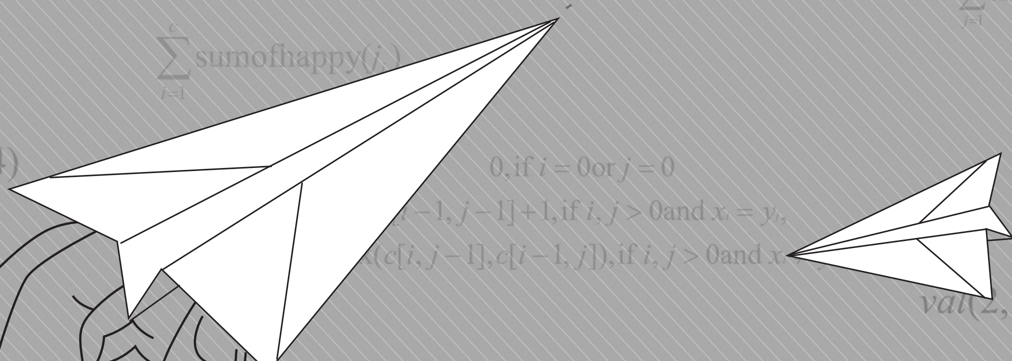
7 問題轉換

章節大綱

有一位數學家和他的太太被問到以下的問題:「假如你在地下室而你想要燒開水，你會怎麼做？」這位數學家說他會上樓到廚房而且在那裡燒水，他的太太也有類似的回答。現在兩人再被問到下面的問題：「假如你在廚房而你想要燒水，你會怎麼做？」數學家的太太說：「這簡單，我會將水壺裝水後開始煮水。」數學家回答說：「還有更簡單的解決方法，我會先走到地下室，接下來的問題，我之前就解決過了。」

笑話一則



7.1 何謂問題轉換？

「什麼是問題轉換 (problem transformation)？」

簡言之：「將陌生的問題轉換成熟悉的問題後，藉由解決此熟悉的問題，間接地解決原來的陌生問題。」

問題轉換是將不易求解的陌生問題，轉換成較熟悉的問題。因為較熟悉的問題存有已知的解法，故利用此現成的解法解決此熟悉的問題，同時也間接地找到原來陌生問題的答案。

粗略地說，問題轉換是一種借刀殺人的技倆，在金庸的武俠小說中有點像乾坤大挪移神功，可以輕易地將敵人的猛烈攻擊轉化於無形。下圖表達這個概念，也請注意轉換的方式(下圖中彎彎曲曲的線)可能有很多種。

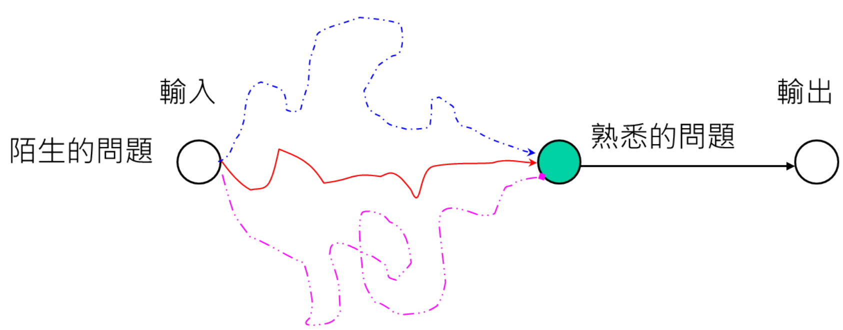


圖 7.1　問題轉換是將陌生的問題轉換成熟悉的問題

以下，將分節展現四個不同問題(包含不同系統代表問題、二分圖上之配對問題、網路流量問題及線性規劃問題)之間的轉換，來說明這個技巧。

7.2 將不同系統代表問題轉換成二分圖上之配對問題

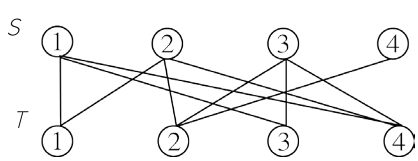
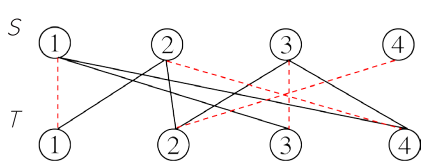
第一個例子是，將***不同系統代表問題***(systems of distinct representatives)轉換成***二分圖上之配對問題***(matching problem in bipartite graphs)。首先，解釋此兩個問題後，再說明其中的轉換。

