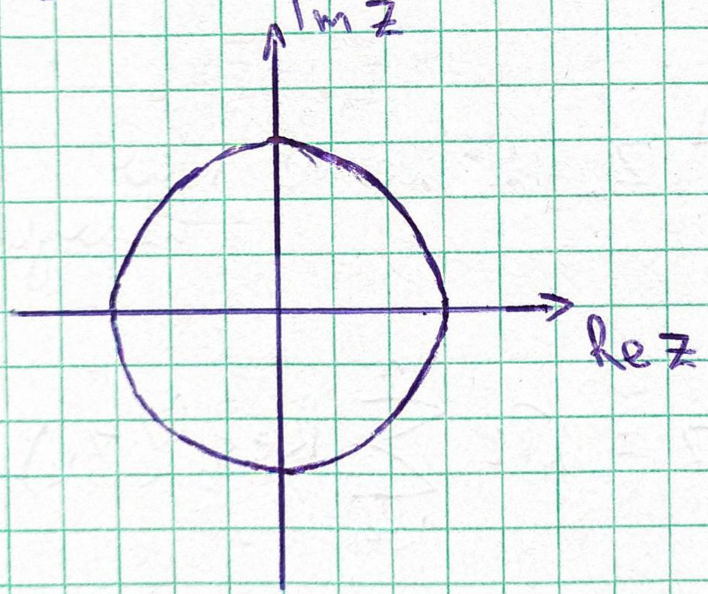
Мироненко
ИП - 811

Вариант - 13

$\boxed{4}$ Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов:

$$\oint\limits_C \frac{\sin^2 z}{(z+i)(z-2)}\,dz \quad , \; C: \; |z| = 3$$



Внутри области, ограниченной окружностью $|z|=3$, находятся две точки $z_1 = -i$ и $z_2 = 2$, в которых знаменатель обращается в ноль

• $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{\sin^2(z)}{(z+i)(z-2)} = \left[\dfrac{c}{0}\right] = \infty$ - полюс

$$(z-i)' = 1$$

$$f'(-i) = 1 \Rightarrow z_1 = -i \text{ полюс 1-го порядка}$$

$$\lim_{z \to 2} \frac{\sin^2 z}{(z+i)(z-2)} = \left[\frac{\frac{1-\cos 4}{2}}{0} \right] = \infty \text{ - полюс}$$

$$(z-2)' = 1$$

$$f'(2) = 1 \Rightarrow z_2 = 2 \text{ полюс 1-го порядка}$$

$$\int_C \frac{\sin^2 z}{(z+i)(z-2)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k)$$

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z \to -i} \frac{\sin^2 z}{\cancel{(z+i)}(z-2)} \cdot \cancel{(z+i)} =$$

$$= -\frac{\sin^2(-i)}{i+2} = -\frac{1-\cos(-2i)}{2(i+2)} =$$

$$= -\frac{2 - e^{+2} - e^{-2}}{4(i+2)} = \frac{e^2 - 2 + e^{-2}}{4(i+2)} \cdot \frac{(2-i)}{(2-i)} =$$

$$= \frac{\left(e - \frac{1}{e}\right)^2 (i-2)}{4 \cdot 5} = \frac{2-i}{5} \, sh^2 1$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \operatorname{Res} f(2) = \lim_{z \to 2} \frac{\sin^2(z)}{(z+i)\cancel{(z-2)}} \cdot \cancel{(z-2)} =$$

$$= \frac{\sin^2 2}{(2+i)} \cdot \frac{(2-i)}{(2-i)} = \frac{2-i}{5} \sin^2 2$$

$$\int\limits_C \frac{\sin^2 z}{(z+i)(z-2)} \, dz = 2\pi i \left(\frac{(2-i)}{5} sh^2 1 + \frac{2-i}{5} \sin^2 2 \right) =$$

$$= \frac{2\pi i (2-i)}{5} \left(sh^2 1 + \sin^2 2 \right) = \frac{2\pi}{5} \left(sh^2 1 + \sin^2 2 \right) +$$

$$+ i \frac{4\pi}{5} \left(sh^2 1 + \sin^2 2 \right)$$

<u>Ответ:</u> $\left(\frac{2\pi}{5} + i \frac{4\pi}{5} \right) \left(sh^2 1 + \sin^2 2 \right)$