Федеральное агентство связи

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»

О.Е.Дмитриева

Сборник задач по математическому анализу 1 семестр

Учебное пособие

Новосибирск
2011

УДК – 517(075.8)
доцент О.Е. Дмитриева

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.1СЕМЕСТР.
Учебное пособие. СибГУТИ,
г. Новосибирск, 2011г., стр. 72

Учебное пособие содержат задачи по курсу математического анализа по программе 1 семестра технических вузов. Материал разбит на отдельные занятия. В каждом занятии кратко представлена теория по изучаемой теме, даны примеры решения некоторых задач. Далее даются задания для аудиторных занятий, выделены задания для домашней работы. Задания подобраны в соответствии с разработками кафедры высшей математики СибГУТИ. Многие задачи взяты из задачников Г.Н.Бермана и А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.

Учебное пособие может быть использовано в качестве задачника по математическому анализу для технических специальностей втузов.

Кафедра высшей математики
Ил. – 5, список литературы – 3 назв.,

Для направления: 210400.

Рецензенты: д.ф.-м.н. , профессор Г.Г.Черных,
д.ф.-м.н. , профессор Г.С.Хакимзянов

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ в качестве учебного пособия.

Занятие 1.
Комплексные числа.
Алгебраическая форма комплексного числа.

Комплексными числами *называют выражения вида* $z = a + bi$, *где* a, b - *действительные числа,* i - *символ. Операции* ***сложения*** *и* ***умножения*** *задаются по определению: если* $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$, *то:*

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (bc + ad)i.$$

Производя операцию умножения числа $0 + 1i$ *на себя, легко получить, что* $i^2 = -1$, *поэтому символ* i *называют* ***мнимой единицей.***

Запись $z = a + bi$ *называют* ***алгебраической формой*** *комплексного числа. Так как числа* $a + 0i$ *отождествляют с действительными числами* a, *то в записи* $z = a + bi$ *число* a *называют* ***действительной частью*** z, *обозначение* $a = \operatorname{Re} z$, *число* b *называют* ***мнимой частью*** z, *обозначение* $b = \operatorname{Im} z$.

Числа вида $0 + bi$ *называют* ***чисто мнимыми***.

Если $z = a + bi$, *то комплексное число, отличающееся от данного только знаком при мнимой части, называют* ***комплексно сопряженным*** *данному:* $\bar{z} = a - bi$. *Ясно, что сопряженным к сопряженному будет исходное число:* $\bar{\bar{z}} = z$, *поэтому числа* z *и* $\bar{z}$ *называют* ***взаимно сопряженными***.

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат xOy, *то всякое число* $z = a + bi$ *можно изобразить точкой* $M(a, b)$ *с абсциссой* a *и ординатой* b. *Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называют* ***комплексной плоскостью***, *ось* Ox - *действительной осью, а ось* Oy - *мнимой осью.*

Операции возведения в натуральную степень и деления комплексных чисел получаются на основе определения операции умножения:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots \cdot z}_{n \quad \text{ðàç}}, \quad n \in N,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

,

т.е. для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое можно в записи соответствующей дроби числитель и знаменатель домножить на число, комплексно сопряженное числу в знаменателе.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Преобразуем алгебраическую форму комплексного числа:

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Число $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ *называется* ***модулем*** *комплексного числа* $z = a + bi$, *обозначается* $|z|$ *или* r, *или* ρ. *Геометрически* $|z|$ *- это расстояние от точки комплексной плоскости, изображающей данное комплексное число, до начала координат.* ***Аргументом*** *комплексного числа* $z = a + bi$ $(z \neq 0 + 0i)$ *называется всякий угол* φ *- решение системы уравнений*

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Геометрически φ *- это угол между положительным направлением оси* Ox *и отрезком* OM, *где* M *- точка, изображающая комплексное число, а также любой другой угол* $\varphi + 2n\pi,\ n \in z$. *Значение угла* $-\pi < \varphi \leq \pi$ *называется* ***главным значением аргумента***, *обозначается как* $\arg z$ *(иногда полагают* $0 \leq \arg z < 2\pi$*). Главное значение аргумента удобно определять из следующей записи, дающей главные значения аргумента при решении приведенной системы уравнений:*

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a} \ \text{äëÿ } z \text{ èç } I\ ,\ IV \ \text{÷åòâåðòåé}, \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a} \ \text{äëÿ } z \text{ èç } II \ \text{÷åòâåðòè}, \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a} \ \text{äëÿ } z \text{ èç } III \ \text{÷åòâåðòè}, \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \text{ïðè} \ a = 0, b > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{ïðè} \ a = 0, b < 0. \end{cases}$$

Пара чисел: модуль $|z|$ *и аргумент* φ *однозначно определяют положение точки комплексной плоскости, изображающей комплексное число.*

Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *называется* ***тригонометрической формой*** *комплексного числа. Символом* $e^{i\varphi}$ *обозначают выражение*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \textit{(формула Эйлера).}$$

С помощью этого обозначения комплексное число можно записать в ***показательной форме*** *:* $z = |z| e^{i\varphi}$.

Введем обозначение: $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$.

Определены следующие операции:

1. *Умножение:*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) = r_1 \cdot r_2 \quad e^{i\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)};$$

2. *Деление:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{r_1}{r_2} e^{i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)};$$

3. *Возведение в целую степень:*

$$z_1{}^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = r^n e^{in\varphi} \text{ (формула Муавра);}$$

4. *Извлечение корня:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad n \in N.$$

При извлечении корня n*-ой степени получается ровно* n *разных комплексных чисел.*

Пример. *Найти все корни третьей степени из числа* $z = 8$.

$$z = 8 + 0i = 8\left(\cos 0 + i\sin 0\right),$$

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 \quad \omega_0 = 2\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 2$$

$$k = 1 \quad \omega_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \quad \omega_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -1 - i\sqrt{3}$$

1.1. Заданы комплексные числа:

$$z_1=-2+3i,\quad z_2=5-2i,\, z_3=3+3i,\, z_4=-1-4i,$$
$$z_5=-3i,\, z_6=2i,\, z_7=5,\, z_8=-2$$

а) найти сопряженные ко всем этим числам;
б) изобразить на комплексной плоскости данные числа и сопряженные к ним;
в) найти $z_1+z_3,\ \ z_2-z_4$;
г) найти $z_2\cdot z_1,\ \ z_3\cdot z_4$;
д) найти $\dfrac{z_1}{z_2},\ \dfrac{z_4}{z_3}$;
е) найти $(z_5)^3,\ (z_3)^2$.

Выполнить указанные операции:

1.2. $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$; **1.3.** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

1.4. Записать числа в тригонометрической и показательной формах:
$$z_1=-1-\sqrt{3}i,\quad z_2=-5+5i,\quad z_3=-7,\quad z_4=-3i,$$
выполнить над этими числами действия в тригонометрической форме:

а) $z_2\cdot z_1$; б) $\dfrac{z_2}{z_3}$; в) z_1^{10}; г) $\sqrt{z_2}$; д) $\sqrt[3]{z_3}$.

Домашнее задание.

1.5. Заданы комплексные числа:
$$z_1=-7-7i,\ \ z_2=\sqrt{3}+i,\ \ z_3=-5i,\ \ z_4=2-3i,\ \ z_5=6;$$

а) найти сопряженные ко всем этим числам;
б) изобразить на комплексной плоскости данные числа и сопряженные к ним;
выполнить действия в алгебраической форме:
в) $z_1+z_4,\ \ z_2-z_1$;
г) $z_1\cdot z_2,\ \ z_4\cdot z_1$;
д) $\dfrac{z_1}{z_3},\ \dfrac{z_2}{z_4}$; е) $(z_2)^2,\ (z_3)^9$.

Выполнить указанные операции: **1.6.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; **1.7.** $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$.

1.8. Записать числа в тригонометрической и показательной формах:
$$z_1=-2-2i,\quad z_2=\sqrt{3}+i,\quad z_3=5i,\quad z_4=12,$$
выполнить действия в тригонометрической форме:

а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\dfrac{z_2}{z_1}$; в) $(z_1)^{20}$; г) $\sqrt[3]{z_3}$; д) $\sqrt[4]{z_4}$.

Занятие 2.
Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
Функция одной переменной.

Пусть D - произвольное множество действительных чисел. Если каждому $x \in D$ поставлено в соответствие число $f(x)$, то считается, что на множестве D определена ***функция*** $y = f(x)$. *Множество D значений независимой переменной x называется* ***областью определения****, а соответствующее множество значений зависимой переменной y называется* ***областью значений*** *функций. Под* ***естественной областью определения*** *понимается то множество значений независимой переменной, для которого формула, задающая функцию, имеет смысл.*

Приведенный способ задания функции называется ***явным*** *аналитическим. Если формула аналитического задания функции не разрешена относительно зависимой переменной, т.е. имеет вид $F(x, y) = 0$, то такой способ задания называется* ***неявным.***

Пример. $x^2 + y^2 = R^2$ *- неявное задание окружности.*

Еще один способ аналитического задания функции, когда и аргумент x, и функция y выражаются в виде явных функций третьей величины – параметра t: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1]$. *Такой способ задания функции называется* ***параметрическим.***

Пример. $x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$ *- параметрическое задание окружности.*

Простейшие свойства функций.

1) Если для всех $x \in D$ выполняется $f(-x) = f(x)$,то $f(x)$ - ***четная функция****, если для всех $x \in D$ выполняется $f(-x) = -f(x)$,то $f(x)$-* ***нечетная функция****.*

2) Если существует такое постоянное число T, что для любого $x \in D$ $f(x+T) = f(x)$, то функция называется ***периодической.*** *Наименьшее значение T, для которого выполняется такое равенство называют* ***периодом*** *функции.*

3) Если для любых $x_1, x_2 \in D$, таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то функцию называют ***монотонно возрастающей.***

Если для любых $x_1, x_2 \in D$, таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, то функцию называют ***монотонно убывающей.***

Обобщающий термин для этих понятий – ***монотонная*** *функция.*

Понятие обратной функции.

Пусть задана монотонная в области D функция $y = f(x)$. Обозначим *через* E *область её значений. Если зафиксировать значения переменной* y *и по ним восстанавливать значения переменной* x, *то получим функцию* $x=\varphi(y)$ *с областью определения* E *и областью значений* D. *Её называют* ***обратной*** *к функции* $y=f(x)$. *Делая переобозначение переменных, обратную функцию записывают в виде* $y=\varphi(x)$. *Обратной к ней будет исходная функция* $y=f(x)$. *Поэтому функции* $y=f(x)$ *и* $y=\varphi(x)$ *называют* ***взаимно обратными.***

Пример. $y=5^x$ *и* $y=\log_5 x$ - *взаимно обратные.*

Понятие сложной функции.

Пусть заданы функции $y=f(z)$ *с областью определения* Z *и функции* $z=\varphi(x)$ *с областью определения* X *и областью значений* Z. *Тогда считается определенной* ***сложная функция*** $y=f(\varphi(x))$ *с областью определения* X. *Функцию* $z=\varphi(x)$ *называют* ***промежуточным аргументом*** *исходной функции.* ***Сложную функцию*** $y=f(\varphi(x))$ *называют еще к**омпозицией функций*** f *и* φ: $y=f\circ\varphi$. *Аналогичным образом задается сложная функция двух, трех или большего числа промежуточных аргументов.*

Примеры.

1) $y=\sin 2x$;

$y=\sin z,\ \ z=2x$ - *простые функции, участвующие в композиции.*

2) $y=arctg^2\, 5^x$;

$y=z^2,\ \ z=arctg\, t,\ \ t=5^x$ - *простые функции, участвующие в композиции.*

2.1. Выполнить действия над комплексными числами перейдя к тригонометрической форме:

а) $(2-2i)^{16}$; б) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[3]{-125i}$.

2.2. Найти $f(0),\ f(-x),\ f(x+1),\ f(x)+1,\ f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$, если $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

2.3. Найти естественную область определения и множество значений каждой из функций:

а) $y=\ln(x+2)$; б) $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$; в) $y=e^{x^2-1}$.

2.4. Исследовать функции на четность – нечетность в естественной области определения:

а) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; б) $f(x)=\sin x-\cos x$; в) $f(x)=x^4-5x^2$.

2.5. Найти период функции $f(x)=5\cos 7x$.

2.6. Установить, какие из заданных функций имеют обратные, найти соответствующие обратные функции и их области определения:

а) $y=2x-3$; б) $y=3x^2$; в) $y=\ln 3x$; г) $y=\cos 3x$.

2.7. Установить, композицией каких функций являются следующие сложные функции: а) $y=\sin^2(7x-2)$; б) $y=\sqrt{ctg\, x^3}$; в) $y=e^{\log_5 2x}$.

Домашнее задание.

2.8. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x)=\lg x^2$.

2.9. Найти естественную область определения и множество значений каждой из

функций:

а) $y=\sqrt{5-2x}$; б) $y=\arcsin^2(1+x)$.

2.10. Исследовать функции на четность – нечетность в естественной области определения :

а) $f(x)=x^2+\cos x$; б) $f(x)=\dfrac{x}{2^x-1}$; в) $f(x)=\dfrac{tg\,2x}{1-\sin x^2}$.

2.11. Найти период функции $f(x)=tg\,\dfrac{x}{2}$.

2.12. Найти обратные к следующим функциям и области определения прямой и

обратной функции:

а) $y=5-9x$; б) $y=\log_7(2x)$; в) $y=\sin 4x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{8}\right]$.

2.13. Установить, композицией каких функций являются следующие сложные

функции:

а) $y=\sqrt[3]{\sin 2x}$; б) $y=\ln^2(\arcsin x)$; в) $y=arctg 3^x$.

Занятие 3.
Последовательность и её предел. Предел функции.

Бесконечной числовой последовательностью *называется совокупность чисел, каждому из которых присвоен порядковый номер:* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. *Задать последовательность означает задать закон, по которому можно определить значение любого члена последовательности, зная его порядковый номер. То есть для задания последовательности надо знать выражение члена последовательности (называемого общим её членом) как функции его порядкового* *номера* n: $x_n = f(n)$. *Зная общий член последовательности, можно записать её в виде* $\{x_n\}$.

Число A *называется* ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ *- это записывается в виде* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, *если по любому малому числу* $\varepsilon > 0$ *можно определить номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что при* $n > N(\varepsilon)$ *все члены последовательности попадают в* ε*- окрестность точки* A, *т.е. в интервал* $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. *Иначе это можно записать в виде неравенства:* $|x_n - A| < \varepsilon$.

