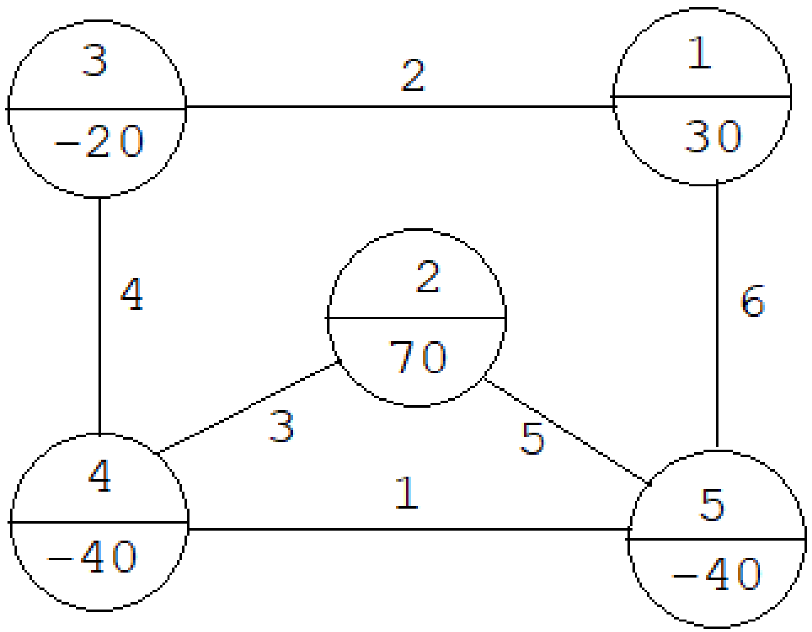
Алгоритмы и вычислительные методы оптимизации

Лекция 13

2.2.6. Транспортная задача в сетевой постановке

Будем изображать поставщиков и потребителей в виде вершин графа. Ребра графа – дороги, связывающие поставщиков и потребителей. Граф будет взвешенным, вес ребра – тариф перевозки, запасы будем записывать в вершинах графа положительными числами, а потребности – отрицательными числами.



Алгоритм решения транспортной задачи в сетевой постановке

1. Строим начальный опорный план. Для этого перевозки груза из вершины в вершину будем изображать стрелками с указанием величины поставки.

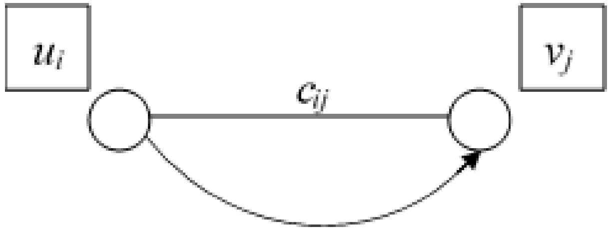
Требования к опорному плану:

– все запасы должны быть вывезены, а потребности – удовлетворены;
– для каждой вершины должна быть хотя бы одна входящая или выходящая стрелка;
– общее количество стрелок должно быть на 1 меньше числа вершин;
– стрелки не должны образовывать замкнутый контур.

2. Проверяем план на оптимальность методом потенциалов. Для этого:

– одной из вершин приписываем потенциал 0 (записываем в квадратике возле вершины;

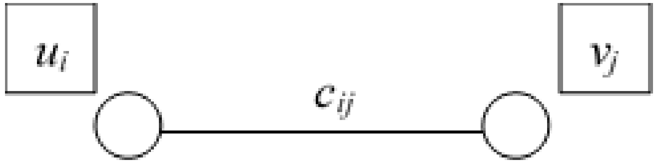
– двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин, руководствуясь следующим правилом: если стрелка выходит из вершины, то прибавляем к потенциалу c_{ij} (тариф для соответствующего стрелке ребра), если стрелка входит в вершину, то тариф вычитаем;



$$u_i = v_i - c_{ij}$$

$$v_j = u_i + c_{ij}$$

– находим балансы для ребер без стрелок по формуле



$$s_{ij} = c_{ij} - \left| u_i - v_j \right|$$

Если все балансы ребер без стрелок неотрицательны, то решение оптимально. Иначе переходим на п.3.

