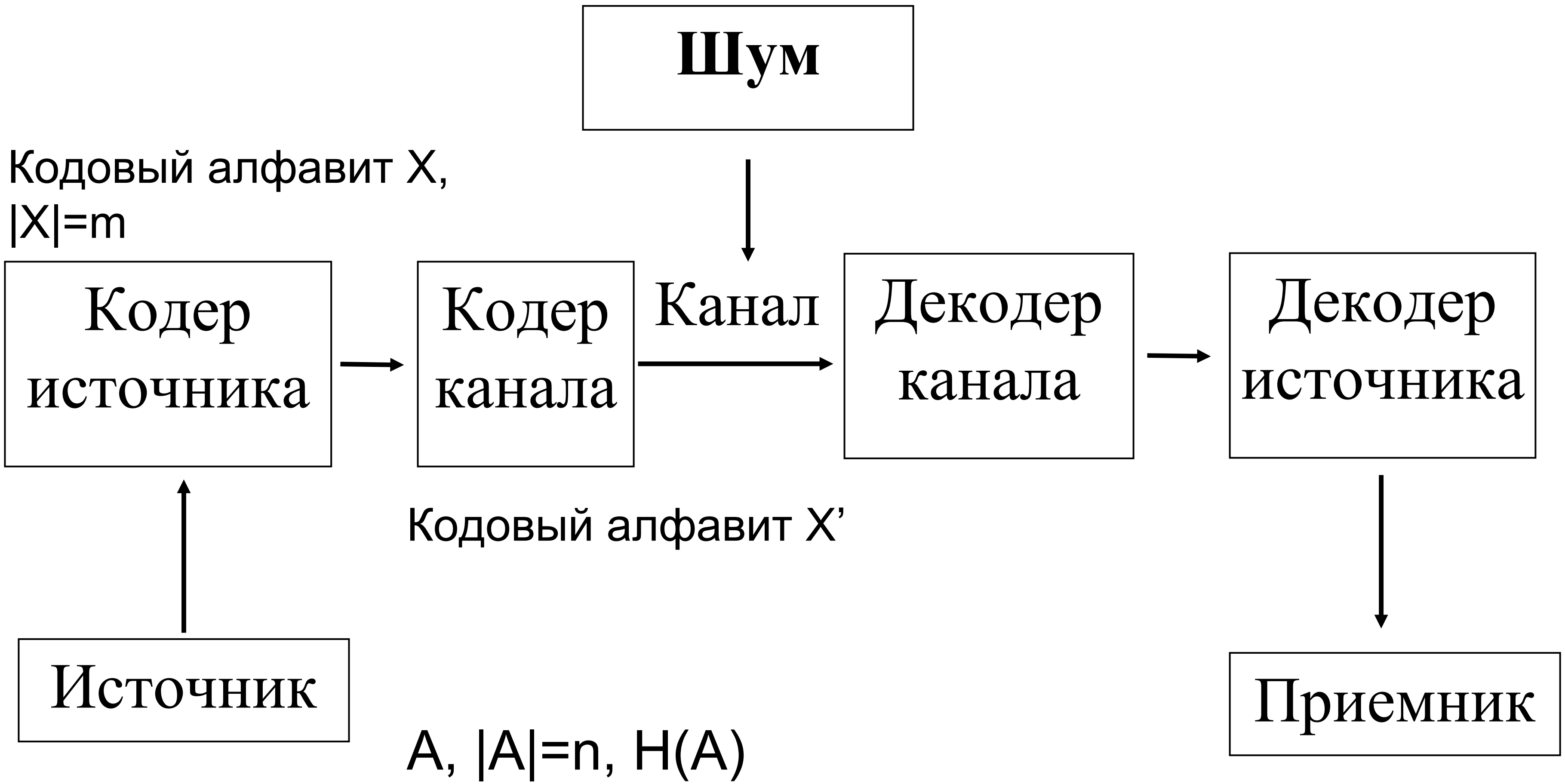
# Передача информации по дискретному каналу связи

