Решение СЛАУ методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)^{я} \ + 1{,}5(1) \\ (3)^{я} \ + 0{,}5(1) \end{array} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 + 1{,}5 \cdot (-2) & 1 + 1{,}5 \cdot 1 & -6 + 1{,}5 \cdot (-3) & -9 + 1{,}5 \cdot (-8) \\ 1 + 0{,}5 \cdot (-2) & 1 + 0{,}5 \cdot 1 & 2 + 0{,}5 \cdot (-3) & 5 + 0{,}5 \cdot (-8) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) (3) + 0{,}2(2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & 0 & -1{,}6 & -3{,}2 \end{array}\right)$$

Запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -1{,}6x_3 = -3{,}2 \\ 2{,}5x_2 - 10{,}5x_3 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ 2{,}5x_2 - 21 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 6 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Методы решения СЛАУ

Метод Гаусса

Оригинальная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Прямой ход: приведём матрицу к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} (2)^{\text{я строка}} + 1{,}5 \cdot (1)^{\text{я строка}} \\ (3)^{\text{я строка}} + 0{,}5 \cdot (1)^{\text{я строка}} \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 + 1{,}5 \cdot (-2) & 1 + 1{,}5 \cdot 1 & -6 + 1{,}5 \cdot (-3) & -9 + 1{,}5 \cdot (-8) \\ 1 + 0{,}5 \cdot (-2) & 1 + 0{,}5 \cdot 1 & 2 + 0{,}5 \cdot (-3) & 5 + 0{,}5 \cdot (-8) \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) (3)^{\text{я строка}} + 0{,}2 * (2)^{\text{я строка}} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & -0{,}5 + 0{,}2 \cdot 2{,}5 & 0{,}5 + 0{,}2 \cdot (-10{,}5) & 1 + 0{,}2 \cdot (-21) \end{array}\right) =$$

Получаем треугольный вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & 0 & -1{,}6 & -3{,}2 \end{array}\right)$$

Обратный ход: запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -1{,}6x_3 = -3{,}2 \\ 2{,}5x_2 - 10{,}5x_3 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ 2{,}5x_2 - 21 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 6 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Модифицированный метод Гаусса

Необходимо поменять строки местами таким образом, чтобы ведущим элементом был максимальный по модулю среди элементов данного столбца ниже главной диагонали.

В данном примере вторую строку нужно поставить на место первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

После перестановки строк имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2) - 1/3(1) \\ (3) + 2/3(1) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \end{array}\right) (3) + 5/4(2)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -2x_3 = -4 \\ \frac{-4}{3}x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{-4}{3}x_2 + 8 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{-4}{3}x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 + 0 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Модифицированный метод Гаусса

Необходимо поменять строки местами таким образом, чтобы ведущим элементом был максимальный по модулю среди элементов данного столбца ниже главной диагонали.

В данном примере вторую строку нужно поставить на место первой.

Оригинальная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)^{я\ строка} - 1/3 \cdot (1)^{я\ строка} \\ (3)^{я\ строка} + 2/3 \cdot (1)^{я\ строка} \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \end{array}\right) (3)^{я\ строка} + 5/4 \cdot (1)^{я\ строка} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -4{,}75 & -9{,}5 \end{array}\right)$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} -4{,}75x_3 = -9{,}5 \\ \frac{5}{3}x_2 - 7x_3 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{5}{3}x_2 - 14 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{5}{3}x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 + 0 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

1. Вычисление чисел с погрешностью

$x = 2{,}384 \ \pm 0{,}021$
$y = 9{,}485 \ \pm 0{,}014$

$x + y = 2{,}384 + 9{,}485 \pm (0{,}021 + 0{,}014) = 11{,}869 \pm 0{,}035$
$x - y = 2{,}384 - 9{,}485 \pm (0{,}021 + 0{,}014) = \ -7{,}101 \ \pm 0{,}035$
В операциях с делением и умножением переходим от абсолютной погрешности к относительной.

$$x \cdot y = 2{,}384\left(1 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384}\right) \cdot 9{,}485\left(1 \pm \frac{0{,}014}{9{,}485}\right) = 2{,}384(1 \pm 0{,}009) \cdot 9{,}485(1 \pm 0{,}001)$$
$$= 22{,}612(1 \pm 0{,}01) = 22{,}612 \pm 0{,}226$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2{,}384\left(1 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384}\right)}{9{,}485\left(1 \pm \frac{0{,}014}{9{,}485}\right)} = \frac{2{,}384(1 \pm 0{,}009)}{9{,}485(1 \pm 0{,}001)} = 0{,}251(1 \pm 0{,}01) = 0{,}251 \pm 0{,}002$$

$$y^2 = 9{,}485^2\left(1 \pm \frac{2 \cdot 0{,}014}{9{,}485}\right) = 89{,}965(1 \pm 0{,}003) = 89{,}965 \pm 0{,}269$$

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{11{,}869\left(1 \pm \frac{0{,}035}{11{,}869}\right)}{-7{,}101\left(1 \pm \frac{0{,}035}{-7{,}101}\right)} = \frac{11{,}869(1 \pm 0{,}003)}{-7{,}101(1 \pm 0{,}005)} = -1{,}761(1 \pm 0{,}008) = -1{,}671 \pm 0{,}013$$

$$\sqrt{x} = 2{,}384^{1/2}\left(1 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}021}{2{,}384}\right) = 2{,}384^{1/2}\left(1 \pm \frac{1}{2} 0{,}009\right) = 1{,}544(1 \pm 0{,}004) = 1{,}544 \pm 0{,}006$$

$$x - y^2 = 2{,}384 \ \pm 0{,}021 - \ 89{,}965 \pm 0{,}269 = -87{,}581(0{,}021 + 0{,}269) = -87{,}581 \pm 0{,}290$$

$$sinx = \sin 2{,}384 \pm \cos 2{,}384 \cdot 0{,}021 = 0{,}69 \pm 0{,}73 \cdot 0{,}021 = 0{,}69 \pm 0{,}015$$
$$siny = \sin 9{,}485 \pm \cos 9{,}485 \cdot 0{,}014 = 0{,}06 \pm 0{,}1 \cdot 0{,}014 = 0{,}06 \pm 0{,}001$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot (x - y^2)}{sinx + y^2} = \frac{(1{,}544 \pm 0{,}006) \cdot (-87{,}581 \pm 0{,}290)}{(0{,}69 \pm 0{,}015) + (89{,}965 \pm 0{,}269)} =$$

$$= \frac{1{,}544(1 \pm 0{,}004) \cdot -87{,}581(1 \pm 0{,}003)}{90{,}655 \pm 0{,}296} = \frac{-135{,}225(1 \pm 0{,}007)}{90{,}655(1 \pm 0{,}003)} =$$

$$= -1{,}495(1 \pm 0{,}01) = -1{,}492 \pm 0{,}15$$

Вычисление чисел с погрешностью

$x = 2{,}384 \ \pm 0{,}021$
$y = 9{,}485 \ \pm 0{,}014$

$x + y = 2{,}384 + 9{,}485 \pm (0{,}021 + 0{,}014) = 11{,}869 \pm 0{,}035$
$x - y = 2{,}384 - 9{,}485 \pm (0{,}021 + 0{,}014) = \ -7{,}101 \ \pm 0{,}035$

В операциях с делением и умножением переходим от абсолютной погрешности к относительной.

$$x \cdot y = 2{,}384\left(1 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384}\right) \cdot 9{,}485\left(1 \pm \frac{0{,}014}{9{,}485}\right) = 2{,}384(1 \pm 0{,}009) \cdot 9{,}485(1 \pm 0{,}001) =$$

$$22{,}612(1 \pm (0{,}009 + 0{,}001)) = 22{,}612(1 \pm 0{,}01) = 22{,}612 \pm 0{,}226$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2{,}384\left(1 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384}\right)}{9{,}485\left(1 \pm \frac{0{,}014}{9{,}485}\right)} = \frac{2{,}384(1 \pm 0{,}009)}{9{,}485(1 \pm 0{,}001)} = 0{,}251(1 \pm 0{,}01) = 0{,}251 \pm 0{,}002$$

$$y^2 = 9{,}485^2\left(1 \pm \frac{2 \cdot 0{,}014}{9{,}485}\right) = 89{,}965(1 \pm 0{,}003) = 89{,}965 \pm 0{,}269$$

