

2022 年度 卒業研究

中学数学の関数領域における縦断的認知診断モデルの適用

小島 楓

筑波大学人間学群心理学類

目 次

第 1 章 問題と目的	1
閥数理解を促進する教育的工夫	1
教育場面におけるテストの課題と活用	2
認知診断モデルによるテストの活用	4
認知診断モデル研究の課題	5
本研究の目的	6
第 2 章 認知診断モデル	9
DINA モデル	10
高次 DINA モデル	11
縦断的 HO-DINA モデル	12
第 3 章 予備的検討	15
方 法	15
結 果	19
考 察	25
第 4 章 研究 1	36
方 法	36
結 果	41
考 察	43
第 5 章 研究 2	59
方 法	59
結 果	62
考 察	66
第 6 章 総合考察	90
分析結果を統合した考察	91
アトリビュート定義に関する限界	94
情報量が少ないとによる困難	99
認知診断モデル実践の展望	100
本研究の総括	104
引用文献	118

Appendix A	123
高等学校入学試験問題例	123
想定される認知的要素	123
Appendix B	125
共起ネットワーク作成手続きの数理的説明	125
辞書に追加した単語とその品詞	125
ストップワードとした単語	127
共起ネットワーク作成スクリプト	127
Appendix C	135
第1回テスト問題	135
第2回テスト問題	143
第3回テスト問題	151
Appendix D	159
第1回フィードバック例	159
第2回フィードバック例	171
第3回フィードバック例	183
Appendix E	195
第1回分析スクリプト	195
第2回分析スクリプト	199
第3回分析スクリプト	205

第1章 問題と目的

中学校での数学教育は、小学校の算数から大きな転換がある一方で、数学の入口として重要である。中学数学には、数と式、図形、関数、資料の活用という4種類の学習領域がある（文部科学省、2018）。中学校から本格的に導入される関数は、高校での微積分において数学的操作の対象となる（布川、2014）など、中学数学は高校以降の数学の理解において重要である。Wang and Goldschmidt (2003) は、4年間の縦断的研究によって、中学校で生じた数学の能力の差は高等学校で縮まらないことを示している。また、Petersen and Hyde (2015) は、小中学校における数学の成績と高校における数学の成績に正の相関があることを示すとともに、小中学校における数学能力の自己認知の変化が高校における数学の成績に影響を与える可能性を示唆している。

数学教育における関数は、数学の現実世界への応用の側面から重要性が述べられている（阿部、2012）。歴史的には、20世紀初頭に欧米で生じた実用的な数学教育への変革（e.g. Perry, 1900）に遅れて、日本の数学教育においては1930年代に関数が導入された（公田、1998）。20世紀後半には、コンピュータの普及を背景として、コンピュータを教育に活用し、微積分の実用的な側面の理解を促進することを目指した Calculus Reform の動きが欧米で生じた（Hallett, 2006; Hurley et al., 1999; Tall, 1996）。また、National Research Council (1996) は、データを分析して知見を得るために関数的視点が重要であると述べており（p. 174），西村（2001）は、複数の変数間の関係に着目して具体的な事象をモデル化する際の、関数的視点の重要性を述べている。このように、実用性を目指した教育的な流れと一致して、情報化社会における具体的な事象を捉える視点としての関数の必要性が指摘されている。

関数理解を促進する教育的工夫

関数の重要性への注目に伴い、関数教育においても様々な工夫がなされている。National Council of Teachers of Mathematics (2000) が、数学教育における科学技術の重要性を述べているように、Calculus Reform の動きを含め、数学教育におけるコンピュータ技術の活用による教育的効果は多くの研究によって示されている（メタ分析として Li & Ma, 2010；レビューとして Drijvers, 2015 も参照されたい）。関数教育におけるコンピュータ技術の活用としては、特に、グラフ電卓の活用が多く研究され、関数に関するテストの成

績向上の効果が示されている（e.g. Harskamp et al. 2000; Quesada & Maxwell, 1994）。

関数理解に向けたコンピュータ活用に関して、Slavit (1997) は、各種の関数が普遍に持つ諸性質に着目したグラフ電卓の活用により、関数を示すグラフの諸性質が具象化され、数学的操作の対象の一つとしてのグラフの認識が促進されることを主張している。また、Ruthven (1990) は、グラフの示す関数を数式で表す能力がグラフ電卓の活用によって高まることを示している。さらに、Schwarz and Dreyfus (1995) はグラフ電卓にとどまらず、数式、表、グラフの3種類の表現形式間の変換を要求する具体的な活動を行うことができるソフトウェアの活用によって、各種の関数が普遍に持つ諸性質に対する理解が促進することを述べている。

Schwarz and Dreyfus (1995) の例にみられるような、関数に関する複数の表現形式間の結び付きを獲得することは、その困難さが指摘されているものの関数理解において重要である (Leinhardt et al., 1990)。実際に、Brenner et al. (1997) は、数学の問題や具体的な関数的事象を、言葉、数式、表、グラフの4種類の形式で表現し、表現形式間の結び付けを訓練することで、設問に対する解答方略の獲得が促進され、正答率が高まることを示している。阿部 (2012) は、関数の現実世界への応用の側面から、関数教育における数学的な概念と現実的な事象との結び付けの重要性を強調しており、久保・岡崎 (2013) は、関数の関係式などの数学的表記と具体的な関数的事象を対応づけ結び付けることで、関数概念の理解を深めていくことを提案している。

教育場面におけるテストの課題と活用

このような関数の学習効果を高めるため取り組みに加えて、多くの教育現場では、確認テストが実施される。Crooks (1988) は、生徒の学習時間のうち、テスト等の評価活動に割かれる時間は 15% 以上を占めることを述べている (p. 440)。中央教育審議会 (2019) は、「『学習指導』と『学習評価』は学校の教育活動の根幹 (p. 3)」であるとして、評価活動を教育の一部として重要視しているとともに、成績評価のためのテストも多く実施されていることを述べており、実際に現在の日本においてもテスト等の評価活動に力が注がれている。

中央教育審議会 (2019) は、評価活動を次の学習へと活かすサイクルが重要であるとする一方で、確認テストのその後の学習への活用は不十分であることを指摘している。実際の教育現場では、総合得点や各問題の正誤の返却、もしくは各問題の解法の解説などにと

どまっていることが多い。その要因の一つとして、Guskey (1994) が研究成果と実践の橋渡しにおける労力の必要性を強調しているように、実践場面にいる教員に対して具体的な活用方法が十分に示されていないことが考えられる。実際に、中央教育審議会 (2019) では評価の際の「考え方」に焦点が当てられ、具体的な評価方法や評価の活用方法が十分に示されているとは言い難い。

確認テストのその後の活用を促す方法の一つにフィードバックがある。フィードバックによる学習改善の効果は多くの研究で示されているものの（レビューとして Mory, 2004），その効果の有無や大きさはフィードバックの仕方に依存することが主張されている（Harks et al., 2014; Hattie & Timperley, 2007）。Harks et al. (2014) では、学習過程に焦点を当てたフィードバックが、生徒の抱くフィードバックの有用性の認識を高め、学習成績や関連領域への興味を高めることが示されている。このような効果的なフィードバックに関する知識は教員内にもあるものの、実際の確認テストなどの評価場面における具体的な実践方法がわからないために、フィードバックの質が各教員の経験値等に依存し、確認テストのその後の学習への不十分な活用が課題となっている可能性が考えられる。このような実践方法の不明瞭によるテストの不十分な活用を考えた場合には、総合得点や各設問の正誤の情報だけが得られるような現状のテストではなく、生徒の学習上の強みと弱みおよび弱みに対する学習方略に関する情報（Harks et al., 2014）など、効果的なフィードバックに必要な情報を得ることができるテストを使用することによって、テストの有効活用の実現に近づくことができると考えられる。

また、テストの意図や位置づけに対して生徒が抱く認識は、生徒に様々な影響を与える。特に、村山（2006）は、学習者がテスト作成者の評価基準や意図を推察して学習方略を変容させることを学習者の「テストへの適応」として、様々な「テストへの適応」の例をレビューしている。実際に、鈴木（2012）は、確認テストの内容が単なる知識暗記にとどまるなど実施目的が不明瞭なテストでは、学習者がテストを否定的に捉え、学習者の学習動機の低下につながることを述べている。また、村山（2004）は、テストの形式が生徒の学習方略に影響を与えることを示し、空所補充の設問からなるテスト形式では、生徒は単なる暗記などの学習方略を取ることを示した。MacLellan (2001) は、生徒がテストを学習改善に活用するものであると認識していないことを指摘している。一方で、MacLellan (2001) はまた、教員は確認テストの目的として生徒の成績や順位づけと同時に学習改善への活用も認識していることを示し、教員と生徒との間でテストに対する認識が一致して

いないことを示している。

Hattie and Timperley (2007) によれば、効果的なフィードバックにおいて重視すべき点は、目標 (“Where am I going?”）、道筋 (“How am I going?”）、次の段階 (“Where to next?”）であり、本節をこの三つの軸に当てはめてまとめる。テスト問題の工夫やテストの意図の共有は、目標の提示としての役割を果たすと考えられる。作問者が生徒に求める理解を問うようなテストを作成することによって、生徒はそのテストに合わせた学習を進めるようになり、生徒に対する学習の目標や方針提示としてテストが活用される。また、テスト結果から得られる生徒の強みと弱みに関する情報をフィードバックすることは、今後克服していくべき部分を示すことになり、目標達成のための道筋の提示となるだろう。弱みに対する学習方略に関する情報を生徒にフィードバックすることは、次の段階の提示の役割を果たすと考えられる。総合得点に限定されない有用な情報を得ることができるテストの使用と、テストの設問の工夫やテストの意図の共有により、学習改善のためのテストの有効活用が期待できる。

認知診断モデルによるテストの活用

関数理解を促進するための教育的な工夫に加えて、時間を割いて実施されている確認テストをその後の学習に活用していくことで、学習機会を最大限に活かすことが期待できる。Hattie and Timperley (2007) によるフィードバックの三つの軸（目標、道筋、次の段階）に倣ったフィードバックを行い、学習過程に焦点を当てたフィードバックの有用性を示した Harks et al. (2014) では、フィードバックのために、生徒の強みと弱み、および弱みに対する学習方略に関する情報が用いられていた。Harks et al. (2014) では、これらのフィードバック情報を、「詳細なタスク分析とエラー分析に加えて、項目や項目要求および方略に関するリストをもとに、よく訓練された実験者が、標準化された方法で強みと弱みおよび学習方略を特定 (p. 277 ; 著者訳)」していた。

このような生徒の強みや弱みをテストの回答結果から直接推定することができるモデルとして、認知診断モデル (Cognitive Diagnosis Models, CDMs) がある。CDM の使用により、フィードバックに有用な情報をテストから特定しやすくなることが期待できる。CDM では、認知的要素 (cf. Mayer, 1989 ; 関数領域における一例として磯田 (1987) も参照されたい) に着目した情報を、確認テストの解答結果から推定することができる。認知的要素は、認知診断モデルの文脈ではアトリビュートと呼ばれる。テストに CDM を適

用することで、解答者の各アトリビュートの習得確率を推定することができ、各個人の強みや弱みに関する情報をフィードバックすることや、各個人に対して次の学習ステップに関する示唆を与えることが可能となる。実際に、Wu (2019) は、分数の計算に関して CDM を適用し、診断結果に基づいて個別に対応させたオンラインプログラムを実施することで、分数の計算に関するテストの成績が高まったことを示している。

CDM の適用によって、解答者の各アトリビュートの習得確率を推定することができると同時に、各問題項目の性質に関する情報も得ることができる。Wu (2019) や、CDM 実践のためのテスト開発を行っている Tang and Zhan (2020) にみられるように、現在の CDM 実践のためのテストの作成では、測定するアトリビュート内容や問題項目内容に関して専門家との多くの議論を重ねる必要がある。このことは、CDM 実践の難しさの一つではあるものの、作問者は各問題で要求している能力がどのような能力であるのか意識することになり、前節で言及したような作問者の意図がテストに強く反映され、生徒へ目標を提示できる点での CDM の有用性を意味している。実際に、佐宗 (2022) は、学校の定期テストに対する Q 行列作成のための学校教員との議論を通して、教員が無意識に作成していたテスト問題をアトリビュートという観点から再検討することになり、作問者である「教師のテスト問題に対する意識の顕在化 (p. 43)」が生じたことを示唆している。

また、実際の教育場面では、時間の経過について学習者の能力や扱われる内容は常に変化する。例えば、中学 1 年生の比例の単元において、ある授業で x と y の値に関して表を書くことに取り組み、その次の授業では直交座標上にグラフをかくことに取り組むという流れは、現在の数学教育において自然なものである。その 1 ヶ月後には、比例に関する文章題まで授業が進んでいることも考えられる。変化し続ける個人の実態に合わせたフィードバックのためには、各学習者の一時点的な情報だけでなく、長期的な能力の変遷を勘案することが重要となる。このような、長期的な認知診断を実現するために、学習者の能力やアトリビュート習得パターンを縦断的に扱うことができるモデルが研究されている（レビューとして Zhan, 2020a）。

認知診断モデル研究の課題

CDM 研究ではこれまで、様々なモデルが提案され、シミュレーション研究や実際のデータに適用する研究が重ねられている (Chen, J. et al., 2013; Chen, Y. et al., 2017; Chiu & Douglas, 2013; de la Torre & Chiu, 2016; Hu & Templin, 2019; Rupp & Templin, 2008; von

Davier, 2014; Wang & Lu, 2021; 山口・岡田, 2017a; Yamaguchi & Templin, 2022; Zhan, Jiao, Liao et al., 2019)。その一方で、教育現場においてテストに CDM を適用し、学習者にフィードバックを行った実践的な研究は少ない (Wu, 2019)。特に、縦断的 CDM の実践例は横断的な CDM の実践例よりも限られており、Tang and Zhan (2020) が言及しているように、CDM を実践場面に活用するためのアトリビュート設定やテスト作成の方法に関する知見が不足しているとともに、CDM に基づくフィードバックの方法に関する研究が重ねられていない。

また、山口 (2018) が言及しているように、実践場面におけるサンプルサイズは、シミュレーション研究や実データ分析による研究におけるサンプルサイズと比較して小さい。実際に、シミュレーション研究を行っている Rupp and Templin (2008) では $N = 3000$, Chen et al. (2017) では $N = 500, 1000, 2000, 4000$ が設定され、実データ分析による研究を行っている von Davier (2014) では $N = 419, 2720$, 山口・岡田 (2017a) では $N = 639$ が扱われている一方で、実践的な研究を行っている Wu (2019) では $N = 35, 49$ (予備研究では $N = 593$) が扱われている。このように、実践場面で想定されるサンプルサイズにおける知見が蓄積されていないことも CDM 研究の課題といえる。

さらに、これまでの実データ分析や実践研究では、分数計算への適用 (e.g. Wu, 2019), 算数への適用 (e.g. 山口・岡田, 2017a) が多くを占めており、中学校以降の数学に適用した研究は少ない (佐宗, 2022)。中学数学において、強みや弱みなどに関する情報を伴った詳細なフィードバックが効果的であることは、Harks et al. (2014) によって示されており、CDM を中学数学に適用してフィードバックを行うことによって、生徒の学習成績を高めることができると考えられる。

本研究の目的

本章では、高校以降の数学の理解における中学数学の重要性や、関数教育の歴史と情報化社会における関数教育の重要性、および関数の理解を深めるための教育的な工夫について述べてきた。また、教育場面で実施される確認テストの課題を示し、確認テストを活用するためのフィードバック方法を Hattie and Timperley (2008) を参考に述べた。そして、効果的なフィードバックにおける有用性が期待できる CDM を紹介し、CDM 研究における現状の課題を述べた。

これらの課題に応えるために、本研究では、中学 2, 3 年生を対象として、数学の関数

領域に関してアトリビュートを設定したテストを開発し、複数回のテストを実施することで、縦断的 CDM に基づくフィードバックによる、学習者の能力やアトリビュート習得における効果を検討する。具体的には、実践的な研究例の少ない縦断的 CDM を活用したフィードバックによる、学習者の能力やアトリビュート習得への効果と、縦断的 CDM を適用しフィードバックを実施するまでの現状の難しさを検討する。

