

1.— a. On considère un modèle de marché (B, S) à une étape. On suppose que $S_0 = 50$ € et qu'à la date $t = 1$ on a $(S_1^u = 51, S_1^d = 48)$. Examiner la viabilité de ce marché (absence d'opportunité d'arbitrage) dans le cas où le taux de rendement sans risque sur la période considérée est $r = 0$ puis dans le cas $r = 0,02$. Déterminer éventuellement la probabilité risque-neutre.

b. Mêmes questions avec les évolutions suivantes : $(S_1^u = 52, S_1^d = 50)$; $(S_1^u = 53, S_1^d = 48)$.

c. Dans le cas où l'un des marchés précédents n'est pas viable, déterminer un portefeuille d'arbitrage.

2.— Montrer que si, dans un marché viable, un portefeuille établi à la date $t = 0$ réplique exactement le pay-off d'une option à la date d'expiration T , alors le portefeuille et l'option ont même valeur à la date 0.

3.— Démontrer à l'aide d'un raisonnement d'arbitrage la relation de parité call-put :

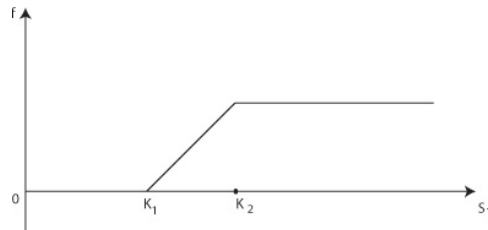
$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

pour un call et un put sur le sous-jacent S , de même strike K , de même maturité T , et où r désigne le taux sans risque et $0 \leq t \leq T$.

4.— On suppose qu'au taux de change courant on obtient 100 £ pour 160 €. Un spéculateur estime qu'avec la probabilité 1/2 la Livre anglaise sera tombée à 1,40 € à la fin de l'année et qu'avec la probabilité 1/2 elle sera montée à 2 €. Il achète alors une option *put* européenne qui lui donnera le droit (mais non l'obligation) de vendre 100 £ au prix de 180 €. Il paye 20 € pour cette option. On suppose que le taux d'intérêt sans risque est nul dans la zone Euro.

En utilisant le modèle binaire à une étape, soit construisez une stratégie qui permettra au vendeur ou à l'acheteur de s'assurer un profit certain, soit montrez que ce prix est le juste prix pour cette option.

5.— Déterminer un portefeuille constitué de deux calls européens – sur un même sous-jacent S et de même maturité T – et dont la valeur à la date T en fonction de S_T est représentée par le diagramme ci-dessous :



Comment pourrait-on exprimer ce pay-off à l'aide de puts ?

6.— a. Une action est cotée 50 € aujourd'hui. À la fin de chacune de deux périodes de trois mois, sa valeur augmentera de 6 % ou diminuera de 5 %. Le taux d'intérêt sans risque annuel est de 5 %. Déterminer la valeur d'un call européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 51 €.

b. Déterminer la valeur d'un put européen de même échéance et de même prix d'exercice. Si l'option de vente était de type américain, serait-il optimal d'exercer prématurément à l'un des noeuds de l'arbre ?

Dans tout ce qui suit, le sous-jacent S est supposé sans dividende.

1.— a. On considère un modèle de marché (B, S) à une étape. On suppose que $S_0 = 50$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,04$ et $d = 0,96$. Autrement dit, à la date $t = 1$ on a $(S_1^u = 52, S_1^d = 48)$. Pour simplifier, on prendra $r = 0$ comme rendement non-risqué.

Un trader achète un call de prix d'exercice $K = 51$ € et le couvre immédiatement en vendant un portefeuille de réplication de ce call. Déterminer le prix du call et préciser les opérations effectuées par le trader. En quoi la vente du portefeuille de réplication couvre-t-elle le call ?

b. En réalité, sur la période considérée et à l'insu du marché, la volatilité du sous-jacent était supérieure : les facteurs de variation réels étaient $u = 1,08$ et $d = 0,92$.

Cette situation est-elle favorable au trader ? Pour répondre à cette question, on déterminera les flux d'argent à l'échéance du call en tenant compte de la situation imprévue.

Le call était-il sous-évalué ? Le marché présentait-il une opportunité d'arbitrage ?

c. Reprendre la question précédente dans le cas d'une volatilité réelle inférieure, par exemple $u = 1,02$ et $d = 0,98$.

d. Reprendre les questions **a.** et **b.** dans le cas d'un put acheté.

2.— Montrer que le prix d'un call européen C de strike K sur un sous-jacent S (ne versant pas de dividende) vérifie $C_t \geq S_t - K$ à tout instant $t \in [0, T]$.