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{11{,}869\left(1 \pm \frac{0{,}035}{11{,}869}\right)}{-7{,}101\left(1 \pm \frac{0{,}035}{-7{,}101}\right)} = \frac{11{,}869(1 \pm 0{,}003)}{-7{,}101(1 \pm 0{,}005)} = -1{,}761(1 \pm 0{,}008) = -1{,}671 \pm 0{,}013$$

$$\sqrt{x} = 2{,}384^{1/2}\left(1 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}021}{2{,}384}\right) = 2{,}384^{1/2}\left(1 \pm \frac{1}{2} 0{,}009\right) = 1{,}544(1 \pm 0{,}004) = 1{,}544 \pm 0{,}006$$

$$x - y^2 = 2{,}384 \ \pm 0{,}021 - \ 89{,}965 \pm 0{,}269 = -87{,}581(0{,}021 + 0{,}269) = -87{,}581 \pm 0{,}290$$

$$sinx = sin\, 2{,}384 \pm cos\, 2{,}384 \cdot 0{,}021 = 0{,}69 \pm 0{,}73 \cdot 0{,}021 = 0{,}69 \pm 0{,}015$$

$$siny = sin\, 9{,}485 \pm cos\, 9{,}485 \cdot 0{,}014 = 0{,}06 \pm 0{,}1 \cdot 0{,}014 = 0{,}06 \pm 0{,}001$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot (x - y^2)}{sinx + y^2} = \frac{(1{,}544 \pm 0{,}006) \cdot (-87{,}581 \pm 0{,}290)}{(0{,}69 \pm 0{,}015) + (89{,}965 \pm 0{,}269)} = \frac{1{,}544(1 \pm 0{,}004) \cdot -87{,}581(1 \pm 0{,}003)}{90{,}655 \pm 0{,}296}$$

$$= \frac{-135{,}225(1 \pm 0{,}007)}{90{,}655(1 \pm 0{,}003)} = -1{,}495(1 \pm 0{,}01) = -1{,}492 \pm 0{,}15$$

$$\ln x = \ln 2{,}384 \pm \frac{1}{2{,}384} \cdot 0{,}021 = \ln 2{,}384 \pm \frac{0{,}021}{2{,}384} = 0{,}869 \pm 0{,}009$$

2. Метод простых итераций

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\!:5 \\ /\!:-10 \\ /\!:5 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 2{,}4 \end{array}\right) \qquad A = l + C$$

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^{\infty} = \max(0{,}2 + 0{,}4; 0{,}2 + 0{,}3; 0{,}2 + 0{,}4) = \max(0{,}6; 0{,}5; 0{,}6) = 0{,}6$$
$$\|B\|^{\infty} = \max(0{,}6; 0{,}4; 2{,}4) = 2{,}4$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^{k}$$

<u>Шаг 1:</u> (начальный вектор x - нулевой)

$$x^{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 2:</u>

$$x^{2} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}88 \\ -0{,}6 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ 1 \\ 2{,}12 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 3:</u>

$$x^{3} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ 1 \\ 2{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}648 \\ -0{,}692 \\ 0{,}344 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}048 \\ 1{,}092 \\ 2{,}056 \end{pmatrix};$$

Метод простых итераций

Оригинальная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)^{\text{я строка}} \div 5 \\ (2)^{\text{я строка}} \div -10 \\ (3)^{\text{я строка}} \div 5 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 2{,}4 \end{array}\right)$$

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^{\infty} = \max(0{,}2 + 0{,}4; 0{,}2 + 0{,}3; 0{,}2 + 0{,}4) = \max(0{,}6; 0{,}5; 0{,}6) = 0{,}6$$
$$\|B\|^{\infty} = \max(0{,}6; 0{,}4; 2{,}4) = 2{,}4$$

$$N = \left[\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \|C\|^{\infty})}{\|B\|^{\infty}}\right)}{\ln(\|C\|^{\infty})}\right] = \left[\frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot (1 - 0{,}6)}{2{,}4}\right)}{\ln(0{,}6)}\right] = \left[\frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot (1 - 0{,}6)}{2{,}4}\right)}{\ln(0{,}6)}\right] = [21{,}58] = 22$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^{k}$$

<u>Шаг 1:</u> (начальный вектор x - нулевой)

$$x^{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 2:</u>

$$x^{2} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \cdot 0.6 - 0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 2.4 \\ 0{,}2 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 - 0.3 \cdot 2.4 \\ 0{,}2 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.4 - 0 \cdot 2.4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}88 \\ -0{,}6 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ 1 \\ 2{,}12 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 3:</u>

$$x^{3} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ 1 \\ 2{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}648 \\ -0{,}692 \\ 0{,}344 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}048 \\ 1{,}092 \\ 2{,}056 \end{pmatrix};$$

3. Метод Зейделя

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} /:5 \\ /:-10 \\ /:5 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array}\right)$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^k$$

<u>Шаг 1:</u>

$$\begin{cases} x_1^1 = 0,6 - (-0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0) = 0,6 \\ x_2^1 = 0,4 - (0,2 \cdot 0,6 - 0,3 \cdot 0) = 0,4 - 0,12 = 0,28 \\ x_3^1 = 2,4 - (0,2 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,28) = 2,4 - 0,12 - 0,112 = 2,168 \end{cases}$$

<u>Шаг 2:</u>

$$\begin{cases} x_1^2 = 0,6 - (-0,2 \cdot 0,28 + 0,4 \cdot 2,168) = 0,6 + 0,056 - 0,8672 = -0,2112 \\ x_2^2 = 0,4 - (0,2 \cdot (-0,2112) - 0,3 \cdot 2,168) = 0,4 + 0,04224 + 0,6504 = 1,0926 \\ x_3^2 = 2,4 - (0,2 \cdot (-0,2112) - 0,4 \cdot 1,0926) = 2,4 + 0,04224 - 0,43704 = 2,0052 \end{cases}$$

<u>Шаг 3:</u>

$$\begin{cases} x_1^3 = 0,6 - (-0,2 \cdot 1,0926 + 0,4 \cdot 2,0052) = 0,6 + 0,21852 - 0,80208 \approx 0,0164 \\ x_2^3 = 0,4 - (0,2 \cdot 0,0164 - 0,3 \cdot 2,0052) = 0,4 - 0,003288 + 0,60156 \approx 0,9983 \\ x_3^3 = 2,4 - (0,2 \cdot 0,0164 - 0,4 \cdot 0,9983) = 2,4 - 0,00328 - 0,30932 \approx 1,9974 \end{cases}$$

$$N = \left(\frac{\ln \frac{10^{-4}(1-0,6)}{2,4}}{\ln 0,6}\right) + 1 = \left(\frac{\ln \frac{4}{240000}}{-0,511}\right) + 1 \approx 22,5$$

Метод Зейделя

Оригинальная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \qquad \varepsilon = 10^{-4} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)^{\text{я строка}} \div 5 \\ (2)^{\text{я строка}} \div -10 \\ (3)^{\text{я строка}} \div 5 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array}\right)$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^k$$