次の第 2 章では、認知診断モデルの枠組みで提案されているモデルのうち、本研究で使用するものに関連するモデルを概説する。第 3 章では、予備的検討として、本研究で使用するアトリビュートやテスト問題の作成について詳説する。続いて、第 4 章では第 1 回のテスト実施、第 5 章では第 2 回および第 3 回のテスト実施を扱う。最後に、第 6 章で本研究を総合的に考察する。本稿の構成を Figure 1 に示す。

Figure 1
本稿の構成



第2章 認知診断モデル

これまでに、CDM に属する多くのモデルが研究されている（レビューとして山口・岡田, 2017b）。本章では、CDM に関して概説し、本研究で使用したモデルを紹介する。

CDM では、潜在的でカテゴリカルな特性として、アトリビュートを設定する。アトリビュートとは、ある学習領域の習得や理解に必要な認知的要素であり、テストの各問題項目に正答するために要求される要素を表す。例えば、分数の加減法の問題項目では、「整数の加法」、「整数の減法」、「通分」、「約分」というアトリビュートが想定できる。アトリビュートの習得は、多くの場合、習得の有無を 0/1 で表す 2 値変数として設定される。また、テストの各問題項目に正答するために、各アトリビュートの習得が要求されるか否かを表す行列を、Q 行列 (Tatsuoka, 1983) という。個人の項目反応と事前に設定された Q 行列から、特定のモデルを通して、個人の各アトリビュートの習得確率を推定する。例として、分数の加減法の問題項目に関して、「加法」、「減法」、「通分」、「約分」の 4 個のアトリビュートを想定した場合の Q 行列を、Table 1 に示す。この Q 行列は、例題 1 に正答するためには「加法」のアトリビュート、例題 2 に正答するためには「加法」、「通分」のアトリビュート、例題 3 に正答するためには「減法」、「約分」のアトリビュート、例題 4 に正答するためには 4 個すべてのアトリビュート、例題 5 に正答するためには「加法」「約分」のアトリビュートの習得がそれぞれ必要であることを示している。CDM では、この 5 個の項目からなるテストを受けた個人の正誤の情報から、各個人が「加法」、「減法」、「通分」および「約分」のそれぞれのアトリビュートを習得している確率を推定する。

最も基本的な CDM である DINA モデル (deterministic inputs noisy “and” gate model; Junker & Sijtsma, 2001) は、ある問題項目に要求されるアトリビュートをすべて習得して初めて、当該の項目に正答できると仮定するモデルである。Table 1 に示した例題 2 に正答するためには、「加法」と「通分」の両方とも習得している必要があり、DINA モデルの仮定に合致する例である。一方で、要求されるアトリビュートのうち少なくとも一つを習得していれば、当該の問題項目に正答できると仮定する DINO モデル (deterministic inputs noisy “or” gate model) も提案されている (Templin & Henson, 2006)。その他にも G-DINA モデル (generalized DINA model; de la Torre, 2011), LCDM (log-linear cognitive diagnosis model; Henson et al., 2009) など多くのモデルが提案されており、新たなモデルの構築やシミュレーション研究が盛んに行われている。

また、縦断的な CDM の研究も進んでいる。現在提案されている縦断的 CDM は、潜在移行分析モデル (latent transition analysis-based models) と高次潜在構造モデル (higher-order latent structural-based models) に大きく分類することができる (Zhan, 2020a)。例えば、Wang et al. (2018) は、前者に分類される、個々のアトリビュート習得の縦断的な変化に着目したモデルを提案しており、特定の時点のアトリビュート習得確率を、一時点前のアトリビュート習得状況のもとでモデル化して推定している。また、Zhan, Jiao, Liao et al. (2019) は、後者に分類される、連続的な潜在能力値を仮定して、アトリビュート習得の縦断的な変化に着目したモデルを提案している。なお、本研究では、Zhan, Jiao, Liao et al. (2019) で提案されているモデルを使用することとし、詳細は後述する。

DINA モデル

モデルの記述に先立ち、本稿で使用する記号を定義する。本稿のモデル記述において、 $x_{ni} \in \{0, 1\}$ は個人 n ($n = 1, \dots, N$) の項目 i ($i = 1, \dots, I$) に対する反応であり、1 は正答、0 は誤答を意味する。 k ($k = 1, \dots, K$) は、 k 番目のアトリビュートを示している。 $\alpha_{nk} \in \{0, 1\}$ は、サイズ $N \times K$ のアトリビュート習得パタン $\boldsymbol{\alpha}$ の要素であり、個人 n がアトリビュート k を習得しているとき 1、習得していないとき 0 である。 $q_{ik} \in \{0, 1\}$ はサイズ $I \times K$ の Q 行列 \mathbf{Q} の要素であり、項目 i に正答するためにアトリビュート k が必要であるとき 1、必要でないとき 0 である。また、縦断的モデルにおいて t ($t = 1, \dots, T$) は t 番目の時点を表す。なお、ベクトル \mathbf{v} について、 \mathbf{v}^\top は \mathbf{v} の転置を表す。

DINA モデルは、最も基本的な CDM の一つであり、理想反応が、

$$\eta_{ni} = \prod_{k=1}^K \alpha_{nk}^{q_{ik}}, \quad (1)$$

によって定められる。理想反応 η_{ni} とは、誤差がない場合の、個人 n の項目 i に対する反応を示している。例えば、Table 1 の例をもとに、「加法」「減法」「約分」のアトリビュートを習得しており、「通分」のアトリビュートを習得していない個人について考える。ある問題項目に要求されるアトリビュートをすべて習得していれば当該の項目に正答できるという DINA モデルの仮定に基づくと、誤差がない場合、この個人は例題 1、例題 3、例題 5 に正答し、例題 2、例題 4 に誤答することが理想的な反応となる。

しかし、実際の項目反応は必ずしも理想反応に一致するわけではない。そこで、項目反応の確率は、

$$s_i = P(x_{ni} = 0 \mid \eta_{ni} = 1), \quad (2)$$

$$g_i = P(x_{ni} = 1 \mid \eta_{ni} = 0), \quad (3)$$

を用いて、

$$P(x_{ni} = 1 \mid \alpha_n) = (1 - s_i)^{\eta_{ni}} g_i^{1-\eta_{ni}}, \quad (4)$$

によって定められる。 α_n は個人 n のアトリビュート習得パターンベクトルを表す。ここで、 s_i は項目 i における slipping パラメタと呼ばれ、項目への正答に必要なアトリビュートをすべて習得しているにもかかわらず誤答してしまう (slipping) 確率を示している。一方、 g_i は項目 i における guessing パラメタと呼ばれ、必要なアトリビュートのうち未習得のものがあるにもかかわらず偶然に正答してしまう (guessing) 確率を示している。例えば、上で述べた個人の例に関して、理想的には正答できるはずであった例題 3 に誤答してしまうことを slipping、理想的には正答できないはずであった例題 2 に偶然正答できてしまうことを guessing という。なお、本研究では、すべての項目 i に対して $0 \leq g_i \leq 1 - s_i \leq 1$ という単調性の制約 (monotonicity constraint) を課し、アトリビュートを習得して正答する確率 $1 - s_i$ は、アトリビュートを習得していない guessing による正答確率 g_i よりも大きくなると仮定した。

高次 DINA モデル

高次 DINA (Higher Order DINA, HO-DINA) モデルは、アトリビュートの上位に、個人の総合的な能力を表す変数を仮定するモデルである (de la Torre & Douglas, 2004)。HO-DINA モデルは、アトリビュート間の一次元性を表現するモデルであり、このモデルにより、アトリビュート習得パターンの推定と総合的な能力の推定を同時に実現することが可能である。

HO-DINA モデルでは、アトリビュート習得確率を、

$$P(\alpha_{nk} = 1 \mid \theta_n) = \frac{\exp(\lambda_k \theta_n - \lambda_{0k})}{1 + \exp(\lambda_k \theta_n - \lambda_{0k})}, \quad (5)$$

によって定める。ここで、 θ_n ($\theta_n \sim N(0, 1)$; de la Torre & Douglas, 2004) は、個人 n の総合的な能力を表す。数学の関数領域を扱う本研究においては、関数領域の問題への解答に係る総合的な能力として想定することができる。また、 λ_{0k} はアトリビュート k の切片パラメタであり、この値が大きいほどアトリビュート k の習得が難しいことを表す。 λ_k はアトリビュート k の傾きパラメタであり、この値が大きいほど θ によるアトリビュート k の習得の識別性が高いことを意味する。なお、本研究ではすべてのアトリビュート k に

関して, $\lambda_k \geq 0$ の制約を課し, 総合的な能力 θ が高い個人ほどアトリビュート習得確率が高くなると仮定した。

縦断的 HO-DINA モデル

Zhan, Jiao, Liao et al. (2019) は, HO-DINA モデルにおける総合的な能力 θ を活用することにより, 縦断的 CDM を提案している。縦断的 HO-DINA モデルでは, 複数時点間の能力 θ の関連を想定している。本研究においては, 縦断的 HO-DINA モデルにおける項目反応確率を, DINA モデルに基づき,

$$P(x_{nit} = 1 | \alpha_{nt}) = (1 - s_{it})^{\eta_{nit}} g_{it}^{1-\eta_{nit}}, \quad (6)$$

によって定める (レベル 1)。 x_{nit} は時点 t における項目 i に対する個人 n の反応, α_{nt} は時点 t における個人 n のアトリビュート習得パタンベクトル, s_{it} , g_{it} はそれぞれ時点 t における項目 i の slipping パラメタ, guessing パラメタ, η_{nit} は時点 t における項目 i に対する個人 n の理想反応を表す。なお, すべての時点 t において, すべての項目 i に対して単調性の制約 ($0 \leq g_{it} \leq 1 - s_{it} \leq 1$) を課した。ここで, 理想反応 η_{nit} は,

$$\eta_{nit} = \prod_{k=1}^K \alpha_{nkt}^{q_{ikt}}, \quad (7)$$

となる。 α_{nkt} は時点 t における個人 n のアトリビュート k の習得の有無, q_{ikt} は時点 t における項目 i のアトリビュート k の要求の有無を表す。なお, 本研究では Q 行列の要素 q_{ikt} に関して, $q_{ik1} = \dots = q_{ikT}$ とし, どの時点においてもそれぞれの項目が同じアトリビュートを要求するようテスト項目を作成した。

所与の個人の総合的な能力のもとでのアトリビュート習得確率は, Zhan, Jiao, Liao et al. (2019) に倣い,

$$P(\alpha_{nkt} = 1 | \boldsymbol{\theta}_n) = \frac{\exp(\lambda_{kt}\theta_{nt} - \lambda_{0kt})}{1 + \exp(\lambda_{kt}\theta_{nt} - \lambda_{0kt})}, \quad \boldsymbol{\theta}_n = (\theta_{n1}, \dots, \theta_{nT})^\top, \quad (8)$$

によって定める (レベル 2)。 λ_{0kt} , λ_{kt} はそれぞれ時点 t におけるアトリビュート k の切片パラメタ, 傾きパラメタ, θ_{nt} は時点 t における個人 n の総合的な能力を表し, $\boldsymbol{\theta}_n$ は個人 n における時点 1 から時点 T までの総合的な能力のベクトルを表す。なお, 本研究においては, λ_{0kt} および λ_{kt} に関して, $\lambda_{0k1} = \dots = \lambda_{0kT}$, $\lambda_{k1} = \dots = \lambda_{kT}$ を仮定した。

また, 時点間の総合的な能力に関しては, T 次元多変量正規分布,

$$\boldsymbol{\theta}_n = (\theta_{n1}, \dots, \theta_{nT})^\top \sim MVN_T(\boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta), \quad (9)$$

を仮定する (Zhan, Jiao, Liao et al., 2019 ; レベル 3)。ここで,

$$\boldsymbol{\mu}_\theta = (\mu_1, \dots, \mu_T)^\top, \boldsymbol{\Sigma}_\theta = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \sigma_{1T}^2 & \cdots & \sigma_T^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

であり, $\boldsymbol{\mu}_\theta$ は多変量正規分布における平均パラメタベクトル, $\boldsymbol{\Sigma}_\theta$ は多変量正規分布における分散共分散パラメタ行列を表す。また,

$$\mu_1 = 0, \mu_t = \delta_t + \mu_{t-1} \quad (t \geq 2), \quad (11)$$

$$\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_T^2 = 1, \quad (12)$$

とする。なお, $\delta_t \sim N(0, 2)$, $\delta_t \geq 0$, $\delta_1 = 0$ とする。 μ_t は時点 t の総合的な能力 θ_{nt} の平均パラメタであり, δ_t は 1 時点前と比較した際の総合的な能力の平均パラメタの増分を表す。また, σ_{1T} は時点 1 の総合的な能力 θ_{n1} と時点 T の総合的な能力 θ_{nT} の共分散パラメタであり, 各時点間の共分散パラメタ $\sigma_{tt'} (t \neq t')$ には一様分布 ($Unif(-1, 1)$) を仮定した。

本研究の研究 1 では HO-DINA モデル, 研究 2 では縦断的 HO-DINA モデルを用いる。なお, 本稿では, slipping パラメタ s および guessing パラメタ g を「項目パラメタ」, 切片パラメタ λ_0 および傾きパラメタ λ を「アトリビュートパラメタ」, 総合的な能力 θ およびアトリビュート習得確率を「個人パラメタ」と呼ぶ。

Table 1
Q 行列の例

問題項目	アトリビュート			
	加法	減法	通分	約分
(例題 1) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$	1	0	0	0
(例題 2) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$	1	0	1	0
(例題 3) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$	0	1	0	1
(例題 4) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$	1	1	1	1
(例題 5) $\frac{3}{9} + \frac{1}{9} + \frac{5}{9}$	1	0	0	1

注) 1 は当該項目に正答するためには該アトリビュートが必要であることを表し、0 は不要であることを表す。

第3章 予備的検討

CDMに基づく新たなテストを開発する際、アトリビュートの設定とテスト問題の作成は重大な要素となる。アトリビュートの設定やテスト問題の作成が適切に行われていなければ、CDMによる分析の結果の解釈を適切に行うことができず、誤った情報を生徒にフィードバックしてしまう可能性が高まる。また、第1章で言及したような作問者のテストへの意図を的確に反映させるためにも、アトリビュートの設定やテスト問題の作成は、慎重に取り組むべき段階であると考えられる。

Tang and Zhan (2020) は、縦断的 CDM を実践するためのテストの開発手順を提示している。Tang and Zhan (2020) では、アトリビュートの設定において、先行研究や指導要領等のレビューおよび専門家等との協議を行っている。また、テストの問題項目の作成では、設定したアトリビュートを測定する問題項目プールを作成した後、予備研究として事前にテストを実施し、必要に応じて問題項目を修正している。

本研究においても、アトリビュートの設定に係り、先行研究や既存の高等学校入学試験問題、学習指導要領解説のレビューを行った後、専門家等との協議を行った。問題項目の作成においては、研究参加者数および研究期間の制約から、予備研究としてのテスト実施は行わず、専門家等との協議によって最終的な問題項目を設定した。本章では、本研究におけるアトリビュート設定と問題項目作成の手続きを詳説し、アトリビュート設定の手続きに関して簡単な考察を行う。なお、本研究の全体の流れとスケジュールを Figure 2 に示す。

方 法

参加者数とテスト実施時間 アトリビュートの個数や問題項目数を決定するために、収集できるテストデータの数やテストが実施できる時間を調査した。収集できるテストデータの数に関しては、研究への協力を依頼した学習塾に在籍している中学2年生と中学3年生の人数を、2022年4月に調査した。テストが実施できる時間に関しては、在籍生徒数の調査と同時に、同学習塾の教室長1名に尋ねた。

アトリビュート設定 アトリビュートの候補を作成するため、複数の文献の調査を行った。はじめに、高等学校入学試験問題を調査し、関数領域に関する問題を対象に、解答する際に必要とされる認知的要素を書き出した。高校入試問題調査の一例を Appendix A に

示す。続いて、関数教育に関する文献を調査した。高校入試問題調査と文献調査をもとに、関数理解において必要とされる能力を踏まえ、入試問題調査で書き出された認知的因素を抽象することによりアトリビュート候補を作成した。

