se place à la date T_1 et on suppose qu'à cette date l'option est à la monnaie : $S_{T_1} = 40$€. On suppose aussi que les paramètres r et σ n'ont pas changé.
Déterminer le prix du spread.

c. Si le trader liquide sa position à la date T_1, quel est le rendement de la stratégie de spread ?

d. (cette question est indépendante des précédentes) On rappelle l'identité

$$(ID) \qquad S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$$

sous les notations habituelles des formules de Black-Scholes.
Montrer l'égalité

$$(Vega) \qquad \frac{\partial c}{\partial \sigma}(t, S_t) = S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}.$$

où c désigne le prix Black-Scholes d'un call.

e. On revient au spread calendaire : on se place encore à la date T_1 et sous l'hypothèse que l'option est à la monnaie.
On suppose qu'à cette date la volatilité du sous-jacent a augmenté : le rendement de l'option est-il inférieur ou supérieur au rendement trouvé dans la question **c.** ?

---

durée de l'épreuve : 3h
barème approximatif : 4 – 4 – 12

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$

Épreuve du vendredi 13 juin 2008
durée : 2h

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 30$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}05$ et $d = 0{,}95$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Un trader vend un put européen de prix d'exercice $K = 30$ € et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du put à la date $t = 0$.

c. On suppose que l'actif sous-jacent subit deux baisses consécutives puis une hausse : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.

d. S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ? Si c'est le cas, déterminer la date à laquelle l'exercice sera optimal. Calculer ensuite le prix du put américain.

e. Un trader a acheté le put *européen* précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture. À la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté à l'insu du marché : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1{,}1$ et le facteur de baisse $d' = 0{,}9$. Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ?

2.— On se place dans un marché (B, S) suivant le modèle à temps continu de Black-Scholes-Merton. Le prix spot de l'actif est $S_0 = 3{,}42$€. L'actif S ne rend pas de dividende.

Un trader vend à la date $t = 0$ un call c_1 de strike $K_1 = 3{,}50$€ sur le sous-jacent S et achète deux calls c_2 de strike $K_2 = 3{,}75$€ *(call ratio backspread, CRB).*
La maturité est $T = 3$ mois, soit 0,25 année. Le taux sans risque annuel est $r = 6\%$ et la volatilité annuelle des retours de S est $\sigma = 40\%$.

Tous les prix seront arrondis à deux décimales.

a. Calculer le prix de l'option CRB.

b. Dessiner le pay-off de l'option. Sur le même graphique dessiner le diagramme des "pertes et profits" (pay-off diminué du coût de l'option).

c. Déterminer la perte maximale que peut enregistrer le trader. Déterminer de même son gain maximum théoriquement possible.

d. Déterminer le point mort de cette stratégie, c'est-à-dire la valeur à l'échéance S_{pm} de l'actif S telle que le trader n'enregistre ni gain ni perte.

e. Quel est le rendement de cette stratégie si le sous-jacent atteint 4€ à l'échéance ?

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique.

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0, T]$, est donné par la formule

$$c(t, s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}$$

et

$$d_2 = d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}.$$

Épreuve du lundi 23 mars 2009

SUJET 1

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à deux étapes. On suppose que $S_0 = 20$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}08$ et $d = 0{,}98$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. On considère le call européen sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 21$ € et d'échéance $T = 2$, la fin de la seconde période.
Déterminer le prix du call à la date $t = 0$ ainsi que le portefeuille de réplication pour l'étape 1.

c. On suppose que le prix du sous-jacent baisse au cours de la première étape. Déterminer le portefeuille de réplication pour la seconde étape.

d. Un trader a vendu ce call. Le prix du sous-jacent subit une baisse puis une hausse. Décrire les opérations (achat/vente de S, prêt/emprunt d'euros) effectuées par le trader aux dates $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.

2.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 30$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}03$ et $d = 0{,}98$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1\%$.
On considère le put *américain* sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 29{,}5$ € et d'échéance $T = 3$.

a. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

b. Si l'actif subit trois baisses successives, à quelle date est-il optimal d'exercer ce put ?

On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max\big((K - S_t)_+ \ , \ B_{\delta t}^{-1}\mathbf{E}_q(p_{t+\delta t}|S_t)\big)$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt.

---

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 10 – 10

Épreuve du jeudi 23 avril 2009

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende. Les options sont européennes. On reprend les notations habituelles.