В соответствии с этим определением можно показать, что предел последовательности $\left\{\dfrac{1}{n^\alpha}\right\}$, *где* $\alpha > 0, \alpha \in R$, *равен нулю, то есть* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$. *Последовательность, имеющая конечный предел, называется* ***сходящейся.***

Последовательность $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой*** *(формально записывается* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$*), если для любого большого числа* $M > 0$ *существует номер* $N(M)$ *такой, что при* $n > N(M)$ *выполняется неравенство* $|x_n| > M$.

Пример 1. *Найти предел последовательности* $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$ *и установить, начиная с какого номера все члены последовательности попадают в* ε*- окрестность точки предела, если* $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. Найдем предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1} = 1.$$

Если $\varepsilon = 10^{-2}$, *то в соответствии с определением предела необходимо выполнение неравенства* $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \dfrac{1}{100}$.

Решаем его: $\left|-\dfrac{1}{n}\right| < \dfrac{1}{100}$ *или* $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$, *отсюда* $n > 100$. *Следует положить* $N(\varepsilon) = N\left(\dfrac{1}{100}\right) = 100$. *Тогда, начиная с номера* $101(n > N(\varepsilon))$, *все остальные члены последовательности будут попадать в интервал* $(0{,}99\,;1{,}01)$, *т.е.* $0{,}99 < x_n < 1{,}01$ *для* $n > 100$.

Пример 2. *Вычислить пределы последовательностей:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{-7n^2+2}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$.

Решения: *а)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{-7n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{-7+\dfrac{2}{n^2}}=-\dfrac{3}{7}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5-n}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=0.$

Понятие предела функции.

Число b *называется* ***пределом функции*** $y=f(x)$ *при* $x\to x_0$ *(в точке* x_0*) – это записывается как* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, *если для любого малого числа* $\varepsilon>0$ *можно указать такое малое число* $\delta(\varepsilon)>0$, *что для всех* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x-x_0|<\delta$, *выполняется неравенство* $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Из этого определения следует:

1) *закон стремления аргумента* x *к* x_0 *безразличен;*
2) *число* x_0 *может не входить в область определения функции* $y=f(x)$;
3) *число* b *- значение предела – может не входить в область значений функции* $y=f(x)$.

Приемы нахождения пределов функций аналогичны приемам нахождения предела последовательности.

3.1. Записать первые пять членов последовательности:

а) $x_n=\dfrac{3n+5}{2n-3}$; б) $x_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

3.2. Написать формулу общего члена последовательности:

а) $2,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{6}{5},\ \dfrac{8}{7},\ldots$; б) $-3,\ \dfrac{5}{3},\ -\dfrac{7}{5},\ \dfrac{9}{7},\ -\dfrac{11}{9},\ldots$

3.3. Найти предел последовательности $\left\{\dfrac{2n}{n+2}\right\}$ и установить, начиная с какого номера все члены последовательности попадают в ε- окрестность точки предела, $\varepsilon=\dfrac{1}{10}$.

Вычислить пределы последовательностей:

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{7-9n}$; **3.5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^2-8n+1}{6+15n^2}$; **3.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^3-3n+4}$;

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7}-\frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$; **3.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-2}{n^2+3}$;

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$; **3.10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

Найти пределы функций:

3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$; **3.12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+3x-1}{7x-x^3}$; **3.13.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$;

3.14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; **3.15.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; **3.16 .** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$.

Домашнее задание.

3.17. Записать первые пять членов последовательности:

а) $x_n=\frac{2n}{3n-5}$; б) $x_n=n\left(1-(-1)^n\right)$;

3.18. Написать формулу общего члена последовательности:

а) $\frac{1}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{10},\ \frac{9}{12},\ \dots$ б) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$

Вычислить пределы последовательностей:

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n}$; **3.20.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$;

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n}$; **3.22.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)$.

Найти пределы функций:

3.23. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+3}{x^2-3}$; **3.24.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$;

3.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-9x}{4x^2-2+5x^3}$; **3.26.** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

Занятие 4.
Предел функции. Первый и второй замечательные пределы.

Вследствие наличия многочисленных приложений следующие пределы называют замечательными:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ - ***первый замечательный предел***,

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ *или* $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e$ - ***второй замечательный предел.***

Здесь $e\approx 2{,}72$ *- трансцендентное число Непера.*

Некоторые модификации первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1.$$

Некоторые модификации второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

При вычислении некоторых пределов этого занятия используются следующие формулы тригонометрии:

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Пример 1. *Вычислить:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{2x}$.

Решение.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{9}{2}=\left|\begin{array}{l}9x=y\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right|=\frac{9}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{9}{2}.$$

Пример 2. *Вычислить:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,5x}{x}$.

Решение.
$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,5x}{x}=5\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,5x}{5x}=\left|\begin{array}{l}arctg\,5x=y\\ 5x=tg\,y\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right|=5\lim_{y\to 0}\frac{y}{tg\,y}=$$

$$=5\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=5\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=5.$$

Пример 3. *Вычислить:* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1}{3x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1-3x+1}{3x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{3x-1}}=\left|\begin{array}{l}\frac{2}{3x-1}=y\\ x\to\infty\\ y\to 0\end{array}\right|=$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to\infty}}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{2x}{3x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

Вычислить пределы функций:

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; **4.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg\,7x}$; **4.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{2x}$;

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{\arcsin 5x}$; **4.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$; **4.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$;

4.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; **4.8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; **4.9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^x$;

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$; **4.11.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(\ln(x+a)-\ln x)$; **4.12.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

Домашнее задание .

Вычислить пределы функций:

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg11x}{2x}$; **4.15.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{tg8x}$; **4.16.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$; **4.17.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$;

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x-3}$; **4.19.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$; **4.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}$;

4.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1+2x)}{x}$; **4.22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

Занятие 5.
Бесконечно малые. Сравнение бесконечно малых. Бесконечно большие.

Функция $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой*** *при* $x\to x_0$, *если* $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ *(* x_0 *- любое действительное число или* ∞*).*

При сравнении двух бесконечно малых $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *(при* $x\to x_0$***)*** *рассматривают предел их отношения* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, *при этом возможны случаи:*

1) *если* $C\neq 0$ *- конечное число, то* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называют бесконечно малыми* ***одного порядка****, обозначение:* $\alpha(x)=0^*(\beta(x))$*;*
   если $C=1$*, бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называют* ***эквивалентными****, обозначение* $\alpha(x)\sim\beta(x)$*;*
   при нахождении предела отношения двух бесконечно малых данные функции можно заменять на эквивалентные,например, при $x\to 0$ $\sin x\sim x$, $tgx\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $arctgx\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$*;*
2) *если* $C=0$*, то* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой* ***высшего порядка*** *(более высокого порядка), чем* $\beta(x)$*, обозначение* $\alpha(x)=$ ***o(*** $\beta(x)$*); тогда* $\beta(x)$ *называется бесконечно малой* ***низшего порядка****, чем* $\alpha(x)$*;*
3) *если* $C=\infty$*, то* $\alpha(x)$ *-* ***низшего порядка****, чем* $\beta(x)$*; соответственно, тогда* $\beta(x)$ *-* ***высшего порядка****, чем* $\alpha(x)$*:* $\beta(x)=$ ***o(*** $\alpha(x)$*);*
4) *если* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\neq 0$, C *- конечное число,* $k>0$ *- действительное число, то* $\alpha(x)$ *называют бесконечно малой* ***k - го порядка*** *относительно бесконечно малой* $\beta(x)$*, обозначение* $\alpha(x)=0^*(\beta^k(x))$*.*

Функция $A(x)$ *называется бесконечно большой при* $x\to x_0$*, если* $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=\infty$ *(* $+\infty$ *или* $-\infty$*). Сравнение бесконечно больших и их классификация вводятся аналогично тому, как это делается для бесконечно малых.*

5.1. Убедиться, что при $x\to 1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ одного порядка малости. Будут ли они эквивалентными?

Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно бесконечно малой $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:

5.2. $\alpha(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$;

5.3. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$;

5.4. $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$;

5.5. $\alpha(x) = \sin\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)$;

5.6. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$;

5.7. $\alpha(x) = 2^{x^2} - 1$;.

Доказать, что разность функций $f_1(x) - f_2(x)$ имеет 2-ой порядок малости относительно x при $x \to 0$, если:

5.8. $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f_2(x) = 1 - x$;

5.9. $f_1(x) = \sqrt{a^2 + x}$, $f_2(x) = a + \dfrac{1}{2a}x$ $(a \neq 0)$.

Используя эквивалентность бесконечно малых, вычислить пределы:

5.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$;

5.11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\lg x}$;

5.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x + x tg 7x}$.

5.13. При $x \to 1$ функции $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ и $y = 1 - \sqrt{x}$ - бесконечно малые. Какая из них высшего порядка малости ?

5.14. Определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ относительно $B(x) = x$ при $x \to \infty$: $A(x) = x^3 + 150x + 10$.

Домашнее задание.

Определить порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно бесконечно малой $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:

5.15. $\alpha(x) = tgx - \sin x$;

5.16. $\alpha(x) = 1 - \cos 2x^2$;

5.17. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$;

5.18. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$.

Вычислить пределы, пользуясь эквивалентностью бесконечно малых

5.19. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{\arcsin(1-2x)}$;

5.20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx^2}{\arcsin 3x \cdot \sin \dfrac{x}{2}}$;

5.21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{9+x^2} - 3\right)}{x}$;

5.22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^2 \sqrt{x}}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

5.23. Определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ относительно x при

$x \to \infty$: $A(x) = \dfrac{3x^6 - 13x^2}{2 - x^3}$.

Занятие 6.

Непрерывность функции в точке и на интервале.

Точки разрыва.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** x_0, *если она определена в некоторой окрестности точки* x_0 *и в самой этой точке и предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1).$$

Эквивалентные этому определения:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right), \qquad (2)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \qquad (3)$$

(бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$ в окрестности точки непрерывности x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x_0)$).

Еще одно часто используемое определение непрерывности, эквивалентное первым трем, дается через понятие ***односторонних пределов:***

левосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0,\, x<x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$

правосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0,\, x>x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$

Функция называется в точке x_0 ***непрерывной слева****, если $f(x_0 - 0) = f(x_0).$*

Функция называется в точке x_0 ***непрерывной справа****, если $f(x_0 + 0) = f(x_0).$*

Функция называется непрерывной в точке x_0, если

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0) \qquad (4).$$

Функция непрерывна на открытом интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), непрерывна в точке $x = a$ справа и в точке $x = b$ слева.

Точками разрыва *функции называют:*

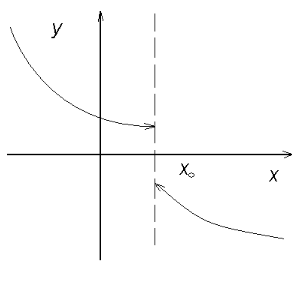
1) принадлежащие области определения точки, в которых функция не имеет свойства непрерывности;

2) не принадлежащие области определения точки, которые являются общей границей двух примыкающих друг к другу промежутков, принадлежащих области определения: $(a, b) \cup (b, c)$ (точка b - так называемая выколотая точка области определения).

Точки разрыва подразделяют на 2 типа:

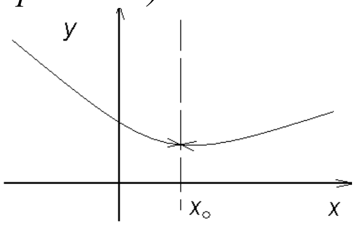
Разрывы 1-го рода *(разрывы с конечным скачком):*

1) $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ - пределы слева и справа в точке x_0 конечны и не совпадают:



величину $s = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называют скачком функции в точке x_0; в точке $x = x_0$ функция при этом может быть определена или не определена; если $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$, то такой разрыв 1 рода называют правильным;

2) $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ - *пределы слева и справа конечны, равны, но не равны значению функции в точке* x_0 *(в этой точке функция может быть определена или не определена)*



Этот вид разрыва 1 рода называют ***устранимым****: новая функция*

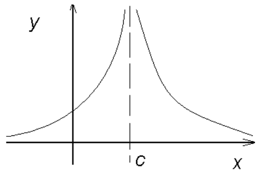
$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\neq x_0 \\ f(x_0+0)=f(x_0-0), x=x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0.

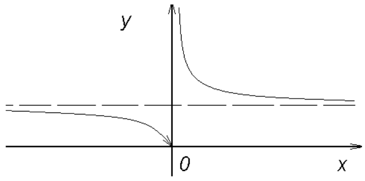
Разрывы 2 рода*: если хотя бы один из односторонних пределов в точке* x_0 *не существует или равен* ∞.

Примеры разрывов 2 рода:

а) $y=\dfrac{1}{(x-c)^2}$, $x=c$ - *точка разрыва 2 рода:*



б) $y=e^{\frac{1}{x}}$, $x=0$ - *точка разрыва 2 рода:*



в) $y=\sin\dfrac{1}{x}$, $x=0$ - *точка разрыва 2 рода,* $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ *не существует.*

Для исследования функции $y=f(x)$ *на разрывы в точках, подозрительных на точки разрыва, находятся односторонние пределы* $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, *сравниваются и в случае равенства сравниваются со значением* $f(x_0)$.

Исследовать функции на непрерывность и указать характер точек разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить функцию:

6.1. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & x\leq 2 \\ x, & x>2 \end{cases}$; **6.2.** $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x<-1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\geq -1 \end{cases}$;

6.3. а) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x^2, & 1<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ x^2, & 1<x<2 \\ 2x, & x>2 \end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases} 3x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right), \\ ctg\,x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right), \\ \cos x, & x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right] \end{cases}$ **;**

6.4. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$; **6.5.** $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$; **6.6.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$;

6.7. $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}$; **6.8.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$; **6.9.** $f(x)=5^{\frac{1}{x}}$;

6.10. $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$; **6.11.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+ax+4}$ при $a=0$, $a=-5$;

6.12. $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; **6.13.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x}-2}$.

Домашнее задание.

Исследовать функции на непрерывность и указать характер точек разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить функцию.

6.14. $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$; **6.15.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+5x+4}$; **6.16.** $f(x)=\dfrac{2-2\cos x}{5x^2}$;

6.17. $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\le x<1 \\ x+1, & 1<x\le 4 \\ -x, x>4 \end{cases}$; **6.18.** $f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ 1, & x=\dfrac{\pi}{4} \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4}<x\le\pi \end{cases}$;

6.19. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<0 \\ -x^2-1, & 0\le x<2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2 \end{cases}$ **.**

Занятие 7.
Дифференцирование функций
(степенные и тригонометрические функции).