# Модель дискретного канала с помехами

# *Модель системы передачи сигналов*

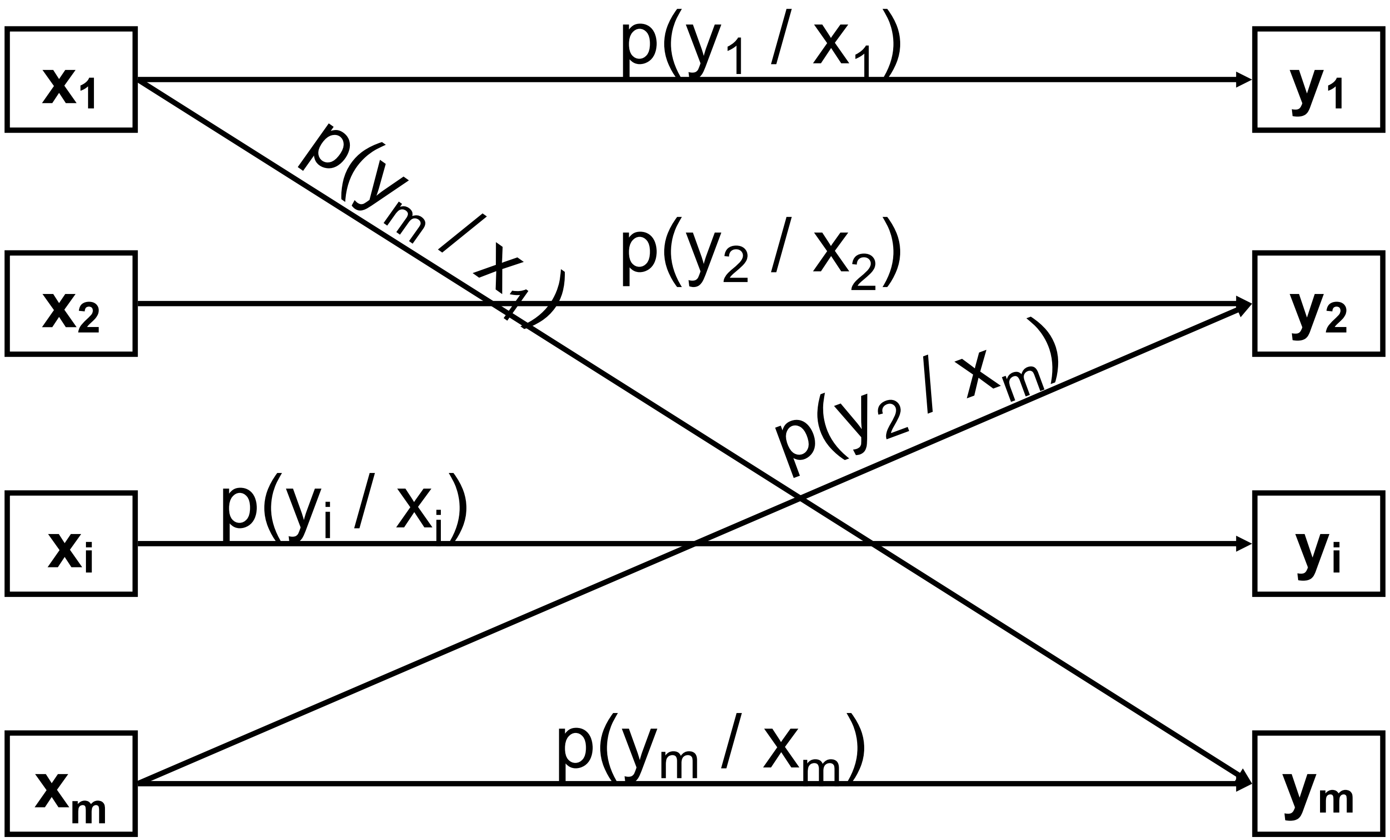


- Источник с алфавитом $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ с вероятностями $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)$ порождает сообщение, которое кодируется с кодовым алфавитом

  $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и передается по каналу связи с помехами.
- Помехи приводят к искажению исходного сообщения, т.е. получатель принимает сообщение, состоящее из символов другого алфавита $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