1.— Un dérivé sur S d'échéance T paye $90 - S_T$ si $S_T < 95$ et -5 sinon (autrement dit, si $S_T \geq 95$ le détenteur de l'option doit verser 5 € au vendeur).

a. Dessiner le pay-off de ce dérivé.

b. Décomposer ce dérivé en une option vanille (call ou put) et une position sur le marché monétaire.

2.— Un actif S se négocie aujourd'hui à 28 €. On achète deux calls sur cet actif de strike 31 €, d'échéance 6 mois, et on vend un call de strike 28 € et de même échéance (option *long call backspread*).

a. Dessiner le pay-off de cette option.

b. Le taux sans risque est $r = 0{,}05$ et la volatilité est $\sigma = 25\%$. Calculer le prix de chaque call.
Déterminer ensuite le bilan monétaire de notre position à $t = 0$ sur le call backspread.

c. Quels sont les pertes et les profits maximaux possibles ? Préciser les points-morts.

d. Si on utilise une telle stratégie d'investissement, quelles anticipations a-t-on sur le prix de S et sur sa volatilité ?

e. Calculer le rendement de cette stratégie (rapporté au prix d'achat des deux calls-31) dans le cas où S termine à 35 €. On exprimera le résultat en pourcentage.

f. Au bout de trois mois, les conditions du marché ont changé : la volatilité est montée à 35%. À cette date le sous-jacent est à 31 €. On revend l'option. Quel prix peut-on en proposer ?
Quel rendement, rapporté à l'achat initial des deux calls-31, a-t-on tiré de cette opération ?

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 6 – 14

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Épreuve du jeudi 1er avril 2010

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— Un actif S vaut $S_0 = 30$€ à la date $t = 0$. À la date $t = 1$ cet actif peut valoir $S_1^u = 32$€ ou $S_1^d = 29$€.
Le taux sans risque est supposé nul : $r = 0$.
Un call sur S de strike $K = 31$ et d'échéance $T = 1$ est négocié au prix de 1/2€.

a. Le marché présente-t-il une opportunité d'arbitrage ? (justifier votre réponse)

b. Si un arbitrage est possible, décrivez la stratégie mise en œuvre pour exploiter cet arbitrage.
Si au contraire il n'y a pas d'arbitrage, décrivez la stratégie de couverture delta-neutre d'un trader qui aurait vendu cette option.
Dans tous les cas, précisez les opérations effectuées (achats, ventes *etc.*) pour la stratégie décrite.

2.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}05$ et $d = 0{,}90$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1\%$.
On considère le put *américain* sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 19$€ et d'échéance $T = 3$ périodes.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

c. On suppose que l'actif subit trois baisses consécutives : à quelle date est-il optimal d'exercer ce put ?

On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max\big((K - S_t)_+ \ , \ B_{\delta t}^{-1}\mathbf{E}_q(p_{t+\delta t}|S_t)\big)$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt.

---

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 10 − 10

Épreuve du jeudi 27 avril 2010

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende. Les options sont européennes. On reprend les notations habituelles ; en particulier $(W_t)_{t\geq 0}$ représente un brownien standard.

1.— Soit le processus défini par $X_t = W_t^3 - 3tW_t$.

a. Déterminer l'EDS vérifiée par X_t.

b. Le processus X_t est-il une martingale (pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée à (W_t)) ? (justifier la réponse)

2.— On considère l'intégrale stochastique

$$Y_t = \int_0^t W_s^2 \, dW_s \quad \text{où } t \geq 0.$$

Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y_t est centrée puis calculer sa variance en utilisant l'isométrie d'Itô (on rappelle que si Z désigne une variable normale centrée réduite, alors l'espérance de Z^4 est égale à 3).

3.— Un actif S se négocie aujourd'hui à 40 €. Un trader achète un call et un put sur S de même strike $K_1 = 40$ € et vend un put de strike 36 € (stratégie *straddle versus put*). Ces options ont même maturité $T = 3$ mois $= 0{,}25$ année.

a. Dessiner le profil (le pay-off) de cette stratégie d'options.

b. Le taux sans risque annuel est $r = 0{,}02$ et la volatilité est $\sigma = 30\%$. Calculer le prix de cette stratégie à la date initiale $t = 0$.
Dessiner ensuite le profil des pertes et profits.

c. Quels sont les pertes et les profits maximaux possibles ? Préciser les points-morts.

d. Un mois plus tard, l'actif vaut à nouveau 40 € mais la volatilité implicite σ a monté : elle vaut maintenant 40%. Le trader décide de liquider sa position : déterminer le prix de vente de sa stratégie à cette nouvelle date (deux mois avant l'échéance, soit 1/6 d'année).
Quel est le rendement de la stratégie sur le mois où le trader a maintenu sa position ?

