Производные и дифференциалы

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Возьмем произвольную точку $x \in (a; b)$ и рассмотрим другую точку $x + \Delta x$ этого интервала, Δx *– приращение аргумента* x.

Соответствующее *приращение функции* $f(x)$ *в точке* x

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

При фиксированном x эта разность является функцией от Δx.

Дифференцируемость функции

Пусть функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x, то есть

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Заметим, что $f'(x)$ не зависит от Δx.

Пусть теперь дано, что приращение функции $y = f(x)$ в точке x имеет вид:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (*)$$

где A – некоторое число и $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее приращение в этой точке можно представить в виде $(*)$ где $f'(x) = A$, и обратно, если приращение функции в точке x можно представить в таком виде, то она имеет производную в точке x.

Определение. *Если приращение функции в точке* x *можно представить в виде*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

где A *– некоторое число и* $\alpha \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$, *то функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x.

Для дифференцируемости функции в точке необходимо и достаточно существования производной в этой точке.

Замечание. Условие дифференцируемости можно записать в виде

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Имеем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Дифференциал функции

Приращение Δy дифференцируемой функции состоит из двух слагаемых: $f'(x) \cdot \Delta x$ и $o(\Delta x)$, если $f'(x) \neq 0$, то $f'(x) \cdot \Delta x = O(\Delta x)$.

Определение. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в точке* x *называется линейная функция аргумента* Δx *:*

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Если $f'(x) \neq 0$, то $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ является главной частью Δy при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом независимой переменной x *называется приращение этой переменной:*

$$dx = \Delta x$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

$$dy = d\sin x = \cos x\, dx$$

В частности,

$$d(\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}dx,$$

$$d(\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{3},\Delta x=0{,}1} = 0{,}05$$

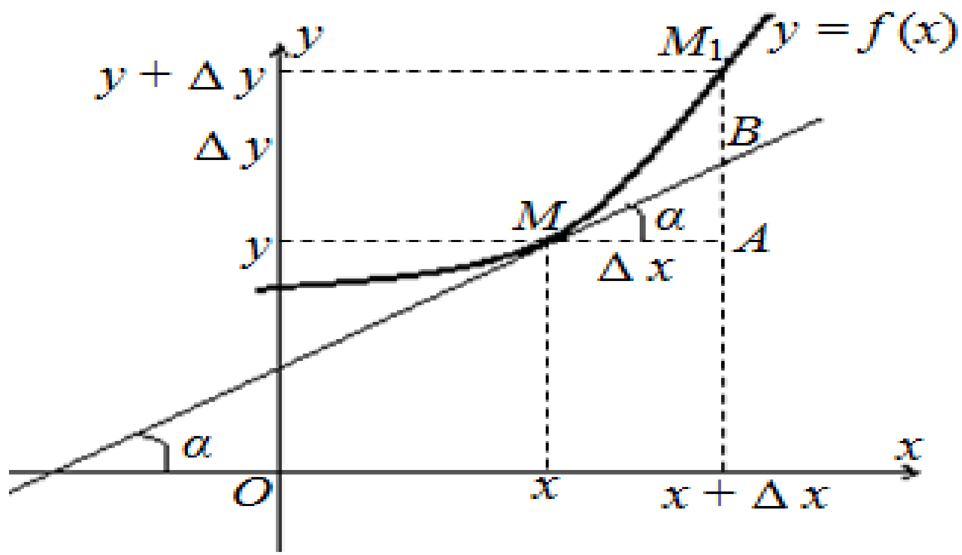
Физический смысл дифференциала функции

Пусть x – время, $y = f(x)$ – координата точки на оси OY в момент времени x.
Тогда $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение координаты за промежуток времени Δx.
При этом $dy = f'(x) \cdot \Delta x = v(x) \cdot \Delta x$, то есть:

Дифференциал равен тому изменению координаты, которое имела бы точка, если бы ее скорость $v(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$ была постоянной, равной $f'(x)$.

Геометрический смысл дифференциала функции

Дифференциал dy *равен тому изменению функции* $y = f(x)$ *при изменении аргумента на* Δx, *которое имела бы функция, если бы на отрезке* $[x, x + \Delta x]$ *она была линейной с угловым коэффициентом, равным* $f'(x)$.