3. Если решение не оптимально, то следует загрузить ребро без стрелки с отрицательным балансом. Если отрицательных балансов несколько, выбираем минимальный и рисуем новую стрелку от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом. При этом в графе образуется замкнутый контур из стрелок (такой контур всегда существует и единственен).

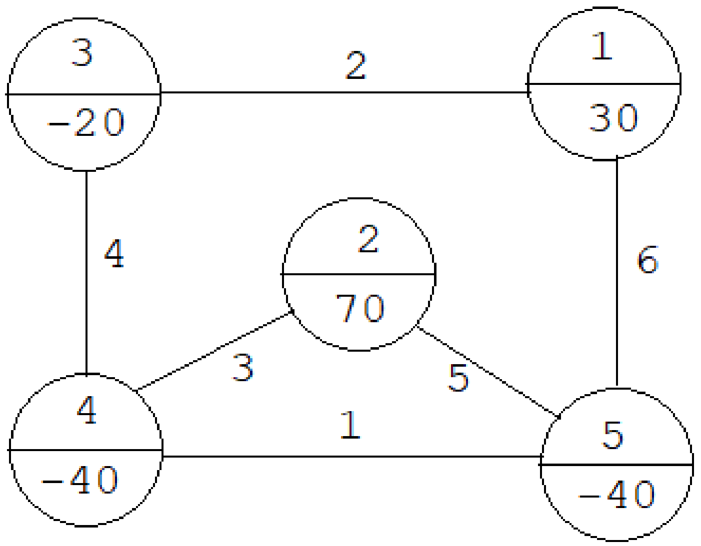
Среди стрелок с направлением противоположным новой стрелке находим стрелку с наименьшей поставкой λ. Для всех стрелок цикла добавляем поставку λ, если она имеет тоже направление, что и новая стрелка, и отнимаем λ, если стрелка имеет противоположное направление. Стрелка с λ удаляется.

Переходим на п.2.

Замечание:

Если план вырожденный, то стрелок будет меньше, чем количество вершин минус 1. Тогда рисуют дополнительные стрелки с нулевыми поставками и произвольным направлениями таким образом, чтобы не образовывались замкнутые контуры.

Пример 5 Решить транспортную задачу в сетевой постановке.

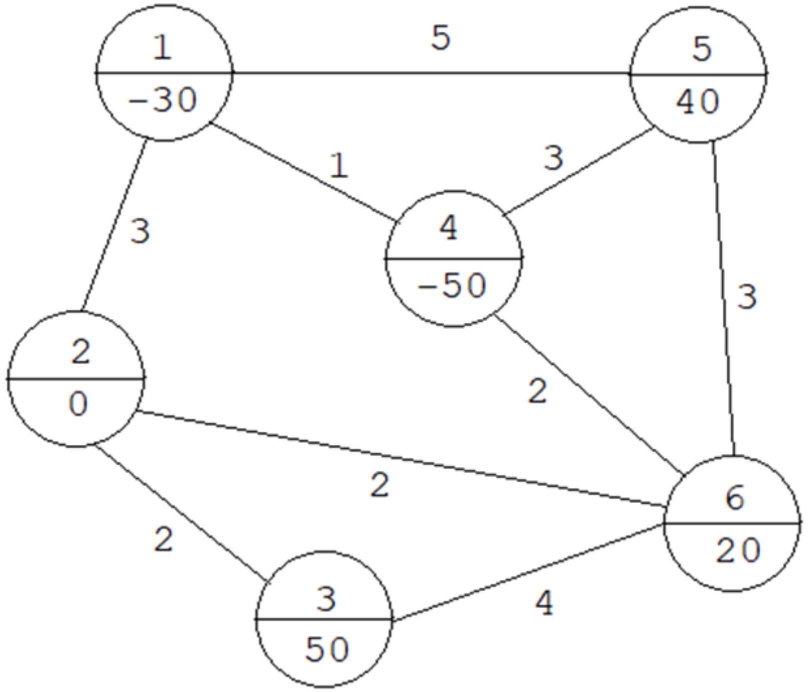


Суммарные запасы: 30+70=100.
Суммарные потребности: 20+40+40=100.
Модель – закрытая.