- Искажение символов передаваемого сообщения описывается набором условных вероятностей $p(y_i / x_j)$,
- который можно представить в виде матрицы размера m x m

# Дискретный канал с помехами



- Вероятности приема символов рассчитываются с учетом вероятностей $p(x_1)$, $p(x_2)$, …, $p(x_m)$ и вероятностей искажения символов $p(y_i / x_j)$

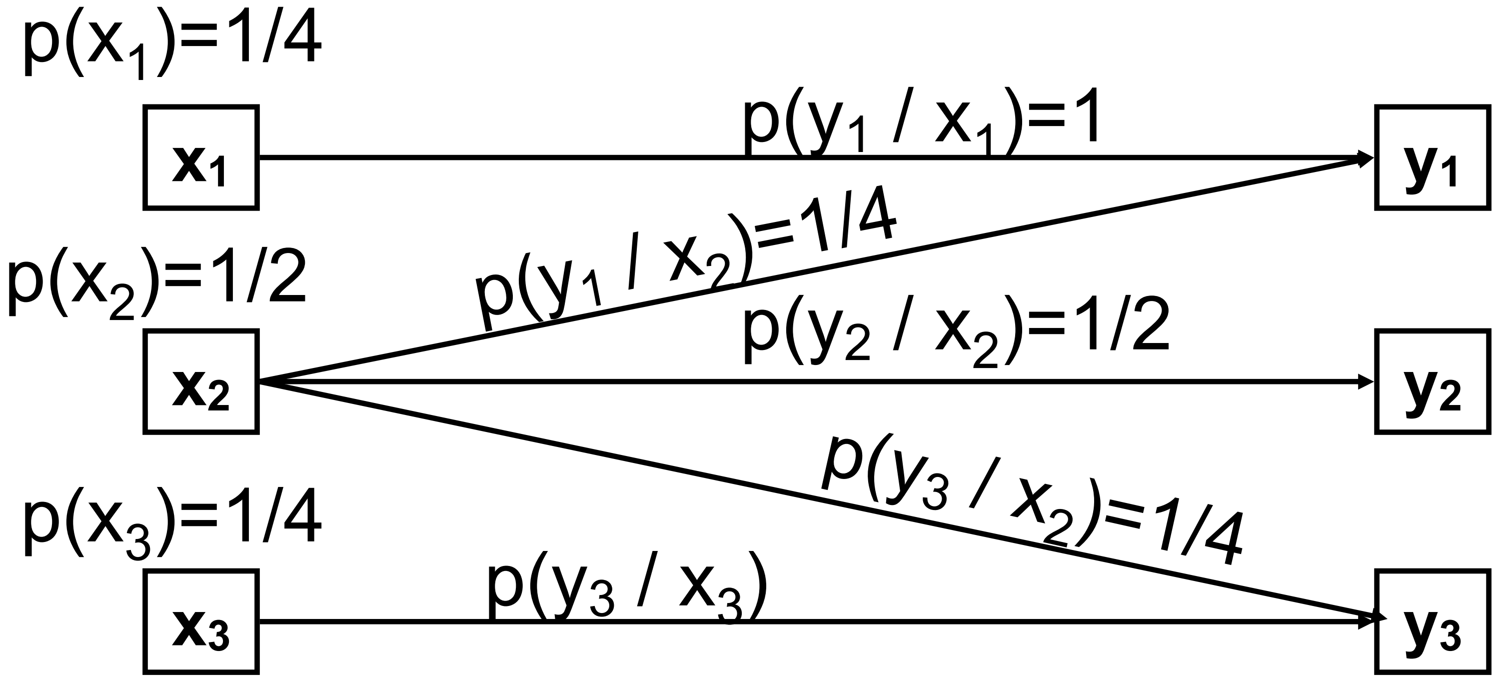
$$H(Y/x_k) = -\sum_{j=1}^{n} p(y_j/x_k)\log p(y_j/x_k)$$