表 7.1 不同系統代表問題

問題	學校有若干社團，各有其固定成員若干名。學校要求每個社團須選出一位社長，而且不同社團的社長不可以同一人兼任 請你幫所有社團(任意)選出其社長，以利社務進行。注意同一人可參加多個社團
輸入	所有社團及其成員 (1)S_1={1, 2}, S_2={2, 3, 4}, S_3={1, 3}, S_4={1, 2, 3} (2)S_1={1, 2}, S_2={2, 3, 4}, S_3={1, 3}, S_4={1, 2, 3}, S_5={2, 3}
輸出	(1)S_1={**1**, 2}, S_2={2, 3, **4**}, S_3={1, **3**}, S_4={1, **2**, 3}，其中粗體數字代表社長 (2) 無解

接下來，說明二分圖上之配對問題。

表 7.2 二分圖上之配對問題

問題	一個圖的點(vertex)可切割成兩個的集合 *S* 和 *T*，使得所有的線(edge)都只從 *S* 連接到 *T*，則稱此圖為二分圖(bipartite graphs)。此問題是在一個二分圖上選擇最多的線，使得被選出的線沒有共用端點(endpoint)
輸入	二分圖 *G*=(*S*, *T*, *E*)，此處 *S*, *T* 為點集合而 *E* 為線集合 
輸出	最大配對 *M*(虛線)，此處 *M* 為 *E* 的子集合 

「如何將 不同系統代表問題 轉換成 二分圖上之配對問題？」

「兩個問題乍看起來一點都不像。」

「可以將 不同系統代表問題 利用『圖』來表示嗎？」

「什麼是圖?」

「圖是在幾個點中，用一條線連起兩個點，代表兩個點之間的關係。」

「點有什麼用途?」

「點代表你關心的事物。你關心什麼？」

「哪些人可以當某一個社團的社長。」

「主要的事物是什麼？」

「好像是『人』和『社團』。」

「這些事物之間的關連是什麼？」

「哪個『人』擔任這個『社團』的社長。」

「如果『人』和『社團』都用點代表，則連接點和點之間的線代表什麼關係？」

「當某『人』擔任某『社團』的社長，則連接此兩點。」

「可以畫出一個圖嗎？」「此圖是一個二分圖嗎？」

「『人』和『社團』各分一邊，剛好是二分圖。」

「原來的不同系統代表問題，現在是在二分圖上找尋什麼？」

「找很多線，但是線不可共用端點。」

「這是怎樣的問題？」

「這是配對問題，哈!哈!我完成了問題的轉換!」

以上的討論，可以將不同系統代表問題轉換成二分圖上之配對問題。轉換後，依據表 7.1 的輸入，可以畫出以下的二分圖(圖 7.2)。此圖的最大配對，即可以代表在社團中選出的社長清單。