Решение примера 5 – в файле lecture13.pdf.

В случае открытой модели транспортной задачи вводят фиктивного поставщика (потребителя). Новую вершину соединяют ребрами со всеми потребителями (поставщиками). Тарифы перевозок для этих ребер должны быть одинаковыми и достаточно большими.

Пример 6 Решить транспортную задачу в сетевой постановке.



Суммарные запасы: 40+20+50=110.
Суммарные потребности: 30+50=80.
Модель – открытая.
Необходимо ввести фиктивного потребителя с потребностью 110-80=30 и большими тарифами перевозок от всех поставщиков.

Решение примера 6 – в файле lecture13.pdf.

2.3. Задачи теории игр

2.3.1 Основные понятия

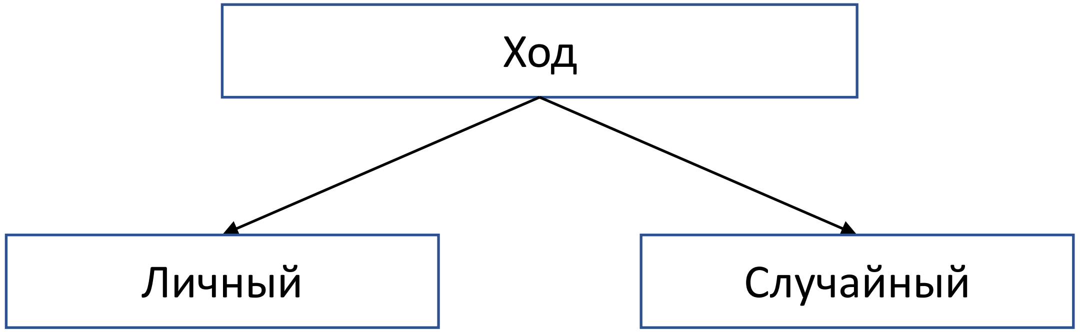
Ситуации, в которых сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих противоположные цели, причём результат любого действия каждой из сторон зависит от того, какое действие предпримет противник, называются *конфликтными*.

Примеры конфликтных ситуаций:

- любая ситуация в ходе военных действий;
- планирование военных операций;
- конкурентная борьба в экономике;
- выборы в парламент;
- салонные игры (например, шашки, шахматы, карты).

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций, ее цель - выработать рекомендации по рациональному образу действий участников конфликтной ситуации. При этом не учитываются элементы риска, просчеты и ошибки игроков.

Формализованная модель конфликтной ситуации – **игра.**
Конфликтные стороны – **игроки.**
Игра ведется по определенным правилам.
Правила игры устанавливают возможные действия игроков, объём сведений каждой стороны о поведении другой, результат, к которому приводит каждая совокупность ходов. Правила определяют так же конец игры, когда больше ходов делать не разрешается.
Ход – выбор одного из вариантов действий, предусмотренных правилами игры.



Личный ход – сознательный выбор игроком допустимого действия.
Случайный ход – выбор допустимого действия с помощью механизма случайного выбора (например, подбрасывания монеты) и его осуществление.

В конце игры игрок получает выигрыш

Классификация игр

По числу игроков:

- одного лица;
- двух лиц – парная игра;
- *n* лиц – множественная.

По количеству и характеру ходов:

- с полной информацией;
- с неполной информацией.

По количеству ходов:

- конечные;
- бесконечные.

По выигрышу:

- с нулевой суммой;
- с ненулевой суммой.