Производной 1 порядка *(или первой производной) функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке, когда последнее стремится к нулю:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'_x(x_0)=\frac{df}{dx}$$ *, где*

$\Delta f=f(x)-f(x_0)$ - *приращение функции,* $\Delta x=x-x_0$ - *приращение аргумента.*

Производная функции, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием.***

Таблица производных *основных элементарных функций****.***

1) $(x^n)'=nx^{n-1}$*;*

2) $(a^x)'=a^x\ln a$*;*

3) $(e^x)'=e^x$*;*

4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a e$*;*

5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$*;*

6) $(\sin x)'=\cos x$*;*

7) $(\cos x)'=-\sin x$*;*

8) $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$*;*

9) $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$*;*

10) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*;*

11) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*;*

12) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ *;*

13) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования функций.

Если C, C_1, C_2 *- постоянные,* $f(x)$, $g(x)$*- дифференцируемые функции, тогда:*

1) $C' = 0$*;*

2) $(C_1 f(x) + C_2 g(x))' = C_1 f' + C_2 g'$*;*

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2} \quad (g(x) \neq 0)$*;*

4) Если функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_o*, а функция* $z = g(y)$ *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$*, тогда сложная функция* $z = g(f(x))$ *имеет производную в точке* x_o*:* $z_x'(x_0) = g_y'(y_0) \cdot f_x'(x_0)$ *или* $z_x' = z_y' \cdot y_x'$.

Пример. *Найти производные функций:*

а) $y = \cos^2 7x$.

Эту сложную функцию можно записать как композицию функций $y = u^2$, $u = \cos t$, $t = 7x$.

$$y_x' = y_u' \cdot u_t' \cdot t_x' = 2\cos 7x \cdot (-\sin 7x) \cdot 7 = -7\sin 14x;$$

б) $y = \log_3(\arcsin x)$.

$$y = \log_3 u,\ u = \arcsin x,\ y_x' = \frac{1}{\arcsin x} \cdot \log_3 e \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Продифференцировать функцию:

7.1. $3x^2 - 5x + 1$; **7.2.** $x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$; **7.3.** $ax^2 + bx + c$;

7.4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$; **7.5.** $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$; **7.6.** $\sqrt{y}\left(y^3 - \sqrt{y} + 1\right)$;

7.**7.** $(t^2 - 3t + 3)(t^2 + 2t - 1)$**;** **7.8.** $(\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$; **7.9.** $(\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$;

7.10. $(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$; **7.11.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$**;** **7.12.** $y = \dfrac{2}{x^3 - 1}$**;**

7.13. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$ **;** **7.14.** $y = \sqrt{1 - x^2}$ **;** **7.15.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$**;**

7.16. $y=\sin x+\cos x$; **7.17.** $y=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x$; **7.18.** $y=a\cos\frac{x}{3}$;**7.19.** $y=tg\frac{x+1}{2}$;

7.20. $y=\sin\frac{1}{x}$; **7.21.** $y=\cos^3 4x$; **7.22.** $y=\sin\sqrt{1+x^2}$; **7.23.** $y=\left(1+\sin^2 x\right)^4$;

7.24. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; **7.25.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{\left(x^2+2\right)^3}}$; **7.26.** $y=\frac{tg3x}{x}$;

7.27. $y=\sqrt{ctg\frac{x-3}{5}}$; **7.28.** $y=\sin^2(\cos 3x)$; **7.29.** $y=ctg^6\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

7.30. $z=\sqrt[5]{tg5x}-\sqrt[7]{ctg7x}$.

Домашнее задание.

Продифференцировать функцию:

7.31. $0{,}8\sqrt[4]{x}-\frac{x^3}{0{,}3}-\frac{1}{5x^2}$; **7.32.** $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$; **7.33.** $y=\left(x^3-3x+2\right)\left(x^4+x^2-1\right)$;

7.34. $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$; **7.35.** $y=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$;

7.36. $s=\frac{t^3}{(1-t)^2}$; **7.37.** $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$; **7.38.** $y=\frac{2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$; **7.39.** $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$;

7.40. $y=\frac{x}{1-\cos x}$; **7.41.** $y=\frac{x\sin x}{1+tgx}$; **7.42.** $y=\frac{1}{4}tg^4x$; **7.43.** $y=\sin 7x$;

7.44. $y=\sin(\sin 2x)$; **7.45.** $y=ctg\sqrt[5]{2+x^4}$.

Занятие 8.
Дифференцирование функций
(обратные тригонометрические, логарифмические, показательные).

Продифференцировать функцию:

8.1. $y=x\arcsin x$; **8.2**. $y=(\arcsin x)^2$; **8.3**. $y=\frac{\arccos x}{x}$; **8.4**. $y=\frac{x^2}{arctg\, x}$;

8.5. $y=\arcsin\frac{2}{x}$; **8.6**. $y=arctg^2\frac{1}{x}$; **8.7**. $y=arcctg(x-\sqrt{1+x^2})$;

8.8. $y=x^2\cdot\log_3 x$; **8.9**. $y=x\cdot\log_5^2 x$; **8.10**. $y=\frac{x-1}{\log_2 x}$; **8.11**. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

8.12. $y=\ln(1-2x)$; **8.13**. $y=\log_3(\sin x)$; **8.14**. $y=\ln tgx$; **8.15**. $y=\ln^4\sin x$;

8.16. $y=arctg(\ln(ax+b))$; **8.17**. $y=10^x$; **8.18**. $y=\frac{x}{4^x}$; **8.19**. $y=\frac{\cos x}{e^x}$;
8.20. $y=x^3-3^x$; **8.21**. $y=(x^2-2x+3)\cdot e^{3x}$; **8.22**. $y=xe^x(\cos x+\sin x)$;
8.23. $y=e^{\sqrt{x+1}}$; **8.24**. $y=\sin 2^x$; **8.25**. $y=5^{\sin^3 x}$; **8.26**. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$; **8.27**. $y=2^{3^x}$;
8.28. $y=a^x\cdot x^a$; **8.29.** $y=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$; **8.30.** $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

Домашнее задание.

Продифференцировать функцию:

8.31. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; **8.32.** $y=\sqrt{1-\arccos^2 x}$; **8.33.** $y=arctg 3x\cdot arcctg 3x$;

8.34. $y=\ln^3 x$; **8.35.** $y=\sqrt{\log_2 5x}$; **8.36.** $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$; **8.37.** $y=\ln\arccos 2x$;
8.38. $y=\log_2\left(arctg\sqrt{1+x^2}\right)$; **8.39.** $y=xe^{2x}$; **8.40.** $y=2e^{-x^2}$; **8.41.** $y=a^{\cos^3 x}$;
8.42. $y=7^{tg3x}$; **8.43.** $y=\cos\sqrt{\log_5 3x}$; **8.44.** $y=\frac{arctg 5^x}{arcctg 5^x}$; **8.45.** $y=\arccos 2^{\log_3 x}$.

Занятие 9.
Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Производные высших порядков.

Логарифмической производной *функции* $y=f(x)$ *называется производная от логарифма этой функции:* $(\ln y)'=\frac{y'}{y}$. *Метод логарифмического дифференцирования заключается в том, что от заданной функции* $y(x)$ *предварительно находится натуральный логарифм, а затем результат дифференцируется. Этот метод полезен в следующих случаях:*

1) *функция имеет показательно-степенной вид:* $y=f(x)^{\varphi(x)}$;
2) *функция представляет собой произведение или частное многих сомножителей.*

Пример 1. *Найти производную* $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

Решение. *Область определения функции:* $[0,1)\cup(2,+\infty)$.

Тогда $\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln|x-1|-\ln|x-2|\right)$, $(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)$,

$$y' = y\cdot(\ln y)' = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right) = \frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)}}.$$

Пример 2. *Найти производную* $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Решение. $1+\dfrac{1}{x}>0$ *по свойству показательной функции, поэтому логарифмируем*

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\ (\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x},$$

$$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right).$$

Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически.

Пусть функция $y=f(x)$ *задана неявно:* $F(x, f(x))=0$. *Для вычисления производной* y'_x *это равенство дифференцируется по* x, *при этом левая часть дифференцируется как сложная функция* x. *Полученное уравнение надо разрешить относительно* y'_x.

Пример 3. *Найти производную* y'_x, *если дано неявное задание функции* $y(x)$*:*

$$y+\ln\frac{y}{x}=3.$$

Решение. *Дифференцируем равенство:* $y' + \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y'x-y}{x^2} = 0$,

$xyy' + y'x - y = 0$ *,отсюда результат:* $y' = \dfrac{y}{x(y+1)}$.

Пусть функция задана параметрически: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$.
Если при этом $x=\varphi(t)$ *на* $[\alpha,\beta]$ *имеет обратную функцию* $t=\tilde{\varphi}(x)$, *то* $y=\psi(\tilde{\varphi}(x))$.

Тогда формула дифференцирования : $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 4. *Найти* y'_x, *если* $x=\cos^2 t$, $y=\sin t$, $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. $$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos^2 t)'_t} = \frac{\cos t}{2\cos t\cdot(-\sin t)} = -\frac{1}{2\sin t}.$$

Производной 2-го порядка *от функции* $y = f(x)$ *называется производная от её первой производной* $y''(x) = (y'(x))'$

Производной n-го *порядка (* n*-ой производной) называется производная от её* $n-1$*-ой производной:*

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Пример 5. *Найти* y'' *и* y''' *функции* $y = \log_2(3x)$.

$$y' = \frac{1}{3x}\log_2 e \cdot 3 = \frac{1}{x}\log_2 e, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}\log_2 e, \quad y''' = \frac{2}{x^3}\log_2 e.$$

Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

9.1. $y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$**;** **9.2.** $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$**;** **9.3.** $y = x^x$**;**

9.4. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$**;** **9.5.** $y = (\sin x)^{\arcsin x}$**;** **9.6.** $y = x^{x^x}$**.**

Найти производную y'_x для следующих функций, заданных неявно:

9.7. $x^4 + y^4 = x^2y^2$**;** **9.8.** $2y\ln y = x$**;** **9.9.** $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$**;**

9.10. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$**;** **9.11.** $xy = arctg\,\frac{x}{y}$**.**

Для функций, заданных параметрически, найти y'_x:

9.12. $x = 2t$, $y = 3t^2 - 5t$, $t \in R$**;** **9.13.** $x = \frac{1}{t+1}$, $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $t \neq -1$**;**

9.14. $x = 2^{-t}$, $y = 2^{2t}$, $t \in R$**;** **9.15.** $x = a\cos\varphi$**,** $y = b\sin\varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$**;**

9.16. $x = 3\log_2 ctg\,t$**,** $y = tg\,t + ctg\,t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$**;**

9.17. $x = \arcsin(t^2 - 1)$**,** $y = \arccos\frac{t}{2}$, $t \in (0, \sqrt{2})$**.**

Найти y'_x в заданной точке $t = \frac{\pi}{6}$:

9.18. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ **.**

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

9.19. $y = \cos^2 x$; 9.20. $y = \log_2\sqrt[3]{1-x^2}$.

9.21 Найти $y'(0),\ y''(0),\ y'''(0),$ если $y = e^{2x} \cdot \sin 3x$.

Домашнее задание.

Найти производные:

9.22. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$ **; 9.23.** $y = x^3 \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$ **;**

9.24. $y = x^{2^x}$ **; 9.25.** $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$**.**

Найти производную y'_x для функций, заданных неявно:

9.26. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ **; 9.27.** $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$ **; 9.28.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ **;**

9.29. $arctg\,\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ **.**

Для функций, заданных параметрически, найти производную y'_x:

9.30. $x = t^3 + 2$**,** $y = 0{,}5t^2$**; 9.31.** $x = t^4$ **,** $y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$ **;**

9.32. $x = tg\,t$**,** $y = \sin 2t + 2\cos 2t$**,** $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$**;**

9.33. $x = \ln(1 + t^2)$**,** $y = t - arctg\,t$**,** $t \in (0, +\infty)$**.**

9.34. Найти y'_x в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$: $x = t(t\cos t - 2\sin t),\quad y = t(t\sin t + 2\cos t)$.

9.35. Найти $y^{IV}(1)$, если $y = x^3 \ln x$.

9.36. Найти $y'''(2)$, если $y = \ln(x-1)$.

Занятие 10.
Дифференциал функции. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1.Понятие дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x*. Это значит, что существует конечное значение её производной в этой точке:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'_x(x).$$

Тогда по теореме о связи предела и бесконечно малой ($\lim_{x\to x_0} f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=b+\alpha(x)$, *где* $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ *) справедливо равенство:* $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'_x+\alpha(x)$ *или* $\Delta f=f'_x\cdot\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x$, *здесь* $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ *- приращение функции при переходе от точки* x *к точке* $x+\Delta x$, Δx *- приращение аргумента.*

Дифференциалом функции $y=f(x)$ *называется главная часть приращения этой функции, линейная относительно* Δx: $df=f'_x(x)\cdot\Delta x$. *Взяв в качестве функции* $f(x)=x$, *получаем равенство* $\Delta x=dx$. *Поэтому определение дифференциала записывается так:* $df=f'_x\,dx$.

При $\Delta x\to 0$ *приращение функции и её дифференциал в фиксированной точке являются эквивалентными бесконечно малыми* $\Delta f\approx df$. *Этот факт используют в приближенных вычислениях.*

Пример. *Вычислить приближенно* $arctg1{,}04$.

Решение.

$\Delta f\approx df$ *при* $\Delta x\to 0$; $\Delta f=arctg1{,}04-arctg1\approx(arctg\,x)'\Big|_{x=1}\cdot\Delta x=$

$$\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}\cdot 0{,}04=0{,}02$$

$\Delta x=0{,}04$ *, значит,* $arctg1{,}04\approx arctg1+0{,}02=\dfrac{\pi}{4}+0{,}02\approx 0{,}805$.

2.Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Раскрытие основных типов неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть функции f(x) и φ *(x) непрерывны в окрестности точки* x_0 *и при* $x\to x_0$ *обе бесконечно малые или бесконечно большие; их отношение не определено в точке* x_0 *- оно представляет собой неопределенность* $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$. *Раскрытием неопределенности называют нахождение предела отношения этих функций. Одним из способов раскрытия этих типов неопределенностей является* ***правило Лопиталя (теорема Лопиталя)****:*

Если в некоторой окрестности точки x_0 *функции f(x) и* φ *(x) дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки* x_0 *, и* $\varphi'(x)\neq 0$ *в окрестности* x_0*; если при этом функции f(x) и* $\varphi(x)$ *одновременно либо бесконечно малые, либо бесконечно большие при* $x\to x_0$ *и существует предел отношения* $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$*, то* *существует также предел отношения самих этих функций и справедливо равенство* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Примеры. *1)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}}{1}=\alpha-\beta$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{arctg\,x-\frac{\pi}{2}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x^2}}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-1.$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\log_3 2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(\log_3 2x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{2}{2x}\log_3 e}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2\cdot\ln 3=\infty.$

Решить следующие задачи, используя определение дифференциала:

10.1. Доказать, что для линейной функции $f(x)=kx+b$ приращение Δf и дифференциал df совпадают.