<u>Шаг 1:</u>

$$\begin{cases} x_1^1 = 0,6 - (-0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0) = 0,6 \\ x_2^1 = 0,4 - (0,2 \cdot 0,6 - 0,3 \cdot 0) = 0,4 - 0,12 = 0,28 \\ x_3^1 = 2,4 - (0,2 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,28) = 2,4 - 0,12 - 0,112 = 2,168 \end{cases}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,28 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,28 \\ 2,168 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 2:</u>

$$\begin{cases} x_1^2 = 0,6 - (-0,2 \cdot 0,28 + 0,4 \cdot 2,168) = 0,6 + 0,056 - 0,8672 = -0,2112 \\ x_2^2 = 0,4 - (0,2 \cdot (-0,2112) - 0,3 \cdot 2,168) = 0,4 + 0,04224 + 0,6504 = 1,0926 \\ x_3^2 = 2,4 - (0,2 \cdot (-0,2112) - 0,4 \cdot 1,0926) = 2,4 + 0,04224 - 0,43704 = 2,0052 \end{cases}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,28 \\ 2,168 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 0,28 \\ 2,168 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 1,0926 \\ 2,168 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 1,0926 \\ 2,0052 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 3:</u>

$$\begin{cases} x_1^3 = 0,6 - (-0,2 \cdot 1,0926 + 0,4 \cdot 2,0052) = 0,6 + 0,21852 - 0,80208 \approx 0,0164 \\ x_2^3 = 0,4 - (0,2 \cdot 0,0164 - 0,3 \cdot 2,0052) = 0,4 - 0,003288 + 0,60156 \approx 0,9983 \\ x_3^3 = 2,4 - (0,2 \cdot 0,0164 - 0,4 \cdot 0,9983) = 2,4 - 0,00328 - 0,30932 \approx 1,9974 \end{cases}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 1,0926 \\ 2,0052 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0,0164 \\ 1,0926 \\ 2,0052 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0,0164 \\ 0,9983 \\ 2,0052 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0,0164 \\ 0,9983 \\ 1,9974 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^\infty = \max(0,2 + 0,4; 0,2 + 0,3; 0,2 + 0,4) = \max(0,6; 0,5; 0,6) = 0,6$$
$$\|B\|^\infty = \max(0,6; 0,4; 2,4) = 2,4$$

$$N = \left[\frac{ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \|C\|^\infty)}{\|B\|^\infty}\right)}{ln(\|C\|^\infty)} \right] = \left[\frac{ln \frac{10^{-4}(1 - 0,6)}{2,4}}{ln 0,6} \right] = \left[\frac{ln \frac{4}{240000}}{-0,511} \right] = 22$$

4. Метод половинного деления

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

Находим произведение значений функции в крайних точках:
$f(a) \cdot f(b) = (1^2 - 3) \cdot (2^2 - 3) = -2$

Шаг 1:
Находим середину интервала:
$c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5 \qquad x^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25 \qquad \varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} = 0{,}5$
В новых интервалах:
(1; 1,5) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = -2 \cdot (-0{,}75) = 1{,}5$
(1,5; 2) $f(c) \cdot f(b) = (-0{,}75) \cdot 1 = -0{,}75$ < 0, выбираем этот интервал

Шаг 2:
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 2)
Находим середину интервала:
$c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75 \qquad x^2 = 1{,}75^2 = 3{,}0625 \qquad \varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} = 0{,}25$
В новых интервалах:
(1,5; 1,75) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}75) \cdot 0{,}0625 = -0{,}046875$ < 0, выбираем этот интервал
(1,75; 2) $f(c) \cdot f(b) = 0{,}0625 \cdot 1 = 0{,}0625$

Шаг 3:
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 1,75)
Находим середину интервала:
$c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1{,}5+1{,}75}{2} = 1{,}625 \qquad x^2 = 1{,}625^2 = 2{,}640625 \qquad \varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} = 0{,}125$
В новых интервалах:
(1,5; 1,625) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}75) \cdot (-0{,}36) = 0{,}27$
(1,625; 1,75) $f(c) \cdot f(b) = (-0{,}36) \cdot 0{,}0625 = -0{,}0225$ < 0, выбираем этот интервал

Шаг 4:
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,625; 1,75)
Находим середину интервала:
$c = \dfrac{1{,}625+1{,}75}{2} = 1{,}6875 \qquad x^2 = 1{,}6875^2 = 2{,}84765625 \qquad \varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} = 0{,}0625$
В новых интервалах:
(1,625; 1,6875) $f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}36) \cdot 2{,}848 = -1{,}025$ < 0, выбираем этот интервал
(1,6875; 1,75) $f(c) \cdot f(b) = 2{,}848 \cdot 0{,}0625 = 0{,}178$

Шаг 4:
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,625; 1,6875)
…..

Методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Метод половинного деления

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

Находим произведение значений функции в крайних точках:
$f(a) \cdot f(b) = (1^2 - 3) \cdot (2^2 - 3) = -2$

<u>Шаг 1:</u>
Находим середину интервала:
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ $\quad f(\mathrm{c}) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75$ $\quad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}5$
В новых интервалах:
(1; 1,5) $\quad f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = -2 \cdot (-0{,}75) = 1{,}5$
(1,5; 2) $\quad f(c) \cdot f(b) = (-0{,}75) \cdot 1 = -0{,}75$ < 0, выбираем этот интервал

<u>Шаг 2:</u>
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 2)
Находим середину интервала:
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$ $\quad f(\mathrm{c}) = 1{,}75^2 - 3 = 0{,}0625$ $\quad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}25$
В новых интервалах:
(1,5; 1,75) $\quad f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}75) \cdot 0{,}0625 = -0{,}046875$ < 0, выбираем этот интервал
(1,75; 2) $\quad f(c) \cdot f(b) = 0{,}0625 \cdot 1 = 0{,}0625$

<u>Шаг 3:</u>
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 1,75)
Находим середину интервала:
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}75}{2} = 1{,}625$ $\quad f(\mathrm{c}) = 1{,}625^2 - 3 = -0{,}36$ $\quad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}125$
В новых интервалах:
(1,5; 1,625) $\quad f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}75) \cdot (-0{,}36) = 0{,}27$
(1,625; 1,75) $\quad f(c) \cdot f(b) = (-0{,}36) \cdot 0{,}0625 = -0{,}0225$ < 0, выбираем этот интервал

<u>Шаг 4:</u>
Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,625; 1,75)
Находим середину интервала:
$c = \frac{1{,}625+1{,}75}{2} = 1{,}6875$ $\quad f(\mathrm{c}) = 1{,}6875^2 - 3 = -0{,}152$ $\quad \varepsilon = \frac{|b-a|}{2} = 0{,}0625$
В новых интервалах:
(1,625; 1,6875) $\quad f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}36) \cdot 2{,}848 = -1{,}025$ < 0, выбираем этот интервал
(1,6875; 1,75) $\quad f(c) \cdot f(b) = 2{,}848 \cdot 0{,}0625 = 0{,}178$

(1,625; 1,6875) $\quad f(a) \cdot f(\mathrm{c}) = (-0{,}36) \cdot (-0{,}152) = 0{,}054$
(1,6875; 1,75) $\quad f(c) \cdot f(b) = (-0{,}152) \cdot 0{,}0625 = -0{,}0095$ < 0, выбираем этот интервал

5. Метод хорд

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

В отличие от метода половинного деления, точка c является не серединой интервала, а вычисляется по формуле

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

<u>Шаг 1:</u>
Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 + 4}{1 + 2} = 1{,}666667$$

В интервалах:
(1; 1,666667) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}444442$
(1,666667; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}222221$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 2:</u>
Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}666667 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}222221)}{1 - (-0{,}222221)} = 1{,}727273$$

В интервалах:
(1,666667; 1,727273) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}003673$
(1,727273; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}016528$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 3:</u>
Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}727273 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}016528)}{1 - (-0{,}016528)} = 1{,}731707$$

В интервалах:
(1,727273; 1,731707) $f(a) \cdot f(\text{c}) = 0{,}000020$
(1,731707; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}001191$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 4:</u>
Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}731707 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}001191)}{1 - (-0{,}001191)} = 1{,}732026$$

Метод хорд

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

В отличие от метода половинного деления, точка c является не серединой интервала, а вычисляется по формуле

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\varepsilon = c_n - c_{n-1}$$

<u>Шаг 1:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 + 4}{1 + 2} = 1{,}666667$$

В интервалах:

(1; 1,666667) $f(a) \cdot f(c) = 0{,}444442$

(1,666667; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}222221 < 0$, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 2:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}666667 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}222221)}{1 - (-0{,}222221)} = 1{,}727273$$

В интервалах:

(1,666667; 1,727273) $f(a) \cdot f(c) = 0{,}003673$

(1,727273; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}016528 < 0$, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 3:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}727273 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}016528)}{1 - (-0{,}016528)} = 1{,}731707$$

В интервалах:

(1,727273; 1,731707) $f(a) \cdot f(c) = 0{,}000020$

(1,731707; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}001191 < 0$, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 4:</u>

Вычисляем по формуле значение с для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1{,}731707 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}001191)}{1 - (-0{,}001191)} = 1{,}732026$$

В интервалах:

(1,731707; 1,732026) $f(a) \cdot f(c) = 0{,}000000102$

(1,732026; 2) $f(c) \cdot f(b) = -0{,}0000854 < 0$, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 5:</u>

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,732026; 2)

6. …..

