1.— Montrer que si, dans un marché viable, un portefeuille établi à la date $t = 0$ réplique exactement le pay-off d'une option à la date d'expiration T, alors le portefeuille et l'option ont même valeur à la date 0.

2.— Démontrer à l'aide d'un raisonnement d'arbitrage la relation de parité call-put :

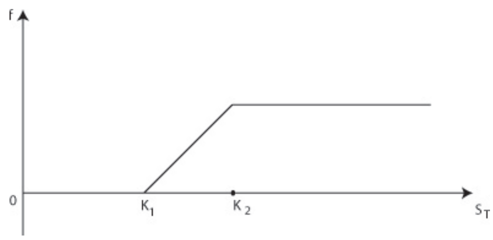
$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

pour un call et un put sur le sous-jacent S, de même strike K, de même maturité T, et où r désigne le taux sans risque et $0 \leq t \leq T$.

3.— On suppose qu'au taux de change courant on obtient 100 £ pour 160 €. Un spéculateur estime qu'avec la probabilité 1/2 la Livre anglaise sera tombée à 1,40 € à la fin de l'année et qu'avec la probabilité 1/2 elle sera montée à 2 €. Il décide d'acheter une option *put* européenne qui lui donnera le droit (mais non l'obligation) de vendre 100 £ au prix de 180 €.
Un opérateur propose de lui vendre ce put au prix de 20 €. En se basant sur son estimation de la probabilité de hausse, il accepte ce prix de vente.

On suppose que le taux d'intérêt sans risque est nul dans la zone Euro. En utilisant le modèle binaire à une étape, soit construisez une stratégie qui permettra au vendeur ou à l'acheteur de s'assurer un profit certain, soit montrez que ce prix est le juste prix pour cette option.

4.— Déterminer un portefeuille constitué de deux calls européens – sur un même sous-jacent S et de même maturité T – et dont la valeur à la date T en fonction de S_T est représentée par le diagramme ci-dessous :



Comment pourrait-on exprimer ce pay-off à l'aide de puts ?

5.— **a.** Une action est cotée 50 € aujourd'hui. À la fin de chacune de deux périodes de trois mois, sa valeur augmentera de 6 % ou diminuera de 5 %. Le taux d'intérêt sans risque annuel est de 5 %. Déterminer la valeur d'un put européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 51 €.

b. Si l'option de vente était de type américain, serait-il optimal d'exercer prématurément à l'un des noeuds de l'arbre ?

6.— **a.** On considère un modèle de marché (B, S) à une étape. On suppose que $S_0 = 50$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}04$ et $d = 0{,}96$. Autrement dit, à la date $t = 1$ on a $(S_1^u = 52, S_1^d = 48)$. Pour simplifier, on prendra $r = 0$ comme rendement non-risqué.

Un trader achète un call de prix d'exercice $K = 51$ € et le couvre immédiatement en vendant un portefeuille de réplication de ce call. Déterminer le prix du call et préciser les opérations effectuées par le trader. En quoi la vente du portefeuille de réplication couvre-t-elle le call ?

b. En réalité, sur la période considérée et à l'insu du marché, la volatilité du sous-jacent était supérieure : les facteurs de variation réels étaient $u = 1{,}08$ et $d = 0{,}92$.

Cette situation est-elle favorable au trader ? Pour répondre à cette question, on déterminera les flux d'argent à l'échéance du call en tenant compte de la situation imprévue.

Le call était-il sous-évalué ? Le marché présentait-il une opportunité d'arbitrage ?

7.— Montrer que le prix d'un call européen C de strike K sur un sous-jacent S (ne versant pas de dividende) vérifie $C_t \geq S_t - K$ à tout instant $t \in [0, T]$.

En déduire qu'il n'est jamais optimal d'exercer un call américain avant l'échéance et que son prix est le même que le call européen correspondant.

Examinez le cas du put ; on distinguera les cas $r = 0$ et $r > 0$.