- Количество информации, которое несет символ на выходе канала при условии, что на входе был символ $x_к$
- Усредняя по вероятности, получим величину H(Y/X), которая показывает влияние помех

- Количество информации, принятой приемником
- $I(X,Y) = H(Y)-H(Y/X)$
- Аналогично, $I(X,Y) = H(X)-H(X/Y)$

- Величина I(X,Y) называется полной взаимной информацией
- Величины H(Y/X), H(X/Y) называют потерей информации, обусловленной воздействием помех на сообщения, передаваемые по каналу связи, или ненадежностью канала связи

# Пример




- Найти количество информации, переданное по каналу связи

# Матрица условных вероятностей искажений в канале (канальная матрица)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 0.25 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 0.5 | 0 |
| $y_3$ | 0 | 0.25 | 1 |

- $H(Y/x_1)=0$
- $H(Y/x_3)=0$
- $H(Y/x_2)=1.5$

$$H(Y/X)=0.25H(Y/x_1)+0.5H(Y/x_2)+0.25H(Y/x_3)=$$
$$=0.25\cdot 0+0.5\cdot 1.5+0.25\cdot 0=0.75$$

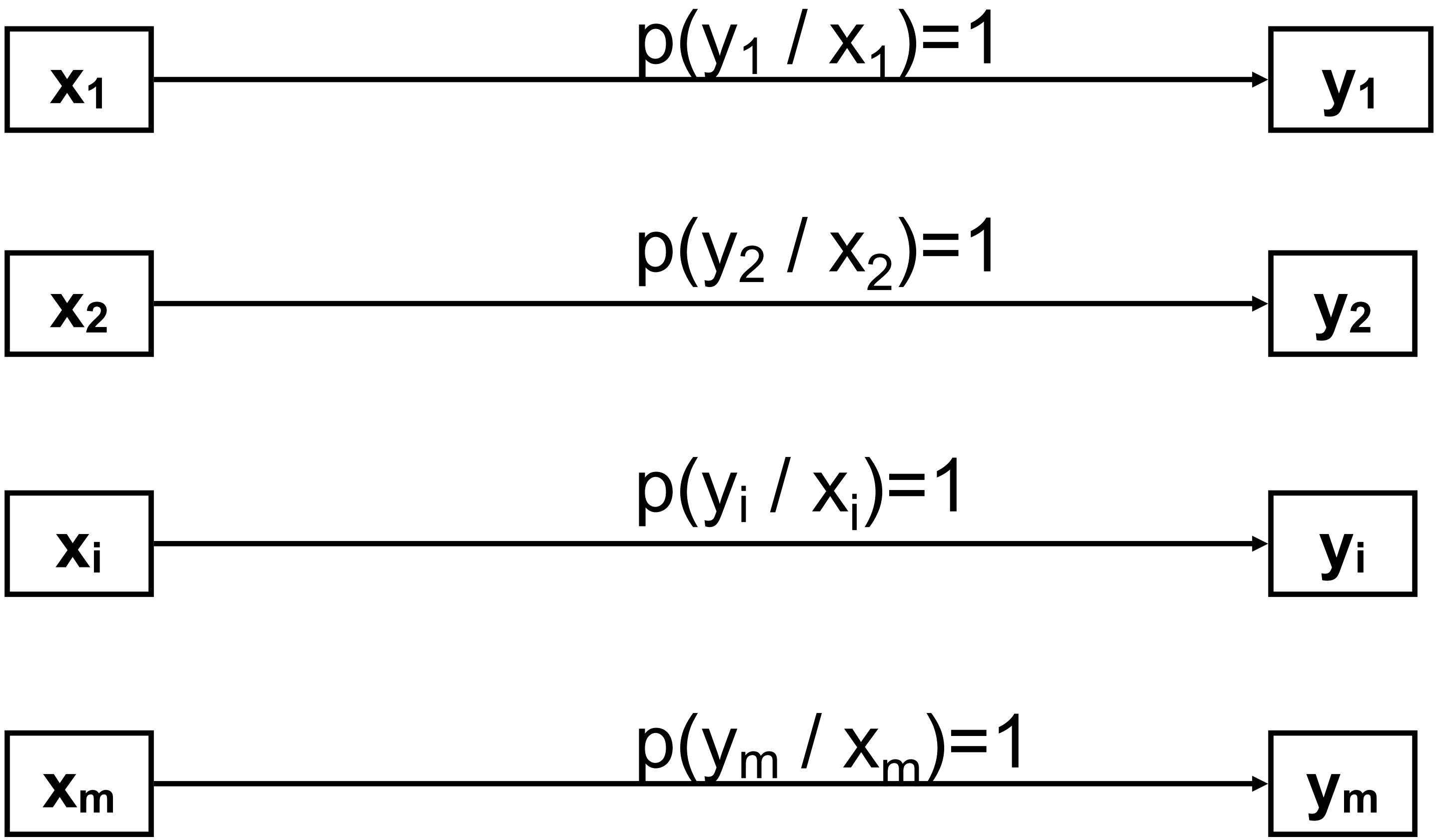
$$H(X)=H(0.25,\ 0.5,\ 0.25)=\ 1.5$$

$$I(X,Y)=1.5-0.75=0.75$$

# Пропускная способность канала связи

- Пропускная способность канала С – максимальное количество информации, которое канал связи может пропустить в единицу времени.

# Случай отсутствия помех



- **Отсутствие помех позволяет надежно кодировать сообщения источника A блочным оптимальным (или почти оптимальным) кодом с кодовым алфавитом X.**