また、中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編（文部科学省, 2018）および高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説数学編理数編（文部科学省, 2019）において、共起ネットワークに基づく調査を行った。単語の出現頻度や単語間の結び付きに基づいて文書内容を可視化する共起ネットワークを用いることで、客観的に単語間の結び付きを捉えることができる。テキストデータの計量的な分析は星野他（2016）によって推進されており、実際に、構成概念を構成する要素を特定するために共起ネットワークを用いた研究が存在する（嘉瀬他, 2016）。本研究においても、生成した共起ネットワークと指導要領解説を照らし合わせながら解釈することによって、アトリビュート候補を作成した。共起ネットワークの詳細は次項に示す。なお、本研究の対象は中学数学であるが、高校数学における中学数学の重要性を示す研究が存在し（Wang & Goldschmidt, 2003; Petersen & Hyde, 2015），高校数学への接続を踏まえた中学数学教育を意識して、高等学校数学科の指導要領解説を調査対象に含めた。

作成したアトリビュート候補をもとに、CDMを研究している大学教員、および中学校・高等学校教諭一種免許状（数学）と小学校教諭一種免許状を保有し、CDMを実践に活用した研究を行っている大学院生との協議を行い、最終的なアトリビュートを決定した。なお、大学院生との協議は、問題項目の候補を作成した後に、問題項目に関する協議と同時に行った。

最終的なアトリビュートの個数は、事前に調査した在籍生徒数と、テスト実施可能時間による問題項目数の制限から、先述した大学教員の助言を得て決定した。その際には、想定される各アトリビュートパターンに分類される参加者数が寡少にならないようにすることや、Xu and Zhang（2016）が示している識別性の条件を満たすために必要な問題項目数を考慮した。

なお、最終的な各アトリビュートの定義の決定は、テスト問題の作成と並行して行い、テスト問題によって測定される能力とアトリビュートの定義の間に食い違いが生じないよう協議した。

共起ネットワーク 共起ネットワークでは、二つの単語が同時に使用される共起のパターンを可視化できる。本研究においては、名詞の文章内での共起に注目した。すなわ

ち、名詞をノード、名詞の同一文内での共起をエッジとして共起ネットワークを生成した。なお、共起ネットワーク作成の手続きに関する数理的な説明は Appendix B に示す。

共起ネットワークの生成のための文書データは、中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編（文部科学省、2018）「第 3 章 各学年の目標及び内容」における各節（「第 1 節 第 1 学年の目標及び内容」、「第 2 節 第 2 学年の目標及び内容」、「第 3 節 第 3 学年の目標及び内容」）第 2 項（「2 第 1 学年の内容」、「2 第 2 学年の内容」、「2 第 3 学年の内容」）の第 3 目「C 関数」(i.e. pp. 82–87, 117–120, 152–154)，および高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編理数編（文部科学省、2019）「第 2 章 各科目」における、「第 1 節 数学 I」「第 3 項 内容と内容の取扱い」の第 3 目「(3) 二次関数」，「第 2 節 数学 II」「第 3 項 内容と内容の取扱い」の第 2 目「(2) 図形と方程式」，第 3 目「(3) 指数関数・対数関数」，第 4 目「(4) 三角関数」，第 5 目「(5) 微分・積分の考え方」(i.e. pp. 41–43, 57–66) とした。なお、これらの各目に関して、文部科学省（2018; pp. 82–87）を「中 1 関数領域に関する指導要領解説」，文部科学省（2018; pp. 117–120）を「中 2 関数領域に関する指導要領解説」，文部科学省（2018; pp. 152–154）を「中 3 関数領域に関する指導要領解説」と呼ぶこととし、この 3 個を一つにまとめたものを「中学関数領域に関する指導要領解説」と呼ぶこととする。また、中学関数領域に関する指導要領解説と、文部科学省（2019; pp. 41–43, 57–66）をまとめたものを「中学高校関数領域に関する指導要領解説」と呼ぶこととする。

上記の文書データを形態素解析によって形態素に分解し、名詞を抽出した後に、共起ネットワークを作成した。形態素解析には MeCab (Yet Another Part-of-Speech and Morphological Analyzer; Kudo, 2005) を使用し、MeCab 用の IPA 辞書 (mecab-ipadic) を辞書とした。また、今回使用した文書データが数学に関する指導要領解説であり、IPA 辞書に登録されていない領域特有な単語を多く含んでいたことから、独自に名詞および動詞を定義して辞書として追加した。追加した単語とその品詞の一覧を Appendix B に示す。形態素解析によって分解された形態素のうち、出現頻度が高い一方で重要な意味を持たない単語 (i.e. ストップワード) を取り除いた後、名詞を抽出した。なお、今回ストップワードとした単語の一覧は Appendix B に示す。

共起ネットワークの作成においては、形態素解析によって抽出された名詞をそれぞれ一つのノードとし、句点で区切られた一文の中での共起をエッジとした。なお、名詞の出現頻度の高さの評価には出現比率 R を用いた。名詞 w の出現比率は、名詞 w が出現する文

の個数をすべての文の個数で割ることによって算出した。また、名詞間の共起頻度の高さの評価には Jaccard 係数 J を用いた。二つの名詞 w_1, w_2 間の Jaccard 係数は、名詞 w_1, w_2 の両方が出現する文の個数を、名詞 w_1, w_2 のうち少なくとも一方が出現する文の個数で割ることによって算出した。すなわち、Jaccard 係数は、二つの名詞が共起する確率を表しており、それぞれの名詞の出現頻度を考慮に入れた上で名詞間の結び付きの強さを表している。

共起ネットワークの作成にあたり、名詞の出現比率の閾値 R_{thre} および Jaccard 係数の閾値 J_{thre} を設定した。これらの閾値の具体的な数値は、それぞれの生成された共起ネットワークを見て、ノードの個数や生成されるサブグラフをもとに探索的に決定した。出現比率が R_{thre} 以上であり、少なくとも一つの他の名詞との間の Jaccard 係数が J_{thre} 以上である名詞をノードとして選択し、選択された名詞間の共起をエッジとして、共起ネットワークを生成した。エッジの重みは Jaccard 係数とした。また、生成した共起ネットワーク内で、重みが J_{thre} 以上のエッジで互いに結ばれているノードからサブグラフを作成した。なお、共起ネットワークの作成には Python を使用した。作成した Python のスクリプトを Appendix B に掲載する。

テスト問題作成 テスト問題の作成は、最終的なアトリビュートを決定した後に行つた。まず、決定したアトリビュートを測定する問題項目の候補を作成した。問題項目の候補が使用されない可能性を鑑み、Xu and Zhang (2016) が示している識別性の条件を満たすために、アトリビュートごとに、当該のアトリビュートのみを要求する問題項目候補を 3 個以上作成するようにした。

作成した問題項目候補をもとに、先述した大学教員および大学院生との協議を行い、最終的に使用する問題項目を決定した。この際に、アトリビュートの定義を並行して決定した。また、先述した大学院生と教室長、および日常的に数学を使用しない学部に所属する大学生 1 名との協議を行い、最終的に使用する問題項目の難易度の調整を行った。

テストの実施時間は、先述した大学生および著者が、最終的な問題項目を第 1 回テストに使用する順に並び替えたものに解答し、要した時間をもとに決定した。その際には、大学生と中学生の数学能力の差を考慮した。

結 果

文献調査 文献等の調査で作成した 6 個のアトリビュート候補を、Table 2 の A1_c から A6_c に示す。

中学数学における指導の順序として、関数に関する単元は、数と式に関する単元の後に扱われる。数と式に関する学習が関数に関する学習の理解に必要不可欠であることは、文部科学省（2018）で述べられている（e.g. p. 33, p. 37）。その他にも、関数理解における代数学の理解や代数的推論の重要性を示す文献は多く存在する（e.g. Ellis, 2011; Ontario Ministry of Education, 2013）。高校入試問題においても、関数に関する設問では必ず代数としての文字が使用される。このことから、文字を用いて数量を表現する考え方の理解は中学数学の関数学習において重要な要素の一つであり、関数に関する設問を解く際に前提となる能力であると考えられる。本研究においても、A1_c にある「数の代わりに文字を用いて抽象的に表現する」をアトリビュート候補として設定した。

ほとんどの高校入試問題で、関数領域の設問はグラフとともに出題される。代数や関数の理解において、文章で表現された事柄を、表やグラフを用いた表現に変換する取り組みの学習効果は Brenner et al. (1997) で示されている。文部科学省（2018）においても、表、式、グラフを用いて関数関係を捉えたり、それぞれの表現形式の関連を理解して考察したりすることの必要性が述べられている（e.g. p. 34, p. 50）。これらを踏まえて、本研究では、A2_c にある「言葉、数式、表、グラフを結び付ける」をアトリビュート候補として設定した。

関数の定義として、「 x の値を決めると y の値がただ一つに定まるとき、 y は x の関数である」といった記述は、日本の中学数学の教科書に記載があり、授業でもこの定義が扱われる。また、関数教育における関数の捉え方に関する先行研究において、関数の定義的な見方を言及する研究が多い（e.g. Ellis, 2011; Fonger et al., 2016; Slavit, 1997）。一方で、関数の定義を直接問うような高校入試問題は調査した限り見つからず、少ないと考えられる。関数の定義的な見方よりも変量的な見方が有用であるとする研究は存在するものの（e.g. Cai et al., 2010; Thompson & Carlson, 2017），定義的な理解は関数理解の一つの要素となっており、Carlson and Oehrtman (2005) は定義的な見方と変量的な見方の両方が必要であると述べていることから、日本の関数教育で扱われている現状も踏まえ、本研究では A3_c の「関数とは、 x の値に応じて y の値が一つに定まるものであることを理解する」をアトリビュート候補とした。

また、先述した通り、ほとんどの関数領域の高校入試問題でグラフが図示される。そのような設問の中では、直交座標上の3点からなる三角形の求積や、その回転体の求積、二つの図形の相似関係等が問われる。文部科学省（2018）においても、図形に関する単元の理解が、関数理解に不可欠であることが述べられている（p. 37）。これらのことから、関数に関する設問を解くために必要な要素の一つとして、A4_cにある「直交座標上の図形の性質を扱う」をアトリビュート候補として作成した。

その他にも、高校入試問題では、直交座標上の点のx座標を文字tなどを用いて表してから方程式を立式して解く問題など、方程式を立てることを見据えた文字の設定を要求する問題が多く出題される。このことから、A5_cの「自力で文字を用いて変数を設定する」をアトリビュート候補に設けた。また、グラフ上の点においてx座標が既知のときのy座標を求めることや、比例定数が未知の関数関係式に対してx, yの値を代入することは、多くの問題の解答の流れの中で必要とされる。そのため、A6_cにある「代入を正しく行う」をアトリビュート候補として設定した。

指導要領解説の共起ネットワーク 中学関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワークと中学高校関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワークを作成し、解釈することによって、アトリビュート候補を作成した。作成したアトリビュート候補に関して、中1関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク、中2関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク、中3関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワークを見ながら、作成したアトリビュート候補が、各学年で重要とされていることを表現できていることを確認した。

まず、中学関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク(CN_j)を作成した。 $R_{thre} = .020$, $J_{thre} = .24$ としたときの共起ネットワークを、サブグラフ(Sg)別に色分けしてFigure 3(上)に示す。なお、すべての共起ネットワーク図において、ノードの大きさは、ネットワーク内のノードの重要度を表すPageRank(Gleich, 2015; see also Brin & Page, 1998)に基づいて設定した。Figure 3(上)において、「式」、「グラフ」、「対応」、「数量」、「関係」、「変化」、「様子」などのノードからなるSg1は、「二つの数量の関係の変化の様子について、グラフや式、表の特徴を理解して対応づける」といった内容が現れていると考えられ、その重要性が示唆される。また、「座標」、「平面」からなるSg2は、座標平面上における座標の理解に関する記述が現れていると考えられ、その重要性が示唆される。「表現」、「考察」、「具体」、「事象」からなるSg3は、「具体的な事象を、関数とし

て表現して考察する」といった内容が現れていると考えられる。「日常」、「内容」からなる Sg5 は日常的な内容への関数の適用に関する記述、「正の数」、「負の数」などからなる Sg6 は負の数への変域の拡張に関する記述が現れていると考えられる。「一方」、「他方」、「2 倍」、「3 倍」などからなる Sg7 は、一方の値に伴って他方の値が変化することに関する記述、「x」、「y」、「値」などからなる Sg8 は、二つの変数の関数関係に関する記述が現れていると考えられる。「実験」、「観察」、「予測」、「結果」、「説明」などからなる Sg9 は、「関数の考え方を用いて実験や観察の結果を予測したり説明したりする」といった内容が現れていると考えられ、その重要性が示唆される。なお、 CN_j の Sg1 を $CN_j\text{-}Sg1$ と表すものとする。

続いて、中学高校関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク (CN_{all}) を作成した。 $R_{thre} = .020$, $J_{thre} = .24$ としたときの共起ネットワークを、サブグラフ別に色分けして Figure 4 (上) に示す。なお、「知識」、「技能」からなるサブグラフが存在したが、他のサブグラフとの間のエッジが一つも存在しなかったため、作図対象から除外した。Figure 4 (上)において、「数学的活動」、「有用」などからなる Sg1 は、「数学的活動を通して学習事項の有用性を認識する」といった内容が現れていると考えられる。「式」、「グラフ」などからなる Sg3 は、 $CN_j\text{-}Sg1$ と $CN_j\text{-}Sg3$ が一つになり、「具体的な事象をグラフや式、表として表現し、それぞれの表現の特徴を理解して対応づけ、事象を考察する」といった内容、「日常」、「問題」、「解決」などからなる Sg6 は、「関数の考え方によって社会や日常の問題を解決する」といった内容が現れていると考えられ、これらの重要性が示唆される。「座標」、「平面」などからなる Sg4 は $CN_j\text{-}Sg2$ と、「負の数」などからなる Sg7 は $CN_j\text{-}Sg6$ と、「x」、「y」などからなる Sg8 は $CN_j\text{-}Sg8$ と、「実験」、「観察」からなる Sg10 は $CN_j\text{-}Sg9$ と同様なものであると考えられる。「円」、「方程式」からなる Sg12 は、座標平面上での円と式との結び付きに関する記述が現れていると考えられる。

指導要領解説の共起ネットワークを解釈することによって作成した 3 個のアトリビュート候補を、Table 2 の A7_c から A9_c に示す。

CN_j および CN_{all} を踏まえると、 $CN_j\text{-}Sg7$ や $CN_j\text{-}Sg8$, $CN_{all}\text{-}Sg8$ は、二つの変数の関数関係において、一方の変数から他方の変数が決定されていることの重要性を示唆していると考えられるため、A7_c にある「一方の変数からもう一方の変数を決定するという感覚を身につける」をアトリビュート候補として作成した。また、 $CN_j\text{-}Sg3$ や $CN_j\text{-}Sg5$, $CN_j\text{-}Sg9$ および $CN_{all}\text{-}Sg6$ や $CN_{all}\text{-}Sg10$ は、関数の考え方を身の回りの具体例に適用す

ることの重要性を示唆していると考えられ、A8_c にある「身近な例に適用し、具体例を関数で捉える」をアトリビュート候補として設定した。CN_j-Sg1, CN_j-Sg2, CN_{all}-Sg3, CN_{all}-Sg4, CN_{all}-Sg12 は、総じて、座標平面上で表現される点や線の意味に関する理解や、それらと式とを結び付けた理解の重要性を示唆していると考えられ、A9_c にある「座標平面上での特徴を、日本語や数式の意味と結び付ける」をアトリビュート候補として作成した。作成したアトリビュート候補に対応づけて色分けした CN_j, CN_{all} を、それぞれ Figure 3 (下), Figure 4 (下) に示す。

作成したアトリビュート候補の妥当性を確認するために、中 1 関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク (CN₁), 中 2 関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク (CN₂), 中 3 関数領域に関する指導要領解説の共起ネットワーク (CN₃) を作成した。 $R_{thre} = .022$, $J_{thre} = .24$ としたときの CN₁, $R_{thre} = .022$, $J_{thre} = .30$ としたときの CN₂, $R_{thre} = .028$, $J_{thre} = .35$ としたときの CN₃ を、それぞれサブグラフ別に色分けして Figure 5 (上), Figure 6 (上), Figure 7 (上) に示す。

CN₁ に関して、「関数関係」, 「意味」からなる Sg2 や「x」, 「y」などからなる Sg6, 「一方」, 「他方」などからなる Sg8 は、A7_c の「一方の変数からもう一方の変数を決定する」という感覚を身につける」に当てはまる内容であると考えられる。「具体」, 「事象」などからなる Sg4 は、A8_c の「身近な例に適用し、具体例を関数で捉える」に当てはまる内容であると考えられる。また、「グラフ」, 「式」などからなる Sg1, 「座標」, 「平面」などからなる Sg3 は、A9_c の「座標平面上での特徴を、日本語や数式の意味と結び付ける」の内容に一致すると考えられる。