8.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}1$ et $d = 0{,}9$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Un trader vend un put européen de prix d'exercice $K = 20$ € et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du put à la date $t = 0$.

c. On suppose que l'actif sous-jacent subit deux hausses consécutives puis une baisse : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.

d. S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ?

9.— Un trader a acheté le put européen précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture. À la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté à l'insu du marché : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1{,}4$ et le facteur de baisse $d' = 0{,}6$.

Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ?

Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Soit Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. On pose $X = e^Y$. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X \geq \alpha)$ où α est un réel positif donné, en fonction de la répartition $N(d) = \int_{-\infty}^{d} e^{-z^2/2}\, dz$ de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.

2.— Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X > 0$ dont le logarithme suit une loi normale de paramètres μ et σ^2.

3.— On appelle *fonction génératrice des moments* d'une variable aléatoire Y l'espérance $\phi_Y(u) = \mathbf{E}\big(e^{uY}\big)$. Calculer cette fonction dans le cas où $Y \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

4.— Montrer que la variance de W_s^2 est égale à $2s^2$.

5.— Soient s et t deux réels positifs. Montrer que la covariance de W_s et W_t est le plus petit des deux nombres s et t.

6.— On considère le processus Z défini par $Z_t = \sqrt{t}Y$, où Y suit une loi normale standard. Déterminer la loi de Z_t. Le processus Z est-il un processus de Wiener ?

7.— Soient $0 < s < t$ fixés : calculer l'espérance conditionnelle de W_s sachant $W_t = w$, pour $w \in \mathbf{R}$ donné.

8.— Soit $T > 0$ un réel fixé. Pour tout entier positif n on considère une subdivision

$$\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \ldots < t_N^n = T\}$$

de l'intervalle $[0,T]$ (l'entier N dépend de la subdivision). On suppose que le pas de la subdivision, $\delta_n = \max_{0\leq j\leq N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)$, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Montrer que la somme $\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2$ converge dans $\mathbf{L}^2$ vers la limite T.
(on pourra prendre dans un premier temps $t_j^n = j\frac{T}{n}$)

Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Montrer que pour tout $s > 0$ le processus $(W_{t+s} - W_s)_{t\geq 0}$ est un brownien standard indépendant du processus $(W_t)_{0\leq t\leq s}$.
Pour l'indépendance, il s'agit donc de montrer que pour des ensembles de dates $t_1, t_2, \ldots, t_m > 0$ et $0 < s_1, s_2, \ldots, s_n \leq s$ quelconques, les vecteurs aléatoires $(W_{t_1+s} - W_s, W_{t_2+s} - W_s, \ldots, W_{t_m+s} - W_s)$ et $(W_{s_1}, W_{s_2}, \ldots, W_{s_n})$ sont indépendants.

2.— Soit X une variable normale $\mathcal{N}(0;1)$ et ϵ une variable qui prend les deux valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$ pour chacune. On suppose que X et ϵ sont indépendantes. On pose $Y = \epsilon X$.

a. Montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$.

b. Montrer que les variables X et Y sont non-corrélées.

c. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes. Le vecteur aléatoire (X, Y) est-il gaussien ?

3.— Soit $T > 0$ un réel fixé. Pour tout entier positif n on considère une subdivision

$$\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \ldots < t_N^n = T\}$$

de l'intervalle $[0, T]$ (l'entier N dépend de la subdivision).
On suppose que le pas de la subdivision, $\delta_n = \max_{0\leq j\leq N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)$, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
On rappelle que la somme $\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2$ converge dans $\mathbf{L}^2$ vers la limite T.

a. On considère les limites dans $\mathbf{L}^2$

$$I = \lim_n S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

et

$$J = \lim_n T_n \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_{j+1}^n}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}).$$

Calculer $J - I$ et $I + J$. En déduire la valeur de I et J.

b. Vérifier que la suite de fonctions simples définie par

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n} \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n[}(t)$$

approche $f(t) = W_t$ dans $\mathbf{M}_T^2$.
En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^T W_s \, dW_s.$$

Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Soit X une variable aléatoire intégrable sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$, t réel positif. Montrer que le processus Y défini par $Y_t = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_t)$ est une $\mathcal{F}$-martingale.
(ne pas oublier de vérifier que les variables $|Y_t|$ sont d'espérance finie...)