En déduire qu'il n'est jamais optimal d'exercer un call américain avant l'échéance et que son prix est le même que le call européen correspondant.

Examinez le cas du put ; on distinguera les cas $r = 0$ et $r > 0$.

3.— Un trader vend un put européen d'échéance $T = 1$ an et utilise un modèle C-R-R à deux étapes pour évaluer ce put. Le prix au comptant est $S_0 = 50$ €, les facteurs de hausse et de baisse pour chaque période sont $u = 1,2$ et $d = 0,96$, le taux annuel de l'actif sans risque est $r = 0,05$. Le prix d'exercice du put est $K = 60$ €.

a. Déterminer le prix du put à $t = 0$ et préciser les opérations de couverture dynamique (delta-neutre) effectuées par le trader pour chaque trajectoire possible du sous-jacent.

b. Déterminer le prix d'un put américain de même échéance et même strike. À quel date est-il optimal d'exercer le put ?

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20\text{€}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,1$ et $d = 0,9$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Un trader vend un call européen de prix d'exercice $K = 20\text{€}$ et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du call à la date $t = 0$.

c. On suppose que l'actif sous-jacent subit deux hausses consécutives puis une baisse : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.

d. Quelle serait la prime d'un put européen de même prix d'exercice et de même échéance ? S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ?

2.— Un trader a acheté le put européen précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture. À la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté à l'insu du marché : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1,4$ et le facteur de baisse $d' = 0,6$.

Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ?

Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

- 1.— Soient s et t deux réels positifs. Montrer que la covariance de W_s et W_t est le plus petit des deux nombres s et t .
- 2.— Vérifier que la variance de W_s^2 est égale à $2s^2$.
- 3.— On considère le processus Z défini par $Z_t = \sqrt{t}Y$, où Y suit une loi normale standard. Déterminer les lois marginales de Z . Le processus Z est-il un processus de Wiener ?
- 4.— Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X > 0$ dont le logarithme suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 .
- 5.— Soit $T > 0$ un réel fixé. Pour tout entier positif n on considère une subdivision

$$\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_N^n = T\}$$

de l'intervalle $[0, T]$ (l'entier N dépend de la subdivision). On suppose que le pas de la subdivision, $\delta_n = \max_{0 \leq j \leq N-1} (t_{j+1}^n - t_j^n)$, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

- a. Montrer que la somme $\sum_{j=0}^{N-1} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2$ converge dans L^2 vers la limite T .
- b. On considère les limites dans L^2

$$I = \lim_n S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

et

$$J = \lim_n T_n \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_{j+1}^n} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}).$$

Calculer $J - I$ et $I + J$. En déduire la valeur de I et J .

- c. Vérifier que la suite de fonctions simples définie par

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n} \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n[}(t)$$

approche $f(t) = W_t$ dans \mathbf{M}_T^2 .

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^T W_s dW_s.$$

- d. Calculer la limite dans L^2 de la somme

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(W_{t_j^n} + W_{t_{j+1}^n})}{2} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

(intégrale de Stratonovitch).

6.— Montrer à l'aide de la formule d'Itô que pour tout $t > 0$ on a

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$

7.— Montrer l'égalité

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s ds.$$

8.— Calculer l'espérance de W_t^6 en utilisant la formule d'Itô et le fait qu'une intégrale stochastique est une martingale pour la filtration associée à W .

9.— Calculer la variance de $\int_0^t |W_s|^{1/2} dW_s$ en utilisant l'isométrie d'Itô.

10.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0,2 \times S_t dt + 0,4 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 100$ € et où les coefficients 0,2 et 0,4 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S .

Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 160 € au bout d'un an.

11.— Soit une action dont le prix S possède une dynamique de brownien géométrique. Le prix spot est $S_0 = 50$ €, le rendement espéré annuel μ est de 16% et la volatilité de ce rendement σ de 30%. En utilisant la distribution de la variable aléatoire $Y_T = \ln S_T$, donner un intervalle de confiance à 90% pour S_T lorsque $T = 2$ ans.

12.— On désigne par S_t la valeur à la date t d'un dollar en euros (le cours du dollar), avec $S_0 > 0$. On suppose que la dynamique de ce cours est celle d'un brownien géométrique de rendement annuel μ et de volatilité σ .

- a. Déterminer l'EDS satisfaite par le cours $Z = 1/S$ de l'euro en dollars.
- b. Dédire de l'équation satisfaite par $U = \log S$ celle satisfaite par $V = \log Z$.
- c. Retrouver l'équation satisfaite par Z en calculant la différentielle d'Itô de e^V .

Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

1.— Déterminer l'EDS vérifiée par $X = W^n$, $n \geq 1$, W processus de Wiener. En déduire l'égalité

$$\mathbf{E}(W_t^n) = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t \mathbf{E}(W_s^{n-2}) ds.$$

2.— Soit λ un réel. Vérifier que les fonctions $f(t, x) = \lambda x$ et $g(t, x) = \lambda e^{rt}$ sont chacune solution de l'équation de Black-Scholes.

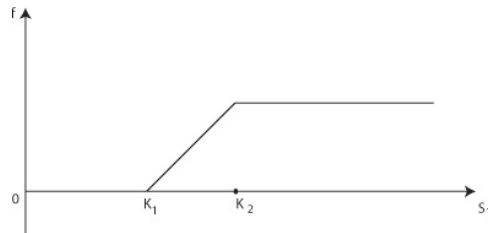
Déterminer les dérivées qu'elles représentent ainsi que les portefeuilles de couverture correspondants.

3.— On appelle *call digital* (ou *binaire*) de strike K et d'échéance T sur un sous-jacent S donné une option européenne dont le pay-off à l'échéance est

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < K, \\ 1 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Déterminer le prix et la couverture à la date $t = 0$ du call digital.

4.— On considère une option européenne dont le pay-off est dessiné ci-dessous (*spread vertical* haussier), synthétisée par une position longue sur un call de strike K_1 et une position courte sur un call de strike $K_2 > K_1$, les deux calls portant sur un même sous-jacent S et ayant même maturité T .



La maturité est $T = 6$ mois. On suppose en outre qu'à la date $t = 0$ la valeur de l'actif risqué est $s_0 = 50\text{€}$ et que sa volatilité annuelle est estimée à $\sigma = 20\%$. Le rendement annuel de l'actif non-risqué sur la période $[0, T]$ est $r = 5\%$. Enfin, les prix d'exercice K_1 et K_2 sont respectivement 50€ et 60€ .

a. Déterminer le prix à la date $t = 0$ de cette option.

b. Un trader a vendu ce spread et le couvre : préciser ses opérations de couverture et son portefeuille à la date $t = 0$; on admettra que le delta d'un call est égal à $N(d_1)$.

5.— Le tableau suivant, censé montrer les prix de calls européens à différentes maturités et pour différents prix d'exercice, tous placés sur un même actif de prix initial 50€ , n'est pas en accord avec les hypothèses de marché Black-Scholes-Merton :

Prix Strike	Maturité (mois)		
	3	6	12
45	1,6	2,9	5,1
50	3,7	5,2	7,5
55	7,0	8,3	10,5

En justifiant *brièvement* et *sans aucun calcul* votre réponse, dites pourquoi ce tableau est incorrect.

Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

1.— Un stelage (*straddle*) est une option européenne construite sur un sous-jacent S synthétisée par l'achat simultané d'un call et d'un put sur S de même maturité et de même prix d'exercice K .

a. Déterminer le pay-off de cette option et tracer son graphe. Donner sa prime à $t = 0$ en fonction des paramètres habituels des formules de Black-Scholes (σ , K , S_0 , r , T , d_1 et d_2) et de la répartition N de la loi normale standard. Donner en particulier la formule pour $K = S_0$.

b. On suppose $S_0 = 30\text{€} = K$, $T = 3$ mois, $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$ (taux annuels). Déterminer la prime de ce stelage.

c. Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce stelage. Quelle est la stratégie d'une telle option ?

2.— Un call européen (sur un actif dont le prix S est supposé suivre le modèle du brownien géométrique) est évalué sur le marché à 2,5 €. Le prix initial du sous-jacent est $S_0 = 15\text{€}$, le prix strike est $K = 13\text{€}$, la date de maturité est à trois mois (*i.e.* $T = 0,25$ année) et le taux d'intérêt sans risque est $r = 5\%$ par an. En utilisant les formules de Black-Scholes, montrer que la volatilité *implicite* est comprise entre 0,35 et 0,40.

3.— On reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes.

a. Montrer l'égalité

$$S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2).$$

b. En déduire que la valeur du delta d'un call européen peut s'écrire

$$\Delta_{call} = N(d_1).$$

Donner une formule analogue pour le delta d'un put, puis montrer que $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

c. Le *gamma* d'une option $f = f(t, s)$ est la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$. Calculer le gamma d'un call et d'un put européens.

Montrer que les prix de ces options sont des fonctions convexes du sous-jacent.

4.— Avec les notations habituelles, montrer que $S_t N(d_1) > c_t$ où c désigne un call européen construit sur S . En déduire que

$$\frac{\Delta c}{c} > \frac{\Delta S}{S}$$

si $\Delta S > 0$, où ΔS désigne un accroissement de S et Δc l'accroissement correspondant du call (effet de levier).