CN₂ に関して、「x」, 「y」などからなる Sg5 は A7_c, 「実験」, 「予測」などからなる Sg4 は A8_c の内容に一致すると考えられる。また、「グラフ」, 「式」などからなる Sg1, 「交点」, 「意味」などからなる Sg3 は、A9_c に当てはまる内容であると考えられる。

CN₃ に関して、「概念」, 「広がり」などからなる Sg7 は、例えば「式に表すことが困難な関数を学ぶことで、関数の概念の広がりを実感（文部科学省, 2018, p. 153）」するなど、一方の値から他方の値が決まるものとしての関数の概念を重視するような記述が現れており、「x」, 「y」などからなる Sg8 と合わせて、A7_c に当てはまる内容であると考えられる。「具体」, 「事象」などからなる Sg1 や「実験」, 「関係」, 「対応」, 「変化」などからなる Sg4 は A8_c, 「グラフ」, 「式」などからなる Sg3 や「直線」, 「変化の割合」などからなる Sg6 は A9_c の内容に一致すると考えられる。

作成したアトリビュート候補が、各学年で重要とされていることを表現できていることを確認し、指導要領解説の共起ネットワークに基づく3個のアトリビュート候補を決定した。アトリビュート候補に対応づけて色分けしたCN₁, CN₂, CN₃を、それぞれFigure 5(下), Figure 6(下), Figure 7(下)に示す。

最終的なアトリビュートの決定 高校入試問題と文献の調査および指導要領の共起ネットワークから作成した9個のアトリビュート候補をもとに、大学教員との協議を行った。この際には、最終的なアトリビュートの個数を3個または4個にすることを目標として、候補である9個を最終的なアトリビュートに集約することに関して探索的に議論した。9個のアトリビュート候補のそれぞれに関して、作成した背景を説明した後に、最終的なアトリビュートの決定を目指した議論を行った。

A1_cの「数の代わりに文字を用いて抽象的に表現する」は、数と式の単元の学習が、関数の単元の学習の前提となっていることから作成した候補であった。ここで、A5_cの「自分で文字を用いて変数を設定する」ことは、数と式で学習した代数的な考え方を自ら活用することであると考えられる。また、A6_cの「代入を正しく行う」ことは、数と式の単元で学習することである。以上より、A1_c, A5_c, A6_cは、関数理解の前提となる代数が正しく扱える能力として一つにまとめることができると考え、この3個のアトリビュート候補を、A1「代数的手手続きの理解」とした。

A2_cの「言葉、数式、表、グラフを結び付ける」では、関数関係に関する複数の表現形式が利活用できる能力を意図していた。A9_cの「座標平面上での特徴を、日本語や数式の意味と結び付ける」は、関数関係を表すグラフを含めた座標平面上で表現されるあらゆる特徴を言葉や数式の意味と結び付けることを意味し、A2_cと一部重複する要素であると解釈することができる。また、A4_cの「直交座標上の図形の性質を扱う」ことは、A9_cにある座標平面上での特徴を、幾何的な側面から捉えて、意味を理解することであるといえる。これらの3個のアトリビュート候補は、直交座標上で表現される特徴の意味を理解する能力を共通して含んでいる。そのため、この3個のアトリビュート候補を、A3「直交座標上での表現の理解」とした。ただし、A2_cに含まれていた「表」の側面は捨象した。また、A4_cに含まれていた幾何的な側面は、本研究が関数領域への適用を目的としていることを踏まえ、線分の長さに関する特徴までとし、図形の単元で扱われる事項の知識（面積の求め方等）は含まないこととした。

A3_cの「関数とは、xの値に応じてyの値が一つに定まるものであることを理解する」

ことと、A7_c の「一方の変数からもう一方の変数を決定するという感覚を身につける」ことは、定義の理解とその感覚という点で若干の違いはあるが、関数関係を捉える能力として同質のものであると考えられる。また、A8_c の「身近な例に適用し、具体例を関数で捉える」は、指導要領において、身の回りの具体例に関数の考え方を適用し、具体例に関する考察を進めることの重要性が記述されている内容から作成されたアトリビュート候補であった。このことから、A8_c も、関数関係を捉える能力として A3_c や A7_c と統合することができると言えられる。よって、この 3 個のアトリビュート候補を、A2 「関数的思考の理解」とした。

以上の 3 個のアトリビュートを作成した後、問題項目候補と合わせて大学院生との協議を行った。この際には、3 個のアトリビュートに関して確認的に議論した。3 個のアトリビュートの定義内容、および問題項目の候補と各項目が測定しているアトリビュートに関して説明を行った後、これらのアトリビュートが、関数に関する設問を解くために必要な認知的要素をよく反映できていることを確認した。

なお、アトリビュートの定義は、問題項目の作成と並行して行った。例えば、A1 の定義文にある「関数の関係式の一般形を記憶し、扱うことができる」という部分は、問題項目作成後の協議を通して追記した部分の一つである。他にも、A2 の定義文にある「具体的な例」は、問題項目作成後の協議以前は「日常的な具体例」という表記であったが、問題項目中の例が必ずしも日常的ではなかったため、「具体的な例」に変更した。また、A3 の定義文にある「数学的用語」は、問題項目作成後の協議以前は「言葉」という表記であったが、問題項目中で要求している能力は、日常的な言葉ではなく数学の問題を解く上で有用となる言語表現であったことから、「数学的用語」という表記に変更した。

以上により設定された 3 個のアトリビュートとその定義を、Table 3 に示す。

問題項目候補の作成 すべての項目候補を独自に作成した。A1 または A3 を要求する一部の項目は、高校入試問題や中学校で使用される問題集の設問の形式を参考にした。中学 2 年生と中学 3 年生を対象としていたため、出題範囲は比例・反比例と一次関数とした。ただし、本質的な理解を問うため、中学数学で扱われない関数を、関係式を問わないような形式として一部の項目で出題した。作成した問題項目候補の Q 行列を Table 4 に示す。

合計 16 個の問題項目候補をもとに、大学教員との協議を通して問題項目内容の検討を行った。それぞれの問題項目候補の内容と Q 行列について説明した後、問題項目内容と

要求しているアトリビュートの適切性について確認的な議論を行った。I12_cに関して、Q 行列では A1 と A3 を要求しているが、実際には A1 または A3 が習得できていることで正答できる項目であり、DINA モデルの仮定に合致しないため不使用とした。また、I4_c は問題項目としてのまとめを欠いており、問うている内容がわかりにくかったため不使用とした。その他の問題項目候補に関して、難易度の低いものから高いものまで含まれていることを確認するとともに、要求しているアトリビュートの適切性を確認した。

続いて、先述した大学院生との協議を行った。それぞれの問題項目候補の内容と Q 行列、および不使用とした問題項目の内容と不使用とした理由について説明した後、問題項目内容と要求しているアトリビュートの適切性について確認的な議論を行った。不使用とした問題項目の不使用理由が妥当であることを確認した。また、その他の問題項目候補に関して、問題項目内容が中学数学の指導要領の内容を外れていないことや、要求しているアトリビュートの適切性を確認した。選択問題の設問文に関して、選択個数に関して記載するよう助言を得て、「一つ選んでください」という記述に変更した。I6_c および I11_c では、関数関係にある事柄を説明する文章を記述していたが、文章で取り上げる変数は離散変数でなく連続変数である方が好ましいという助言を得て、文章内容を変更した。

また、大学院生との協議から教室長との協議、大学生との協議を通して、問題項目の難易度の調整を行った。主な調整内容は複雑な分数を減らすことであった。I1_c や I3_c、I7_c、I14_c では、完全に分数をなくすか、分数の分母分子が大きな数字にならないよう、設問中の数字を修正した。また、I6_c に関して、大学生との協議を通して回答方法のわかりにくさを指摘されたため、設問内容は変更せずに、回答の要求の仕方を修正した。

以上の手続きを経て、最終的に第 1 回テストで使用する 14 個の問題項目を作成した。先述した大学生と著者が、第 1 回テストで使用する順に並び替えた 14 個の問題項目に解答すると、大学生は 13 分、著者は 8 分の時間を要した。なお、大学生は問題項目の難易度に関する協議の最初に解答したため、問題項目は初見であった。このことから、試験時間は 20 分間とし、生徒の解答進捗に合わせて試験時間の延長を容認することとした。

考 察

本章では、認知診断モデルに基づく新たなテストを開発する際に重大な要素となる、アトリビュートの設定とテスト問題の作成の手続きについて詳説した。また、アトリビュート設定の手続きに関して簡単な考察を行うことを目的としていた。アトリビュートの設定

に関しては、定性的な文献調査と指導要領解説の計量分析をもとにして作成したアトリビュート候補から、専門家等との協議を通して、最終的に3個のアトリビュートを設定した。テスト問題の作成に関しては、設定されたアトリビュートをもとに問題項目候補を作成し、専門家等との協議によって問題項目の選択や修正を行うことで、最終的に14個の問題項目を作成した。問題項目の作成と並行して、アトリビュートの定義の決定を行った。

幅広いアトリビュートによる区分と単元による区分の違い 研究においては、研究デザインを設定してから必要な参加者数を集めることを一般的であると考えられるが、本研究では実践場面を意識して、参加者数の制限からアトリビュート数を決定した。そのため、アトリビュートの個数が少なくなり、アトリビュートの定義が幅広いものとなった。このとき、幅広いアトリビュートによる区分と単元による区分が似たものになる。A1では、関数式の一般形に関する内容の他は、数と式の単元の内容であるといえる。また、A3は幾何的な側面を含みながら、関数に関する直交座標上での表現を主としたアトリビュートになっている。

このような状況において、単元別に得点を測定するような従来のテストとCDMを適用したテストの違いが不明瞭に感じられることがある。研究協力先の学習塾に本研究の研究内容を説明する際には、単元別に得点を測定しているテストとの違いの説明で困難を伴つた。CDMを利用する利点として、項目パラメタやアトリビュートパラメタに関する情報を得ることができ、それらを考慮した上で各個人の強みや弱みを推定できることがよく言及される。一方で、CDMを利用し始める段階では、CDMの特徴や従来の単元別測定との違いを認識することは難しい可能性が考えられる。

共起ネットワークの活用 CDMに基づくテスト開発において、アトリビュートの定義はとても重要視され、その妥当性について議論される。これまで研究におけるアトリビュート設定の手続きは、定性的な手続きに限定されてきた (Tang & Zhan, 2020; Wu, 2019)。そのため、本研究においては、定量的な手続きとして共起ネットワークを試用した。しかしながら、共起ネットワーク図の解釈は、星野他 (2015) でも言及されているように比較的定性的な手続きであるとともに、本研究においては共起ネットワークから新たに有用なアトリビュート候補を得ることはできなかったと考えられる。本研究の共起ネットワークの試用は、従来の専門家等との議論と、テキストデータの軽量的な分析を併用することが有用である可能性を示唆することができたと考えるが、アトリビュート設定の手続きに関しては、今後のCDM実践研究を通して検討を重ねる必要があるだろう。

Figure 2
本研究の全体の流れとスケジュール

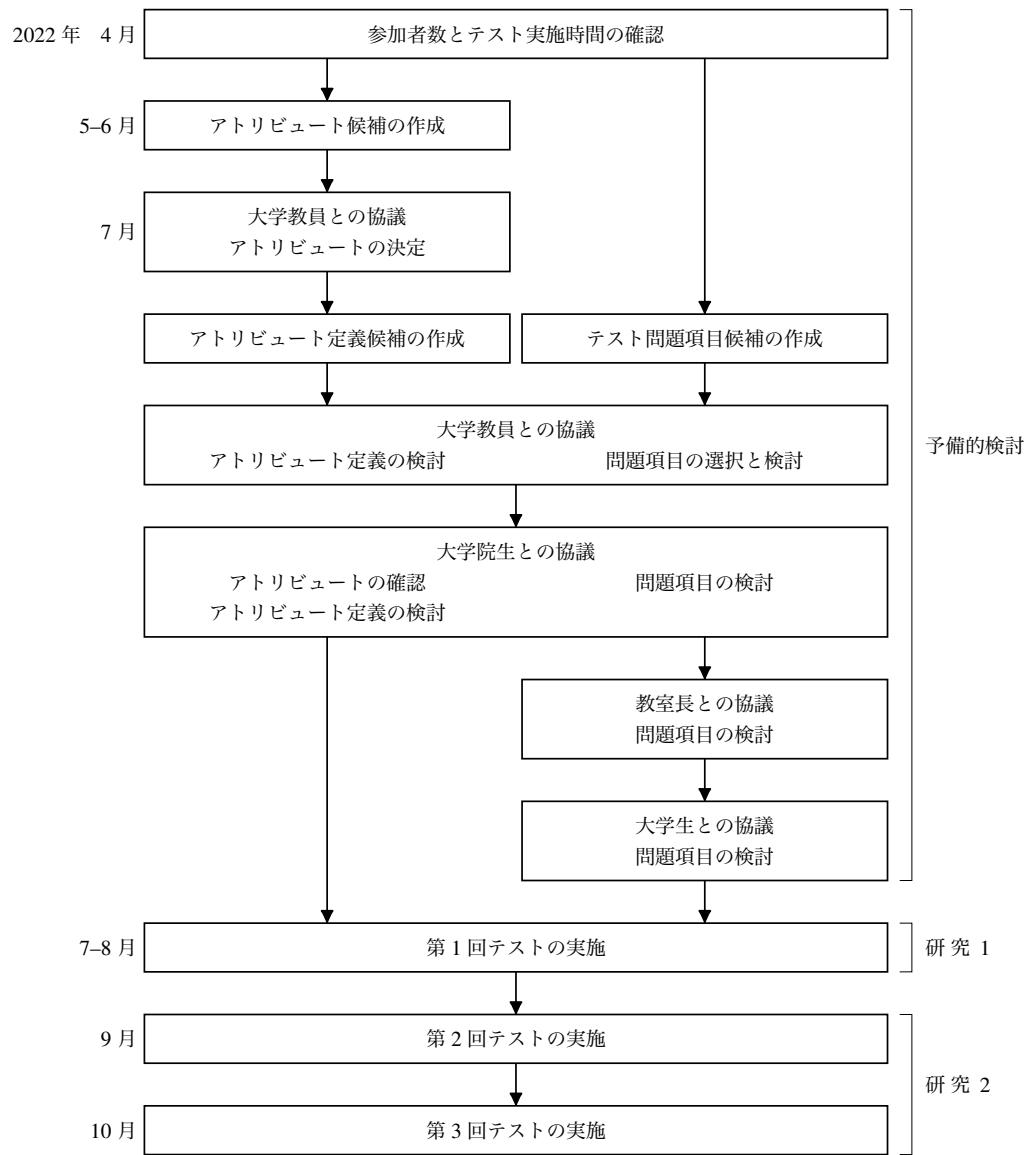
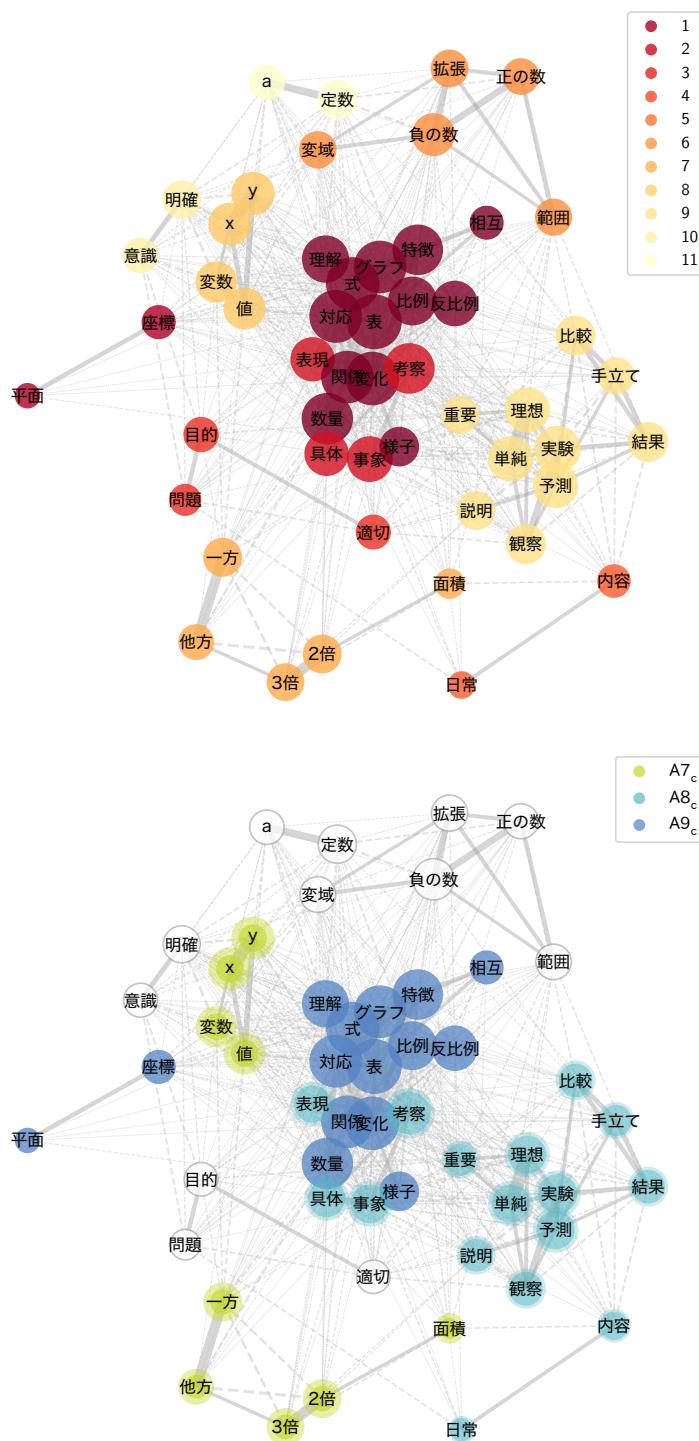