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 3 – 3 –14

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividende et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$

Épreuve du mercredi 16 mars 2011

L'actif S est supposé ne pas rendre de dividende.

1.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 80$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}025$ et $d = 0{,}980$.
Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1{,}5\% = 0{,}015$. Sur chaque période $\delta t = 1$ on utilisera l'actualisation $B_{\delta t}^{-1} = 1/1 + r$.
On considère le put *américain* sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 80$ € et d'échéance $T = 3$.

a. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

b. Si l'actif subit trois baisses successives, à quelle date est-il optimal d'exercer ce put ?

On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max\big((K - S_t)_+ \ , \ B_{\delta t}^{-1}\mathbf{E}_q(p_{t+\delta t}|S_t)\big)$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt.

2.— On considère le modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes décrit dans l'exercice précédent.

a. Déterminer le prix à $t = 0$ du call européen sur S de prix d'exercice $K = 80$€ et d'échéance $T = 3$.

b. Un trader a vendu ce call et se couvre en delta-neutre. Le prix du sous-jacent subit une baisse lors de la première période. Décrire les opérations de couverture (achat/vente de S, prêt/emprunt monétaire) effectuées par le trader aux dates $t = 0$ et $t = 1$.

---

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 10 – 10

Épreuve du mercredi 24 mai 2011

Comme d'habitude, W désigne un brownien standard.

1.— Soit X un processus d'Itô solution de l'équation différentielle stochastique

$$(E) \qquad dX_t = X_t\,dt + dW_t\ ,\ X_0 \text{ donné.}$$

On pose $Y_t = e^{-t}X_t$.

a. Calculer dY_t à l'aide de la formule d'Itô. Le processus Y est-il une W-martingale ?

b. Montrer que la solution X de l'EDS (E) peut s'écrire

$$X_t = e^t X_0 + \Phi_t$$

où Φ_t est une intégrale stochastique que l'on précisera.

2.— On définit le processus Z par

$$Z_t = e^{W_t - \alpha t} \quad \text{avec} \quad \alpha \text{ constante réelle donnée.}$$

a. Déterminer l'EDS vérifiée par Z.

b. À quelle condition sur α le processus Z est-il une martingale ? (justifier votre réponse)

3.— On considère un actif financier S, supposé ne pas rendre de dividende, dont la volatilité annuelle est $\sigma = 40\%$. Le prix à $t = 0$ de cet actif est $S_0 = 35{,}5$ €. Par ailleurs, le rendement annuel de l'actif sans risque est $r = 6\%$.

Un opérateur achète un put de strike $K_1 = 30$ € et vend un put de strike $K_2 = 35$ € (option *Bull Put Spread*). L'échéance est fixée à $T = 0{,}125$ année, soit à peu près 45 jours.

a. Sans effectuer aucun calcul, dites quel sera le bilan monétaire de ces transactions à la date d'écriture $t = 0$: le trader va-t-il encaisser ou payer une certaine somme pour cette position ? (justifier votre réponse)

b. Déterminer le prix du spread à $t = 0$.

c. Tracer le pay-off de cette option ainsi que le diagramme des profits et pertes.

d. L'opérateur conserve l'option jusqu'à l'échéance T. En fonction de la valeur S_T de l'actif S relativement aux deux strikes K_1 et K_2, déterminer :

- la perte maximale possible pour l'opérateur ainsi que les valeurs de S_T pour lesquelles l'opérateur enregistre cette perte ;
- le gain maximal possible pour l'opérateur ainsi que les valeurs de S_T pour lesquelles l'opérateur enregistre ce gain ;
- le point mort (ou *break even*) de la stratégie, *i.e.* la valeur de S_T pour laquelle l'opérateur n'enregistre ni gain ni perte.