10.2. Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента x и произвольном его приращении $\Delta x=dx$:

а) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}-5$; **б)** $y=x\,arctg\,x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

10.3. Вычислить приближенно:

а) $\arcsin 0{,}05$; **б)** $\ln 1{,}2$.

10.4. Дана функция $y=x^3+2x$. Найти значения приращения и его главной линейной части (дифференциала) при изменении аргумента x от $x=2$ до $x=2{,}1$.

10.5. Вычислить приближенно $\sqrt{\dfrac{(2{,}027)^2-3}{(2{,}027)^2+5}}$.

Раскрыть неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью правила Лопиталя:

10.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$; **10.7**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$; **10.8**. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2arctg\,x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$;

10.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; **10.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; **10.11.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x-1}{7x^2+5x}$;

10.12. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{tg\,\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; **10.13.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\log_5(3x)}{\log_7(2x)}$; **10.14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

Домашнее задание.

10.15. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y=x^3$, соответствующие значению аргумента $x_0=2$ и двум различным приращениям аргумента $\Delta x=0{,}1$ и $\Delta x=0{,}01$.

10.16. Найти дифференциал функции $y=\sin x - x\cos x+4$ при произвольном значении приращения $dx=\Delta x$.

10.17. Вычислить приближенно:

а) $\arccos 0{,}01$; **б)** $\ln 1{,}05$.

Раскрыть неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

10.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{5^x-3^x}$;

10.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

10.20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;

10.21. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$;

10.22. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2-8x-2}{3x^2-9}$.

Занятие 11.
Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Кроме основных типов неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ *или* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *при вычислении пределов встречаются еще следующие пять типов:* $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Неопределенности вида $0\cdot\infty, \infty-\infty$ *раскрываются с помощью предварительного преобразования выражения под знаком предела к виду неопределенностей* $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$*, а далее используется правило Лопиталя.*

Для неопределенностей вида 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} *предварительное логарифмирование также позволяет перейти к основным типам неопределенностей и применить к ним правило Лопиталя.*

Примеры. *1) Найти* $\lim\limits_{x\to+0} x^k\cdot\ln x \ (k>0)$.

$$\lim_{x\to+0} x^k\cdot\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-k}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-k})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-kx^{-k-1}} = -\frac{1}{k}\lim_{x\to0} x^k$$

=0.

2) Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'} = =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

$\lim\limits_{x\to+0} x^x = [0^0] = A$ *- введем такое обозначение искомого предела.*

Найдем $\ln A = \ln\lim\limits_{x\to+0} x^x$. *Поскольку логарифмическая функция непрерывна в своей области определения* $(x>0)$ *, то, пользуясь одним из определений непрерывности, можно переписать:*

$$\ln\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0}\ln x^x = \lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0} x = 0.$$

$\ln A = 0$, *значит* $A = \lim\limits_{x\to+0} x^x = e^0 = 1.$

4) *Найти* $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}.$

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{ctg^2 x} = \left[1^\infty\right] = A,$$

$$\ln A = \ln\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{ctg^2 x} = \lim_{x\to+0}\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{ctg^2 x} = \lim_{x\to+0} ctg^2 x \ln\frac{1}{\cos x} = [\infty\cdot 0] =$$

$$= -\lim_{x\to+0}\frac{\ln\cos x}{tg^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to+0}\frac{(\ln\cos x)'}{(tg^2 x)'} = -\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2tg\,x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{2},$$

$\ln A = \dfrac{1}{2}$, *значит,* $A = \lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{ctg^2 x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

Вычислить пределы:

11.1. $\lim\limits_{x\to3+0}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$;

11.2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$;

11.3. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)tg\,\dfrac{x}{2}$;

11.4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$;

11.5. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x^2} - 2ctgx\right)$;

11.6. $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{tgx}$;

11.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

11.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tg\,x)^{2x-\pi}$;

11.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$;

11.10. $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

11.11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$;

11.12. $\lim\limits_{x\to a}\left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$.

Домашнее задание.

Вычислить пределы:

11.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg\,x-\dfrac{1}{x}\right)$; **11.14.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)ctg\,x$;

11.15. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; **11.16.** $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)$;

11.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctg\,x}-\dfrac{1}{x}\right)$; **11.18.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctg\,x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

11.19. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\sin x}$; **11.20.** $\lim\limits_{x\to +0}(ctg\,x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

11.21. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; **11.22.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Занятие 12.
Поведение функции на интервале: монотонность, экстремумы. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Выпуклость графика, точки перегиба.

Функция $y=f(x)$ *называется* ***возрастающей*** *в интервале* (a,b), *если для любых двух значений аргумента из этого интервала большему из них соответствует большее значение функции: если* $x_2>x_1$ *для* $x_1,x_2\in(a,b)$, *то* $f(x_2)>f(x_1)$.

Функция $y=f(x)$ *называется* ***убывающей*** *в интервале* (a,b), *если для любых двух значений аргумента из этого интервала большему из них соответствует меньшее значение функции: если* $x_2>x_1$ *для* $x_1,x_2\in(a,b)$, *то* $f(x_2)<f(x_1)$.

Если функция $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a,b) *и* $f'(x)>0$ *для всех* $x\in(a,b)$, *то* $f(x)$ ***возрастает*** *на этом интервале, если* $f'(x)<0$ *для всех* $x\in(a,b)$, *то* $f(x)$ ***убывает*** *на этом интервале.*

Те значения аргумента, при которых функция достигает своих наибольших или наименьших, по сравнению с соседними точками, значений, называются, соответственно, ***точками максимума*** *и* ***минимума****. Точки максимума и минимума обобщенно называют* ***точками экстремума****.*

Необходимое условие экстремума: *если* x_0 *- точка экстремума функции , то* $f'(x_0)=0$ *или* $f'(x_0)$ *не существует, в том числе,* $f'(x_0)\to\infty$.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума называют ***критическими точками или точками, подозрительными на экстремум.***

Достаточные условия экстремума *непрерывной функции.*

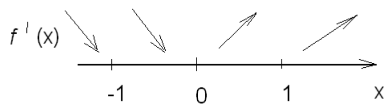
1-ое достаточное условие: *если при переходе через точку* x_0, *подозрительную на экстремум, знак* $f'(x)$ *изменяется, то* x_0 *- точка экстремума, при этом* x_0 ***- точка максимума,*** *если слева от* x_0 $f'(x_0) > 0$, *а справа от* x_0 $f'(x_0) < 0$*;* x_0 ***- точка минимума,*** *если слева от* x_0 $f'(x_0) < 0$, *справа от* x_0 $f'(x_0) > 0$*; если при переходе через критическую точку* x_0 *знак* $f'(x)$ *не изменяется, то* x_0 *- не является точкой экстремума.*

2-ое достаточное условие: *пусть функция* $y = f(x)$ *- дважды дифференцируема в критической точке* x_0 *и в некоторой её окрестности; если* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 *- точка* ***максимума,*** *если* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 *- точка* ***минимума*** *этой функции; если* $f''(x_0) = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*

Пример. *Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции* $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Решение Область определения функции $x \in R$*;находим* $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2}}$ *;*

производная обращается в нуль при $x = 0$ *и не существует при* $x = \pm 1$*; таким образом, критических точек три:* $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$*; определяем знак* $f'(x)$ *в каждом из четырех промежутков:* $(-\infty,-1), (-1,0), (0,1), (1,+\infty)$*:*



Знак $f'(x)$ *изменится только при переходе через точку* $x = 0$ *- это точка минимума,* $(-\infty,0)$ *- интервал убывания функции,* $(0,+\infty)$ *- интервал возрастания функции.*

Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной функции $f(x)$ ***на замкнутом интервале*** *(отрезке)* $[a,b]$ *достигается или в точках экстремума открытого интервала* (a,b), *или на концах этого отрезка.*

Тип выпуклости. Точки перегиба.

График дифференцируемой функции называется ***выпуклым вниз*** *на интервале* (a,b), *если дуга графика на этом интервале расположена выше касательных, проведенных к графику в любой точке этого интервала.*

Если же на (a,b) *дуга графика функции* $y = f(x)$ *располагается ниже всякой касательной, проведенной к графику* $y = f(x)$ *на этом интервале, то график дифференцируемой функции* $y = f(x)$ *называется* ***выпуклым вверх.***

Если $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ *для* $x\in(a,b)$, *то график* $y=f(x)$ *является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.*

Точки графика функции с абсциссой, принадлежащей области определения, при переходе через которые изменяется направление выпуклости, называются ***точками перегиба*** *функции. В дальнейшем точку перегиба будем обозначать только ее абсциссой.*

Необходимое условие точки перегиба:

Если x_0 *- точка перегиба функции* $y=f(x)$, *то* $f''(x_0)=0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует (в частности,* $\lim\limits_{x\to x_0} f''(x)=\infty$*). Точки, в которых выполняется это необходимое условие, называются* ***критическими*** *или* ***точками, подозрительными на перегиб.***

Достаточное условие точки перегиба:

Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, знак второй производной изменяется, то эта точка является точкой перегиба, если не изменяется - то это не точка перегиба.

Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

12.1. $y=x\sqrt{1-x^2}$; **12.2**. $y=\dfrac{x}{\ln x}$; **12.3.** $y=x-2\ln x$.

Найти точки экстремума, пользуясь вторым достаточным признаком:

12.4. $y=e^x\cos x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$; **12.5**. $y=\dfrac{x^3-1}{x}$.

Определить наибольшее M и наименьшее m значения функций на указанных замкнутых интервалах:

12.6. $y=x-2\sqrt{x}$, $x\in[0,9]$; **12.7**. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Найти интервалы выпуклости графика функции $y=f(x)$ и точки перегиба:

12.8. $y=x^4+6x^2$; **12.9**. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$;

12.10. $y=xe^{2x}+1$; **12.11**. $y=x^3\ln x+1$.

Домашнее задание.

Для указанных функций найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума:

12.12. $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$; **12.13.** $y=\ln x-arctg\, x$; **12.14**. $y=x^x$.

Найти наибольшее M и наименьшее m значения функций на указанных замкнутых интервалах:

12.15. $y = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right];$

12.16. $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [0,1];$ **12.17**. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in [-1,1].$

Найти интервалы выпуклости графика функции и точки перегиба:

12.18. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3;$ **12.19**. $y = x^7 + 7x + 1;$

12.20. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Занятие 13.
Асимптоты графика функции. Полное исследование функции.

Асимптотой *графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается уходящая в бесконечность ветвь графика. Асимптоты бывают трёх типов:*

-***горизонтальная*** *(параллельная оси Îõ); её уравнение* $y = b$*; для существования горизонтальной асимптоты необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ *был равен конечному числу (используются термины односторонняя или двухсторонняя горизонтальная асимптота);*

-***вертикальная*** *(параллельная оси Îy); её уравнение* $x = a$*; для существования вертикальной асимптоты необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов* $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ *был равен бесконечности (используются термины односторонняя или двухсторонняя вертикальная асимптота); фактически, точка* $x = a$ *- это точка разрыва второго рода функции;*

-***наклонная ;*** *её уравнение* $y = kx + b$*, где* $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$*; если оба предела конечны, то существует наклонная асимптота: двухсторонняя, если пределы одинаковы при* $x \to +\infty$ *и* $x \to -\infty$*, и односторонняя, если пределы принимают конечное фиксированное значение только при* $x \to +\infty$ *или только при* $x \to -\infty$*. При нахождении наклонной асимптоты может оказаться* $k = 0$*, а значение второго предела* b *- конечно, то есть , уравнение асимптоты* $y = b$*.*

Таким образом, в исследовании на наклонную асимптоту одновременно исследуется наличие горизонтальных асимптот.

<u>Пример.</u> *Найти асимптоты графика функции* $y=\sqrt{x^2+1}$. *Область определения функции* $y=\sqrt{x^2+1}$ *- вся числовая ось, следовательно, нет вертикальных асимптот.*
Исследование на наклонную (в том числе горизонтальную асимптоту):

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{-|x|}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+|x|}=0.$$

Итак, $y=k_1x+b_1=x$ *- правосторонняя наклонная асимптота,* $y=k_2x+b_2=-x$ *- левосторонняя наклонная асимптота.*

Полное исследование функции с построением графика.

Наиболее наглядное представление о ходе изменения функции дает её график, но изображение графика является заключительным этапом исследования функции. Исследование функции удобно проводить в определенной последовательности.

Примерная схема исследования:

1) *область определения функции, точки разрыва, их характер, вертикальные асимптоты;*
2) *симметрия графика (чётность, нечётность функции), точки пересечения с осями координат;*
3) *наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции;*
4) *исследование с помощью первой производной: интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции;*
5) *исследование с помощью второй производной: интервалы выпуклости вверх и вниз, точки перегиба;*
6) *при необходимости – составление сводной таблицы результатов исследования;*
7) *построение графика.*

Сводную таблицу, в которую заносятся результаты исследования, можно оформить, например, в следующем виде :

x	y	y'	y''	*Выводы*	*Чертеж*

В первой колонке – интервалы и точки, проявившиеся в процессе исследования, во 2, 3, 4 колонках – знаки, соответственно, функции и ее производных на тех интервалах и в точках, где эта информация необходима.

Найти асимптоты графиков указанных функций:

13.1. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$; **13.2**. $y=\dfrac{\sqrt{\left|x^2-3\right|}}{x}$; **13.3**. $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$.

Провести полное исследование и построить графики следующих функций:

13.4. $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$; **13.5**. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

13.6. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; **13.7**. $y=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^3-1}$.

Домашнее задание.

Найти асимптоты графиков функций:

13.8. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$; **13.9**. $y=3x+arctg\,5x$; **13.10**. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Провести полное исследование и построить графики следующих функций:

13.11. $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$; **13.12**. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$.

Занятие 14.
Полное исследование функции (продолжение).

Провести полное исследование следующих функций и построить графики:

14.1. $y=x\,arctg\,x$; **14.2**. $y=(2x-1)e^{\frac{2}{x}}$;

14.3. $y=\dfrac{\ln x}{x}$; **14.4.** $y=x\ln^2|x|$;

14.5. $y=\dfrac{x}{2}+arcctg\,x$; **14.6.** $y=\sqrt{\left|x^2-2\right|^3}$.