Table 2
アトリビュートの初期候補

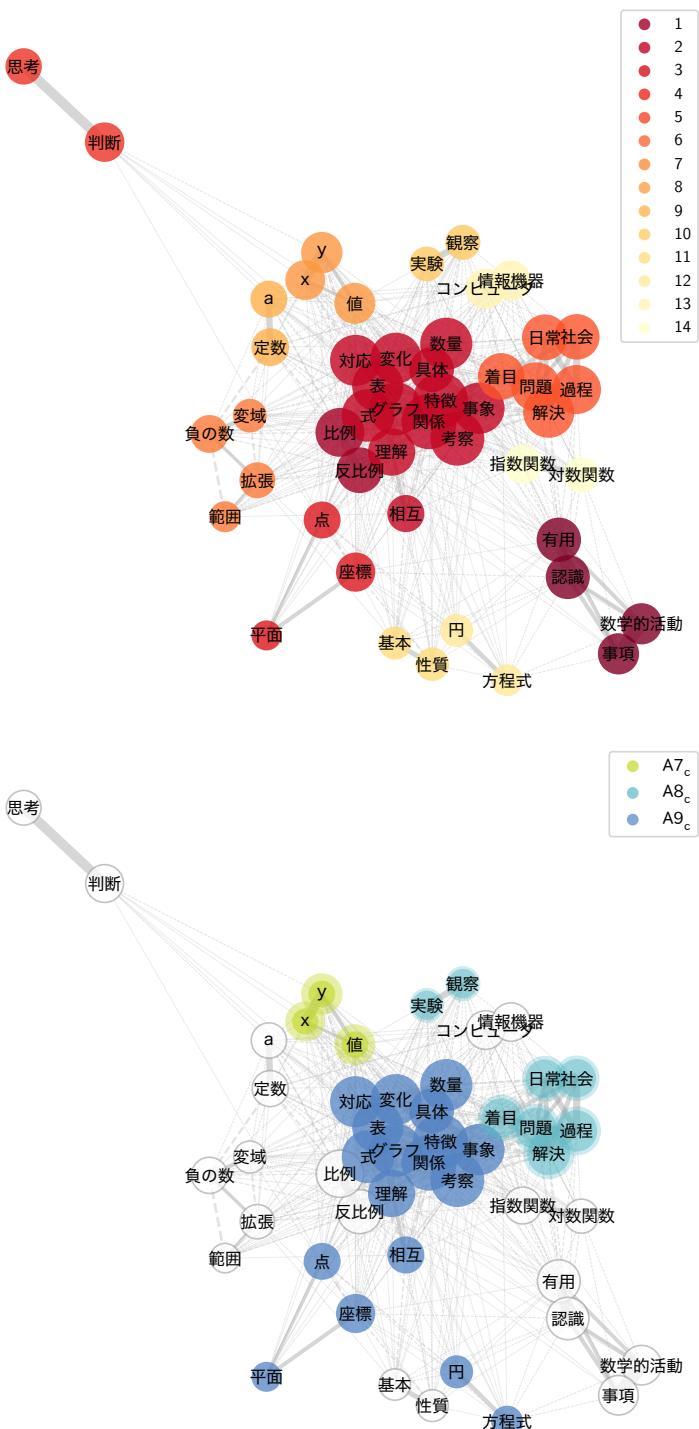
	初期候補	統合先
A1 _c	数の代わりに文字を用いて抽象的に表現する。	A1
A2 _c	言葉、数式、表、グラフを結び付ける。	A3
A3 _c	関数とは、 x の値に応じて y の値が一つに定まるものであることを理解する。	A2
A4 _c	直交座標上の図形の性質を扱う。	A3
A5 _c	自力で文字を用いて変数を設定する。	A1
A6 _c	代入を正しく行う。	A1
A7 _c	一方の変数からもう一方の変数を決定するという感覚を身につける。	A2
A8 _c	身近な例に適用し、具体例を関数で捉える。	A2
A9 _c	座標平面上での特徴を、日本語や数式の意味と結び付ける。	A3

Figure 3
中学関数領域に関する指導要領解説における名詞共起ネットワーク



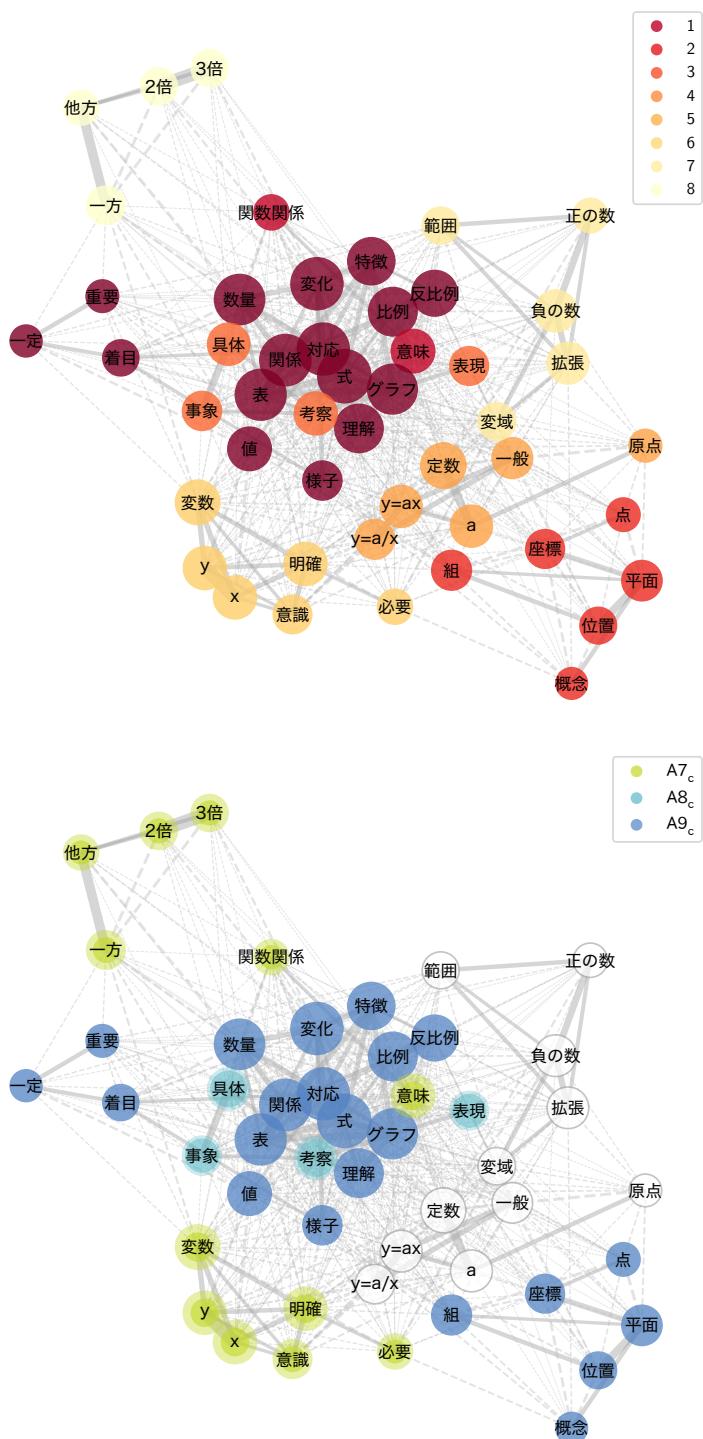
注) サブグラフ別の着色(上)およびアトリビュート候補に対応づけた着色(下)。ノードが大きいほどノードのPageRankが大きいことを表し、エッジが太いほどノード間のJaccard係数が大きいことを表す。実線のエッジは $J \geq J_{thre}$, $R_{thre} = .020$, $J_{thre} = .24$ 。

Figure 4
中学高校関数領域に関する指導要領解説における名詞共起ネットワーク



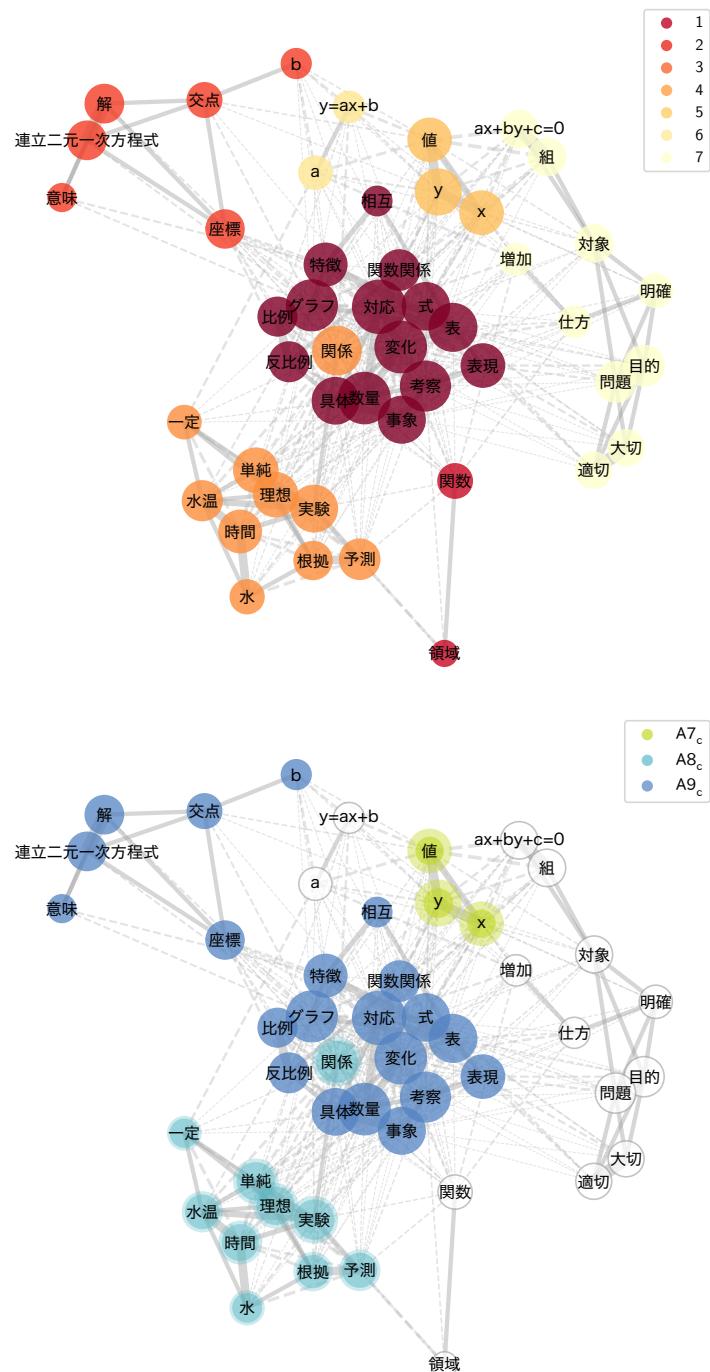
注) サブグラフ別の着色(上)およびアトリビュート候補に対応づけた着色(下)。ノードが大きいほどノードのPageRankが大きいことを表し、エッジが太いほどノード間のJaccard係数が大きいことを表す。実線のエッジは $J \geq J_{thre}$, $R_{thre} = .020$, $J_{thre} = .24$ 。

Figure 5
中1関数領域に関する指導要領解説における名詞共起ネットワーク



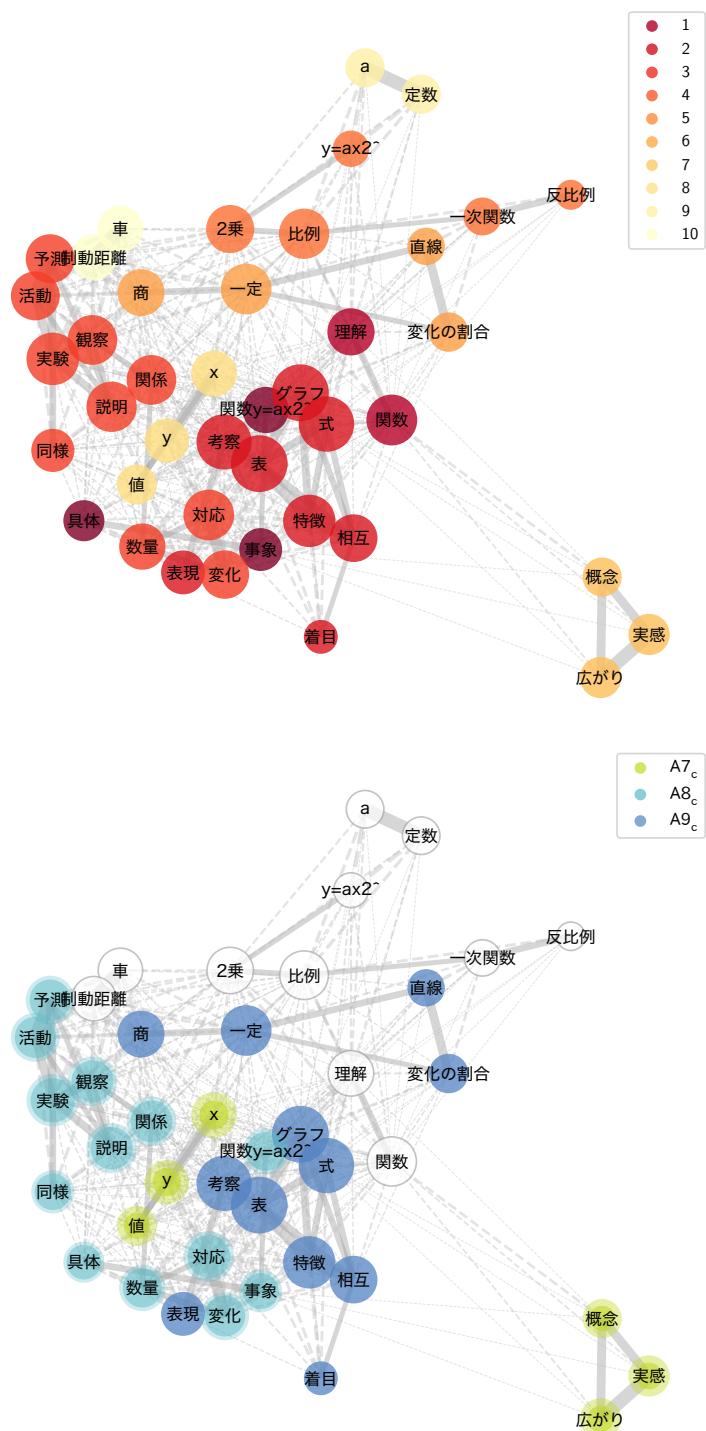
注) サブグラフ別の着色(上)およびアトリビュート候補に対応づけた着色(下)。ノードが大きいほどノードのPageRankが大きいことを表し、エッジが太いほどノード間のJaccard係数が大きいことを表す。実線のエッジは $J \geq J_{thre}$ 。 $R_{thre} = .022$, $J_{thre} = .24$ 。