Стратегия игрока - совокупность правил, определяющая выбор варианта действий при каждом ходе игрока в зависимости от ситуации, сложившийся в игре.

Игра $\boldsymbol{m \times n}$ – конечная парная игра, в которой у одного игрока имеется m стратегий, а у второго n стратегий.

Пример 1 (дилемма заключенного)

Двое преступников угнали автомобиль и ограбили банк. Их поймала полиция, но прямых улик ограбления пока нет. Поэтому следствие предлагает каждому из преступников пойти на сделку – признаться в содеянном и свалить инициативу преступления на другого. Если один признается, а другой заключённый будет хранить молчание, то первому уменьшат срок заключения до трех лет за содействие следствию, а второго посадят на 10 лет. Если оба пойдут на сделку со следствием и сознаются в содеянном, то каждый получит по 5 лет. Однако, если оба будут молчать, то за отсутствием улик, им дадут по году заключения за угон. Преступники находятся в разных камерах, чтобы они не могли сговориться друг с другом и согласовать своё поведение на допросе. Ни один из них не знает точно, что сделает другой. Какое решение примет каждый из них?

Стратегии заключенного А: признаться, хранить молчание
Стратегии заключенного В: признаться, хранить молчание

Пример 1 (дилемма заключенного)

Возможны 4 исхода, в зависимости от выбора стратегий игроками.

		Стратегии заключенного Б	
		Признаться	Хранить молчание
Стратегии заключенного А	Признаться	(5,5)	(3,10)
	Хранить молчание	(10,3)	(1,1)

Выгоднее обоим признаться. Хотя выбор стратегий игроками не приводит к лучшему для них результату.
Решение, принимаемое одним игроком, влияет на решение другого и наоборот.

Далее будем рассматривать парные игры $m \times n$ с нулевой суммой.

Пусть у игрока А имеется m стратегий $A_1, A_1, \ldots, A_m$, у игрока В имеется n стратегий $B_1, B_1, \ldots, B_n$.
a_{ij} – выигрыш (положительный или отрицательный) игрока А при выборе им стратегии A_i и игроком В стратегии B_j.
Если ходы случайные, то a_{ij} – математическое ожидание выигрыша игрока А.
Платёжной матрицей или, ***матрицей игры*** называется матрица следующего вида:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & \ldots & \mathrm{B}_\mathrm{n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример 2 (игра «Поиск»)

Игрок А прячется в одном из двух убежищ, а игрок В его ищет. Правила игры: если игрок В находит А, то А платит ему 1 рубль, в противном случае игрок В платит А 1 рубль.

Стратегии игрока А: спрятаться в убежище № 1, спрятаться в убежище № 2.

Стратегии игрока В: искать в убежище № 1, искать в убежище № 2.

Платежная матрица игры:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Это игра с неполной информацией. Если игра проводится один раз, то бессмысленно говорить о разумных стратегиях. Любой игрок с одинаковым основанием может применять любую стратегию.

Но если игра многократно повторяется, то положение меняется. Если игрок будет придерживаться одной стратегии или чередования стратегий в определённой последовательности, то противник догадается об этом и начнёт выигрывать.

Поэтому от верного проигрыша игроков может спасти только случайное чередование стратегий. Например, игрок перед своим ходом подбрасывает монету и, если выпала "решка", то игрок выбирает первую стратегию, а если "орёл", то вторую.

Оптимальная стратегия - стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш.

2.3.2. Нижняя и верхняя цены игры. Принцип минимакса

$$\begin{array}{c|cccc|c} & B_1 & B_2 & \dots & B_n & \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \alpha_m \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \end{array}$$

α_i - минимальное значение в строке

β_j - максимальное значение в столбце

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$ **Нижняя цена игры или максимин**

Стратегия игрока А, соответствующая максимину α, называется *максиминной стратегией* игрока А. Если игрок А придерживается своей максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш не меньше α.