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 5 – 5 – 10

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$

Formule d'Itô : *Soit X un processus admettant une différentielle stochastique*

$$dX_t = \mu_t\,dt + \sigma_t\,dW_t$$

(où μ et σ vérifient des conditions d'intégrabilité que nous omettons) et soit $f(t,x)$ une fonction appartenant à $\mathcal{C}^2([0,T]\times\mathbf{R})$. Alors

$$Y_t = f(t,X_t)$$

admet aussi une différentielle stochastique et

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\,(dX_t)^2$$

où $(dX_t)^2 = dX_t.dX_t$ est calculé en utilisant les règles suivantes :

$$(dt)^2 = 0 \quad , \quad dt.dW_t = 0 \quad , \quad (dW_t)^2 = dt.$$

En explicitant $(dX_t)^2$ on obtient pour cette formule fondamentale l'énoncé équivalent suivant

$$dY_t = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + \mu_t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\right\}dt + \sigma_t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dW_t$$

Épreuve du jeudi 22 mars 2012

SUJET 1

1.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à deux étapes. On suppose que $S_0 = 18$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}05$ et $d = 0{,}90$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1\%$.
On considère le put *européen* sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 19$€ et d'échéance $T = 2$ périodes.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$ ainsi que les prix du put à la date intermédiaire $t = 1$.

c. Un opérateur vend ce put et décide de se couvrir en delta-neutre : déterminer le portefeuille $\Pi_1 = (\psi_1, \varphi_1)$ de couverture qu'il se constituera à la date $t = 0$.

d. Déterminer les deux portefeuilles de couverture Π_2^u et Π_2^d correspondant respectivement à l'éventualité d'une hausse et à celle d'une baisse constatée à la date $t = 1$.

2.— Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale pour une filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)$ donnée.

a. Montrer l'égalité $\mathbf{E}\big((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{H}_s\big) = \mathbf{E}\big(M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{H}_s\big)$ avec $s < t$.

b. Calculer l'espérance *(non-conditionnelle)* de $(M_t - M_s)^2$ en fonction des espérances de M_t^2 et de M_s^2.

3.— Soit un brownien W, $\mathcal{F}$ sa filtration associée et a un réel fixé.

On exprimera les résultats aux deux questions ci-dessous en fonction de a et t et en utilisant la fonction de répartition N de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

a. Calculer $\mathbf{E}\big(\mathbf{1}_{\{W_t \geq a\}}\big)$ pour tout $t \geq 0$.

b. Calculer $\mathbf{E}\big(W_t \times \mathbf{1}_{\{W_t \geq a\}}\big)$.

---

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 8 – 6 – 6

Épreuve du mardi 22 mai 2012

On utilise les notations habituelles pour le brownien et pour le modèle de Black-Scholes. Sur les représentations graphiques demandées ***on précisera bien les abscisses et les ordonnées*** des points remarquables des graphes.

1.— On se donne un brownien standard W. Soit X un brownien géométrique :

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t, \quad X_0 > 0 \text{ donné.}$$

a. On définit le processus Y par $Y_t = e^{-\alpha t} X_t$ où α désigne un réel positif donné. À l'aide de la formule d'Itô déterminer l'EDS vérifiée par Y.

b. Quelle condition doit vérifier μ pour que Y soit une martingale ?

2.— On se place sous les hypothèses du modèle de Black-Scholes.

a. Montrer que le Vega d'un call est égal à celui d'un put lorsque ces deux options sont sur un même sous-jacent, de même strike et de même échéance.

b. En utilisant l'égalité vue en cours

$$S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$$

(que l'on ne demande pas de redémontrer), calculer ce Vega à une date t en fonction de S_t, $T - t$, d_1 et de la densité de la loi normale standard $\mathcal{N}(0; 1)$.

3.— On considère un actif financier S, supposé ne pas rendre de dividende, dont la volatilité annuelle est $\sigma = 30\%$. Le prix à $t = 0$ de cet actif est $S_0 = 62$ **€**. Par ailleurs, le rendement annuel de l'actif sans risque est $r = 5\%$.

Partie I :

Un opérateur *qui possède déjà une part d'actif* S à la date $t = 0$ achète un put P sur S de strike $K_P = 60$ **€**. L'échéance T est fixée à 2 mois, soit $T = 1/6$ d'année. Ce put le protègera contre une baisse éventuelle du sous-jacent (position *Protective Put*) dans les 2 mois qui suivent. Pour simplifier on supposera que l'opérateur vendra le sous-jacent à l'échéance T.

a. Tracer le profil de la position (S, P) détenue par l'opérateur à l'échéance T (pay-off). ***On rappelle que la présence d'une part de sous-jacent qui vaut S_0 à la date $t = 0$ introduit dans le pay-off une droite de pente 1 passant par le point d'abscisse S_0 sur l'axe horizontal.***

b. Déterminer le prix du put P à $t = 0$.

c. Tracer le graphe des «profits et pertes» du protective put (S, P) à l'échéance et déterminer le ou les éventuels points-morts.