Énoncer ce résultat dans le cas discret. Commenter ce résultat dans le cas d'une option européenne dans un modèle de marché Cox-Ross-Rubinstein, sous probabilité risque-neutre.

2.— Soit $M = (M_k)$, k entier positif ou nul, une martingale discrète relativement à une filtration (discrète) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_k)$. Soit en outre $\phi = (\phi_k)$ un processus prévisible *i.e.* ϕ_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable.

Pour tout entier $n > 0$ on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(M_{k+1} - M_k)$: montrer que (V_n) est une $\mathcal{F}$-martingale.

3.— Soit $\mathcal{F}$ la filtration associée au brownien W. Montrer que les processus suivants sont des $\mathcal{F}$-martingales :

a. Le processus W lui-même.

b. $W_t^2 - t$: on pourra commencer par calculer $\mathbf{E}((W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s)$ avec $s < t$.

c. $\exp(\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$, α réel fixé.

4.— Soit un réel $c > 0$ fixé, on pose

$$W'_t = \frac{1}{c} W_{c^2 t}.$$

Montrer que W' est aussi un brownien. Comparer ensuite la filtration associée à W' à celle associée à W.

Dans ces exercices, W désigne un processus de Wiener et $\mathcal{F}$ sa filtration associée.

1.— Soit f une fonction simple *i.e.* une variable aléatoire de la forme

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}[}$$

où a_j désigne une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable et de classe L^2 et où $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N < \infty$ sont des réels positifs donnés. On pose

$$I(f) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

Montrer que

$$\mathbf{E}\big(I(f)^2\big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^\infty (f(t)^2\,dt\Big) = \int_0^\infty \mathbf{E}\big((f(t)^2\big)\,dt.$$

2.— Calculer la variance de $\int_0^t |W_s|^{1/2}\,dW_s$ en utilisant l'isométrie d'Itô.

3.— Montrer à l'aide de la formule d'Itô que pour tout $t > 0$ on a

$$\int_0^t s\,dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\,ds.$$

4.— Montrer l'égalité

$$\int_0^t W_s^2\,dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s\,ds.$$

5.— Déterminer l'EDS vérifiée par $X = W^n$, $n \geq 1$. Montrer l'égalité

$$\mathbf{E}(W_t^n) = \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t \mathbf{E}(W_s^{n-2})\,ds$$

puis en déduire l'espérance de W_t^6.

Dans ces exercices, W désigne un processus de Wiener et $\mathcal{F}$ sa filtration associée.

1.— Pour a et b deux réels distincts, on définit

$$X_t = a\mathbf{1}_{[0,1/2[}(t) + b\mathbf{1}_{[1/2,1]}(t).$$

a. Calculer $\int_0^t X_s\,dW_s$ pour tout $t \in [0,1]$ (on séparera les cas $t < 1/2$ et $t \geq 1/2$).

b. Calculer de même $\int_0^t X_s^2\,dW_s$ pour tout $t \in [0,1]$.

2.— Soit X un processus d'Itô solution de l'équation différentielle stochastique

$$(E) \qquad dX_t = -X_t\,dt + dW_t\ ,\ X_0 \text{ donné.}$$

(processus d'Ornstein-Uhlenbeck)
On pose $Y_t = e^t X_t$.

a. Déterminer l'EDS vérifiée par Y. Le processus Y est-il une $\mathcal{F}$-martingale ?

b. Montrer que la solution X de l'EDS (E) peut s'écrire

$$X_t = e^{-t}X_0 + \Phi_t$$

où Φ_t est une intégrale stochastique que l'on précisera.

3.— Montrer que le processus e^{W^2} n'est pas dans $\mathcal{H}_t^2$ pour $t \geq 1/4$.

4.— On définit le processus Z par

$$Z_t = e^{W_t - \alpha t} \quad \text{avec} \quad \alpha \text{ constante réelle donnée.}$$

a. Déterminer l'EDS vérifiée par Z.

b. À quelle condition sur α le processus Z est-il une $\mathcal{F}$-martingale ?

