Мироненко
ИП-811

Вариант - 13

$\boxed{5}$ Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = I$$

Т.к. подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ - четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

Введем функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$, которая на действительной оси совпадает с $f(x)$.

Найдем нули функции $f(z)$:

$$(z^2+1)(z^2+4)=0$$

$z^2+1=0 \qquad z^2+4=0$

$z^2=-1 \qquad z^2=-4$

$z=\pm i \qquad z=\pm 2i$

В верхней полуплоскости находятся корни:

$z_1=i \quad , z_2=2i$

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\infty \text{ - полюс}$$

$(z^2+1)'=2z \Rightarrow$ 1-ого порядка

$$\lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}=\left[\frac{-4}{0}\right]=\infty \text{ - полюс}$$

$(z^2+4)'=2z \Rightarrow$ 1-ого порядка

$$\operatorname{Res} f(z_1)=\operatorname{Res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\cdot(z-i)=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{z^2\cancel{(z-i)}}{(z+i)\cancel{(z-i)}(z^2+4)}=\frac{-1}{3(i+i)}=-\frac{1}{6i}$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \operatorname{Res} f(2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \cdot (z-2i) =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{z^2 \cancel{(z-2i)}}{(z^2+1)(z+2i)\cancel{(z-2i)}} = \frac{-4}{-3(4i)} =$$

$$= \frac{1}{3i}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z_1) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Res} f(z_2) \right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \cancel{i} \left(\frac{1}{3\cancel{i}} - \frac{1}{6\cancel{i}} \right) = \frac{\pi}{6}$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{6}$