# Résolution numérique du problème inverse

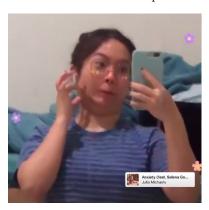
October 22, 2022

### 1 Le problème direct

Voici le problème direct que nous allons être amenés à résoudre à chaque itération de notre algorithme:

$$\begin{cases} u_t - Lu = \tilde{c}.\chi^{-1}.u + g & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = 0 & x \in \Omega \\ Bu = b(x,t) & (x,t) \in S \end{cases}$$
 (1)

On utilise exactement les mêmes notations que dans Prilepko & Kostin.



## 2 Discrétisation et formulation variationnelle

On discrétise le problème en temps selon le schéma de Crank - Nicolson :

$$\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \left( Lu^{i+1} + \tilde{c} \cdot \chi^{-1} \cdot u^{i+1} + Lu^i + \tilde{c} \cdot \chi^{-1} \cdot u^i \right) + g \tag{2}$$

La formulation variationnelle est donc par exemple la suivante (pour  $L=\Delta,$  conditions de Dirichlet aux bords):

$$a(u^{i+1}, v) = l(v) \tag{3}$$

Avec:

$$a(u^{i+1}, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{i+1} \cdot v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \tilde{c} \chi^{-1} u^{i+1} \cdot v$$
 (4)

$$l(v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u^i \cdot v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Lu^i + \tilde{c} \cdot \chi^{-1} \cdot u^i) \cdot v$$
 (5)

# 3 L'algorithme

#### 3.1 L'opérateur A

On rappelle la définition de l'opérateur A:

$$Ac = l(u_t(x, t, ; c)) - L\chi - lg$$
(6)

#### 3.2 Déroulement de l'algorithme

- On initialise les constante  $\Delta t$ ,  $\delta > 0$  et  $T = n * \Delta t$ , la variable i = 0 et les fonctions  $u^0 = 0$ , c(x) < 0 et  $\chi(x) > 0$ .
- Tant que  $|| lu^n \chi ||_{\infty} > \delta$ : (on ignore la condition à la première itération)
  - Pour i de 0 à n-1:
    - \* On calcule  $u^{i+1}$  par résolution du problème direct
  - $-c \leftarrow Ac \text{ pour } u = u^n$
- ullet On renvoie la dernière valeur de c.