Использование дифференциала для приближенных вычислений

С помощью формулы

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$

можно приближенно вычислить $f(x + \Delta x)$ при малых Δx, если известны $f(x)$ и $f'(x)$.

Действительно,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Откуда получаем:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Пример 3. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$

$$f(x) = \arcsin x, \quad x = 0{,}5, \qquad \Delta x = 0{,}01$$

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + \arcsin' x \cdot \Delta x$$

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = 0{,}513$$

Замечание. Можно показать, что абсолютная погрешность формулы не превышает величины $\mathrm{M}(\Delta x)^2$, где М – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$.

Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$, где x – независимая переменная, выражается формулой

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

где $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции dy называется также *первым дифференциалом функции*.

Если x не независимая переменная, а дифференцируемая функция некоторой независимой переменной t: $x = \varphi(t)$, то

$$y = f(x) = f\big(\varphi(t)\big) = F(t)$$

– сложная дифференцируемая функция независимой переменной t.

$$dy = F'(t) \cdot dt$$
$$dy = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала функции*.

Замечание. *Инвариантна (неизменна) только форма, суть меняется, так как*

$$dx = \varphi'(t) \cdot dt \neq \Delta x$$

Основные теоремы о дифференциалах

соответствуют теоремам о производных:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$
$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Дифференциал сложной функции
$y = f(x) = f\big(\varphi(x)\big)$ равен:

$$dy = f_{\varphi}{}' \cdot d\varphi$$

Таблица дифференциалов

1. $d(c) = 0,\ c = \text{const}$
2. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$
3. $d(a^x) = a^x \cdot \ln a dx$
4. $d(e^x) = e^x dx$
5. $d(\log_a x) = \dfrac{dx}{x \ln a}$
6. $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$
7. $d(\sin x) = \cos x dx$
8. $d(\cos x) = -\sin x dx$
9. $d(\sqrt{x}) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
10. $d(\mathrm{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
11. $d(\mathrm{ctg} x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
12. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $d(\mathrm{arctg}\ x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$
15. $d(\mathrm{arcctg}\ x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$
16. $d(\mathrm{sh}\ x) = \mathrm{ch}\ x dx$
17. $d(\mathrm{ch}\ x) = \mathrm{sh}\ x dx$
18. $d(\mathrm{th}\ x) = \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $d(\mathrm{cth}\ x) = -\dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}$

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a; b)$. Тогда производная $f'(x)$ является функцией, определенной на $(a; b)$.
Если $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке из $(a; b)$, то производная от $f'(x)$ в точке x называется *второй производной функции $f(x)$ в точке x* (или производной второго порядка) и обозначается $f''(x)$.

Производная n -го порядка функции $y = f(x)$ определяется как производная от производной $(n-1)$-го порядка.

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Физический смысл второй производной

Пусть x – время, а $y = f(x)$ – координаты точки, движущейся по оси OY, в момент времени x, то $v(x) = f'(x)$ - мгновенная скорость точки в момент времени x, а

$$f''(x) = v'(x) = a(x)$$

– *ускорение точки в момент времени* x.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = x^{\alpha}$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\dots\dots.$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a; b)$.

Дифференциал второго порядка (или второй дифференциал) d^2y функции $y = f(x)$ определим как дифференциал от дифференциала

$$d^2y = d(dy),$$

при этом приращение дифференциала независимой переменной (x или t) будем снова считать равным dx или dt.

Дифференциал n-го порядка функции $y = f(x)$

$$d^{(n)}y = d\left(d^{(n-1)}y\right).$$

Пусть x – независимая переменная, тогда
$dy = f'(x) \cdot dx$, где $dx = \Delta x$.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) =$$
$$= (f'(x) \cdot dx)'\, dx = f''(x)(dx)^2$$

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

Аналогично,

$$d^{(n)}y = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Если x не независимая переменная, а дифференцируемая функция некоторой независимой переменной t, то

$$dy = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\right) \cdot dt =$$

$$\left(f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\right)' \cdot dt \cdot dt =$$

$$\left(f''\big(\varphi(t)\big) \cdot \big(\varphi'(t)\big)^2 + f'\big(\varphi(t)\big)\varphi''(t)\right) \cdot d^2t.$$

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

Форма второго дифференциала не инвариантна.