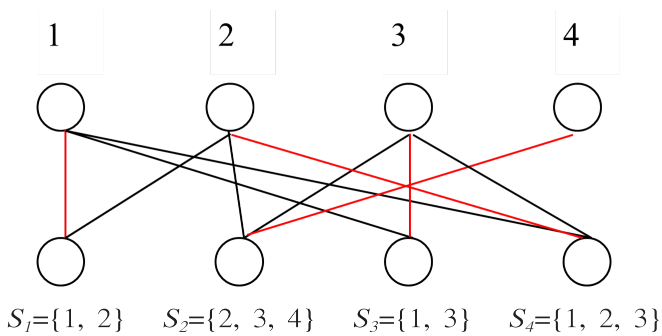


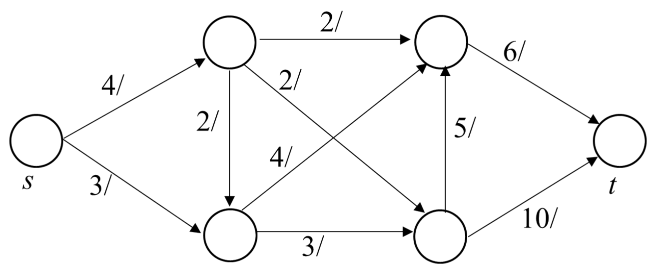
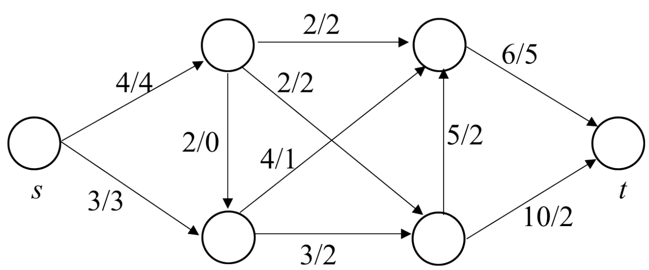
圖 7.2 不同系統代表問題被轉換成二分圖上之配對問題

當最大配對的個數小於社團的個數時，代表無法幫每個社團選出一位專任的社長。此外，二分圖上之配對問題可用***匈牙利法*** (the Hungarian method) 解決之。

7.3 將二分圖上之配對問題轉換成網路流量問題

第二個例子是，將***二分圖上之配對問題***再轉換成***網路流量問題***(network flow problem)。首先，解釋網路流量問題後，再說明其中的轉換。

表 7.3 網路流量問題

問題	一個運輸網路是一個有方向的圖。此網路上有一個點為來源點(source) *s* 及另一個點匯集點(sink) *t*。每一條線(edge) *e* 上有一個值 *c*(*e*) (非負整數)代表容量(capacity)。每一條線 *e* 上有另一個值 *f*(*e*) (非負數)代表此線上的流量(flow)。一個網路流量是在每一條線 *e* 上決定其流量 *f*(*e*)，其值不可超過其容量 *c*(*e*)；而且除了來源點 *s* 及匯集點 *t* 外，每一個點需符合流入流量的總和等於流入流量的總和 網路流量問題是找出一個網路流量，使得自來源點 *s* 流出的流量總和為最大
輸入	一個有方向的圖(含有來源點 *s* 及匯集點 *t*)及每條線上的容量(斜線左側的值) 
輸出	決定網路每一條線的流量(斜線右側的值)，使得自來源點 *s* 流出的流量總和為最大 此圖最大流量總和為 3+4=7 

接下來，我們將二分圖上之配對問題轉換成網路流量問題。首先，將配對問題的(無方向)二分圖，轉換成網路流量問題的(有方向)網路。以表 7.2 中的配對問題為例，我們在二分圖 G=(S, T, E)上下分別新增兩點 s 和 t (來源點及匯集點)。其中來源點 s 連接朝向 S 中所有點，匯集點 T 中所有點連接朝向點 t。接著，將所有原來 E 中的線改成從 S 指向 T 的方向線，如圖 7.3 所示。