Метод Ньютона

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad f(x) = x^2 - 3; \qquad f'(x) = 2x$$

В качество начальной точки x_0 выбираем такую, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции, в нашем случае $x_0 = 2$

$x_0 = 2$

$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$

Аналогично для последующих x

$x_2 = 1{,}75 - \frac{1{,}75^2 - 3}{2 \cdot 1{,}75} = 1{,}75 - \frac{3{,}0625 - 3}{3{,}5} = 1{,}75 - 0{,}017857 = 1{,}732143$

$x_3 = 1{,}732143 - \frac{1{,}732143^2 - 3}{2 \cdot 1{,}7732143} = 1{,}732143 - 0{,}000092 = 1{,}732051$

$x_4 = 1{,}732051 - \frac{1{,}732051^2 - 3}{2 \cdot 1{,}732051} = 1{,}732051 - 0{,}000000192431 =$

$$= 1{,}7320503333$$

Для сравнения, найдем точное решение данного уравнения

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075$$

Как видно, приближенное решение совпадает с точным на 6 знаков после запятой.

Метод Ньютона

$\boldsymbol{x^2 - 3 = 0}$ Начальный интервал: (1; 2)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad f(x) = x^2 - 3; \qquad f'(x) = 2x$$

$\varepsilon = x_n - x_{n+1}$

В качестве начальной точки x_0 выбираем такую, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции, в нашем случае $x_0 = 2$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$$

Аналогично для последующих x

$$x_2 = 1{,}75 - \frac{1{,}75^2 - 3}{2 \cdot 1{,}75} = 1{,}75 - \frac{3{,}0625 - 3}{3{,}5} = 1{,}75 - 0{,}017857 = 1{,}732143$$

$$x_3 = 1{,}732143 - \frac{1{,}732143^2 - 3}{2 \cdot 1{,}7732143} = 1{,}732143 - 0{,}000092 = 1{,}732051$$

$$x_4 = 1{,}732051 - \frac{1{,}732051^2 - 3}{2 \cdot 1{,}732051} = 1{,}732051 - 0{,}000000192431 = \\ = 1{,}7320503333$$

Для сравнения, найдем точное решение данного уравнения

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075$$

Как видно, приближенное решение совпадает с точным на 6 знаков после запятой.

8. Решение СНУ методом Ньютона

(обратная матрица)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix}; \qquad W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & x/y^2 \end{pmatrix}; \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Шаг 1:

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad W(x^0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Найдем обратную матрицу:

$$\Delta W(x^0) = -8 - 3 = -11$$

$$\Delta_{11} = -2 \qquad \Delta_{21} = 3$$
$$\Delta_{12} = 1 \qquad \Delta_{22} = 4$$

$$W(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad W^T(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix};$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/11 \\ 10/11 \end{pmatrix};$$

Шаг 2:

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} (20/11)^2 + (10/11)^3 - 4 \\ \dfrac{(20/11)}{(10/11)} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76/1331 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (20/11) & 3 \cdot (10/11)^2 \\ \dfrac{1}{10/11} & -2 \end{pmatrix};$$

Решение СНУ методом Ньютона (через обратную матрицу)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases} \qquad F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon = x^n - x^{n-1}$$

$$W = \begin{pmatrix} f'(x)_{1\text{ое уравнение}} & f'(y)_{1\text{ое уравнение}} \\ f'(x)_{2\text{ое уравнение}} & f'(y)_{2\text{ое уравнение}} \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}; \qquad x^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 1:</u>

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad W(x^0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Найдем обратную матрицу:

$$\Delta W = w_{00} * w_{11} - w_{01} * w_{10} \qquad \Delta W(x^0) = -8 - 3 = -11$$

$$\begin{matrix} \Delta_{11} = -2 & \Delta_{21} = 3 \\ \Delta_{12} = 1 & \Delta_{22} = 4 \end{matrix} \qquad W(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad W^T(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = \frac{1}{\Delta W} * W^T(x^0) = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix};$$

$$x^1 = x^0 - W^{-1}(x^0) * F(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/11 \\ 10/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8182 \\ 0{,}9091 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 2:</u>

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} (1{,}8182)^2 + (0{,}9091)^3 - 4 \\ \dfrac{1{,}8182}{0{,}9091} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76/1331 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta W(x^1) = -7{,}99 - 2{,}99$$

$$= -10{,}98$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (1{,}8182) & 3 \cdot (0{,}9091)^2 \\ \frac{1}{0{,}9091} & -\frac{1{,}8182}{(0{,}9091)^2} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \Delta_{11} = -\frac{1{,}8182}{(0{,}9091)^2} & \Delta_{21} = 3 \cdot (0{,}9091)^2 \\ \Delta_{12} = \frac{1}{0{,}9091} & \Delta_{22} = 2 \cdot (1{,}8182) \end{matrix}$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1,8182}{(0,9091)^2} & \dfrac{1}{0,9091} \\ 3\cdot(0,9091)^2 & 2\cdot(1,8182) \end{pmatrix}; \quad W^T(x^1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1,8182}{(0,9091)^2} & -3\cdot(0,9091)^2 \\ -\dfrac{1}{0,9091} & 2\cdot(1,8182) \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = -\frac{1}{10,98}\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{1,8182}{(0,9091)^2} & -3\cdot(0,9091)^2 \\ -\dfrac{1}{0,9091} & 2\cdot(1,8182) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2004 & 0,2258 \\ 0,1002 & -0,3311 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2004 & 0,2258 \\ 0,1002 & -0,3311 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} {}^{76}/_{1331} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,00587 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8062 \\ 0,9032 \end{pmatrix}$$

Нету в оригинале

Решение СНУ методом Ньютона (через Гаусса)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases} \qquad F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon = x^n - x^{n-1}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}; \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad F(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X^{i+1} = X^i - Y^i \\ &Y^i = \text{СЛАУ}\left(\left(W(x^i) \middle| F(x^i)\right)\right) \end{aligned}}$$

<u>Шаг 1:</u>

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1^2 \\ 1/1 & -2/1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y^0 = \text{СЛАУ}\left(\left(W(x^0) | F(x^0)\right)\right) = \text{СЛАУ}\left(\left(\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0,1818 \\ 0,0909 \end{pmatrix} - \text{по методу Гауса}$$

$$X^1 = X^0 - Y^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1818 \\ 0,0909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 2:</u>

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} 1,8182^2 + 0,9091^3 - 4 \\ \dfrac{1,8182}{0,9091} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0572 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 3,6364 & 2,4793 \\ 1,0999 & -2,1997 \end{pmatrix};$$

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.00587 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = X^1 - Y^1 = \begin{pmatrix} 1.8182 \\ 0.9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.00587 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8062 \\ 0,9032 \end{pmatrix}$$