Figure 6
中2関数領域に関する指導要領解説における名詞共起ネットワーク



注) サブグラフ別の着色(上)およびアトリビュート候補に対応づけた着色(下)。ノードが大きいほどノードのPageRankが大きいことを表し、エッジが太いほどノード間のJaccard係数が大きいことを表す。実線のエッジは $J \geq J_{thre}$ 。 $R_{thre} = .022$, $J_{thre} = .30$ 。

Figure 7
中3関数領域に関する指導要領解説における名詞共起ネットワーク



注) サブグラフ別の着色(上)およびアトリビュート候補に対応づけた着色(下)。ノードが大きいほどノードのPageRankが大きいことを表し、エッジが太いほどノード間のJaccard係数が大きいことを表す。実線のエッジは $J \geq J_{thre}$ 。 $R_{thre} = .028$, $J_{thre} = .35$ 。

Table 3
アトリビュートの名称と定義

名称	定義
A1 代数的手手続きの理解	変数の設定や等式の変形、方程式を解くことなど、文字を用いた式を扱うことができる。また、関数の関係式の一般形を記憶し、扱うことができる。
A2 関数的思考の理解	関数の定義「一方の値を決めると他方の値がただ一つに定まる」を理解し、具体的な例を関数として捉えることができる。
A3 直交座標上での表現の理解	直交座標上にかかれたグラフが意味する内容や、グラフの特徴が意味する内容を、数学的用語や数式と結び付けて理解できる。

Table 4
問題項目の候補

	A1	A2	A3	使用先
I1 _c	1	0	0	(2) として出題
I2 _c	1	0	0	(4) として出題
I3 _c	1	0	0	(1) として出題
I4 _c	0	1	0	不使用
I5 _c	0	1	0	(3) として出題
I6 _c	0	1	0	(11) として出題
I7 _c	0	0	1	(8) として出題
I8 _c	0	0	1	(5) として出題
I9 _c	0	0	1	(6) として出題
I10 _c	0	0	1	(13) として出題
I11 _c	1	1	0	(12) として出題
I12 _c	1	0	1	不使用
I13 _c	1	0	1	(9) として出題
I14 _c	1	0	1	(10) として出題
I15 _c	0	1	1	(7) として出題
I16 _c	0	1	1	(14) として出題

注) 1 は当該項目に正答するために当該アトリビュートが必要であることを表し, 0 は不要であることを表す。

A1:代数的手続きの理解, A2:関数的思考的理解, A3:直交座標上での表現の理解。

第4章 研究1

予備的検討では、アトリビュートとテスト問題を作成した。CDM研究において、教育現場のテストにCDMを適用して学習者へのフィードバックを行った実践研究は数が限られており、Tang and Zhan (2020) は CDMを実践場面に活用するためのアトリビュート設定やテスト作成の方法に関する知見が不足していることを指摘していた。また、作問者のテストへの意図を的確に反映させるためにも、アトリビュートの設定やテスト問題の作成は、慎重に取り組むべき段階であった。

そこで、研究1では、予備的検討で作成したアトリビュートと問題項目を使用して第1回のテストを実施し、作成したアトリビュートや問題項目の内容について考察する。具体的には、テストの実施と横断的なCDMの適用を通して、作成したテストの問題項目の内容や難易度、各アトリビュートの内容やQ行列を中心に結果を考察する。また、各種パラメタとアトリビュート内容や問題項目内容との関連や、それぞれのパラメタ間の関連も含めて検討する。なお、以降本稿では第1回のテストを「テスト1」とする。

方 法

調査参加者 本研究のテストは、学習塾に通う中学2年生および中学3年生を対象とした。テストを実施した学習塾は中学生の通塾者が多い個別指導塾であり、本研究で対象とした4個の教室の所在地は、千葉県または埼玉県であった。対象となる生徒には、本研究には関数に関する3回の診断テストとフィードバックが含まれること、研究への参加は任意であること、参加しないことによる不利益はフィードバックが得られないことの他に生じないこと、途中で研究への参加をやめることができることを説明した。研究への参加意思を示した61名（2年生24名、3年生37名）が、テスト1に解答した。

テスト実施 テスト1は、2022年7月25日から2022年8月5日までの2週間で実施した。対象とした学習塾は個別指導塾であるため、テストを実施するタイミングは、2週間の期間中のいずれかの授業の開始20分間とした。ただし、能力不足による誤答と時間不足による誤答が混在している場合に正しい推定結果が得られないため、20分が経過した時点ですべての問題に取り組めていない場合には、すべての問題に一度取り組めるまでテスト時間を延長した。

テストの監督は、各生徒の担任講師に依頼した。担任講師には、わからない問題は飛ば

して良いこと、および最後の問題まで取り組むことを生徒に伝えるよう周知すると同時に、先述の通り必要に応じてテスト時間を延長するよう依頼した。また、各教室におけるテストの配布と回収およびテスト実施状況の管理は、各教室の室長および副室長に依頼した。

テスト問題と Q 行列 テストは、予備的検討で最終的に採択された 14 項目を並び替えて作成し、A4 用紙に両面印刷して配布した。テスト問題を Appendix C に掲載する。また、Q 行列を Table 5 に示す。

分析 式(4) (レベル 1) および式(5) (レベル 2) に示した HO-DINA モデルを使用して分析を行った。マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo; MCMC) 法による分析の実施には JAGS (Just Another Gibbs Sampler; Plummer, 2003) を用い、すべての分析の実施に R (R Core Team, 2022) を使用した。JAGS スクリプトの作成では、Zhan, Jiao, Man et al. (2019) を参考にした。また、MCMC 法における chain は 5 本、それぞれの chain における iteration は 10,000 回とし、そのうちの最初の 6,000 回は burn-in として除外した。また、thinning インターバルは 2 とした。分析に使用した R のスクリプトを Appendix E に掲載する。テスト 1 の解答データのみを含む今回の分析を「分析 1」とする。なお、本研究全体を通して、パラメタの事後平均の値を推定値として扱った。ただし、2 値変数であるアトリビュート習得の有無に関しては事後中央値を推定値とした。

モデル比較による事前パラメタの決定 項目パラメタ g_i , s_i の事前分布をそれぞれ、

$$g_i \sim Beta(a_g, b_g), \\ s_i \sim Beta(a_s, b_s),$$

とし、アトリビュートパラメタ λ_{0k} , λ_k の事前分布をそれぞれ、

$$\lambda_{0k} \sim N(\mu_{\lambda_{0k}}, \sigma_{\lambda_{0k}}^2), \\ \lambda_k \sim N(\mu_{\lambda_k}, \sigma_{\lambda_k}^2),$$

とした。なお、 $Beta(a, b)$ は、 a , b をパラメタとするベータ分布を表す。事前パラメタ a_g , b_g , a_s , b_s , および $\mu_{\lambda_{0k}} = (\mu_{\lambda_{0(1)}}, \mu_{\lambda_{0(2)}}, \mu_{\lambda_{0(3)}})^\top$, $\sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (\sigma_{\lambda_{0(1)}}^2, \sigma_{\lambda_{0(2)}}^2, \sigma_{\lambda_{0(3)}}^2)^\top$, $\mu_{\lambda_k} = (\mu_{\lambda_1}, \mu_{\lambda_2}, \mu_{\lambda_3})^\top$, $\sigma_{\lambda_k}^2 = (\sigma_{\lambda_1}^2, \sigma_{\lambda_2}^2, \sigma_{\lambda_3}^2)^\top$ を、ベイズ推計で用いられる情報量基準である WAIC (Widely Applicable Information Criterion; Watanabe, 2010) に基づくモデル比較を行うことにより決定した。

モデル比較の対象とした事前パラメタの値の組み合わせは、基本的に、項目パラメタに事前情報を与えることの有無（2通り）とアトリビュートパラメタに事前情報を与えることの有無（2通り）を組み合わせ、次に示す4通りとした。なお、ベータ分布に関する事前パラメタの数値の設定は、Zhan, Jiao, Man et al. (2019) を参考にした。

モデル 1.1 項目パラメタとアトリビュートパラメタのいずれにも事前情報を与えない。事前パラメタを、

$$a_g = 1, b_g = 1, a_s = 1, b_s = 1,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_{0k}} = (0, 0, 0)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_{0k}}^2 = (4, 4, 4)^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_k} = (0, 0, 0)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^T,$$

とする。

モデル 1.2 項目パラメタのみに対して事前情報を与える。事前パラメタを、

$$a_g = 1, b_g = 3, a_s = 1, b_s = 3,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_{0k}} = (0, 0, 0)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_{0k}}^2 = (4, 4, 4)^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_k} = (0, 0, 0)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^T,$$

とする。

モデル 1.3 アトリビュートパラメタのみに対して事前情報を与える。事前パラメタを、

$$a_g = 1, b_g = 1, a_s = 1, b_s = 1,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_{0k}} = (-1, 0.5, 0.5)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_{0k}}^2 = (2, 4, 4)^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_k} = (0.5, 1, 1)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^T,$$

とする。

モデル 1.4 項目パラメタとアトリビュートパラメタの両方に対して事前情報を与える。事前パラメタを、

$$a_g = 1, b_g = 3, a_s = 1, b_s = 3,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_{0k}} = (-1, 0.5, 0.5)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_{0k}}^2 = (2, 4, 4)^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda_k} = (0.5, 1, 1)^T, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^T,$$

とする。

ここで、事前パラメタ $a_g = 1, b_g = 3, a_s = 1, b_s = 3$ とは、項目パラメタ g_i, s_i が 0.5 よりも小さくなりやすい、すなわち理想反応からの誤差が比較的小さくなりやすいという事前情報を与えている。また、アトリビュートパラメタに関する事前パラメタは、アトリビュートの定義を踏まえて設定した。 $\mu_{\lambda_{0k}} = (-1, 0.5, 0.5)^\top, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (2, 4, 4)^\top$ は、A1 の習得が容易であり、A2 および A3 の習得が比較的困難であるという事前情報を与えている。また、 $\mu_{\lambda_k} = (0.5, 1, 1)^\top, \sigma_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^\top$ は、総合的な能力 θ によってアトリビュート習得が識別される程度が、A1 に比べて A2 と A3 の方が大きいという事前情報を与えている。本研究で実施したテストが関数領域であり、関数領域に特有であると考えられる A2 および A3 の習得に関して、 θ による識別力がとくに高くなると考えられるため、この値を設定した。

事前情報を与えないモデル（モデル 1.1）で分析を実施した際、slipping パラメタ s_i に関する大きな値 (e.g. $s_{10} = .918 (SD = .051)$) が推定された。本研究のサンプルサイズが小さいことが原因となり正しく推定できていない可能性が考えられたため、項目パラメタに関する事前パラメタの値の条件を増やし、さらに次の 2 個のモデルを比較対象に追加した。

モデル 1.5 項目パラメタのみに対して強い事前情報を与える。事前パラメタを、

$$a_g = 2, b_g = 7, a_s = 2, b_s = 7,$$

$$\mu_{\lambda_{0k}} = (0, 0, 0)^\top, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (4, 4, 4)^\top,$$

$$\mu_{\lambda_k} = (0, 0, 0)^\top, \sigma_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^\top,$$

とする。

モデル 1.6 項目パラメタに対して強い事前情報、アトリビュートパラメタに対して事前情報を与える。事前パラメタを、

$$a_g = 2, b_g = 7, a_s = 2, b_s = 7,$$

$$\mu_{\lambda_{0k}} = (-1, 0.5, 0.5)^\top, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (2, 4, 4)^\top,$$

$$\mu_{\lambda_k} = (0.5, 1, 1)^\top, \sigma_{\lambda_k}^2 = (4, 4, 4)^\top,$$

とする。

ここで、 $a_g = 2$, $b_g = 7$, $a_s = 2$, $b_s = 7$ という値は、項目パラメタが小さくなるような事前情報をより強く与えるために、 $Beta(a, b)$ の期待値 E および分散 V ,

$$E = \frac{a}{a+b}, V = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},$$

に関して、 $a_g = 1$, $b_g = 3$, $a_s = 1$, $b_s = 3$ よりも期待値を下げ、分散を小さくするよう設定した。

フィードバック それぞれの生徒に対して、①フィードバックシート（1ページ）、②要求アトリビュートに関する説明（1ページ）、③採点後の答案用紙（表紙と裏表紙を除く6ページ）、④各項目の詳解（4ページ）の4種類のコンテンツからなるフィードバックを作成して配布した。ページ数が多いため、A3用紙で1面に4ページずつ（i.e. 4in1）として両面印刷した。複数教室の個別指導塾で実施しているため、配布は各教室の教室長および各生徒の担任講師に依頼した。

フィードバックシートは、Jang (2005, 2009) および佐宗 (2022) を参考に作成し、①アトリビュート習得確率の図示、②各アトリビュートに関するアトリビュート習得確率に応じたコメント、③各問題項目の正誤や正答率に関する情報からなる構成とした。アトリビュート習得確率を図示する棒グラフは、習得確率が低いほど赤色、習得確率が高いほど灰色になるよう色づけした。各アトリビュートに関するコメントでは、それぞれのアトリビュート習得確率に関して 25% 未満、25% 以上 50% 未満、50% 以上 75% 未満、75% 以上の4個の区分に分け、各区分に応じたコメントを記載した。各アトリビュートの定義は一部表現を平易に変えて併記した。アトリビュートごとの各区分のコメントを、A1 を Table 6, A2 を Table 7, A3 を Table 8 に示す。また、各問題項目の正誤や正答率に関する情報には、当該生徒の合計正答数、全生徒の平均正答数、当該生徒の各項目の正誤、各項目の正答率および難易度、各項目の要求するアトリビュート番号を記した。なお、難易度は正答率に基づいて決定し、正答率が 33% 未満の項目を「難」、33% 以上 66% 未満の項目を「中」、66% 以上の項目を「易」とした。

要求アトリビュートに関する説明は、それぞれの問題項目について要求しているアトリビュートを示すとともに、それぞれのアトリビュートについて実際に要求される考え方を簡潔に記した。生徒ごとに、習得確率が 50% に満たないアトリビュートの欄には色づけをした。

また、各項目の詳解には、必要に応じて解説のほかにコメントも記載した。

なお、テスト1実施後のフィードバックを「フィードバック1」とする。フィードバック1の際には、著者の不在期間の都合によりモデル比較による事前パラメタの決定が間に合わなかつた。そのため、項目パラメタを低く抑えることができていたモデル1.6を使用して推定し、フィードバックを行つた。

4種類のコンテンツからなるフィードバック1(全12ページ)の例を、Appendix Dに掲載する。

結 果

記述統計量 テストの平均正答数は、2年生2.88問、3年生5.59問、全体で4.52問であった。各問題項目の正答率と平均正答数を、Table 9に示す。

正答率が10%未満である項目は、正答率の低い順に項目(10)(3.3%)、(9)(6.6%)、(3)(9.8%)であった。項目(10)は高校入試において難易度の高い問題として多く出題されるような形式であり、直交座標上の点の座標を、文字を用いて表して解き進める必要のある問題であった。項目(9)は、2本の直線に関してそれぞれの直線の式を求め、交点の座標を求める問題であった。項目(3)は合成関数の考え方を要求する問題であった。

また、正答率が60%以上である項目は、正答率の高い順に項目(5)(68.9%)、(1)(63.9%)であった。項目(5)は直交座標上にかかれた直線の切片を読み取る問題であった。項目(1)は一次関数の関係式と y の値が与えられ、 y の値を関係式に代入することにより x の値を求める問題であった。

事前パラメタの決定 6個のそれぞれのモデルでMCMC法による分析を実施した。すべてのパラメタで、chainの収束の程度を表す \hat{R} (Brooks & Gelman, 1998; Gelman & Rubin, 1992)を算出した。 \hat{R} が1に近いほどchainが収束していることを意味し、Gelman, et al. (2014)は $\hat{R} \leq 1.1$ を経験的な基準として述べている(pp. 287–288)。本研究では、より厳密な基準として、いずれのモデルにおいても、すべてのパラメタで $\hat{R} \leq 1.05$ であることを確認した。 \hat{R} の値の確認と併せて、トレースプロットの目視による確認を行い、5本のchainの収束を確かめた。WAICおよびPPP(Posterior Predictive P-value; Meng, 1994)を算出した結果をTable 10に示す。なお、PPPは事後予測分布と観測データとの乖離の程度を表し、乖離の程度が大きいほど0または1に近づき、乖離の程度が小さいほど0.5に近づく。Gelman, et al. (2014)は、PPPの妥当な値の範囲として $.05 \leq PPP \leq .95$ を述べており(pp. 150–151)，本研究においてもこの範囲を妥当な範囲とした。WAICを