Домашнее задание.

Провести полное исследование следующих функций и построить графики:

14.7. $y=e^{2x-x^2}$; **14.8.** $y=xe^{\frac{1}{x}}$;

14.9. $y=\ln\left|x^2-1\right|$.

Занятие 15.

Функция нескольких переменных. Частные производные. Частные и полный дифференциалы.

Величина z *называется* ***функцией двух независимых переменных*** x *и* y, *если каждой паре* (x_0, y_0) *числовых значений* x *и* y, *принадлежащей некоторой области* D *их изменения, соответствует единственное числовое значение* z. *Это записывается как* $z=f(x,y)$.

Область D *изменения независимых переменных* x *и* y *на плоскости xOy называется* ***областью определения*** *функции; множество всех значений, принимаемых переменной* z *в области определения, называют* ***областью значений*** *функции.*

Поскольку пара значений (x,y) *на плоскости соответствует точке* $M(x,y)$ *плоскости, то функцию двух переменных называют* ***функцией точки*** $z=f(M)$.

Геометрический образ функции двух переменных – поверхность в трехмерном пространстве.

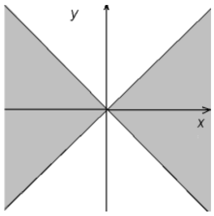
Аналогично можно определить функцию трёх переменных $u=f(x,y,z)$ *и функцию произвольного числа n аргументов:* $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Пример. *Найти область определения функции* $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

Функция определена при $-1\le\dfrac{y}{x}\le 1$, $x\ne 0$. *Это неравенство эквивалентно двум следующим:*

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x \le y \le x \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \le y \le -x \end{cases}$$

Геометрическое изображение этих областей:



Частные производные и частные дифференциалы.

Понятие частных производных и частных дифференциалов рассмотрим для функции двух переменных. Эти понятия легко распространяются на случаи большего числа переменных.

Если дать аргументу x *функции* $z = f(x, y)$ *приращение* Δx*, сохраняя значение аргумента* y *неизменным, то функция получает* ***частное приращение по x*** *:* $\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$*. Аналогично определяется* ***частное приращение по y*** *:* $\Delta_y f = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частной производной *(первого порядка) функции* $z = f(x, y)$ *по одному из аргументов называется предел отношения соответствующего частного приращения функции* z *к приращению этого аргумента, когда последнее стремится к нулю :*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

Из этого определения непосредственно вытекает правило вычисления частных производных: чтобы вычислить частную производную от функции z *по одному из её аргументов, нужно вычислить производную от функции* z *по этому аргументу, считая другие аргументы постоянными.*

Поскольку частные производные являются функциями x *и* y*, то можно определить частные производные второго порядка, третьего и т.д.:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}$$

- *две последние производные называют смешанными.*

Результат дифференцирования не зависит от порядка выполнения дифференцирования: $f''_{xy} = f''_{yx}$*. Это справедливо для частных производных любого порядка при выполнении условия непрерывности самой функции и соответствующих частных производных до этого порядка включительно.*

Частные дифференциалы.

Частный дифференциал первого порядка по аргументу x: $d_x f = f'_x dx$ - *есть главная часть частного приращения по* x: $\Delta_x f = d_x f + o(\Delta x)$;

Частный дифференциал первого порядка по аргументу y: $d_y f = f'_y dx$ - *есть главная часть частного приращения по* y: $\Delta_y f = d_y f + o(\Delta y)$;

Полное приращение функции в точке:

$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y,) - f(x,y)$- *приращение дается сразу по двум аргументам.*

Полный дифференциал- *главная часть полного приращения функции, линейная по* Δx *и по* Δy:

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$; $\Delta f = df + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, *здесь* α, β - *бесконечно малые при* $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Найти и изобразить области определения функций двух переменных ($R = const$):

15.1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$; **15.2**. $z = \ln(-x-y)$.

Найти частные производные первого порядка по каждой из независимых переменных:

15.3. $z = 5x^2y^3 - 9x + 7y$; **15.4**. $z = xy + \dfrac{y}{x}$;

15.5. $z = xe^{-xy}$; **15.6**. $z = y^x$;

15.7. $z = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; **15.8**. $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

15.9. Найти все частные производные 2-го порядка от функции

$z = x\sin(ax+by)$, $a = const$, $b = const$. Убедиться, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Найти частные и полный дифференциалы первого порядка от следующих функций:

15.10. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; **15.11**. $z = e^{-\frac{x^2}{y}}$;

15.12. $z = \ln\cos\dfrac{x}{y}$; **15.13.** $u = \log_5(1 + x + y^2 + z^3 + xy)$.

15.14. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1 , y изменяется от 1 до 1,2.

Домашнее задание

Найти и изобразить области определения функций двух переменных:

15.15. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; **15.16**. $z=\dfrac{1}{\ln\left(y-x^2\right)}$.

Найти частные производные первого порядка по каждой из независимых переменных:

15.17. $z=-9x^3y-7x^2+18y^2$; **15.18**. $z=\log_5\left(x^3+y^3\right)$;

15.19. $u=xyz$; **15.20**. $u=(\sin x)^{yz}$.

Найти частные и полный дифференциалы первого порядка от следующих функций:

15.21. $z=arctg\sqrt{x^y}$; **15.22**. $u=\dfrac{xy}{z}$.

15.23. Найти частные производные второго порядка от функции:
$z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

15.24 Найти полное приращение и полный дифференциал функции
$z=3xy$, если x изменяется от 1 до $1{,}2$, y изменяется от 2 до $1{,}98$.

Занятие 16.
Дифференцирование сложных и неявных функций многих переменных.

***1**. Пусть задана функция* $z=f(x,y)$*, аргументы которой* x *и* y *являются функциями независимой переменной* t*:* $z=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$. *Тогда справедлива формула дифференцирования сложной функции одной независимой переменной* t*:*

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Эту формулу называют формулой полной производной.

***Пример.** Найти производную от функции* z *по* t*:* $z=\ln\cos\dfrac{x}{y}$, $x=2t^3$, $y=\sqrt{t}$.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\cos\frac{x}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\cdot 6t^2+\frac{1}{\cos\frac{x}{y}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}=$$

$$=-tg\,\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{6t^2}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right).$$

***2**. Пусть задана функция* $z=f(x,y)$, $y=y(x)$*, т.е. один аргумент функции – независимая переменная* x*, а другой аргумент – функция этой переменной. Это частный случай задания функции в предыдущем пункте.*

Тогда справедливо выражение полной производной $\frac{dz}{dx}$ *через частную производную* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *:*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Пример. *Найти полную производную :* $z = arctg\left(x \cdot tg\, y^2\right)$, $y = \ln x$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{tg\, y^2}{1 + \left(xtg\, y^2\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(xtg\, y^2\right)^2} \cdot \frac{2y}{\cos^2 y^2}$$

3. *Более общий случай. Пусть* $z = f(x, y)$ *- функция точки, аргументы которой также являются функциями точки:* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Тогда справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пример. *Найти частные производные функции :* $z = \frac{x - y}{x + y}$, $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} \sin v + \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} \cos v =$$

$$= \frac{2}{(x + y)^2}\left(y \sin v - x \cos v\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2y}{(x + y)^2} \cdot u \cos v + \frac{-2x}{(x + y)^2}\left(-u \sin v\right) =$$

$$= \frac{2u}{(x + y)^2}\left(y \cos v + x \sin v\right)$$

4. *Частный случай дифференцирование* ***неявной*** *функции точки.*

Пусть задана функция $F(x, y) = 0$. *Здесь* x *- независимая переменная,* $y(x)$ *- неявно заданная функция* x. *Из выражения для полного дифференциала функции точки* $F(x, y)$ *получается следующая формула для производной*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Замечание. *В этом неявном случае задания функции производная может быть найдена так, как это делалось в теории функций одной переменной: заданное равенство дифференцируется по* x *и из полученного уравнения выражается производная.*

Пример. *Найти производную* $\dfrac{dy}{dx}$ *, если функция задана неявно :*

$yx^2-\sqrt{x+2y}=3$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2yx-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y}}}{x^2-\dfrac{2}{2\sqrt{x+2y}}}=-\frac{4xy\sqrt{x+2y}-1}{2x^2\sqrt{x+2y}-2}.$$

5. *Общий случай дифференцирования* ***неявной*** *функции.*

Пусть функция точки $z(x,y)$ *задана неявно равенством* $F(x,y,z(x,y))=0$ *С использованием свойства инвариантности полного дифференциала получаются формулы:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Пример. *Найти частные производные неявно заданной функции z (x,y):*

$$\sin(xyz)+5^{\frac{z}{x}}=0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\cdot\cos(xyz)+5^{\frac{z}{x}}\cdot\ln 5\cdot\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{xy\cos(xyz)+5^{\frac{z}{x}}\cdot\ln 5\cdot\dfrac{1}{x}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz\cdot\cos(xyz)}{xy\cos(xyz)+5^{\frac{z}{x}}\cdot\ln 5\cdot\dfrac{1}{x}}.$$

6.1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$, где $x=e^{2t}+1,\ \ y=e^{2t}-1$.

16.2. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=x^2+y^2+zy$, где $x=\sin t$, $y=e^t$, $z=\cos t$.

16.3. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, где $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

16.4. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=\cos^2(x-y)$, $y=3^x$.

16.5. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2y-y^2x$, $x=ue^v$, $y=ue^{-v}$.

16.6. Найти полный дифференциал dz, если $z=\sqrt{xy}$, $x=\sin\frac{u}{v}$, $y=\sqrt{\frac{u}{v}}$.

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

16.7. $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$; **16.8.** $\sin(xy)-x^2y=0$.

Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функций, заданных неявно:

16.9. $xyz-2^z=0$; **16.10.** $z^3+3xyz=a^3$.

Домашнее задание .

16.11. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{2x-3y}$, где $x=tg\,t$, $y=t^2-t$.

16.12. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{yz}{x}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^2-1$.

16.13. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=arctg(xy)$, $y=e^x$.

16.14. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=ctg\left(x^2-xy\right)$, $y=tg2x$.

16.15. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2\ln y$, где $x=\frac{u}{v}$, $y=u^2+v^2$.

16.16. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\arcsin\left(x^2-y^2\right)$, $x=u\,tgv$, $y=u\cdot ctgv$.

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

16.17. $x^2y^2-x^4-y^4=a^4$; **16.18.** $yx^2-e^y=0$.

Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функций, заданных неявно:

16.19. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; **16.20.** $\frac{xz}{y}-\cos\frac{yz}{x}=0$.

Занятие 17.
Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
Экстремумы функций многих переменных.

Касательной плоскостью к поверхности $F(x,y,z)=0$ *в данной точке* M_0 *называется плоскость, проходящая через точку* M_0 *и содержащая все касательные ко всем кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку* M_0*. Нормаль к поверхности – прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в данной точке.*

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ *в точке* M_0*:*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z-z_0)=0,$$

уравнение нормали в точке M_0*:*
$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$$

Уравнение касательной плоскости и нормали в случае явного задания поверхности $z=f(x,y)$*:*

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)$$ - *уравнение касательной плоскости;*

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}$$ - *уравнение нормали.*

Пример 1. *Составить уравнение касательной плоскости и нормали в точке* $M_0(-1,1,2)$ *к поверхности* $F(x,y,z)=x\cdot y^2\cdot z^3+2\sqrt{x+z}+6=0$.

Решение. Найдем частные производные $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=\left(y^2z^3+\frac{1}{\sqrt{x+z}}\right)_{M_0}=9$,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=\left(2xyz^3\right)_{M_0}=-16,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=\left(3xy^2z^2+\frac{1}{\sqrt{x+z}}\right)_{M_0}=-11.$$

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(-1,1,2)$*:*

$$9(x+1)-16(y-1)-11(z-2)=0,$$

уравнение нормали: $\frac{x+1}{9}=\frac{y-1}{-16}=\frac{z-2}{-11}$.

Экстремумы функций многих переменных.

Пусть задана функция многих переменных (функция точки) $u = f(x_1,..., x_n) = f(M)$.

Точка M_0 *называется* ***точкой максимума*** $f(M)$, *если значение функции в этой точке больше, чем её значение в любой другой точке некоторой окрестности точки* M_0. *Аналогично определяется* ***точка минимума*** *функции точки. Точки минимума и точки максимума функции точки называют, как и в случае функции одной переменной, –* ***точками экстремума.***

Из определения точек экстремума следует, что в этих точках M_0 *приращение функции* $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0)$ *всегда сохраняет знак (точка* M *из окрестности* M_0*):*

$$\text{в точке максимума } f(M) - f(M_0) = \Delta f(M_0) < 0,$$
$$\text{в точке минимума } f(M) - f(M_0) = \Delta f(M_0) > 0. \qquad (1)$$

Необходимый признак экстремума *дифференцируемой функции точки:* $df(M_0) = 0$*; с учетом вида полного дифференциала это равносильно тому, что в точке экстремума первые частные производные функции по всем независимым переменным равны нулю:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Точки, в которых выполняется это условие называются ***стационарными*** *или* ***критическими по экстремуму****. Иногда в отдельных точках частные производные принимают бесконечные значения или вовсе не существуют (остальные первые частные производные равны нулю). Подобные точки тоже относят к* ***подозрительным по экстремуму****, наряду со стационарными..*

Необходимость этого признака, как обычно, означает, что если точка M_0 *- точка экстремума, то в ней выполняются указанные условия. Если же в некоторой точке указанные условия выполняются, то это означает: не исключено, что данная точка – точка экстремума (может быть точкой экстремума, а может и не быть).*

Если в окрестности точки M_0 *функция* $f(M)$ *дифференцируема дважды, то её значение в любой точке* M *этой окрестности может быть представлено в следующем виде:*

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f(M_0) + \alpha\rho^2\right),$$

здесь $\rho = M_0M$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \alpha = 0$, $d^2 f = d(df(M_0))$.

*Это частный случай **формулы Тэйлора** для дважды дифференцируемой функции точки. Другая запись её :* $\Delta f(M_0) = du(M_0) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f(M_0) + \alpha\rho^2\right).$ *(3)*

Если в стационарной точке $du(M_0) = 0$, *то* $\Delta f(M_0) = \frac{1}{2!}\left(d^2 f(M_0) + \alpha\rho^2\right)$, *здесь* α *- бесконечно малая.*

Достаточный признак экстремума.