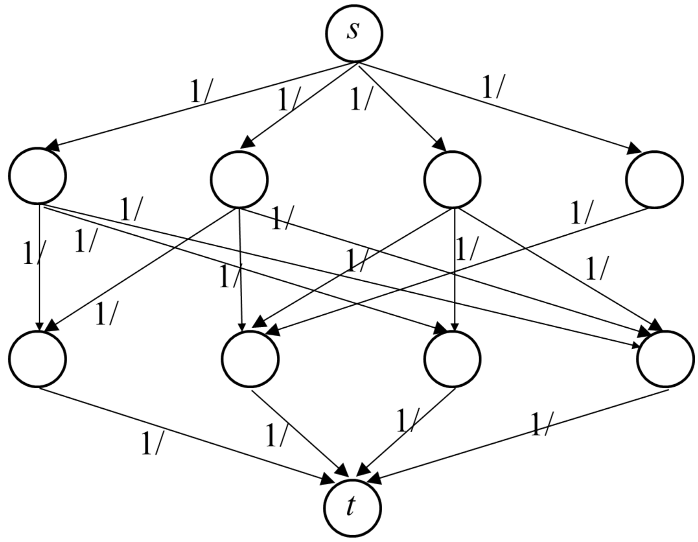


圖 7.3 將無方向的二分圖改成有方向性的網路

緊接著，讓網路上每條線上的容量為 1。直覺上，利用二分圖改造的網路其流量的瓶頸就是原來二分圖的中間連線。當在此網路上找到最大流量時，必須經過二分圖中的最多連線以傳輸最大流量；也間接地，找到原來二分圖上之最大配對(圖 7.4 中的粗線)。

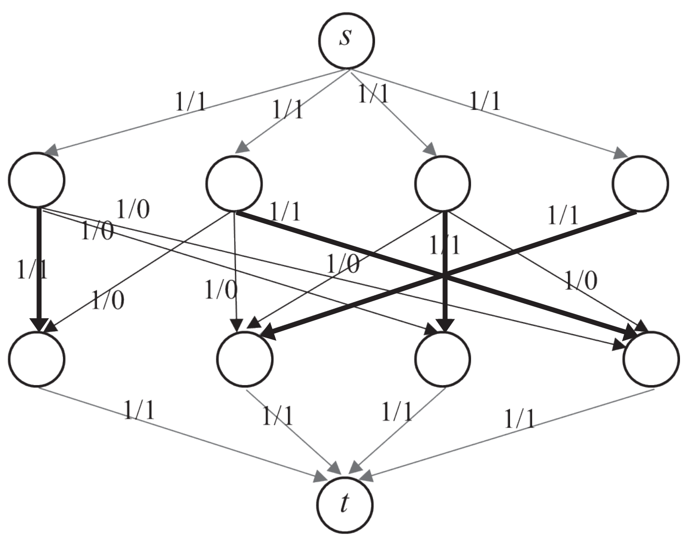


圖 7.4 找到最大流量(4)時，也找到原來二分圖上之最大配對(4 條粗線)

上述的網路流量問題，可利用***福特-法克森法***(Ford-Fulkerson method)找到一個整數解。

7.4 將網路流量問題轉換成線性規劃問題

最後的例子是，將網路流量問題轉換成線性規劃問題。線性規劃問題對我們來說並不陌生，因為在＜5.5 節＞，我們曾經討論到農夫養豬羊問題(表 5.8)及其對應的線性規劃問題(表 5.9)。接下來，我們正式地定義線性規劃問題後，再說明兩者間的轉換。

表 7.4 線性規劃問題

問題	給一個目標函數(objective function) $Z=d_1x_1+d_2x_2+\cdots+d_nx_n$ 及 m 個線性限制(linear constraint)： $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqq b_1$; $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqq b_2$; $\vdots$ $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqq b_m$; 此處 $x_i \geqq 0$, 而 a_{ji}, b_i 及 d_i 皆為常數，當 $1 \leqq i \leqq n$ 且 $1 \leqq j \leqq m$。 滿足所有線性限制的解為可行解(feasible solution)。此問題為找出所有可行解中，使得目標函數最佳化的解
輸入	極大化(maximize)： $Z=d_1x_1+d_2x_2+\cdots+d_nx_n$ 受限於(Subject to) $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqq b_1$; $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqq b_2$; $\vdots$ $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqq b_m$; $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqq 0$
輸出	滿足 m 個線性限制而且使得 $Z(=d_1x_1+d_2x_2+\cdots+d_nx_n)$ 擁有最大值的解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