最も小さくしたモデル 1.3において、PPP の値も妥当な範囲内であることを確認したことから、本研究の分析はモデル 1.3で実施した。

フィードバック 1 の際に使用したモデル 1.6では、モデル 1.3と比較してアトリビュート習得確率を過小に推定していた。第 2 回以降のフィードバックで、修正したアトリビュート習得確率をフィードバックした。

項目パラメタ 推定された項目パラメタ g, s および事後標準偏差 (SD) と 95% 事後信頼区間 (95%CI) を、Table 11 に示す。guessing パラメタの推定値は $\text{range}_g = [.021, .462]$ であり、項目 (5) が最大であった。また、4 択問題である項目 (3), (7), (11), (13), (14) のうち、項目 (3) を除いて、チャンスレベルである 25% に近い値 ($g = [.198, .298]$) が推定された。一方で、slipping パラメタの推定値は $\text{range}_s = [.071, .919]$ であった。項目 (10) を最大として、項目 (9) ($s_9 = .857$), (3) ($s_3 = .791$) など高い値が推定されており、想定していた必要なアトリビュートをすべて習得しているにもかかわらず、正答できない確率が高い項目があることが示された。

アトリビュートパラメタ 推定されたアトリビュートパラメタおよび SD と 95%CI を、Table 12 に示す。習得の困難度を表す切片パラメタ λ_{0k} の推定値が、A2 が最も高く $\lambda_{0(2)} = 1.14$ であり、A1 と A3 が低く $\lambda_{0(1)} = -0.50, \lambda_{0(3)} = 0.02$ であったことから、A2 の習得が困難であり、A1 と A3 の習得が比較的容易であることが示唆された。とくに、A1 と A2 の間では、95%CI を考慮すると習得困難度の差が比較的大きかった ($95\%CI_{\lambda_{0(1)}} = [-2.19, 1.09], 95\%CI_{\lambda_{0(2)}} = [-1.20, 3.44]$)。また、総合的な能力 θ による識別力を表す傾きパラメタ λ_k の値は、A3, A1, A2 の順に高く、 $\lambda_3 = 4.35, \lambda_1 = 3.94, \lambda_2 = 2.91$ であった。ただし、95%CI が、 $95\%CI_{\lambda_1} = [1.87, 6.58], 95\%CI_{\lambda_2} = [0.60, 5.87], 95\%CI_{\lambda_3} = [2.13, 7.00]$ と大きいため、解釈には注意を要する。

アトリビュートパラメタに関して、特徴を視覚的に確認するために、総合的な能力 θ と各アトリビュート習得確率の関係を Figure 8 に示す。A2 の近似曲線を見ると、A1 や A3 と比較して同じ θ の値に対するアトリビュート習得確率が低く、曲線の傾きが緩やかであることから、A2 の習得が比較的困難であり、能力 θ による A2 の習得の識別性が低いことが視覚的にも確認できた。

個人パラメタ 総合的な能力 θ の 61 名分の推定値に関して、平均値は $M_\theta = -0.02 (SD_\theta = 0.82)$ であった。 θ の分布を Figure 9 に示す。 θ の値は周辺に集中していることが読み取れる。

また、アトリビュート習得パターンの度数分布表を Table 13 に示す。最も多い習得パターンはすべてのアトリビュートを習得していないパターン (“000”) であり度数は 26、次に多いパターンはすべてのアトリビュートを習得しているパターン (“111”) であり度数は 17 であった。一方で、A2 のみ習得しているパターン (“010”), A1 と A2 を習得しているパターン (“110”), および A2 と A3 を習得しているパターン (“011”) に推定された生徒はいなかつた。

考 察

研究 1 では、テストの問題項目の内容や難易度、アトリビュートの定義や Q 行列を中心に、各種パラメタとアトリビュートや問題項目との関連や、それぞれのパラメタ間の関連を検討することを目的としていた。テスト 1 は、中学 2 年生および中学 3 年生 61 名に対して実施された。HO-DINA モデルを使用し、事前パラメタ設定のためのモデル比較を実施して、アトリビュートパラメタのみに対して事前情報を与えるモデル（モデル 1.3）で分析を行った。また、分析 1 で得られたアトリビュート習得確率をはじめとして、各問題項目で要求していたアトリビュートとその内容、問題項目の詳解などをフィードバックとして配布した。

問題項目内容の再検討 分析実施後に、問題項目の内容に関して再検討を行った。項目 (11) の内容に不備があったと考えられるため、本章の考察では項目 (11) に言及しない。テスト 1 の項目 (11) を Figure 10 に示す。具体的には、この項目では選択枝 A を正解としていたが、「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」以外の変数をすべて固定したとき、前者を x 、後者を y として $y = -100x + 500$ の関係式を立てることができる。「最初に水槽に入っていた水の高さ」が低くなると、15 秒間で水面の高さを 5cm にするためには、「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」は大きくならなければならぬと考えることが可能であるとわかった。よって、4 個の選択枝の中に正しい記述が存在せず、項目内容に不備があったと判断した。

記述統計量と問題項目 平均正答数が 4.52 間であり、これは 14 間の 32.3% にあたることから、テストの難易度は高かったといえる。テストを作成する際に、guessing による正答を減らすために分数混じりの項目を多く設定したことや、本質的な理解を問うために中学数学で扱われない事項への知識の応用を要求する項目を設定したことが、難易度の高さの要因であると考えられる。分数混じりの項目としては、項目 (1), (2), (6), (9), (10) が

あつた。未習事項への知識の応用を要求する項目としては、項目(3), (7), (14)があつた。

項目(2)や(6), (9)は得られた正答率よりも高い正答率になる問題と想定して出題していた。項目(2)および(9)には解答過程で連立方程式を解く必要があり、想定していたよりも、生徒は連立方程式に対する困難を抱いていた可能性がある。なお、項目(6)では、変化の割合の求め方から傾きを求めるなどを想定解法としていたが、2点の座標を読み取つて一次関数の一般式に代入し、傾きを求める解法では、連立方程式を解く必要がある。また、項目(6)や(9)では、グラフとx軸、y軸との交点にそれぞれx座標、y座標だけを記載しており、これらを点の座標として読み取ることに難しさがあるようであった。例えば、項目(9)の右下がりの直線は、x軸との交点に4, y軸との交点に2と記されていた。このとき、x軸との交点の座標を(4, 0), y軸との交点の座標を(0, 2)と読み取ることに対して困難を抱く生徒がいるようであった。答案用紙のメモとして $2 = 4a + b$ という式が残されているなど、二つの数字から(4, 2)という座標を作り出してしまう傾向がみられた。

項目パラメタと問題項目 項目パラメタが高く推定された項目に関して、それぞれの項目の特徴や性質を考察する。なお、ここでは項目パラメタがおよそ0.5以上のものを項目パラメタが高く推定された項目とする。guessingパラメタが0.5とは、slippingパラメタが0の場合、要求されるアトリビュートのうち少なくとも一つを習得していない個人が50%の確率で項目に正答できてしまうことを意味する。また、slippingパラメタが0.5とは、guessingパラメタが0の場合、要求されるアトリビュートをすべて習得している個人が50%の確率で項目に誤答してしまうことを意味する。

guessingパラメタが高かった項目(5)に関して、項目の内容は、直線のグラフとx軸、y軸との交点のx座標、y座標がそれぞれ示され、切片の値を答えるものであった。 $g_5 = .462$ という50%に近い値から、項目の特徴として、グラフ上に書かれた二つの数字からいずれかを選ぶという実質的な二枝選択問題となっていたことが考えられる。

slippingパラメタが高かった項目には、項目(11)を除いて、項目(2), (3), (6), (7), (9), (10), (13), (14)があつた。これらの項目では、想定していた必要なアトリビュートの他にも、正答のために必要な要素があることが示唆された。

slippingパラメタが最も高かった項目(10)に関して、A1およびA3の他に解答に必要であった可能性のある要素として、二つの要素が考えられる。一つ目は、問題文が長いことから、問題文を読み取るための「読解力」である。二つ目は、答えに辿り着くまでにいくつかの段階を踏む必要があることから、「論理的に解答方略をつなげる力」である。

項目(10)の他に、問題文が複雑であり「読解力」が必要であると考えられる項目は、項目(11)を除いて、「読解力」を要求していた可能性が高いと考えられる順に、項目(12), (3), (7), (8)がある。「読解力」については、数学の問題の解答方略に関する先行研究において必要とされている一つの能力であることから(Walker et al., 2008)，本研究においてもアトリビュートの一つとして含めるべきであった可能性がある。一方で、実際には項目(12)のslippingパラメタが高くないことから、今回のテストおよび分析の結果から判断することはできない。項目(12)のslippingパラメタが高くなかったことは、必ずしも「読解力」をアトリビュートとして設定する必要がなかったことを示唆するわけではなく、項目(12)に対して問題文を読む力を使わずに解答する方略が考えられる可能性や、項目(12)を含めたA2を測定している項目の特徴により、A2の内容に「読解力」が意図せず含まれている可能性などを考えることができる。数学の問題において「読解力」を一つのアトリビュートとして設定する必要性は、今後のCDM実践研究を通して検討を重ねる必要がある。

「論理的に解答方略をつなげる力」に関して、答えに辿り着くまでに複数の段階が必要な項目は、項目(10)の他に項目(9), (12), (3), (13), (14)が考えられる。これらの項目と、ただ代入して計算するだけで解くことのできる項目(e.g.項目(1))との間に、そもそもその項目の性質としての差異があり、正答するために必要とされる考え方には違いがある可能性は十分に考えられるだろう。数学の問題におけるアトリビュートの一つとして、「論理的に解答方略をつなげる力」を設けることを検討する意味はあるかもしれない。

定義されたアトリビュートと測定されたアトリビュートの乖離 前項における項目パラメタに関する議論は、問題項目によって決定される実質的なアトリビュート内容が、作成したアトリビュートの定義と一致しているという前提のもとで成立することに注意する必要がある。

本研究では、「あるアトリビュートを習得しているとき、そのアトリビュートに含まれる既習事項を、未習事項に対して適切に応用することができる」という仮定を抱いてアトリビュートの決定と問題項目の作成を進めていた。しかしながら、未習事項への知識の応用を要求していた項目である項目(3), (7), (14)においてslippingパラメタが高く推定された。このことは、アトリビュート設定やテスト問題作成の際に定義していたアトリビュート内容と、実際に測定されていたアトリビュート内容に乖離があった可能性を示唆する。

また、A3の習得難易度がA1と同等であり、A2ほど高く推定されなかった。アトリビュートの定義と、問題項目によって実際に測定されたアトリビュート内容に乖離があつ

た可能性に関して、A3において同様に議論できる。A3を測定する項目として項目(5)のような極めて簡単な項目から、項目(10)や(14)のような直交座標上での表現に対する深い理解を要求する項目を用いていた。しかしながら、分析の結果として、項目(10)や(14)はA3を測定している項目として重要視されずにslippingパラメタが高くなり、項目(5)のような難易度の高くない項目が測定している側面だけがA3の実質的な内容として含まれ、A3習得の難易度が低く推定された可能性を考えることができる。

アトリビュート内容の乖離に関する詳細な議論は総合考察の章で再考する。

アトリビュートパラメタとアトリビュート すべてのアトリビュートパラメタにおいて95%CIは大きいものの、能力 θ によるA2習得の識別性を表す傾きパラメタ λ_2 は、他の二つのアトリビュートの傾きパラメタ λ_1 , λ_3 に比べて若干低く推定された。このことは、関数的思考の理解が高い生徒が必ずしも今回のテストの正答数が高いわけではないことや、あるいはその逆として、関数的思考の理解が低い生徒が必ずしも今回のテストの正答数が低いわけではないことを示唆している。

今回のテストでA2を測定していた項目には、項目(3), (7), (11), (12), (14)があった。これらの問題項目は、高校入試問題などで従来から出題されるような形式の問題とは異質であろう。一方で今回のテストは従来的な形式の問題の多い構成であったため、能力 θ の値によるA2習得の識別性が低かったことが考えられる。また、A2を測定していた全5項目のうち、4項目でslippingパラメタが高く推定されていたために、A2の内容を確立するに足る情報が得られていなかった可能性がある。

アトリビュート習得パターンとアトリビュート A2のみ習得しているパターン (“010”), A1とA2を習得しているパターン (“110”), およびA2とA3を習得しているパターン (“011”)に推定された生徒がいなかつことから、A1とA3を習得して初めて、A2を習得できるという階層関係があるという示唆を読み取ることができる。第2回以降のアトリビュート習得パターンの分布を含め、アトリビュートの階層関係に関して研究2でも考察する。

研究1の限界 分析結果の考察では、はじめに、問題項目の内容について取り上げた。正答率との関連では、正答率が低かった要因として、分数混じりの項目を多く設定していましたことや、未習事項への知識の応用を求める項目を設定していたことが考えられることを述べた。また、本研究の参加者が、連立方程式に対して想定よりも困難を抱えていた可能性や、x軸またはy軸上の点の座標の読み取りに難しさを感じていた可能性について言及した。項目パラメタとの関連では、特にslippingパラメタが高く推定された項目を中心に

考察した。slipping パラメタが高く推定された要因として、設定したアトリビュートの他に、「読解力」や「論理的に解答方略をつなげる力」が必要であった可能性について言及した。

続いて、アトリビュートの内容に関して考察した。本章で行った項目パラメタに関する考察は、アトリビュートが定義通りに測定されていたという前提のもとで意味を持つことを注記し、定義されたアトリビュートと測定されたアトリビュートの間に乖離があった可能性について言及した。特に、正答率が低かった項目における slipping パラメタの高さに注目し、定義したアトリビュートよりも、実際に測定されたアトリビュートは難易度の低い内容から構成されていた可能性について述べた。アトリビュートパラメタとの関連では、特に A2 に焦点を当て、関数的思考の理解が高い生徒が必ずしも今回のテストの正答数が高いわけではないことや、A2 を測定した項目の slipping パラメタが高く推定されたために、A2 の内容を構成するための情報がそもそも不足していた可能性に言及した。最後に、アトリビュート習得パターンとの関連で、A1 と A3 を習得してから A2 を習得するという階層関係があるという示唆を読み取った。

研究 1 では、一度のテスト結果から、アトリビュートや問題項目の内容に関して、各種パラメタとの関連と併せて考察した。一度のテスト結果だけではあったが、各種パラメタに関して様々な解釈を行い考察することができた。特に、問題項目の内容に関して、難易度やアトリビュートの定義との関連を踏まえた適切性を考察することができ、作問者のテスト問題の再考のための情報を得ることが可能であったと考えられる。また、アトリビュートと問題項目の作成の手続きを経て、意図を持った作問が行われたために、フィードバックを介した生徒とのテストの意図の共有が実現できていたと考えられる。

このような研究 1 の成果の一方で、一度のテスト結果から得られる情報では、決定的な判断をすることはできなかった。テスト 1 の結果では、定義されたアトリビュートと測定されたアトリビュートの間に乖離があった可能性を考察することができ、各種パラメタの推定結果の解釈は困難なものであった。今回の結果は、項目の難易度が高かったために各種パラメタがよく推定されていない可能性や、問題項目の内容に対してアトリビュートの定義が不適切であったために各種パラメタがよく推定されていない可能性を抱えており、これらが研究 1 の課題であると考えられる。次章以降では、問題項目の難易度とアトリビュートの定義に注目しつつ、考察を進めていく。

Table 5
Q 行列

項目	A1	A2	A3
(1)	1	0	0
(2)	1	0	0
(3)	0	1	0
(4)	1	0	0
(5)	0	0	1
(6)	0	0	1
(7)	0	1	1
(8)	0	0	1
(9)	1	0	1
(10)	1	0	1
(11)	0	1	0
(12)	1	1	0
(13)	0	0	1
(14)	0	1	1