*Если в стационарной точке **второй дифференциал функции сохраняет знак,** то в этой точке будет **экстремум** и притом **максимум**, если* $d^2 f(M_0) < 0$, *и **минимум**, если* $d^2 f(M_0) > 0$. *Если в стационарной точке* $d^2 f(M_0) = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*

С учетом формулы (3) $\Delta f(M_0) \cong df(M_0)$ *дополнительное исследование сводится к рассмотрению знака приращения* $\Delta f(M_0)$.

*Сформулируем удобный для практического использования достаточный **критерий Сильвестра** наличия или отсутствия экстремума для функции двух переменных.*

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. *Пусть* M_0 *- стационарная точка этой функции. Введем в рассмотрение так называемую квадратичную форму:*

$$\Delta = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} - \left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}\right)^2.$$

а) Если $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 *экстремум имеется; при этом – максимум, если* $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} < 0$, *минимум, если* $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} > 0$.

б) Если $\Delta < 0$, *то в точке* M_0 *- экстремума нет;* M_0 *- так называемая точка минимакса (седловая точка).*

в) Если $\Delta = 0$, *то требуется дополнительное исследование, о котором говорилось ранее.*

Аналогичным образом достаточный критерий Сильвестра формулируется для функции трех переменных.

Пример 2. *Найти экстремум функции* $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1.$

Решение. Найдем сначала все стационарные точки, составляя и решая систему (2):

$$\begin{cases} 2x - y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ -x + 2y - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x=1$, $y=1$, *следовательно,* $M_0(1{,}1)$ - *стационарная точка. Вычислим в этой точке вторые производные и составим квадратичную форму:*
$\left(z''_{xx}\right)_{M_0}=4$, $\left(z''_{xy}\right)_{M_0}=-1$, $\left(z''_{yy}\right)_{M_0}=4$, $\Delta=16-1=15>0$, *т.е.* $M_0(1{,}1)$ - *точка экстремума, притом, это точка минимума, т.к.* $\left(z''_{xx}\right)_{M_0}=4>0$. *Итак,* $z_{\min}=4$.

Пример 3. *1) Найти экстремум функции* $z=x^2-y^2$.
2) Записать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $A(3{,}1)$.
Решение.
1) Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x=2x \\ z'_y=-2y \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x=0 \\ -2y=0 \end{cases};$$

то есть $M_0(0{,}0)$ - *стационарная точка;*
найдем вторые производные $z''_{xx}=2$, $z''_{yy}=-2$, $z''_{xy}=0$, *с их помощью составим квадратичную форму:* $\Delta=-4-0=-4<0$, *т.е.* $M_0(0{,}0)$- *не точка экстремума, это седловая точка (точка минимакса),* $z(M_0)=0$.
2) Запишем уравнение касательной плоскости в точке $A(3{,}1)$.

$$z'_x\big|_A=6, \quad z'_y=-2, \quad z(A)=9-1=8 \;\Rightarrow\; z-8=6(x-3)+(-2)(y-1),$$

$$6x-2y-z-8=0$$

Уравнение нормали к поверхности в точке $A(3{,}1))$:

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-8}{-1}.$$

Пример 4. *Найти точки экстремума функции* $z=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+xy+1$.
Найдем стационарные точки.

$$\begin{cases} 2xy^2+x+y=0 \\ 2x^2y+y+x=0 \end{cases}.$$

Для решения этой системы вычтем из 1-го уравнения 2-ое:

$$2xy^2-2x^2y=0, \qquad xy(x-y)=0.$$

Отсюда, единственным решением системы будет $x=0$, $y=0$, *то есть,* $M_0(0{,}0)$ - *стационарная точка.*

$$z''_{xx}\big|_{M_0}=\left(2y^2+1\right)_{M_0}=1, \quad z''_{yy}\big|_{M_0}=\left(2x^2+1\right)_{M_0}=1, \quad z''_{xy}\big|_{M_0}=(4xy+1)_{M_0}=1.$$

Квадратичная форма: $\Delta=0$. *Требуется дополнительное исследование.*
Запишем полное приращение функции в точке $M_0(0{,}0)$:

$$\Delta z(M_0)=z(0+\Delta x,0+\Delta y)-z(0{,}0)=(\Delta x)^2(\Delta y)^2+\frac{1}{2}(\Delta x)^2+\frac{1}{2}(\Delta y)^2+\Delta x\Delta y+1-1=$$

$$=(\Delta x\Delta y)^2+\frac{1}{2}\left(\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta y^2\right)=(\Delta x\Delta y)^2+\frac{1}{2}(\Delta x+\Delta y)^2>0$$

для любых по знаку Δx *и* Δy, *т.е.* $\Delta z(M_0)>0$ *для любых точек окрестности точки* M_0, $\Delta z(M_0)=z(\Delta x,\Delta y)-z(0,0)>0$, *т.е.* $z(0,0)<z(\Delta x,\Delta y)$, *значит,* $M_0(0,0)$ *- точка минимума,* $z_{\min}=1$.

Для заданных поверхностей:

1) найти стационарные точки, исследовать их характер;
2) записать уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках M_0.

17.1. $z=2x^2-4y^2$, $M_0(2,1,4)$;

17.2. $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$, $M_0(0,0,0)$.

Найти экстремумы функций двух переменных:

17.3. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$,

17.4. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$,

17.5. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$,

17.6. $z=\left(2x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

17.7. Функция z задана неявно: $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$. Найти её стационарные точки. Записать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $\left(0,0,\sqrt{\frac{72}{5}}\right)$.

Домашнее задание.

Для заданных поверхностей:

1) найти стационарные точки;
2) записать уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках M_0.

17.8. $z=xy$, $M_0(1,1,1)$;

17.9. $z=arctg\ xy$, $M_0\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

Найти экстремумы функций двух переменных:

17.10. $z=xy^2(1-x-y)$ $(x>0,\ y>0)$,

17.11. $z=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}$,

17.12. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$ $(x>0,\ y>0)$.

Ответы к заданиям.

Ответы к занятию 1.

1.2. $\frac{14}{5}i$**;** **1.3.** $-2+\frac{3}{2}i$**;** **1.4.** а) $10\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=10\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$;

б) $\frac{5\sqrt{2}}{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{5\sqrt{2}}{7}e^{-\frac{\pi}{4}i}=\frac{5}{7}-\frac{5}{7}i$;

в) $2^{10}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)=2^{10}e^{-\frac{10\pi}{3}i}=2^{10}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

г) $\sqrt[4]{50}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; $\sqrt[4]{50}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$;

д) $\sqrt[3]{7}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{7}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\sqrt[3]{7}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt[3]{7}$;

$\sqrt[3]{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[3]{7}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; **1.6.** i**;** **1.7.** $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$**;**

1.8. а) $4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)=4\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$;

б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}$;

в) $8^{10}(\cos(-15\pi)+i\sin(-15\pi))=-8^{10}$; г)

$\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$;

$\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$;

$\sqrt[3]{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\sqrt[3]{5}i$;

д) $\sqrt[4]{12}$; $\sqrt[4]{12}i$; $-\sqrt[4]{12}$; $-\sqrt[4]{12}i$.

Ответы к занятию 3.

3.3. 2, $n>38$**;** **3.4.** $-\frac{5}{9}$**;** **3.5.** $\frac{3}{5}$**;** **3.6.** 0**;** **3.7.** 0**;** **3.8.** ∞**;** **3.9.** 0**;** **3.10.** 1**;**

3.11. 2; **3.12.** -1; **3.13.** ∞; **3.14.** 0; **3.15.** $\frac{1}{4}$; **3.16.** $\frac{1}{12}$; **3.19.** $\frac{1}{3}$; **3.20.** $-\frac{1}{2}$;
3.21. 0;
3.22. 0; **3.23.** 2; **3.24.** 0; **3.25.** $\frac{7}{5}$; **3.26.** $\frac{1}{6}$.

Ответы к занятию 4.

4.1. 3; **4.2.** $\frac{1}{7}$; **4.3.** $\frac{7}{2}$; **4.4.** $\frac{2}{5}$; **4.5.** 2; **4.6.** $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; **4.7.** e^3;
4.8. e^6 ; **4.9.** e^{-2}; **4.10.** 5; **4.11.** a; **4.12.** $\frac{1}{e}$; **4.13.** $\ln a$; **4.14.** $\frac{11}{2}$; **4.15.** $\frac{1}{4}$;
4.16. $\frac{9}{4}$; **4.17.** 1; **4.18.** e^{-4}; **4.19.** e^{-2}; **4.20.** $\frac{1}{2}$; **4.21.** $2\log_5 e$; **4.22.** 2.

Ответы к занятию 5.

5.2. $\frac{3}{2}$; **5.3.** $\frac{2}{3}$; **5.4**. 1 ; **5.5**. 1 ; **5.6**. $\frac{1}{3}$; **5.7.** 2 ; **5.10**. $\frac{1}{2}$; 5.11. $-\ln 10$; **5.12**. $\frac{8}{9}$; **5.14**. 3 ; **5.15**. 3 ; **5.16**. 4 ; **5.17**. $\frac{1}{2}$; **5.18**. $\frac{1}{2}$; **5.19**. -2 ; **5.20**. $\frac{2}{3}$; **5.21**. 0 ; **5.22**. ∞; **5.23**. 3.

Ответы к занятию 6.

6.1. $x=2$ - точка разрыва 1 рода; **6.2.** $x_1=-1$ - точка разрыва 1 рода, $x_2=0$ - точка разрыва 2 рода; **6.3.** а) функция непрерывна на всей числовой оси; б) $x_1=1$, $x_2=2$ - точка разрыва 1 рода; в) $x_1=\frac{\pi}{2}, x_2=\frac{3\pi}{2}$ - точки разрыва 1 рода, $x_3=\pi$ - точка разрыва 2 рода; **6.4.** $x=3$ - точка разрыва 2 рода;
6.5. $x=\frac{5}{3}$ - точка разрыва 1 рода; **6.6.** $x_1=0$, $x_2=1$ - точка разрыва 2 рода;
6.7. $x=4$ - точка разрыва 2 рода; **6.8.** $x_1=2$, $x_2=-2$ - точка разрыва 2 рода;
6.9. $x=0$ - точка разрыва 2 рода; **6.10.** $x=1$ - точка разрыва 1 рода; **6.11.** а) функция непрерывна при $x\in R$; б) $x_1=4$ - точка разрыва 2 рода, $x_2=1$ - точка устранимого разрыва; **6.12.** $x=0$ - точка разрыва 1 рода (устранимый);
6.13. $x=4$ - точка разрыва 1 рода (устранимый); **6.14.** $x_1=2$, $x_2=-2$ - точка разрыва 2 рода; **6.15.** $x_1=-1$, $x_2=-4$ - точка разрыва 2 рода; **6.16.** $x=0$ - точка разрыва 1 рода (устранимый разрыв); **6.17.** $x=1$ - точка разрыва 1 рода

(устранимый разрыв); $x=4$ - точка разрыва 1 рода; **6.18.** $x=\frac{\pi}{4}$ - точка разрыва 1 рода; **6.19.** $x=0$ - точка непрерывности, $x=2$ - точка разрыва 2 рода.

Ответы к занятию 7.

7.1. $6x-5$; **7.2.** $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; **7.3.** $2ax+b$; **7.4.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **7.5.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$;

7.6. $\frac{7}{2}\sqrt{y^5}+\frac{1}{2\sqrt{y}}-1$; **7.7.** $4t^3-3t^2-8t+9$; **7.8.** $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$; **7.9.** $6x+3+\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; **7.10.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

7.11. $\frac{-2}{(x-1)^2}$; **7.12.** $-\frac{6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}$; **7.13.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}$; **7.14.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

7.15. $-\frac{x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$; **7.16.** $\cos x-\sin x$; **7.17.** $tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+1$;

7.18. $-\frac{a}{3}\sin\frac{x}{3}$; **7.19.** $\frac{1}{\cos^2\frac{x+1}{2}}\cdot\frac{1}{2}$; **7.20.** $\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$;

7.21. $3\cos^2 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4$; **7.22.** $\cos\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

7.23. $4\left(1+\sin^2 x\right)\cdot\sin 2x$; **7.24.** $\sin\left(2\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$;

7.25. $-\frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{15}{2}x\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{4}}$; **7.26.** $\left(\frac{3x}{\cos^2 3x}-tg3x\right)\Big/x^2$;

7.27. $\frac{1}{2\sqrt{ctg\frac{x-3}{5}}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x-3}{5}}\right)\cdot\frac{1}{5}$; **7.28.** $-3\sin 2(\cos 3x)\cdot\sin 3x$;

7.29. $6ctg^5\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)$;

7.30. $(tg5x)^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}+(ctg7x)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{1}{\sin^2 7x}$; **7.31.** $0{,}2x^{-\frac{3}{4}}-10x^2+\frac{2}{5}x^{-3}$;

7.32. $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$; **7.33.** $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$;

7.34. $\frac{20}{3}x^{-\frac{1}{6}}-\frac{16\sqrt{3}}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{5}{9}x^{-\frac{11}{6}}+\frac{\sqrt{3}}{9}x^{-\frac{4}{3}}$; **7.35.** $x^6-14x^4+49x^2-36$**;**

7.36. $\frac{3t^2-t^3}{(1-t)^3}$**; 7.37.** $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}\cdot\left(1+\sqrt[3]{2x}\right)^2}$**; 7.38.** $-\frac{4(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^3}$**;**

7.39. $-\frac{2x}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{4}{3}}$**; 7.40.** $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$**;**

7.41. $\frac{(\sin x+x\cos x)(1+tgx)-\frac{1}{\cos^2 x}x\sin x}{(1+tgx)^2}$**; 7.42.** $\frac{tg^3x}{\cos^2 x}$**; 7.43.** $7\cos 7x$**;**

7.44. $2\cos(\sin 2x)\cdot\cos 2x$**; 7.45.** $-\frac{1}{\sin^2\sqrt[5]{2+x^4}}\cdot\frac{4x^3}{5\sqrt[5]{\left(2+x^4\right)^4}}$**.**

Ответы к занятию 8 .