- **Каждому символу соответствует некоторое двоичное кодовое слово, при этом $H(A) \le L_{ср}$**
- **Символы закодированного сообщения несут почти максимальное количество информации log m**

- **$L_0$ техническая скорость передачи или число пропускаемых каналом связи символов кодового алфавита в единицу времени.**
- **$C_0$ пропускная способность канала без помех**
- **Тогда общее переданное количество в единицу времени информации**

  **$L_0$ H(X) и $C_0$= $L_0$ log m**

# Теорема Шеннона для дискретных каналов без помех

- **Пусть k- количество символов, порожденных источником А в единицу времени, $C_0$ – пропускная способность дискретного канала без помех**
- **Если $C_0$>kH(A), то всегда можно осуществить кодирование сообщений достаточно длинными блоками так, чтобы сообщения передавались каналом связи без задержек**
- **Если $C_0$<kH(A), то передача без задержек невозможна.**

- Если источник порождает k символов в единицу времени, то это дает kH(A) бит информации
- По каналу может передаваться максимум $L_0 \log m$ бит
- Тогда условие передачи без задержки

$$L_0 \log m > kH(A) \quad \text{или} \qquad \mathbf{C_0 > kH(A)}$$

- В случае помех пропускная способность $C_п=L_0 \max\{H(X)-H(X/Y)\}$

- При отсутствии помех $H(X/Y)=0$,

$$\max\{H(X)\}=\log m$$

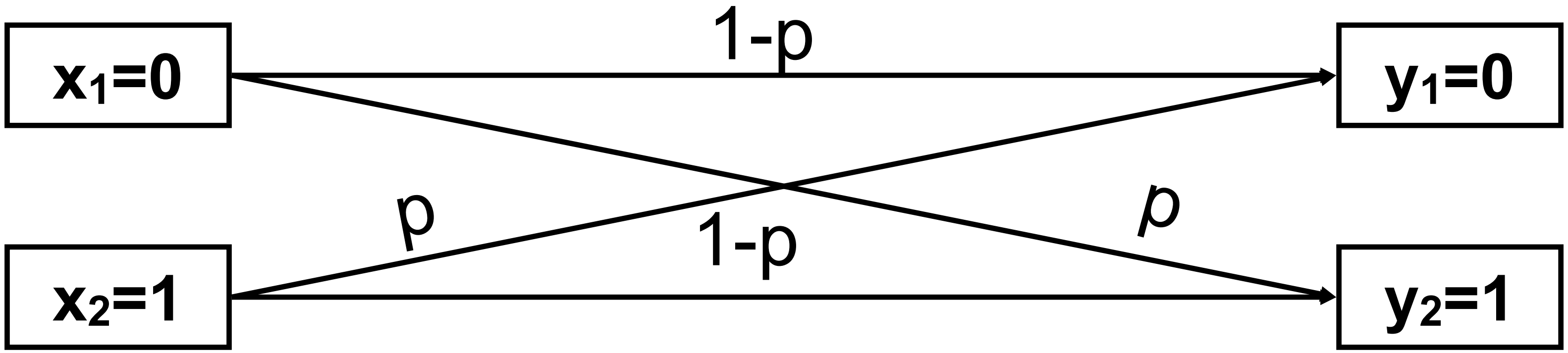
# Теорема Шеннона для дискретного канала с шумом