11. Вычисление интерполяционного многочлена

x	$y=\sqrt{x}$
1	1,0000
2	1,4142
3	1,7321
4	2,0000

Найти y для x = 2,56

$$P_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(2{,}56) = 1\cdot\frac{(2{,}56-2)(2{,}56-3)(2{,}56-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 1{,}4142\cdot\frac{(2{,}56-1)(2{,}56-3)(2{,}56-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 1{,}7321\cdot\frac{(2{,}56-1)(2{,}56-2)(2{,}56-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 2\cdot\frac{(2{,}56-1)(2{,}56-2)(2{,}56-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = -0{,}0591 + 0{,}6989 + 1{,}0895 - 0{,}1281 = 1{,}6012$$

$$\varepsilon_{\text{усеч}} \le \frac{\text{M}_4}{4!}\cdot|(2{,}56-1)(2{,}56-2)(2{,}56-3)(2{,}56-4)| = \frac{\text{M}_4}{4!}\cdot 0{,}5535 = 0{,}0216$$

$$\text{M}_4 = max\left|(\sqrt{x})''''\right| = max\left|\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'''\right| = max\left|\left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)''\right| = max\left|\left(\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right)'\right| = max\left|\left(\frac{-15}{16\sqrt{x^7}}\right)\right| = \frac{15}{16}$$

$\varepsilon_{\text{окр}} = 5\cdot 10^{-5}$

$\varepsilon_{\text{реальное}} = \varepsilon_{\text{окр}} + \varepsilon_{\text{усеч}} = 5\cdot 10^{-5} + 0{,}0216 = 0{,}02165$

Вычисление интерполяционного многочлена

Формула Лангранжа

x	y
1	1.0000
2	1.4142
3	1.7321
4	2.0000

Найти *y* для **x = 2.56**

Т.к. имеем 4 узла интерполяции, то найти **P_3(x)**

$$P_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$
$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(2.56)=1\frac{(2.56-2)(2.56-3)(2.56-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+1\frac{(2.56-1)(2.56-3)(2.56-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+$$
$$+1\frac{(2.56-1)(2.56-2)(2.56-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+1\frac{(2.56-1)(2.56-2)(2.56-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$P_3(2.56)=-0.0591+0.6989+1.0895-0.1281=1.6012$$

Теперь посчитаем погрешности *усечения*, *округления* и *реальную*:

$$M_4=max|(\sqrt{x})''''|=max\left|\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'''\right|=max\left|\left(\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}\right)''\right|=max\left|\left(\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right)'\right|=max\left|\left(\frac{-15}{16\sqrt{x^7}}\right)\right|=\frac{15}{16}$$

$$\varepsilon_{усеч}\le\frac{M_4}{4!}\cdot((2.56-1)(2.56-2)(2.56-3)(2.56-4))=\frac{M_4}{4!}\cdot0.5535=0.0216$$

$$\varepsilon_{округ}=5\cdot10^{-5}$$

$$\varepsilon_{реальное}=\varepsilon_{округ}+\varepsilon_{усеч}=5\cdot10^{-5}+0.0216=0.02165$$

12. Схема Эйткена

$x = 2{,}56 \quad y = 1{,}6$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$
1	1,0000
2	1,4142
3	1,7321
4	2,0000

$$\begin{matrix} y_0 = p_{x_0}(x) \\ y_1 = p_{x_1}(x) \\ y_2 = p_{x_2}(x) \\ y_3 = p_{x_3}(x) \end{matrix} \to \begin{matrix} p_{x_0x_1}(x) \\ p_{x_1x_2}(x) \\ p_{x_2x_3}(x) \end{matrix} \to \begin{matrix} p_{x_0x_1x_2}(x) \\ p_{x_1x_2x_3}(x) \end{matrix} \to p_{x_0x_1x_2x_3}(x)$$

$$p_{x_0x_1} = \frac{p_{x_0}(x-x_1) - p_{x_1}(x-x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{1 \cdot (2{,}56-2) - 1{,}4142 \cdot (2{,}56-1)}{1-2} = 1{,}6462$$

$$p_{x_1x_2} = \frac{p_{x_1}(x-x_2) - p_{x_3}(x-x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{1{,}4142 \cdot (2{,}56-3) - 1{,}7321 \cdot (2{,}56-2)}{2-3} = 1{,}5923$$

$$p_{x_2x_3} = \frac{p_{x_2}(x-x_3) - p_{x_3}(x-x_2)}{x_2 - x_3} = \frac{1{,}7321 \cdot (2{,}56-4) - 2 \cdot (2{,}56-3)}{3-4} = 1{,}6142$$

$$p_{x_0x_1x_2} = \frac{p_{x_0x_1}(x-x_2) - p_{x_1x_2}(x-x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{1{,}6462 \cdot (2{,}56-3) - 1{,}5923 \cdot (2{,}56-1)}{1-3} = 1{,}6042$$

$$p_{x_1x_2x_3} = \frac{p_{x_1x_2}(x-x_3) - p_{x_2x_3}(x-x_1)}{x_1 - x_3} = \frac{1{,}5923 \cdot (2{,}56-4) - 1{,}6142 \cdot (2{,}56-2)}{2-4} = 1{,}5984$$

$$p_{x_0x_1x_2x_3} = \frac{p_{x_0x_1x_2}(x-x_3) - p_{x_1x_2x_3}(x-x_0)}{x_0 - x_3} = \frac{1{,}6042 \cdot (2{,}56-4) - 1{,}5984 \cdot (2{,}56-1)}{1-4}$$
$$= 1{,}6012$$

$$\begin{matrix} p_{x_0} = 1{,}0000 \\ p_{x_1} = 1{,}4142 \\ p_{x_2} = 1{,}7321 \\ p_{x_3} = 2{,}0000 \end{matrix} \to \begin{matrix} p_{x_0x_1} = 1{,}6462 \\ p_{x_1x_2} = 1{,}5923 \\ p_{x_2x_3} = 1{,}6142 \end{matrix} \to \begin{matrix} p_{x_0x_1x_2} = 1{,}6042 \\ p_{x_1x_2x_3} = 1{,}5984 \end{matrix} \to p_{x_0x_1x_2x_3} = 1{,}6012$$

Схема Эйткена

x	y
1	1.0000
2	1.4142
3	1.7321
4	2.0000

Найти *y* для **x = 2.56**

$y_0 = P_{x0}(x)$ $\quad P_{x0x1}(x) \quad P_{x0x1x2}(x) \quad P_{x0x1x2x3}(x)$

$y_1 = P_{x1}(x)$ $\quad P_{x1x2}(x) \quad P_{x1x2x3}(x)$

$y_2 = P_{x2}(x)$ $\quad P_{x2x3}(x)$

$y_3 = P_{x3}(x)$

$$P_{x0x1} = \frac{P_{x0}(x-x_1) - P_{x1}(x-x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{1 \cdot (2.56-2) - 1.4142 \cdot (2.56-1)}{1-2} = 1.6462$$

$$P_{x1x2} = \frac{P_{x1}(x-x_2) - P_{x2}(x-x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{1.4142 \cdot (2.56-3) - 1.7321 \cdot (2.56-2)}{2-3} = 1.5922$$

$$P_{x2x3} = \frac{P_{x2}(x-x_3) - P_{x3}(x-x_2)}{x_2 - x_3} = \frac{1.7321 \cdot (2.56-4) - 2 \cdot (2.56-3)}{3-4} = 1.6142$$

$$P_{x0x1x2} = \frac{P_{x0x1}(x-x_2) - P_{x1x2}(x-x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{1.6462 \cdot (2.56-3) - 1.5922 \cdot (2.56-1)}{1-3} = 1.604$$

$$P_{x1x2x3} = \frac{P_{x1x2}(x-x_3) - P_{x2x3}(x-x_1)}{x_1 - x_3} = \frac{1.5922 \cdot (2.56-4) - 1.6142 \cdot (2.56-2)}{2-4} = 1.5984$$

$$P_{x0x1x2x3} = \frac{P_{x0x1x2}(x-x_3) - P_{x1x2x3}(x-x_0)}{x_0 - x_3} = \frac{1.604 \cdot (2.56-4) - 1.5984 \cdot (2.56-1)}{1-4} = 1.6011$$

$y_0 = 1.0000$ $\quad P_{x0x1}(x) = 1.6462 \quad P_{x0x1x2}(x) = 1.604 \quad P_{x0x1x2x3}(x) = 1.6011$