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \beta_j = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$$ **Верхняя цена игры или минимакс**

Стратегия игрока В, соответствующая минимаксу β, называется *минимаксной стратегией* игрока В. Если игрок В придерживается своей минимаксной стратегии, то ему гарантирован проигрыш не больше β.

Теорема 1 Для игры двух лиц с нулевой суммой $\alpha \leq \beta$.

Положение, при котором игроки используют свои минимаксные стратегии неустойчиво и может быть нарушено поступившими сведениями о выбранной стратегии другого игрока. Если оба игрока разумны, то игрок А будет выбирать свою максиминную стратегию, а игрок В – минимаксную.

Пример 3

Найдем верхнюю и нижнюю цены игры из предыдущего примера «Поиск»

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \\
 & \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} &
\end{array}$$

Нижняя цена игры $\alpha = \max(-1;-1) = -1$

Верхняя цена игры $\beta = \min(1;1) = 1$

Если игрок А будет делать личные ходы, а его противник В об этом узнает, то игрок А получит минимальный выигрыш -1, то есть он будет в проигрыше. Аналогичное утверждение справедливо и для игрока В.

Игра называется **игрой с седловой точкой**, если нижняя и верхняя цена игры совпадают.
В этом случае, величина $v = \alpha = \beta$ называется ***чистой ценой игры***.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий, которые называются **оптимальными**, а их совокупность называется **решением игры**.

В игре с седловой точкой любому игроку выгодно придерживаться оптимальных стратегий (любое отклонение от оптимальной стратегии ухудшает положение игрока). Чистая цена игры в игре с седловой точкой является значением выигрыша, которое в игре разумных противников игрок А не может увеличить, а игрок В уменьшить. При разумном поведении игроков исход игры с седловой точкой заранее предопределен. Играть в такие игры имеет смысл, если противник не знает оптимальной стратегии.

Пример 5

Двое играют в следующую игру: одновременно выбрасывают 1, 2 или 3 пальца. Выигрывает тот, у кого больше пальцев (выигрыш равен разности выброшенных пальцев). Если оба выбросили одинаковое количество пальцев, то никто не выиграл.

Платежная матрица

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array} & \end{array}$$

Нижняя цена игры α=max(-2;-1;0)=0

Верхняя цена игры β=min(2,1,0)=0

Игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях.
Цена игры v=0, обоим игрокам необходимо выбрасывать по 3 пальца.

Игра

Каждый загадывает <u>целое</u> число в диапазоне от 1 до 100.

Я посчитаю среднее арифметическое этих чисел $S_{ср}$.

Выигрывает тот, чьё число окажется ближе к половине среднего арифметического всех этих загаданных чисел ($S_{ср}/2$), получит 8 баллов дополнительно за эту лекцию.

Рассуждения по загадыванию числа:

Пусть загадаю число A.
Если все загадают 1, то $S_{ср}/2=1/2=0,5$
Если все загадают 100, то $S_{ср}/2=50$
$1 \le A \le 50$

Больше 50 нет смысла загадывать.
Если все так решат, то максимально загадают 50 и $S_{ср}/2=25$
$1 \le A \le 25$

Не будут загадывать числа больше 25, тогда $S_{ср}/2=12,5$
$1 \le A \le 12$

И т.д., получаем, что всем надо загадать 1.

Почему никогда не бывает так, чтобы все назвали 1?

1. Не все до конца продумывают ситуацию.
2. Не все верят в то, что все остальные будут достаточно рациональными (более важно).

Т.е. если я отбрасываю предположение о том, что все глубоко продумывают и рациональны в принятиях своих решений, то моя стратегия будет уже не 1, а какая-то другая.
И это противоречит классической теории игр.

Эта игра получила название «Гарвард»
Наблюдения в Америке показали, что в главных университетах типа Гарварда это число было гораздо меньше чем в разных второстепенных. С тех пор стали считать, что это своего рода индекс интеллекта данного университета.
В Гарварде это число колебалось где-то в районе 7-8.