8.1. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$**; 8.2.** $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$**; 8.3.** $\frac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$**;**

8.4. $\frac{2x\,arctg\,x-\frac{x^2}{1+x^2}}{arctg^2 x}$**; 8.5.** $\frac{-2}{\left(|x|\sqrt{x^2-4}\right)}$; **8.6.** $\frac{-2arctg\frac{1}{x}}{\left(1+x^2\right)}$; **8.7.** $\frac{-1}{\left(2\left(1+x^2\right)\right)}$;

8.8. $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$; **8.9.** $\log_5^2 x+2\log_5 e\cdot\log_5 x$; **8.10.** $\frac{x\ln x-x+1}{x\ln^2 x}\ln 2$;

8.11. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$ **; 8.12.** $-\frac{2}{1-2x}$**; 8.13.** $ctgx\cdot\log_3 e$; **8.14.** $\frac{2}{\sin 2x}$;

8.15. $4ctgx\cdot\ln^3\sin x$; **8.16.** $\frac{a}{(ax+b)\left(1+\ln^2(ax+b)\right)}$; **8.17.** $10^x\cdot\ln 10$;

8.18. $4^{-x}(1-x\ln 4)$; **8.19.** $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$; **8.20.** $3x^2-3^x\cdot\ln 3$;

8.21. $\left(3x^2-4x+7\right)\cdot e^{3x}$; **8.22.** $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$;

8.23. $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\left(2\sqrt{x+1}\right)}$ **; 8.24.** $2^x\cdot\ln 2\cdot\cos 2^x$**; 8.25.** $5^{\sin^3 x}\cdot\ln 5\cdot 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$**;**

8.26. $e^{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; **8.27.** 2^{3^x}; **8.28.** $a^x\cdot x^a\left(\ln a+\frac{a}{x}\right)$; **8.29.** $2xe^{-\frac{x^2}{a^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$;

8.30. $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\cdot(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\cdot\left(ax^2+bx+c\right)}$;

8.31. $\arcsin x$; **8.32.** $\dfrac{\arccos x}{\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\arccos^2 x}\right)}$; **8.33** $\dfrac{3}{1+9x^2}\left(arcctg\,3x-arctg\,3x\right)$

; **8.34.** $\dfrac{3}{x}\cdot\ln^2 x$; **8.35.** $\dfrac{\log_2 e}{2x\sqrt{\log_2 5x}}$; **8.36.** $\dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x\left(1+x^2\right)^2}$;

8.37. $-\dfrac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$; **8.38.** $\dfrac{x\log_2 e}{arctg\sqrt{1+x^2}\cdot\left(2+x^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}}$;

8.39. $e^{2x}(1+2x)$; **8.40.** $-4xe^{-x^2}$; **8.41.** $-a^{\cos^3 x}\cdot\ln a\cdot 3\cos^2 x\cdot\sin x$;

8.42. $7^{tg3x}\cdot\ln 7\cdot\dfrac{3}{\cos^2 3x}$; **8.43.** $-\dfrac{\sin\sqrt{\log_5 3x}}{2x\sqrt{\log_5 3x}}\cdot\log_5 e$;

8.44. $\dfrac{\pi\cdot 5^x\cdot\ln 5}{2\left(1+5^{2x}\right)\cdot\left(arcctg\,5^x\right)^2}$; **8.45.** $-\dfrac{\log_3 2}{x\sqrt{1-4^{\log_3 x}}}\,2^{\log_3 x}$.

Ответы к занятию 9.

9.1. $\dfrac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$; **9.2.** $\dfrac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$; **9.3.** $x^x(\ln x-1)$;

9.4. $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}\dfrac{3+\ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}$; **9.5.** $(\sin x)^{\arcsin x}\cdot\left(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot ctgx\right)$;

9.6. $x^{x^x}\cdot x^{x-1}\left(1+x\ln x(\ln x-1)\right)$; **9.7.** $\dfrac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$; **9.8.** $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$; **9.9.** $-\dfrac{y}{x}$;

9.10. $\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$; **9.11.** $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$; **9.12.** $3t-\dfrac{5}{2}$; **9.13.** $-\dfrac{2t}{t+1}$;

9.14. -2^{3t+1}; **9.15.** $-\dfrac{b}{a}ctg\varphi$; **9.16.** $\dfrac{2}{3}\ln 2ctg2t$; **9.17.** $-\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{2\sqrt{4-t^2}}$; **9.18.** $2+\sqrt{3}$

;

9.19. $-2\cos 2x$; **9.20.** $-\dfrac{2}{3\ln 2}\cdot\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$; **9.21.** $y'(0)=3$, $y''(0)=12$,

$y'''(0)=9$;

9.22. $\dfrac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$; **9.23.** $\dfrac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$;

9.24. $x^{2^x}\cdot 2^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\cdot\ln 2\right)$; **9.25.** $(\ln x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x\cdot\ln\ln x}{x^2\cdot\ln x}$; **9.26.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$;

9.27. $\dfrac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$; **9.28.** $2^{x-y}\cdot\dfrac{2^y-1}{1-2^x}$; **9.29.** $\dfrac{x+y}{x-y}$; **9.30.** $\dfrac{1}{3t}$;

9.31. $\dfrac{1}{2t(t+1)^2}$**;** **9.32.** $2\cos^2 t(\cos 2t - 2\sin 2t)$**;**

9.33. $\dfrac{t}{2}$**;** **9.34.** -1**;** **9.35.** 6**;** **9.36.** 2.

Ответы к занятию 10.

10.2. а) $2\sqrt{a^2 - x^2}dx$, **б)** $arctg\, x\, dx$**; 10.3. а)** 0,05, **б)** 0,2; **10.4**. $\Delta y = 1{,}481$, $dy = 1{,}4$; **10.5**. 0,349; **10.6**. 0; **10.7**. $\dfrac{2}{3}$; **10.8.** $\dfrac{2}{3}$; **10.9**. $\dfrac{9}{50}$; **10.10**. 2; **10.11**. ∞; **10.12**. $-\infty$; **10.13**. $\log_5 7$; **10.14**. 1; **10.15**. $(\Delta y)_1 = 1{,}261$, $(dy)_1 = 1{,}2$; $(\Delta y)_2 = 0{,}1206$, $(dy)_2 = 0{,}12$; **10.16**. $x\sin x\, dx$; **10.17. а)** - 0,01, **б)** 0,05; **10.18**. $\dfrac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 5 - \ln 3}$; **10.19**. 2; **10.20**. $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{5}}$ **; 10.21.** $\dfrac{1}{2}$ **; 10.22**. $\dfrac{7}{3}$.

Ответы к занятию 11.

11.1. $\cos 3$**; 11.2.** 1 ; **11.3.** 2 ; **11.4**. -1 ; **11.5**. ∞; **11.6**. 1 ; **11.7**. 2 ; **11.8**. 1 ; **11.9**. 1; **11.10**. e^{-6} ; **11.11**. $e^{-\frac{1}{2}}$**; 11.12**. e**; 11.13**. 0 ; **11.14**. 0 ; **11.15**. $+\infty$; **11.16**. 0 ; **11.17**. 0 ; **11.18**. – 1 ; **11.19.** 1 **; 11.20.** e^{-1}**; 11.21.** e^{-1}**; 11.22.** $e^{-\frac{1}{6}}$ **.**

Ответы к занятию 12.

12.1. На $\left(-1,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ убывает, на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ возрастает,

$x_{\min} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

12.2. На $(0,1)$ и $(1,e)$ убывает, на $(e,+\infty)$ возрастает, $x_{\min} = e$.

12.3. На $(0,2)$ убывает, на $(2,+\infty)$ возрастает, $x_{\min} = 2$.

12.4 $x_{\max} = \dfrac{\pi}{4}$.

12.5. $x_{\min} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

12.6. $M = f(9) = 3$, $m = f(1) = -1$.

12.7. $M = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2} - 1\right) \approx 0{,}86$, $m = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1\right) \approx -0{,}05$.

12.8. График всюду выпуклый вниз.

12.9. На $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ - выпуклость вниз; на $(-1,1)$выпуклость вверх,
$M_1\left(-1,\sqrt[3]{2}\right)$ и $M_2\left(1,\sqrt[3]{2}\right)$ - точки перегиба.

12.10. На $(-\infty,-1)$ - выпуклость вверх; на $(-1,+\infty)$выпуклость вниз,
$M\ \left(-1,1-e^{-2}\right)$ - точка перегиба.

12.11. На $\left(0,e^{-\frac{5}{6}}\right)$ - выпуклость вверх; на $\left(e^{-\frac{5}{6}},+\infty\right)$- выпуклость вниз,
$M\ \left(e^{-\frac{5}{6}},1-\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}}\right)$- точка перегиба.

12.12.. На $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$ возрастает, на $(-1,0)$ и $(1,+\infty)$ убывает
$y_{\max}=y(-1)=y(1)=1.$

12.13. Возрастает во всей области, определена $(0,+\infty)$.

12.14. На $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ убывает, на $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$возрастает, $y_{\min}=y\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}7.$
$f''(x_0)<0\ f''(x_0)<0$

12.15. $M=f(2)=3,\ \ m=f(1)=-1.$

12.16. $M=f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}},\ \ m=f(0)=0.$

12.17. $M=f(-1)=f(1)=0,\ \ m=f(0)=-1.$

12.18. На $(-\infty,2)$ - выпуклость вверх; на $(2,+\infty)$ - выпуклость вниз,
$M(2{,}0)$ - точка перегиба.

12.19. На $(-\infty,0)$ - выпуклость вверх; на $(0,+\infty)$ - выпуклость вниз,
$M(0{,}1)$ - точка перегиба.

12.20. График всюду выпуклый вверх.

Ответы к занятию 13.

13.1. $x=2,\ \ y=1$ - обе двухсторонние.

13.2. $x=0,\ \ y=1$ (правосторонняя), $y=-1$ (левосторонняя).

13.3. $x=0$, $y=2x$, $x=-1$ (правосторонняя).

13.4 $y_{\min}=y(3)=\dfrac{27}{8}$; $(0{,}0)$ - точка перегиба, $x=1$ и $y=\dfrac{x+2}{2}$ - асимптоты.

13.5. $y_{\min}=y(0)=-1$; $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$ - точка перегиба, $y=1$ - асимптота.

13.6. $(0{,}1)$ и $(1{,}0)$ - точки перегиба, $y=-x$ - асимптота.

13.7. $(0{,}0)$ и $\left(\pm 1,\pm\sqrt[3]{2}\right)$ - точки перегиба, $y=2x$ - асимптота.

13.8. $y=x-\dfrac{1}{3}$.

13.9. $y=3x+\dfrac{\pi}{2}$ (правосторонняя), $y=3x-\dfrac{\pi}{2}$ (левосторонняя).

13.10. $y=0$.

13.11. $(0{,}0)$ - точка перегиба, $x=\pm 1$, $y=x$ - асимптоты.

13.12. $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(2)=\sqrt[3]{16}$; $\left(-\sqrt[3]{4},-\sqrt[3]{2}\right)$ - точка перегиба, $x=\sqrt[3]{4}$ и $y=x$ - асимптоты.

Ответы к занятию 14.

14.1. $y_{\min}=y(0)=0$, $y=-\dfrac{\pi x}{2}-1$ - левосторонняя асимптота, $y=\dfrac{\pi x}{2}-1$ - правосторонняя асимптота.

14.2. $\left(1,e^2\right)$ - точка перегиба, $x=0$ - правосторонняя асимптота, $y=2x+3$ - двухсторонняя асимптота.

14.3. $y_{\max}=y(e)=\dfrac{1}{e}$, $\left(e\sqrt{e},\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ - точка перегиба, $x=0$ и $y=0$ - правосторонние асимптоты.

14.4. $y_{\max}=y\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{4}{e^2}$, $y_{\max}=y(-1)=0$, $y_{\min}=y\left(-\dfrac{1}{e^2}\right)=-\dfrac{4}{e^2}$, $(0{,}0)$, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ - точки перегиба.

14.5. $y_{\min}=y(1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, $y_{\max}=y(-1)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\pi}{4}$, $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ - точка перегиба, $y=\dfrac{x}{2}+\pi$ - левосторонняя асимптота, $y=\dfrac{x}{2}$ - правосторонняя асимптота.

14.6. $y_{\max}=y(0)=2\sqrt{2}, y_{\min}=y(\pm\sqrt{2})=0$, $(-1{,}1)$ и $(1{,}1)$ - точки перегиба.

14.7. $y_{\max}=y(1)=e$, $\left(\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}, e^{\frac{1}{2}}\right)$ - точки перегиба, $y=0$ - асимптота.

14.8. $y_{\min}=y(1)=e$, $y=x+1$ - асимптота, $x=0$ - правосторонняя асимптота.

14.9. $y_{\max}=y(0)=0$, $x=\pm 1$ - асимптота

Ответы к занятию 15.

15.1. $x^2+y^2\geq R^2$; **15.2**. $y<-x$;

15.3. $z'_x=10xy^3-9$, $z'_y=15x^2y^2+7$; **15.4**. $z'_x=y-\dfrac{y}{x^2}$, $z'_y=x+\dfrac{1}{x}$;

15.5. $z'_x=(1-xy)e^{-xy}$, $z'_y=-x^2e^{-xy}$; **15.6**. $z'_x=y^x\ln y$, $z'_y=xy^{x-1}$;

15.7. $z'_x=-\dfrac{xy}{|x|\left(x^2+y^2\right)}$, $z'_y=\dfrac{|x|}{x^2+y^2}$;

15.8. $u'_x=-\dfrac{z}{x}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $u'_y=\dfrac{z}{x}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^{z-1}$, $u'_z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z\cdot\ln\dfrac{y}{x}$;

15.10. $d_xz=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$, $d_yz=\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}dy$, $dz=d_xz+d_yz$;

15.11. $d_xz=e^{-\frac{x^2}{y}}\left(-\dfrac{2x}{y}\right)dx$, $d_yz=e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\dfrac{x^2}{y^2}$;

15.12. $d_xz=-\dfrac{1}{y}tg\dfrac{x}{y}dx$, $d_yz=-\dfrac{x}{y^2}tg\dfrac{x}{y}dy$;

15.13. $d_xu=\dfrac{\log_5 e}{1+x+y^2+z^3+xy}\cdot(1+y)dx$, $d_yu=\dfrac{\log_5 e\cdot(2y+x)}{1+x+y^2+z^3+xy}dy$,

$$d_zu=\frac{\log_5 e\cdot 3z^2}{1+x+y^2+z^3+xy}dz,\quad du=d_xu+d_yu+d_zu;$$

15.14. $\Delta z=0{,}33$ $dz=d_xz+d_yz=0{,}3+0=0{,}3$;

15.15. $x^2+y^2\leq R^2$; **15.16.** $y>x^2$, $y\neq x^2+1$;

15.17. $z'_x=-27x^2y-14x$, $z'_y=-9x^3+36y$;

15.18. $z'_x=\dfrac{3x^2}{x^3+y^3}\log_5 e$, $z'_y=\dfrac{3y^2}{x^3+y^3}\log_5 e$;

15.19. $u'_x=yz$, $u'_y=xz$, $u'_z=xy$;

15.20. $u'_x=yz(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$, $u'_y=z(\sin x)^{yz}\cdot\ln\sin x$, $u'_z=y(\sin x)^{yz}\cdot\ln\sin x$;

15.21. $d_xz=\dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x\left(1+x^y\right)}dx$, $d_yz=\dfrac{\sqrt{x^y}\ln x}{2\left(1+x^y\right)}$, $dz=d_xz+d_yz$;

15.22. $d_x u=\frac{y}{z}dx,\ \ d_y u=\frac{x}{z}dy,\ \ d_z u=-\frac{xy}{z^2}dz,\ \ du=d_x u+d_y u+d_z u;$

15.23. $z''_{xx}=2\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \ z''_{yy}=2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \ z''_{xy}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$

15.24. $\Delta z=1{,}128,\quad dz=1{,}14.$

Ответы к занятию 16.