接下來，我們將網路流量問題轉換成線性規劃問題。首先，重新敘述網路流量問題如下：

(1) 一個網路流量是在每一條線 e 上決定其流量 $f(e)$，其值不可超過其容量 $c(e)$；

(2) 而且除了來源點 s 及匯集點 t 外，每一個點需符合「流入流量的總和等於流出流量的總和」；

(3) 網路流量問題是找出一個網路流量使得流出來源點 s 的流量總和為最大。

經觀察會發現，(1)及(2)是和限制式有關，而(3)是闡述目標函數。我們將逐步將這三個敘述轉換成線性規劃問題。

令變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表每一條線的流量；常數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代表每一條線的容量。首先，將上面敘述(3)轉為以下的目標函數式子：

$\sum_{i \in S} x_i$，這裡 S 代表所有流出來源點 s 的線集合。
（$\sum_{i \in S} x_i$ 即是將代表所有流出來源點 s 的線上的流量，全部加總起來。）

其次將上面敘述(1)轉為以下的式子：

$x_i \le c_i, \forall i, 1 \le i \le n$。
（即每一個流量不可超過其容量。）

最後將上面敘述(2)轉為以下的式子：

$\sum_{i\text{ 為流出 }v\text{ 的線}} (x_i) - \sum_{j\text{ 為流入 }v\text{ 的線}} (x_j) = 0, \forall v \in V - \{s, t\}$。
（即每一個點，除了來源點 s 及匯集點 t 外，需符合流入流量的總和等於流出流量的總和。）

稍作整理後，網路流量問題就被轉換成下面的線性規劃問題：

極大化

$\sum_{i \in S} x_i$，這裡 S 代表所有流出來源點 s 的線集合。

受限於

(1) $x_i \le c_i, \forall i, 1 \le i \le n$。

(2) $\sum_{i\ \text{為流出}\ v\ \text{的線}} (x_i) - \sum_{j\ \text{為流入}\ v\ \text{的線}} (x_j) = 0, \forall v \in V - \{s, t\}$。

(3) $x_i \ge 0, \forall i, 1 \le i \le n$。

如同前面的兩次轉換，線性規劃問題也可以被***簡單法***(simplex method)所解。

7.5 問題轉換的技巧

問題轉換的技巧是將一個陌生問題，轉換成較熟悉的問題。利用較熟悉問題早已存有的解法，間接地解決此陌生問題。

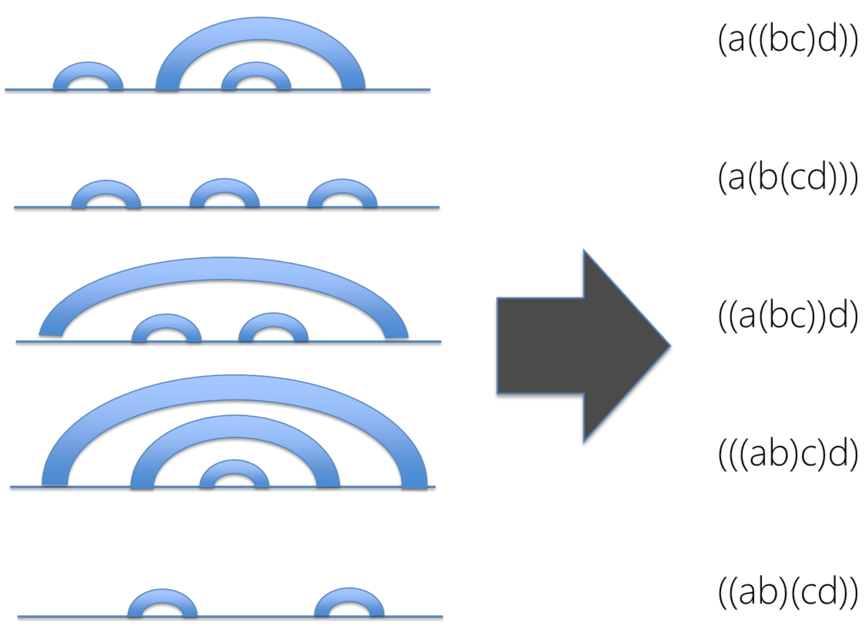
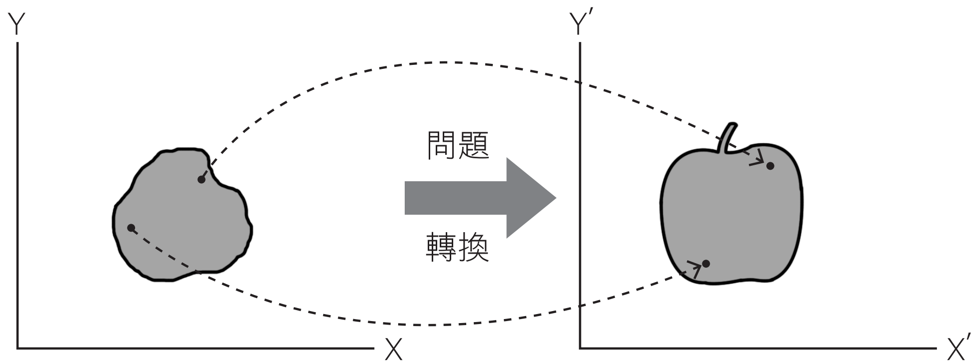