Пример 5. Найти d^3y, $y = e^{-3x}$,
где x – независимая переменная.

$$dy = -3e^{-3x}dx,$$

$$d^2y = 9e^{-3x}dx^2,$$

$$d^3y = -27e^{-3x}dx^3.$$

Исследование функций с помощью производных

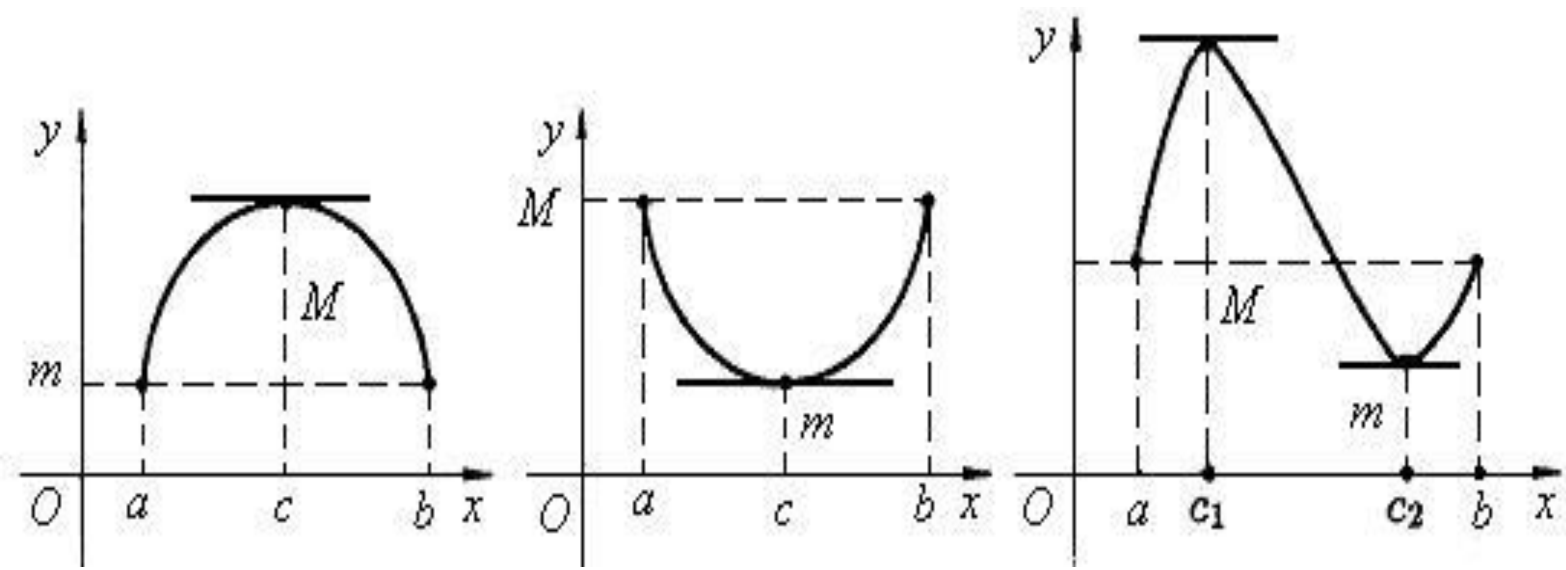
Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. *Пусть выполнены условия.*

- *функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на сегменте* $[a; b]$;
- $y = f(x)$ *дифференцируема в интервале* $(a; b)$.
- $f(a) = f(b)$;

Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, *у которой* $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси ОХ.



Физический смысл теоремы Ролля

Пусть x – время, а $y = f(x)$ – координаты точки, движущейся по оси OY, в момент времени x. В моменты времени $a; b$ точка имеет одну и туже координату $f(a) = f(b)$. В промежутке времени от a до b точка каким-то образом движется и в момент времени b возвращается в исходное положение. Для того, чтобы вернуться назад, она должна в некоторый момент времени c остановиться, $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. *Пусть выполнены условия:*

- *функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на сегменте* $[a; b]$*;*
- $y = f(x)$ *дифференцируема в интервале* $(a; b)$.