16.1. $\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$; **16.2.** $\frac{du}{dt}=2x\cos t+(2y+z)e^t-y\sin t$**;**

16.3. $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x+e^y(x^2+1)}{e^x+e^y};\ \ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$**; 16.4.** $\frac{dz}{dx}=-\sin 2(x-y)\cdot\left(1-3^x\ln 3\right)$**;**

16.5. $\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2xy-y^2\right)e^v+\left(x^2-2yx\right)e^{-v};\frac{\partial z}{\partial v}=\left(2xy-y^2\right)ue^v-\left(x^2-2yx\right)ue^{-v};$

16.6. $dz=\frac{1}{2\sqrt{xy}\,v}\left(y\cos\frac{u}{v}+\frac{x}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}\right)du-\frac{u}{v^2\cdot 2\sqrt{xy}}\left(y\cos\frac{u}{v}+\frac{x}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}\right)dv;$

16.7. $\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}-ye^x-e^x}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$; **16.8.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy-y\cos(xy)}{x\cos(xy)-x^2}$**;**

16.9. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy-2^z\ln 2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy-2^z\ln 2};$

16.10. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3yz}{3z^2+3xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3xz}{3z^2+3xy};$

16.11. $\frac{dz}{dt}=e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)\right)$; **16.12.** $\frac{du}{dt}=\frac{x\left(z+2yt^2\right)-yzte^t}{tx^2};$

16.13. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2y^2}\left(y+xe^x\right)$; **16.14.** $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\sin^2\left(x^2-xy\right)}\left(2x-y-\frac{2x}{\cos^2 2x}\right)$**;**

16.15. $\frac{\partial z}{\partial u}=2x\ln y\cdot\frac{1}{v}+\frac{x^2}{y}\cdot 2u;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=2x\ln y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{x^2}{y}\cdot 2v;$

16.16.

$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{\sqrt{1-\left(x^2-y^2\right)^2}}\left(x\,tgv-y\,ctgv\right);\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{\sqrt{1-\left(x^2-y^2\right)^2}}\left(\frac{x}{\cos^2 v}+\frac{y}{\sin^2 v}\right);$

16.17. $\frac{dy}{dx}=\frac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$; **16.18.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x(y-1)}$; **16.19.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2x}{b^2z};$

16.20. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{z}{y}-\frac{yz}{x^2}\sin\frac{yz}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\cdot\sin\frac{yz}{x}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\frac{xz}{y^2}+\frac{z}{x}\sin\frac{yz}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\cdot\sin\frac{yz}{x}}$ **.**

Ответы к занятию 17.

17.1. $(0,0)$ - точка минимакса; $8x-8y-z=4$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$.

17.2. $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ - точка минимума; $x+2y-z=0$; $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$.

17.3. $(0,3)$- точка минимума.

17.4. $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$- точка минимума, $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ - точка минимакса.

17.5. $(2,1)$- точка минимума, $(-2,-1)$- точка максимума;
$(1,2), (-1,-2)$ - точка минимакса.

17.6. $(0,0)$- точка минимума, $(-1,0), (1,0)$- точки максимума;
$(0,1), (0,-1)$ - точки минимакса.

17.7. $(1,1)$, $(-1,1)$.

17.8. $(0,0)$ - точка минимакса, $x+y-z-1=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

17.9. $(0,0)$ - точка минимакса; $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$.

17.10. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ - точка максимума;

17.11. $(0,0)$ - точка максимума;

17.12. $(5,2)$ - точка минимума.

Индивидуальные задания
по математическому анализу
1 курс 1 семестр

1.Вычислить пределы:

Вариант	Пределы
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x^2+1}{-7x^3+x}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{-x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-1}{2x^2+3x+4}$; $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x\sin(x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\ln(x)-\ln(x+2)\right)\right]$.
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{x^4-3x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{\sin mx}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\operatorname{ctg} 2x}$.
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x}{x^4-x^2+7}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3+2x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(x)}{2x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left((2x+1)\left(\ln(x+3)-\ln(x)\right)\right)$.
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5+14x-3x^2}{x^2-2x-15}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(5x)}{\operatorname{tg}^2(3x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x+4}{3x+2}\right]^{x+2}$.

6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{4-3x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right]$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin(x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x^2}$.
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x-5}{x^2+x^4-3x}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\operatorname{ctg}(x)\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\ln(2a+x)-\ln(a+x)\right)\right)$.
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{x^5+x^2}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{6-x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{x^2}$.
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x^2+12x}{3x^2+x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{2+x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\arcsin(x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(3x+5)(\ln(x+5)-\ln(x))\right]$.
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-1}{5x^3+x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{15+2x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)\right]$.

2.Найти точки разрыва функции $y=y(x)$ и определить их характер. Сделать чертёж.

Вариант	**Функция**
1	$y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$
2	$y=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$

3	$y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$
4	$y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$
5	$y=\begin{cases}\cos(x), & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$
6	$y=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ \mathrm{tg}\ (x), & 0\le x\le \pi/4,\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$
7	$y=\begin{cases}\sin(x), & x<0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$
8	$y=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \mathrm{tg}(x), & 0<x<\pi/2,\\ x, & x\ge \pi/2.\end{cases}$
9	$y=\begin{cases}\cos(x), & x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x<\pi,\\ \pi/2, & x\ge \pi.\end{cases}$
10	$y=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x<1,\\ -x+3, & x\ge 1.\end{cases}$

3.Найти производные:

	Функции
1	$y=\dfrac{1}{\sqrt{9x+4}}+\dfrac{12}{\sqrt[3]{x^3 10}}$; $y=\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2\,3x}$; $y=e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{arctg}^2\,x$; $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\left(\dfrac{1}{x^4}+3x^2\right)$; $y=\mathrm{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+3^{\arcsin^2 x}$; $y=\ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{10}{e^{5x}-e^{-5x}}}\right)$; $\begin{cases} x=t-\mathrm{arctg}\,t; \\ y=\dfrac{t^3}{3}+t. \end{cases}$
2	$y=5^{-1/\sin^2(x)}$; $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y=\ln\left(\mathrm{tg}^3\left(\dfrac{x}{6}\right)\right)$; $y=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)$; $y=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}}\right)+2^{\sin^3(x)}$; $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$; $\begin{cases} x=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^2}{2}+t; \\ y=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$
3	$y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$; $y=\sin^6(10x)+\cos^6(10x)$; $y=\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}\right)$; $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)-2\mathrm{arctg}(e^x)$; $y=\arccos\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)-e^{x^2+2}$; $y=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$; $\begin{cases} x=t^2-2t; \\ y=t^2+2t. \end{cases}$
4	$y=\dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{x^2-6}$; $y=\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(6x)+1}$; $y=\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}+e^{4x}}\right)$; $y=\left(1+\mathrm{tg}^2(3x)\right)e^{-x^2/2}$; $y=\ln\left(\arcsin(4x)\right)+2^{\mathrm{arctg}\,(8x)}$; $y=\sin\left(e^{x^2-3x-2}\right)+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; $\begin{cases} x=2t-t^3; \\ y=t^2-3. \end{cases}$
5	$y=\left(\sin(x)+\cos(x)\right)e^{(\sin(x)-\cos(x))}$; $y=\left[\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right]^2$; $y=\ln\left(\sqrt[3]{3\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)+4}\right)$; $y=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; $y=\mathrm{tg}^3(6x)\left(e^{1/x}+1\right)$; $y=\arcsin\left(\sin^2(x)\right)+\sqrt[3]{1-x}$; $\begin{cases} x=2(t^3+t); \\ y=e^{t^2}. \end{cases}$
6	$y=\sqrt[3]{(2x-3)(3-x)^2}$; $y=\ln\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}\right)$; $y=(8x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$; $y=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; $y=3^{\mathrm{arctg}^2(4x+1)}$; $\begin{cases} x=e^{2t}; \\ y=e^t\sin(t) \end{cases}$; $y=\dfrac{\sin^2(x/4)}{1+\cos^2(x/4)}$.

7	$y=\frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$; $y=\left(3\sin(2x)-\cos(2x)\right)e^{2x}$; $y=\left(1+\ln\left(\sin(2x)\right)\right)^2$; $y=e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$; $y=\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2+x}}\right)-e^{x^2-2}$; $y=2^{\sin(x)}\ln\left(\operatorname{tg}^2(x)\right)$; $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\sin(2t); \\ y=\cos^3(t). \end{cases}$
8	$y=\ln\left(\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}\right)$; $y=\sqrt{1+\sin(4x)}-\sqrt{1-\sin(4x)}$; $y=\ln\left(\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}\right)$; $y=\left(\frac{x}{3-4x}\right)^3$; $y=e^{2x^2}+\lg\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)$; $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a}\right)$; $\begin{cases} x=2t-\sin(2t); \\ y=\sin^3(t). \end{cases}$
9	$y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$; $y=\frac{1}{10}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}(5x)}{1-\operatorname{tg}(5x)}$; $y=e^{\left(1+\ln^3(x)\right)}+\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; $y=\ln\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)\operatorname{arctg}(e^{2x})$; $y=\ln^3\left(1+e^{x/3}\right)$; $\begin{cases} x=at\cos(t); \\ y=at\sin(t). \end{cases}$ $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;
10	$y=\frac{9}{\sqrt[6]{x^2-4x-5}}$; $y=\frac{1}{\sin^2(10x)}$; $y=\ln\left(ctg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)$; $y=arctg\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$; $y=3^{arctg^3(x)}+\ln^3(2x^2)$; $y=\left(1-\arccos(3x)\right)^2-\ln\left(\sqrt{1-e^x}+1\right)$; $\begin{cases} x=\frac{t+1}{t}; \\ y=\frac{t-1}{t}. \end{cases}$

4.Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

	Предел
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x}{\ln(1+x)}\right]$
2	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\cos(x)\operatorname{tg}(5x)\right)$
3	$\lim\limits_{x\to 0} x^{\arcsin x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{arctg}(x)}$

5	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)}$
6	$\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x}$
7	$\lim_{x\to 1/2}\left[\sin(2x-1)\mathrm{tg}(\pi x)\right]$
8	$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-10x+12}$
9	$\lim_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$
10	$\lim_{x\to\pi/2}\left[tg(x)-\frac{1}{\cos(x)}\right]$

5.Провести полное исследование функции и построить их графики:

	Функции
1	$a)y=\frac{3x^2}{x^3+1};\quad b)y=x-\ln(x+1).$
2	$a)y=\frac{4x^3}{x^3-1};\quad b)y=\ln(x^2-1).$
3	$a)y=\frac{x^3}{x-1};\quad b)y=xe^{2x-1}.$
4	$a)y=\frac{x^2+1}{1-x^2};\quad b)y=e^{1/(3-x)}.$
5	$a)y=\frac{1}{x}+4x^2;\quad b)y=\ln\left(x^2+4\right).$
6	$a)y=x+\frac{2x}{x^2-1};\quad b)y=e^{2x-x^2}.$
7	$a)y=\frac{x^4}{x^3-1};\quad b)y=x-2\mathrm{arctg}(x).$
8	$a)y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\quad b)y=x\ln\left(x\right).$

9	$a)\, y = \dfrac{2x+1}{x^2}; \quad b)\, y = (x-1)e^{3x+1}.$
10	$a)\, y = \dfrac{x-1}{x^2+3x-4}; \quad b)\, y = x - \ln(x).$

6.Для функции $f(x, y, z(x, y)) = 0$ **найти** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **и** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$**.**

	Функция
1	$z^3 y^2 + \sin\left(\dfrac{y}{z}\right) = 0$
2	$e^{x/z} + x^3 \cos(y) = 0$
3	$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{z}\right) + x^2 e^{2y} = 0$
4	$\arcsin\left(\dfrac{z}{y}\right) + y^2 e^{3x} = 0$
5	$\operatorname{tg}\left(z^2\right) + \dfrac{y^3}{x} = 0$
6	$\ln(x^2 + yz) + x^3 z^2 = 0$
7	$\log_3(xy^3 + 1) + \dfrac{x}{z^2} = 0$
8	$z^3 - 6xz + y^3 - 3 = 0$
9	$z \ln(x - z) + \dfrac{y}{z} = 0$
10	$z^2 + x^3 - 3y + 4z - 2 = 0$

7. Для заданной функции $z = f(x, y)$ **и точек А и В найти:**

a) приращение z **при переходе от точки А к точке В;**

b) дифференциал z **в точке А;**

c) касательную и нормаль к поверхности $z = f(x, y)$ **в точке А;**

d) экстремумы z

	z = f(x, z), A, B
1	$z = xy + y^2 - 2x$, $A(1;2)$, $B(1,03;\ 1,97)$
2	$z = x^2 + 3xy + y^2$, A(1;2),B(1,03;1,97).
3	$z = x^2 + y^2 - x + y$, $A(-2;\ 2)$, $B(-2,02;\ 2,05)$.
4	$z = 2x^2 + 2xy - y^2$, A(1; 3), B(0,95; 2,94).
5	$z = x^2 + 3xy - y^2$, $A(1;3)$, $B(0,96;2,95)$.
6	$z = xy + 2x - y$, A(2; 2), B(1,93; 2,05).
7	$z = 3y^2 - 9xy + y$, A(1;3), B(1,07;2,94).
8	$z = xy + x - y$, A(1,5; 2,3), B(1,43; 2,35).
9	$z = y^2 - xy + x^2$, A(−4; 5), B(−3,92; 5,06).
10	$z = x^2 + y^2 - x - y$, A(1;−3),B(1,08;−2,94).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч.1. – М.: Наука, 1968. – 430 с.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985. – 384 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича - М.: Наука, 1986. – 462 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ольга Евгеньевна Дмитриева
Сборник задач по математическому анализу.1семестр.
Учебное пособие.