5.— Soit le processus défini par $Y_t = W_t^3 - 3tW_t$.

a. Déterminer l'EDS vérifiée par Y_t.

b. Le processus Y_t est-il une $\mathcal{F}$-martingale ?

Dans ces exercices on reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes.

1.— **a.** Montrer l'égalité

$$S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2).$$

b. En déduire que la valeur du delta d'un call européen peut s'écrire

$$\Delta_{call} = N(d_1).$$

Donner une formule analogue pour le delta d'un put, puis montrer que $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

c. Le *gamma* d'une option $f = f(t, s)$ est la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$. Calculer le gamma d'un call et d'un put européens.
Montrer que les prix de ces options sont des fonctions convexes du sous-jacent.

2.— **a.** Montrer que $S_t N(d_1) > c_t$ où c désigne un call européen sur S.

b. En déduire que

$$\frac{\Delta c}{c} > \frac{\Delta S}{S}$$

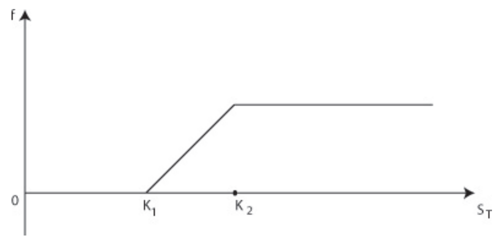
si $\Delta S > 0$, où ΔS désigne un accroissement de S et Δc l'accroissement correspondant du call (effet de levier).

3.— On appelle *call digital* (ou *binaire*) de strike K et d'échéance T sur un sous-jacent S donné une option européenne dont le pay-off à l'échéance est

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < K, \\ 1 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Déterminer le prix et le delta à la date $t = 0$ du call digital.

4.— On considère une option européenne dont le pay-off est dessiné ci-dessous (*spread vertical* haussier), synthétisée par une position longue sur un call de strike K_1 et une position courte sur un call de strike $K_2 > K_1$, les deux calls portant sur un même sous-jacent S et ayant même maturité T.



La maturité est $T = 6$ mois. On suppose en outre qu'à la date $t = 0$ la valeur de l'actif risqué est $s_0 = 50$€ et que sa volatilité annuelle est estimée à $\sigma = 20\%$. Le rendement annuel de l'actif non-risqué sur la période $[0, T]$ est $r = 5\%$. Enfin, les prix d'exercice K_1 et K_2 sont respectivement 50€ et 60€.

a. Déterminer le prix à la date $t = 0$ de cette option.

b. Un trader a vendu ce spread et le couvre : préciser ses opérations de couverture et son portefeuille à la date $t = 0$.

c. Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce spread. Quelle est la stratégie d'une telle option ?

5.— Un stellage (*straddle*) est une option européenne construite sur un sous-jacent S synthétisée par l'achat simultané d'un call et d'un put sur S de même maturité et de même prix d'exercice K.

a. Déterminer le pay-off de cette option et tracer son graphe. Donner sa prime à $t = 0$ en fonction des paramètres habituels des formules de Black-Scholes (σ, K, S_0, r, T, d_1 et d_2) et de la répartition N de la loi normale standard. Donner en particulier la formule pour $K = S_0$.

b. On suppose $S_0 = 30€ = K$, $T = 3$ mois, $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$ (taux annuels). Déterminer la prime de ce stellage.

c. Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce stellage. Quelle est la stratégie d'une telle option ?

6.— Un call européen (sur un actif dont le prix S est supposé suivre le modèle du brownien géométrique) est évalué sur le marché à 2,5 €. Le prix inital du sous-jacent est $S_0 = 15$ €, le prix strike est $K = 13$ €, la date de maturité est à trois mois (*i.e.* $T = 0{,}25$ année) et le taux d'intérêt sans risque est $r = 5\%$ par an. En utilisant les formules de Black-Scholes, montrer que la volatilité *implicite* est comprise entre 0,35 et 0,40.