$y_1 = 1.4142$ $\quad P_{x1x2}(x) = 1.5922 \quad P_{x1x2x3}(x) = 1.5984$

$y_2 = 1.7321$ $\quad P_{x2x3}(x) = 1.6142$

$y_3 = 2.0000$

12. Первая формула Ньютона

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1,0000	0,4142	-0,0963	0,0463
2	1,4142	0,3179	-0,0500	
3	1,7321	0,2679		
4	2,0000			

Формула Ньютона

x	y
1	1.0000
1.5	1.2247
2	1.4142
2.5	1.5811

Найти *y* для **x = 1.69**

Составим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1	0.2247	-0.0352	0.0126
1.5	1.2247	0.1895	-0.0226	
2	1.4142	0.1669		
2.5	1.5811			

Первая формула Ньютона:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1),\text{где } q=\frac{x-x_0}{h}$$

$$q=\frac{1.69-1}{0.5}=1.38$$

$$P_3(1.69)=1+\frac{0.2247}{1!}\cdot 1.38+\frac{-0.0352}{2!}\cdot 1.38(1.38-1)+\frac{0.0126}{3!}\cdot 1.38(1.38-1)(1.38-2)=$$
$$=1+0.310086-0.00922944-0.00068276=1.3002$$

Вторая формула Ньютона:

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}q(q+1)+\ldots+\frac{\Delta^m y_{n-m}}{m!}q(q+1)\ldots(q+m-1),\text{где } q=\frac{x-x_n}{h}$$

$$q=\frac{1.69-2.5}{0.5}=-1.62$$

$$P_3(1.69)=1.5811+\frac{0.1669}{1!}\cdot(-1.62)+\frac{-0.0226}{2!}\cdot(-1.62)(-1.62+1)+\frac{0.0126}{3!}\cdot(-1.62)(-1.62+1)(-1.62+2)=$$
$$=1.5811-0.270378-0.01134972+0.00080151=1.3002$$

Нету в оригинале

Интерполяция кубическими сплайнами

x	y
1	2
3	5
5	2
7	-1
9	2

Найти S(2) и S(4)

$$\boxed{CM=D}\quad \boxed{h_i=x_i-x_{i-1}}\quad \boxed{d_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}}$$

$$\boxed{S_i(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+(y_{i-1}-\frac{M_{i-1}\cdot h_i^2}{6})(\frac{x_i-x}{h_i})+(y_i-\frac{M_i\cdot h_i^2}{6})(\frac{x-x_{i-1}}{h_i})}$$

Точка x = 2 лежит в промежутке [1;3] → i=1

Точка x = 4 лежит в промежутке [3;5] → i=2

$$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}\frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0\\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6}\\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3}\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$CM=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}M_1 & \frac{1}{3}M_2 & 0\\ \frac{1}{3}M_1 & \frac{4}{3}M_2 & \frac{1}{3}M_3\\ 0 & \frac{1}{3}M_2 & \frac{4}{3}M_3\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}\frac{2-5}{2}-\frac{5-2}{2}\\ \frac{-1-2}{2}-\frac{2-5}{2}\\ \frac{2+1}{2}-\frac{-1-2}{2}\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$CM=D\rightarrow \textit{решим полученную систему методом Гаусса}\rightarrow M=\begin{pmatrix}-\frac{9}{4}\\0\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$

Теперь подставляем значения и считаем:

$$\boxed{S_1(2)=0\cdot\frac{(3-2)^3}{12}-\frac{9}{4}\cdot\frac{(2-1)^3}{12}+(2-\frac{0\cdot 4}{6})(\frac{3-2}{2})+(5-\frac{-\frac{9}{4}\cdot 4}{6})(\frac{2-1}{2})=4.0625}$$

$$\boxed{S_2(4)=-\frac{9}{4}\cdot\frac{(5-4)^3}{12}+0\cdot\frac{(4-3)^3}{12}+(5-\frac{-\frac{9}{4}\cdot 4}{6})(\frac{5-4}{2})+(2-\frac{0\cdot 4}{6})(\frac{4-3}{2})=4.0625}$$

Нету в оригинале

Обратная интерполяция

$x^2 - 2x - 9 = 0$ (x = -3, -2, -1)

Интерполируем обратную функцию по трём точкам
(по инвертированной формуле Лангранжа)

$$P_2(y) = x_0 \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1 \frac{(y - y_0)(y - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2 \frac{(y - y_0)(y - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)}$$

Найдём все значения функции $f(x)$

x	y
-3	6
-2	-1
-1	-6

$f(x) = x^2 - 2x - 9$

Т.к. нужно найти корень, то: y = 0

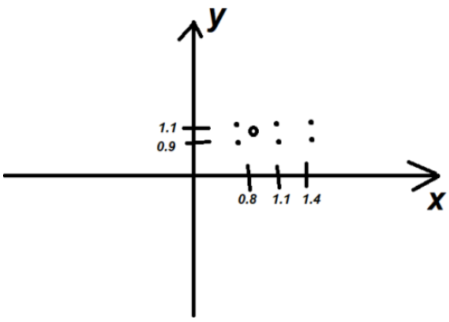
$$P_2(0) = -3 \frac{(0 + 1)(0 + 6)}{(6 + 1)(6 + 6)} - 2 \frac{(0 - 6)(0 + 6)}{(-1 - 6)(-1 + 6)} - 1 \frac{(0 - 6)(0 - 1)}{(-6 - 6)(-6 + 1)} = -2{,}1714$$

Нету в оригинале

Многомерная интерполяция

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$
$$f(1,1) = ?$$

x	y
0,8	0,9
1,1	1,1
1,4	



Вычислим все возможные значения функции:

$$y_0 = 0{,}9 \quad \begin{cases} f(x_0,y_0) = \frac{1}{0{,}8+0{,}9} = 0{,}5882 \\ f(x_1,y_0) = \frac{1}{1{,}1+0{,}9} = 0{,}5 \\ f(x_2,y_0) = \frac{1}{1{,}4+0{,}9} = 0{,}4348 \end{cases}$$

$$y_1 = 1{,}1 \quad \begin{cases} f(x_0,y_1) = 0{,}5263 \\ f(x_1,y_1) = 0{,}45 \\ f(x_2,y_1) = 0{,}4 \end{cases}$$

Способ 1: Сначала интерполируем функцию по x. Затем при фиксированном x - 1 раз интерполируем по y

$$P_2(x,y_i) = f(x_o,y_i)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + f(x_1,y_i)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2,y_i)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x,y_0) = 0{,}5882\frac{(1-1{,}1)(1-1{,}4)}{(0{,}8-1{,}1)(0{,}8-1{,}4)} + 0{,}5\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}4)}{(1{,}1-0{,}8)(1{,}1-1{,}4)} + 0{,}4348\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}1)}{(1{,}4-0{,}8)(1{,}4-1{,}1)} = 0{,}52684$$

$$P_2(x,y_1) = 0{,}47251$$

$$P_1(x,y) = f(x,y_0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f(x,y_1)\frac{y-y_0}{y_1-y_0} =$$

$$= 0{,}52684\frac{1-1{,}1}{0{,}9-1{,}1} + 0{,}47251\frac{1-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 0{,}4997$$

Способ 2: Сначала интерполируем функцию по y. Затем при фиксированном y - 1 раз интерполируем по x

$$P_1(x_i,y) = f(x_i,y_0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f(x_i,y_1)\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

$$P_1(x_0,y) = 0{,}5882\frac{1-1{,}1}{0{,}9-1{,}1} + 0{,}5263\frac{1-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 0{,}55725$$

$$P_1(x_1,y) = 0{,}475$$

$$P_1(x_2,y) = 0{,}4174$$

$$P_2(x,y) = f(x_o,y)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + f(x_1,y)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2,y)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$0{,}55725\frac{(1-1{,}1)(1-1{,}4)}{(0{,}8-1{,}1)(0{,}8-1{,}4)} + 0{,}475\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}4)}{(1{,}1-0{,}8)(1{,}1-1{,}4)} + 0{,}4174\frac{(1-0{,}8)(1-1{,}1)}{(1{,}4-0{,}8)(1{,}4-1{,}1)} = 0{,}4997$$