**Пусть дискретный канал обладает пропускной способностью С, дискретный источник – энтропией H(A) в единицу времени.**

- **Если H(A)<C, то существует такая система кодирования, при котором сообщения источника могут быть переданы по каналу с произвольно малой ненадежностью.**
- **Если H(A)>C, то не существует способа кодирования, обеспечивающего ненадежность, меньшую чем H(A)-C**

# Симметричный бинарный канал связи

# Схема канала




- Вероятность безошибочной передачи (1-p)
- Вероятность ошибки p (условные вероятности)

# Матрица переходных вероятностей (канальная матрица)

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{y_1}$ | 1-p | p |
| $\mathbf{y_2}$ | p | 1-p |

- Найдем частные условные энтропии

$$H(Y/x_1) = H(Y/x_2) = -(1-p)\log(1-p) - p\log p$$

- Полная условная энтропия

$$H(Y/X) = p(x_1)H(Y/x_1) + p(x_2)H(Y/x_2) =$$
$$= H(Y/x_1)[p(x_1) + p(x_2)] = -(1-p)\log(1-p) - p\log p$$

- Рассчитаем пропускную способность по формуле
- $C_п = L_0 \max\{H(Y)-H(Y/X)\}$
- Полная условная энтропия H(Y/X) не зависит от вероятностей появления $x_i$
- поэтому достаточно определить максимальное значение H(Y), которое равно 1.