Partie II :

Afin de baisser le coût de sa protection, l'opérateur vend un call C sur S de strike $K_C = 65$ **€** simultanément à l'achat du *Protective Put.* La position $(S, P, -C)$ qui en résulte est désignée sous le nom de *Collar.*

d. Déterminer le prix du call C à $t = 0$.

e. Tracer le graphe des «profits et pertes» du collar à l'échéance et déterminer le ou les éventuels points-morts.

f. Le collar est moins cher que le protective put mais il présente un inconvénient majeur : lequel ?

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 5 – 5 – 10

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant S_t à la date $t \in [0, T]$, est donné par la formule

$$c_t = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p_t = -S_t N(-d_1) + e^{-r(T-t)} K N(-d_2)$$

en raison de la *relation de parité call-put*

$$c_t + K e^{-r(T-t)} = p_t + S_t.$$

Formule d'Itô : *Soit X un processus d'Itô*

$$dX_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t$$

(où μ et σ vérifient les conditions usuelles d'intégrabilité) et soit $f(t, x)$ une fonction de $\mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbf{R})$. Alors $Y_t = f(t, X_t)$ est aussi un processus d'Itô et l'on a

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, (dX_t)^2$$

où $(dX_t)^2 = dX_t \times dX_t$ est calculé en utilisant les règles suivantes :

$$(dt)^2 = 0 \quad , \quad dt \times dW_t = 0 \quad , \quad (dW_t)^2 = dt.$$

En explicitant $(dX_t)^2$ on peut réécrire cette formule sous la forme suivante :

$$dY_t = \Big\{\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\Big\}\, dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dW_t.$$

Épreuve du mercredi 20 juin 2012

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est celle d'un brownien géométrique. La volatilité du rendement sur un an est $\sigma = 30\%$, le prix à la date $t = 0$ est $S_0 = 40$€. Par ailleurs, le rendement annuel de l'actif sans risque B est $r = 5\%$.

À $t = 0$ un trader achète une part de sous-jacent qu'il compte revendre dans un an. On poura supposer qu'il a emprunté au taux annuel r les 40€ nécessaires à l'achat de la part de S.

Il s'assure contre une baisse du sous-jacent en achetant un put de strike $K_p = 40$€ et il finance cette protection en vendant un call de strike $K_c = 45$€. Le put et le call sont tous les deux de maturité $T = 1$ an (option synthétique *collar*).

a. Calculer le prix du put et celui du call.

b. Le trader liquide sa position à l'échéance. Quels sont ses gains et pertes maximaux possibles à cette date ?

2.— On considère deux calls c_1 et c_2 de même strike $K = 40$€ sur un même sous-jacent S vérifiant $S_0 = 40$€ mais de maturités différentes : le call c_1 est de maturité $T_1 = 3$ mois tandis que le call c_2 est de maturité $T_2 = 6$ mois.

L'actif S est supposé suivre une dynamique de brownien géométrique dont le rendement est de volatilité annuelle σ constante égale à 30%. Le rendement annuel de l'actif sans risque B est $r = 5\%$.

À la date $t = 0$ un trader *vend* le call c_1 et *achète* le call c_2 *(spread calendaire)*.

a. Déterminer le prix f_0 de cette option à la date $t = 0$.

b. On se place à la date T_1 et on suppose qu'à cette date l'option est à la monnaie : $S_{T_1} = 40$€. On suppose aussi que les paramètres r et σ n'ont pas changé.
Déterminer le prix f_{T_1} du spread.

c. Si le trader liquide sa position à la date T_1, quel est le *rendement* de la stratégie de spread ?

d. (cette question est indépendante des précédentes) On rappelle l'identité

$$(ID) \qquad S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$$

sous les notations habituelles des formules de Black-Scholes.
Montrer l'égalité

$$(Vega) \qquad \frac{\partial c}{\partial \sigma}(t, S_t) = S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}.$$

où c désigne le prix Black-Scholes d'un call.

e. On revient au spread calendaire : on se place encore à la date T_1 et sous l'hypothèse que l'option est à la monnaie.
On suppose qu'à cette date ***la volatilité du sous-jacent a augmenté :*** le rendement de l'option est-il inférieur ou supérieur au rendement trouvé dans la question **c.** ?

---

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 6 – 14

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant S_t à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c_t = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{S_t}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{S_t}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p_t = -S_t N(-d_1) + e^{-r(T-t)} K N(-d_2)$$

en raison de la *relation de parité call-put*

$$c_t + K e^{-r(T-t)} = p_t + S_t.$$