Нету в оригинале

Тригонометрическая интерполяция

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Найти $y(1.5)$

n = 4
T = 4
h = 1

$$y(x)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{\frac{-n}{2}<j\le\frac{n}{2}} A_j\cdot\exp(2\pi ij\frac{x-x_0}{nh})$$

$$A_j=\sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot\exp(-2\pi i\frac{kj}{n}),\text{где } nh=T$$

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

Решение:

$$y(1.5)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{-2<j\le 2} A_j\cdot\exp(2\pi ij\frac{1.5-0}{4})=\frac{1}{n}\cdot\sum_{-2<j\le 2} A_j\cdot\exp(\frac{3}{4}\pi ij)$$

$$A_{-1}=0+1(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))+4(\cos(\pi)+i\sin(\pi))+9(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))=i-4-9i=-8i-4$$

$$A_0=0+1+4+9=14$$

$$A_1=0+1(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))+4(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))+9(\cos(-\frac{3\pi}{2})+i\sin(-\frac{3\pi}{2}))=-i-4+9i=8i-4$$

$$A_2=0+1(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))+4(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))+9(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi))=-1+4-9=-6$$

$$A_{-1}\exp(-\frac{3}{4}\pi i)=(-8i-4)(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}i-2\sqrt{2}$$

$$A_0\exp(0)=A_0=14$$

$$A_1\exp(\frac{3}{4}\pi i)=(8i-4)(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=-6\sqrt{2}i-2\sqrt{2}$$

$$A_2\exp(\frac{3}{2}\pi i)=-6(0-i)=6i$$

$$y(1.5)=\frac{1}{4}(6\sqrt{2}i-2\sqrt{2}+14-6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6i)=\frac{1}{4}(14-4\sqrt{2}+6i)=\frac{8.3431+6i}{4}=2.0858+1.5i$$

Нету в оригинале

Численное дифференцирование функции

$y(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad h = 0{,}2$

x	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y	1,6667	1,25	1	0,8333	0,7143

(5.5): $y'(x_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{0{,}8333 - 1{,}25}{0{,}4} = -1{,}0418$

(5.6): $y'(x_0) = \frac{y_2 - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2}{12h} = \frac{1{,}6667 - 10 + 6{,}6664 - 0{,}7143}{2{,}4} = -0{,}9922$

(5.7): $y''(x_0) = \frac{y_{-2} - 2y_0 + y_1}{h^2} = \frac{1{,}25 - 2 + 08333}{0{,}04} = 2{,}08025$

Нету в оригинале

Численное интегрирование (Формула Трапеций)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad h = 0{,}1$$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	0,09091	0,8333	0,7692	0,7142	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i)(\tfrac{1}{2}y_i + \tfrac{1}{2}y_{i+1})}$$

$$\int_1^{1,1} \frac{1}{x}dx = (1{,}1 - 1)(\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0{,}9091) = 0{,}0955$$

$$\int_{1,1}^{1,2} \frac{1}{x}dx = (1{,}2 - 1{,}1)(\frac{1}{2} * 0{,}9091 + \frac{1}{2} * 0{,}8333) = 0{,}0877$$

$\int_{1,2}^{1,3} \frac{1}{x}dx = 0{,}0798$ $\int_{1,3}^{1,4} \frac{1}{x}dx = 0{,}0742$ $\int_{1,4}^{1,5} \frac{1}{x}dx = 0{,}0691$

$\int_{1,5}^{1,6} \frac{1}{x}dx = 0{,}0646$ $\int_{1,6}^{1,7} \frac{1}{x}dx = 0{,}0607$ $\int_{1,7}^{1,8} \frac{1}{x}dx = 0{,}0572$

$\int_{1,8}^{1,9} \frac{1}{x}dx = 0{,}0541$ $\int_{1,9}^{2} \frac{1}{x}dx = 0{,}0513$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0{,}0955 + 0{,}0877 + 0{,}0798 + 0{,}0742 + 0{,}0691 + 0{,}0646 + 0{,}0607 + 0{,}0572$$
$$+ 0{,}0541 + 0{,}0513 = 0{,}6939$$

Нету в оригинале

Численное интегрирование (Формула Симпсона)

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx \quad h = 0{,}1$$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	0,09091	0,8333	0,7692	0,7142	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = (x_{i+2} - x_i)(\tfrac{1}{6} y_i + \tfrac{2}{3} y_{i+1} + \tfrac{1}{6} y_{i+2})}$$

$$\int_{1}^{1,2} \frac{1}{x} dx = (1{,}2 - 1)(\frac{1}{6} * 1 + \frac{2}{3} * 0{,}9091 + \frac{1}{6} * 0{,}8333) = 0{,}1823$$

$$\int_{1,2}^{1,4} \frac{1}{x} dx = (1{,}4 - 1{,}2)(\frac{1}{6} * 0{,}8333 + \frac{2}{3} * 07692 + \frac{1}{6} * 0{,}7142) = 0{,}1541$$

$$\int_{1,4}^{1,6} \frac{1}{x} dx = (1{,}6 - 1{,}4)(\frac{1}{6} * 0{,}7142 + \frac{2}{3} * 0{,}6667 + \frac{1}{6} * 0{,}625) = 0{,}1335$$

$$\int_{1,6}^{1,8} \frac{1}{x} dx = (1{,}8 - 1{,}2)(\frac{1}{6} * 0{,}625 + \frac{2}{3} * 0{,}5882 + \frac{1}{6} * 0{,}5556) = 0{,}1178$$

$$\int_{1,8}^{2} \frac{1}{x} dx = (2 - 1{,}8)(\frac{1}{6} * 0{,}5556 + \frac{2}{3} * 0{,}5263 + \frac{1}{6} * 0{,}5) = 0{,}1054$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx = 0{,}1823 + 0{,}1541 + 0{,}1335 + 0{,}1178 + 0{,}1054 = 0{,}6931$$

13. Метод Эйлера

$$\begin{cases} y''' = y + y''x - y' \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = -1 \end{cases} \qquad h = 0{,}2$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y + y''x - y' \end{pmatrix} = F(x, Y)$$

Первый шаг:

$$Y_1 = Y_0 + F(x_0, y_0) \cdot h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 - 1 \cdot 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}2 \\ -{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 2{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix}$$

Второй шаг:

$$Y_2 = Y_1 + F(x_1, y_1) \cdot h = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 2{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -1{,}4 \\ 2{,}6 + (-1{,}4) \cdot 1{,}2 - 2{,}8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 2{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}56 \\ -0{,}28 \\ -0{,}376 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}16 \\ 2{,}52 \\ -1{,}776 \end{pmatrix}$$

Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера

$$\begin{cases} y' = 2\cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases} \qquad f(x;\ y) = 2\cdot x - y \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 3$$

$h = 0{,}2$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i;\ y_i)\cdot h}$$

Шаг 1:

$f(x_0; y_0) = 2\cdot 1 - 3 = -1$

$y_1 = y_0 + f(x_0;\ y_0)\cdot h = 3 + (-1)\cdot 0{,}2 = 2{,}8$

Шаг 2:

$f(x_1;\ y_1) = 2\cdot 1{,}2 - 2{,}8 = -0{,}4$

$y_2 = y_1 + f(x_1;\ y_1)\cdot h = 2{,}8 + (-0{,}4)\cdot 0{,}2 = 2{,}72$

Шаг 3:

$f(x_2, y_2) = 2\cdot 1{,}4 - 2{,}72 = 0{,}08$

$y_3 = y_2 + f(x_2;\ y_2)\cdot h = 2{,}72 + 0{,}08\cdot 0{,}2 = 2{,}736$

14. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

$$y''' = x + y + xy' - y'' \qquad\qquad h = 0{,}1$$

$$\begin{matrix} y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \\ y''(1) = 4 \end{matrix} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}; \quad Y' = F(x, y) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x + y + xy' - y'' \end{pmatrix};$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x + y + xy' - y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 + 1 + 1 \cdot 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Первый шаг:

$$k_2 = f(x_0 + 0{,}05, y_0 + 0{,}05 \cdot k_1) = F\left(1{,}05\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}05\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= F\left(1{,}05\begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 2{,}2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = f(x_0 + 0{,}05, y_0 + 0{,}05 \cdot k_2) = F\left(1{,}05\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}05\begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= F\left(1{,}05\begin{pmatrix} 1{,}11 \\ 2{,}2 \\ 4{,}023 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4{,}023 \\ 0{,}447 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = f(x_0 + 0{,}1, y_0 + 0{,}1 \cdot k_3) = F\left(1{,}1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4{,}023 \\ 0{,}447 \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= F\left(1{,}1\begin{pmatrix} 1 + 0{,}22 \\ 2 + 0{,}4023 \\ 4 + 0{,}0447 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}4023 \\ 4{,}0447 \\ 0{,}91783 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = y_0 + 0{,}0167 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}0167 \cdot \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot 2{,}2 + 2 \cdot 2{,}2 + 2{,}4023 \\ 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4{,}023 + 4{,}0447 \\ 0 + 2 \cdot 0{,}46 + 2 \cdot 0{,}447 + 0{,}91783 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}22048 \\ 2{,}402315 \\ 4{,}045622 \end{pmatrix}$$

Второй шаг:

$$k_1 = f(x_1, y_1) = F\left(1{,}1\begin{pmatrix} 1{,}22048 \\ 2{,}402315 \\ 4{,}045622 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}40232 \\ 4{,}04562 \\ 1{,}1 + ,122048 + 1{,}1 \cdot 2{,}40232 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}40232 \\ 4{,}04562 \\ 0{,}91739 \end{pmatrix}$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка (с усреднением по времени)

$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = 2 \cdot x - y$

$x_0 = 1 \quad y_0 = 3$

$h = 0{,}2$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2};\ \overline{y_{i+\frac{1}{2}}}\right) \\ \overline{y_{i+\frac{1}{2}}} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i;\ y_i) \end{aligned}}$$

<u>Шаг 1:</u>

$$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\overline{y_{0,5}} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0;\ y_0) = 0{,}1 * (-1) = 2{,}9$$

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{0,5}}\right) = 2 \cdot 1{,}1 - 2{,}9 = -0{,}7$$

$$y_1 = y_0 + f\left(x_0 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{0,5}}\right) = 3 + (-0{,}7) = 2{,}3$$

<u>Шаг 2:</u>

$$f(x_1;\ y_1) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}3 = 0{,}1$$

$$\overline{y_{1,5}} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1;\ y_1) = 2{,}3 + 0{,}1 * 0{,}1 = 2{,}31$$

$$f\left(x_1 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{1,5}}\right) = 2 \cdot 1{,}3 - 2{,}31 = 0{,}29$$

$$y_2 = y_1 + f\left(x_1 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{1,5}}\right) = 2{,}3 + 0{,}29 = 2{,}59$$

<u>Шаг 3:</u>

$$f(x_2;\ y_2) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}59 = 0{,}21$$

$$\overline{y_{2,5}} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2;\ y_2) = 2{,}59 + 0{,}1 * 0{,}21 = 2{,}611$$

$$f\left(x_2 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{2,5}}\right) = 2 \cdot 1{,}5 - 2{,}611 = 0{,}389$$

$$y_3 = y_2 + f\left(x_2 + \frac{h}{2};\ \overline{y_{2,5}}\right) = 2{,}59 + 0{,}389 = 2{,}979$$

$$k_2 = f(x_1 + 0{,}05, y_1 + 0{,}05 \cdot k_1) = F\left(1{,}15\left(\begin{pmatrix}1{,}22048\\2{,}402315\\4{,}045622\end{pmatrix} + 0{,}05\begin{pmatrix}2{,}40232\\4{,}04562\\0{,}91739\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= (1{,}15\begin{pmatrix}1{,}340596\\2{,}604596\\4{,}0914915\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}604596\\4{,}0914915\\1{,}15 + 1{,}340596 + 1{,}15 \cdot 2{,}604596 - 4{,}0914915\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2{,}604596\\4{,}0914915\\1{,}3943899\end{pmatrix}$$

$$k_3 = f\left(1{,}1 + 0{,}05\begin{pmatrix}1{,}22048 + 0{,}05 \cdot 2{,}604596\\2{,}402315 + 0{,}05 \cdot 4{,}0914915\\4{,}045622 + 0{,}05 \cdot 1{,}3943899\end{pmatrix}\right) = F(1{,}15\begin{pmatrix}1{,}3507098\\2{,}6068896\\4{,}115342\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2{,}6068896\\4{,}115342\\1{,}15 + 1{,}3507098 + 1{,}15 \cdot 2{,}6068896 - 4{,}115342\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}6068896\\4{,}115342\\1{,}381291\end{pmatrix}$$

$$k_4 = f\left(1{,}2\begin{pmatrix}1{,}22048 + 0{,}1 \cdot 2{,}6068896\\2{,}402315 + 0{,}1 \cdot 4{,}115342\\4{,}045622 + 0{,}1 \cdot 1{,}381291\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2{,}8138492\\4{,}1839511\\1{,}87383694\end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix}1{,}22048\\2{,}402315\\4{,}045622\end{pmatrix} + 0{,}0167 \cdot \begin{pmatrix}2{,}40232 + 2 \cdot 2{,}604596 + 2 \cdot 2{,}6068896 + 2{,}8138492\\4{,}04562 + 2 \cdot 4{,}0914915 + 2 \cdot 4{,}115342 + 4{,}1839511\\0{,}91739 + 2 \cdot 1{,}3943899 + 2 \cdot 1{,}381291 + 1{,}87383694\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1{,}4816536\\2{,}8138571\\4{,}185010\end{pmatrix}$$

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка (с усреднением по производной)

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases} \qquad f(x, y) = 2 \cdot x - y \qquad x_0 = 1 \quad y_0 = 3$$

$h = 0{,}2$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_i;\ y_i) + f(x_i + h;\ \overline{y_{i+1}}\,) \right) \\ \overline{y_{i+1}} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i;\ y_i) \end{aligned}}$$

<u>Шаг 1:</u>

$$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\overline{y_1} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0;\ y_0) = 3 + 0{,}1 * (-1) = 2{,}9$$

$$f(x_0 + h;\ \overline{y_1}) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}9 = -0{,}5$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0;\ y_0) + f(x_0 + h;\ \overline{y_1}) \right) = 3 + 0{,}1 \cdot (-1 + (-0{,}5)\,) = 2{,}85$$

<u>Шаг 2:</u>

$$f(x_1; y_1) = 2 \cdot 1{,}2 - 2{,}85 = -0{,}45$$

$$\overline{y_2} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1;\ y_1) = 2{,}85 + 0{,}1 * (-0{,}45) = 2{,}805$$

$$f(x_1 + h;\ \overline{y_2}) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}805 = -0{,}005$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_1;\ y_1) + f(x_1 + h;\ \overline{y_2}) \right) = 2{,}85 + 0{,}1 \cdot (-0{,}45 + (-0{,}005)\,) = 2{,}8045$$

<u>Шаг 3:</u>

$$f(x_2; y_2) = 2 \cdot 1{,}4 - 2{,}8045 = -0{,}0045$$

$$\overline{y_3} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2;\ y_2) = 2{,}8045 + 0{,}1 * (-0{,}0045) = 2{,}80405$$

$$f(x_2 + h;\ \overline{y_3}) = 2 \cdot 1{,}6 - 2{,}80405 = 0{,}39595$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_2;\ y_2) + f(x_2 + h;\ \overline{y_3}) \right) = 2{,}8045 + 0{,}1 \cdot (-0{,}0045 + 0{,}39595\,) = 2{,}84365$$