- Пропускная способность симметричного канала

$$C_{\text{п}} = L_0[1 + (1 - p)\log(1 - p) + p\log p]$$

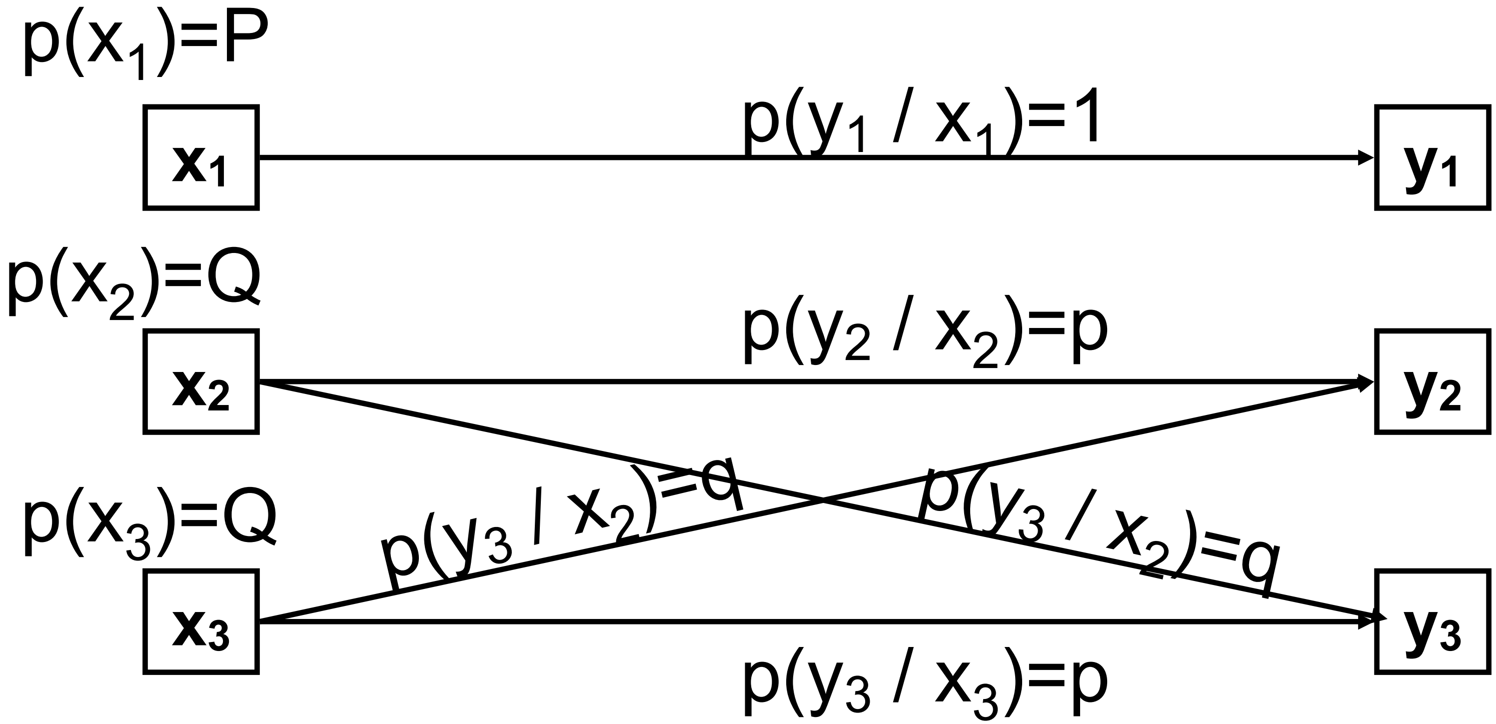
# Пример

- Определить пропускную способность симметричного канала с помехами, способного передавать 100 двоичных символов в секунду, причем каждый из символов искажается путем замены на противоположный с вероятностью $p=0.01$

- $L_0$=100 симв/с
- Без помех пропускная способность $C_0$=100 бит/с
- С помехами

$$C_{\text{п}} = L_0[1+(1-0.01)\log(1-0.01)+0.01\log 0.01] \approx 92$$

# Пример




- Найти пропускную способность канала связи

- Канальная матрица

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 0 | p | q |
| $y_3$ | 0 | q | p |

## Рассчитаем вероятности появления символов на выходе

$$P(y_1) = P(x_1) = P$$

$$P(y_2) = P(x_2)P(y_2 / x_2) + P(x_3)P(y_2 / x_3) =$$

$$= Qp + Qq = Q = P(y_3)$$

- Энтропия на выходе

$$H(Y) = -P\log P - 2Q\log Q$$

- Значения частных условных энтропий

$$H(Y/x_1) = 0$$

$$H(Y/x_2) = H(Y/x_3) = -p\log p - q\log q = \alpha$$

- Полная условная энтропия

$$H(Y/X) = P \cdot H(Y/x_1) + 2QH(Y/x_2) = 2Q\alpha$$

- Пропускная способность

$$C_{\text{п}} = L_0 \max_{P,Q}[-P\log P - 2Q\log Q - 2Q\alpha]$$

$$P + 2Q = 1$$

- Максимум функции можно найти методом неопределенных множителей Лагранжа

- Пропускная способность канала

$$C_{\text{п}} = L_0 \log \frac{2^{\alpha} + 2}{2^{\alpha}}$$

- где $\alpha = H(Y / x_2)$

- Максимум реализуется при

$$Q = \frac{1}{2^{\alpha} + 2} \qquad P = \frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha} + 2}$$

- При отсутствии помех p=1, q=0 получим α=0 и P=Q=1/3. Тогда

$$C_{п} = L_0 \log 3$$

- При p=0.5, q=0.5 получим α=1 и P=0.5 Q=0.25 Тогда $C_{п} = L_0 \log 2$

Что соответствует симметричному бинарному каналу без помех