Тогда найдется точка $c \in (a; b)$, *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

■ Введем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

$F(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a; b]$;
дифференцируема в интервале $(a; b)$;
$F(a) = F(b) = f(a)$.

По теореме Ролля найдется $c \in (a; b)$, у которой $F'(c) = 0$, то есть

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

■

Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - угловой коэффициент секущей АВ, $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной в точке $x = c$.

На графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная параллельна секущей АВ.

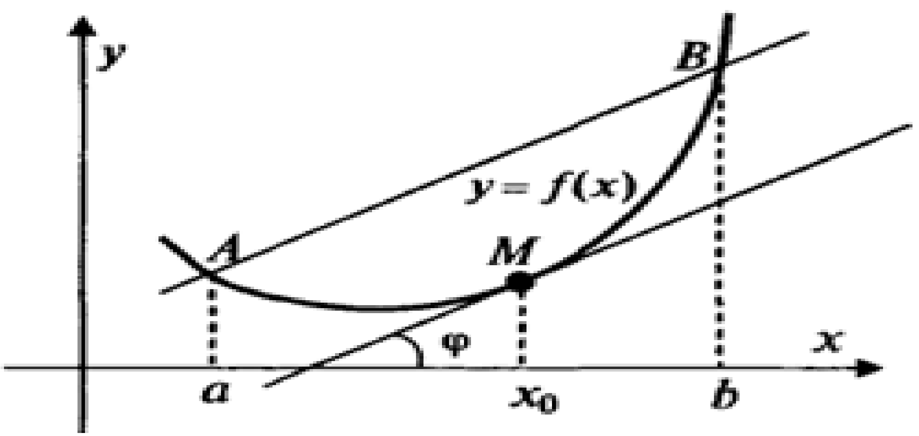


рис 1

Физический смысл теоремы Лагранжа

Пусть x – время, а $y = f(x)$ – координаты точки, движущейся по оси OY, в момент времени x. Тогда $f'(c)$ – мгновенная скорость точки в момент c, а $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – средняя скорость точки на промежутке $[a; b]$.

Формула Лагранжа

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

показывает, что *существует такой момент времени c, в который мгновенная скорость точки равна ее средней скорости на промежутке*.

Следствие1. *Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.*

Следствие 2. *Если две функции имеют равные производные на некотором интервале, то они отличаются на константу на этом интервале.*

Пример 6. Доказать, что

$$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

■ Пусть $f(x) = arcsinx + arccosx$, тогда для всех x, $-1 < x < 1$

$$f'(x) = [arcsinx]' + [arccosx]'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

Следовательно,

$$f(x) = arcsinx + arccosx = \mathrm{C}$$

Положив $x = 0$, находим $0 + \frac{\pi}{2} = \mathrm{C}$, $\mathrm{C} = \frac{\pi}{2}$ ■

Теорема Коши. *Пусть выполнены условия:*

- *функция* $f(x)$ и $g(x)$ *определены и непрерывны на сегменте* $[a; b]$;
- $f(x)$ и $g(x)$ *дифференцируемы в интервале* $(a; b)$;
- $g'(x) \neq 0$ *в интервале* $(a; b)$.

Тогда найдется точка $c \in (a; b)$, *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- Отметим, что $g(b) \neq g(a)$.

Введем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(x) - g(a)\big)$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

$F(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a; b]$;

дифференцируема в интервале $(a; b)$;

$$F(a) = F(b) = f(a)$$

По теореме Ролля найдется $c \in (a; b)$, у которой $F'(c) = 0$, то есть

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

Замечание. *Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши.*

Правило Лопиталя

Пусть выполнены условия:

- *функция* $f(x)$ и $g(x)$ *определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки* a;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;
- $g'(x) \neq 0$ *в указанной проколотой окрестности точки* a;
- *существует* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *и выполнено:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$