圖 7.5　三個貼地的鐵環(使得彼此不相交)的擺放問題可以轉換成在四個不同的符號上用括弧正確分隔的問題

當我們面對一個陌生問題時，常常會問：「該轉換到那一個問題呢?」

如果您熟悉的問題本來就不多時，上面的問話就難有答案了；反之，如果您常常比較兩個問題間的相似處及不同處，應該會對此兩問題產生更深的體會及洞見。



最後，引用坡利亞先生(G. Polya)在如何解題(How to Solve It)中的一段話，當作本章的結語：

「你以前看過這個問題嗎？你看過相似的問題嗎？你看過相關問題嗎？」

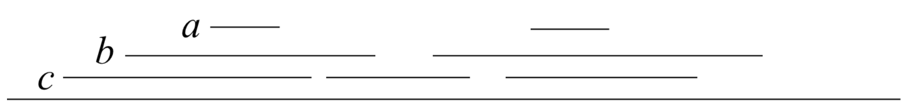
「這裡有一個相關而且知道解法的問題。你能利用它嗎？你能利用它的結果嗎？你能利用它的方法嗎？你可以引入一些輔助元素來方便利用它嗎？」

「你可以重新表達這個問題嗎？你可以用更不同的方式表達這個問題嗎？」

學習評量

1. 有 n 個大善人想要捐錢給 k 個孤兒院。每個大善人想要捐款的額度有一定的上限，而且針對每一個孤兒院，也有一個最高的捐款額度。為了公平起見，每一個孤兒院接受捐款的總額，也被設定一個最高額度，以免獨佔所有捐款。此問題在於，找出一個捐款的方式，使得整體的捐款達到最高。請將上述問題轉換成一個線性規劃問題。

2. 請在一個平面上的二維極點問題 (2-dimension maxima finding，參閱＜2.4 節＞)，和一條直線上的線段包含問題，兩者之間找到一種轉換的方式。注意在下圖中，線段 b 包含線段 a，同時線段 c 也包含線段 a。



3. 輸入一個二分圖(bipartite graphs) G=(S, T, E)，請設計一個程式找出此圖的最大配對(maximum matching)。此題可利用匈牙利法(the Hungarian method)[2]解決。

```
輸入：
4               (點集合 S 的個數，並且以 1, 2, 3, …編號)
4               (點集合 T 的個數，並且以 1, 2, 3, …編號)
10              (線集合 E 的個數)
1 1             (以下為線的資料)
1 3
1 4
2 1
2 2
2 4
3 2
3 3
3 4
4 2

輸出：
4               (最大配對的個數)
1 1             (以下為配對的資料)
2 4
3 3
4 2
```