

Résolution numérique du problème inverse

October 22, 2022

1 Le problème direct

Voici le problème direct que nous allons être amenés à résoudre à chaque itération de notre algorithme:

$$\begin{cases} u_t - Lu = \tilde{c}.\chi^{-1}.u + g & (x, t) \in Q \\ u(x, 0) = 0 & x \in \Omega \\ Bu = b(x, t) & (x, t) \in S \end{cases} \quad (1)$$

On utilise exactement les mêmes notations que dans Prilepko & Kostin.



2 Discrétisation et formulation variationnelle

On discrétise le problème en temps selon le schéma de Crank - Nicolson :

$$\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \left(Lu^{i+1} + \tilde{c}.\chi^{-1}.u^{i+1} + Lu^i + \tilde{c}.\chi^{-1}.u^i \right) + g \quad (2)$$

La formulation variationnelle est donc par exemple la suivante (pour $L = \Delta$, conditions de Dirichlet aux bords):

$$a(u^{i+1}, v) = l(v) \quad (3)$$

Avec:

$$a(u^{i+1}, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{i+1}.v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u. \nabla v - \tilde{c} \chi^{-1} u^{i+1}.v \quad (4)$$

$$l(v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u^i.v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Lu^i + \tilde{c}.\chi^{-1}.u^i).v \quad (5)$$

3 L'algorithme

3.1 L'opérateur A

On rappelle la définition de l'opérateur A:

$$Ac = l(u_t(x, t, ; c)) - L\chi - lg \quad (6)$$

3.2 Déroutement de l'algorithme

- On initialise les constante Δt , $\delta > 0$ et $T = n * \Delta t$, la variable $i = 0$ et les fonctions $u^0 = 0$, $c(x) < 0$ et $\chi(x) > 0$.
- Tant que $\|lu^n - \chi\|_{\infty} > \delta$: (on ignore la condition à la première itération)
 - Pour i de 0 à $n - 1$:
 - * On calcule u^{i+1} par résolution du problème direct
 - $c \leftarrow Ac$ pour $u = u^n$
- On renvoie la dernière valeur de c .