注) 1 は当該項目に正答するために当該アトリビュートが必要であることを表し, 0 は不要であることを表す。

A1 : 代数的手手続きの理解, A2 : 関数的思考的理解, A3 : 直交座標上での表現の理解。

Table 6
A1 の習得確率に応じたフィードバックコメント

習得確率	コメント
.25	方程式や連立方程式を解くことに不安があるようです。多くの人が苦手とするのは分数混じりの方程式です。分数のある方程式での移項の仕方を再度確認してみましょう。関数との関連では、それぞれの関数の一般式 $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$, $y = ax + b$ ($, y = ax^2$) を確認しておきましょう。一般式をどのように利用していくのか意識して問題演習に取り組みましょう。
.25-.50	基本的な方程式を解くことができているようです。分数混じりなど計算が複雑なときにも落ち着いて、符号にも意識を向けると計算ミスを少なくすることができるでしょう。関数との関連では、それぞれの関数の一般式を確認しておきましょう。関数やグラフの式の求め方や、交点の座標の求め方を再度確認してみましょう。文章中の情報を読み取り式を立てる練習を重ねると、数学力を向上させることができるでしょう。
.50-.75	方程式や連立方程式を解く力や、文章中の情報から式を立てる力がついているようです。分数や符号のケアレスミスに気をつけて取り組みましょう。関数との関連では、それぞれの関数の一般式を確認しておきましょう。関数やグラフの式の求め方や、交点の座標の求め方を確認してみましょう。文章中の情報を読み取り式を立てる練習を重ねると、数学力を向上させることができるでしょう。
.75-	方程式や連立方程式をミスなく解く力や、文章中の情報から式を立てる力がついているようです。関数との関連では、それぞれの関数の一般式を覚えることができています。関数やグラフの式の求め方や、交点の座標の求め方は確認しておきましょう。グラフ上の点の座標を文字で置く考え方 ($P(t, t - 2)$ など) を身につけると、解くことができる関数の問題が増えるでしょう。

注) A1 : 代数的手手続きの理解。

Table 7
A2 の習得確率に応じたフィードバックコメント

習得確率	コメント
-.25	関数の定義（「 y が x の関数である」とは、「 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる」ことである）を確認しておきましょう。関数的な視点で具体的な例を捉えられるように、関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。とくに、関係式が示されていない事柄に対して、2つの変数の関数関係を意識できるようにすると良いでしょう。
.25-.50	関数の定義（「 y が x の関数である」とは、「 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる」ことである）を確認しておきましょう。関数の定義を数式での表現と結びつけられると、関数的な考え方方がしやすくなるでしょう。関数的な視点で、具体的な例を捉える力がついてきているでしょう。関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。
.50-.75	関数の定義（「 y が x の関数である」とは、「 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる」ことである）を大まかに覚えることができているようです。関数の定義を数式での表現と結びつけられると、関数的な考え方方がしやすくなるでしょう。関数的な視点で、具体的な例を捉える力がついてきているでしょう。その調子で、今後も関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。
.75-	関数の定義（「 y が x の関数である」とは、「 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる」ことである）を理解することができているようです。関数の定義と数式での表現を結びつけることができているようです。また、関数的な視点で、具体的な例を捉える力もついてきているでしょう。その調子で、今後も関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。

注) A2 : 関数的思考の理解。

Table 8
A3 の習得確率に応じたフィードバックコメント

習得確率	コメント
-.25	まずは、点の座標を読み取れるかどうか確認しましょう。 x 軸上の点や、 y 軸上の点の座標を読み取ることに不安がある人が多いようです。また、関数のグラフのかき方を確認しましょう。グラフに関する特徴（傾き、切片、変化の割合、変域）を、言葉や数式と結びつけながら、確認しておきましょう（例えば、「グラフが右下がり」とは、「グラフが点(1, 2)を通る」とは、それぞれどんなことを意味しているのでしょうか？）。
.25-.50	点の座標を読み取ることができます。関数のグラフの概形をかく力もついてきているでしょう。グラフに関する特徴（傾き、切片、変化の割合、変域、交点）の理解には不安があるようです。グラフの特徴を、言葉や数式と結びつけながら確認しておきましょう。（例えば、「グラフが右下がり」とは、「グラフが点(1, 2)を通る」とは、それぞれどんなことを意味しているのでしょうか？）。
.50-.75	点の座標や、グラフの特徴（傾き、切片、変化の割合、変域）を読み取ることができます。直交座標上の情報を言葉や数式による表現と結びつけて捉えることを意識して、演習を進めましょう（例えば、交点の座標はなぜグラフの式の連立方程式を解くことで求められるのでしょうか？）。「関数のグラフは、関係式を満たす x , y の組の点の集合である」という感覚を身につけると、関数の問題に対する理解度が格段に高まります。
.75-	直交座標上の情報を読み取る感覚が身についているようです。直交座標上の情報を言葉や数式による表現と結びつけて捉えるようにすると、難易度の高い問題を解くときに活用しやすくなるでしょう（例えば、交点の座標はなぜグラフの式の連立方程式を解くことで求められるのでしょうか？）。「関数のグラフは、関係式を満たす x , y の組の点の集合である」という感覚を身につけると、関数の問題に対する理解度が格段に高まります。

注) A3: 直交座標上での表現の理解。

Table 9
テスト 1 の学年別正答率と平均正答数

項目	2 年生	3 年生	全体
(1)	.458	.757	.639
(2)	.042	.270	.180
(3)	.042	.135	.098
(4)	.417	.622	.541
(5)	.500	.811	.689
(6)	.125	.405	.295
(7)	.292	.405	.361
(8)	.292	.676	.525
(9)	.000	.108	.066
(10)	.000	.054	.033
(11)	.208	.324	.279
(12)	.083	.405	.279
(13)	.250	.324	.295
(14)	.167	.297	.246
平均正答数	2.88	5.59	4.52

Table 10
分析における WAIC によるモデル比較

モデル	g, s	λ_0, λ	WAIC	SE	PPP
1.1	.	.	788.5	29.4	.68
1.2	○	.	803.1	28.5	.72
1.3	.	○	782.9	29.5	.68
1.4	○	○	798.9	28.8	.71
1.5	◎	.	840.4	25.4	.90
1.6	◎	○	838.6	25.4	.90

注) g, s の列は、項目パラメタに関して次の事前パラメタを設定したことを表す。

・ : $a_g = 1, b_g = 1, a_s = 1, b_s = 1,$

○ : $a_g = 1, b_g = 3, a_s = 1, b_s = 3,$

◎ : $a_g = 2, b_g = 7, a_s = 2, b_s = 7.$

λ_0, λ の列は、アトリビュートパラメタに関して次の事前パラメタを設定したことを表す。

・ : $\mu_{\lambda_{0k}} = (0, 0, 0)^T, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (4, 4, 4)^T, \mu_{\lambda_0} = (0, 0, 0)^T, \sigma_{\lambda_0}^2 = (4, 4, 4)^T,$

○ : $\mu_{\lambda_{0k}} = (-1, 0.5, 0.5)^T, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (2, 4, 4)^T, \mu_{\lambda_0} = (0.5, 1, 1)^T, \sigma_{\lambda_0}^2 = (4, 4, 4)^T.$

Table 11
分析 1 における項目パラメタ

項目	Guessing	Slipping
(1)	.318 (.099; .131, .518)	.096 (.063; .007, .242)
(2)	.038 (.035; .001, .131)	.675 (.086; .492, .826)
(3)	.053 (.035; .004, .137)	.791 (.092; .574, .927)
(4)	.180 (.096; .019, .384)	.150 (.073; .032, .315)
(5)	.462 (.091; .284, .641)	.105 (.066; .008, .258)
(6)	.132 (.063; .031, .274)	.525 (.099; .321, .704)
(7)	.298 (.066; .173, .431)	.505 (.112; .264, .696)
(8)	.121 (.083; .006, .317)	.071 (.059; .002, .223)
(9)	.026 (.024; .001, .087)	.857 (.065; .709, .956)
(10)	.021 (.019; .001, .070)	.919 (.049; .798, .984)
(11)	.198 (.069; .061, .335)	.577 (.107; .350, .761)
(12)	.045 (.042; .001, .155)	.207 (.141; .008, .509)
(13)	.202 (.068; .082, .341)	.603 (.086; .419, .758)
(14)	.222 (.056; .121, .339)	.696 (.079; .524, .827)

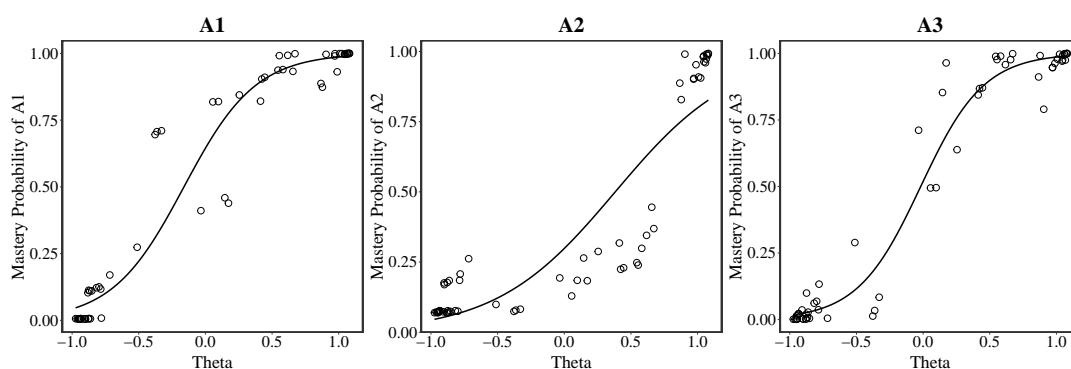
注) 括弧内は *SD* および 95%CI。

Table 12
分析 1 におけるアトリビュートパラメタ

	λ_{0k}	λ_k
A1	-0.50 (0.81; -2.19, 1.09)	3.94 (1.21; 1.87, 6.58)
A2	1.14 (1.15; -1.20, 3.44)	2.91 (1.37; 0.60, 5.87)
A3	0.02 (0.87; -1.69, 1.79)	4.35 (1.25; 2.13, 7.00)

注) 括弧内は SD および 95%CI。 λ_{0k} : 切片パラメタ, λ_k : 傾きパラメタ。A1: 代数的手続きの理解, A2: 関数的思考の理解, A3: 直交座標上での表現の理解。

Figure 8
分析 1 における θ と各アトリビュート習得確率の関係



注) 近似曲線の形状がアトリビュートパラメタによって決定される。1 個のプロットは 1 人の生徒を表す。
A1: 代数的手手続きの理解, A2: 関数的思考の理解, A3: 直交座標上での表現の理解。

Figure 9
分析 1 における θ の分布

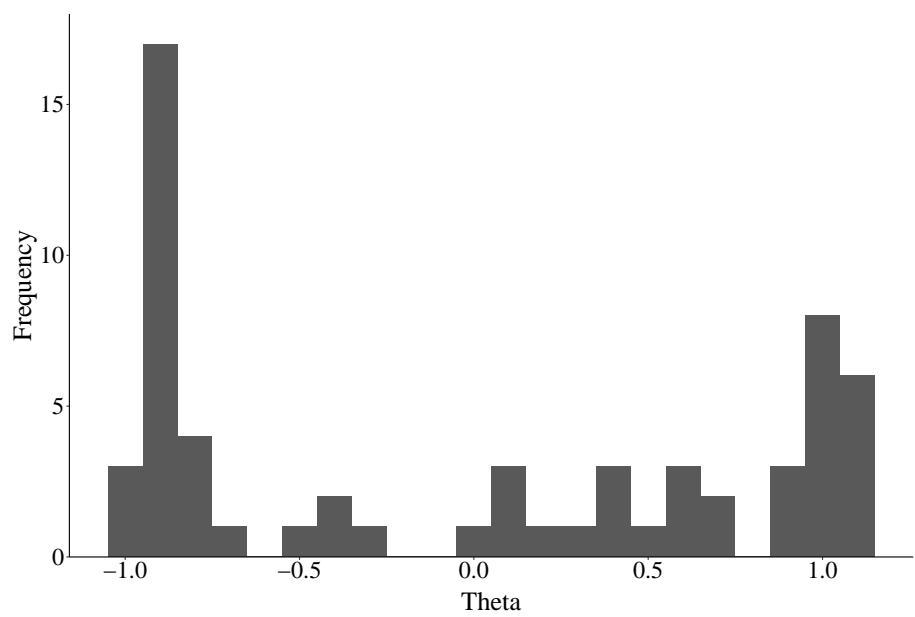


Table 13
分析 1 におけるアトリビュート習得パターンの度数分布

アトリビュート習得パターン	度数
000	26
100	5
010	0
001	3
110	0
101	10
011	0
111	17
合計	61

注) アトリビュート習得パターンを表す 3 桁の数字は、左から A1, A2, A3 の習得の有無を表し、1 はアトリビュートを習得済、0 はアトリビュートを未習得であることを意味する。
A1 : 代数的手手続きの理解, A2 : 関数的思考の理解, A3 : 直交座標上での表現の理解。

Figure 10
テスト 1 の項目 (11)

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章

水槽に 3cm の高さまで水が入っています。この水槽に、1 秒あたり 200mL の水が出る蛇口から水を加えます。水を加えた後の水槽に入っている水の高さが 5cm になるように、15 秒間水を注ぎ、蛇口を閉めました。

- ア 「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」は関数関係はない。
- イ 「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は関数関係はない。
- ウ 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」と「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は関数関係はない。
- エ 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」と「水を注ぐ時間」は関数関係はない。

(答 11) _____

注) テスト実施時にはこの項目に誤字があったが、論文掲載にあたり修正した。

第5章 研究2

本研究では、CDM研究における実践研究の少なさによる課題を受けて、CDMに基づくフィードバックによる学習における効果や、CDM実践における現状の難しさを検討することを目的としていた。また、特に、縦断的CDMの実践例は横断的なCDMの実践例よりも数が限られていた。そこで、研究2では、第2回と第3回のテスト実施と縦断的CDMの適用を通して、縦断的CDMの実践による学習改善の効果を検討する。主に、3回のテストを通じた生徒の変化に関する情報を得ることができる第3回のテストの分析結果に注目し、縦断的CDMに基づくフィードバックによる、学習者の能力やアトリビュート習得における効果を検討する。なお、第2回のテストは「テスト2」、第3回のテストは「テスト3」とする。

方 法

調査参加者 テスト2は、テスト1に解答した中学2年生と中学3年生の61名を対象として実施し、合計48名（2年生20名、3年生28名）がテスト2に解答した。また、テスト3は、同様に、テスト2に解答した48名を対象として実施し、合計42名（2年生18名、3年生24名）がテスト3に解答した。

いずれのテストもテスト1の解答者を対象としているため、テストを実施した4個の教室の所在地は、テスト1と同じく千葉県または埼玉県であった。

テスト実施 テスト2は、2022年9月5日から2022年9月22日までの3週間で実施した。また、テスト3は、2022年10月17日から2022年10月28日の2週間で実施した。テスト2に関して、中学校の定期テスト期間と重なったことや、COVID-19の影響で学習塾に登校できなかった生徒が多くいたために、3週間での実施となった。テストを実施するタイミングは、テスト1と同様に、それぞれのテスト実施期間中のいずれかの授業の開始20分間とし、必要に応じてテスト時間を延長した。

テストの監督やテストの配布と回収に関しても、テスト1と同様に、それぞれ各生徒の担任講師、各教室の室長および副室長に依頼した。

テスト問題とQ行列 本研究では、時点間のテストの各問題項目が、それぞれできるだけ同質のものとなるように設計した。そのため、テスト2は、テスト1の各問題項目の類題から構成される14問として作成し、テスト3は、テスト1およびテスト2の各問題

項目の類題から構成される 14 問として作成した。

ただし、選択肢を一つ選んで回答する問題に関しては、テスト 1 の際に 2 個以上の選択肢を回答する生徒が一定数いたため、問題文中の「一つ」の文字を太字にし、圈点を打つ修正をした。

テスト実施の際には、テスト 1 と同様に、A4 用紙に両面印刷して配布した。Appendix C のテスト 1 の問題の後に続けてテスト 2 の問題を掲載し、テスト 2 の問題に続けてテスト 3 の問題を掲載する。また、テスト 2 およびテスト 3 の Q 行列は、テスト 1 と同じものであり、Table 5 に示した通りである。

分析 テスト 2 の実施後に行った分析を「分析 2」、テスト 3 の実施後に行った分析を「分析 3」と呼ぶ。分析 2 および分析 3 では、式(6) (レベル 1)、式(8) (レベル 2)、および式(9) (レベル 3) に示した縦断的 HO-DINA モデルを使用して分析を行った。分析 2 では、テスト 1 の解答データとテスト 2 の解答データを使用した。なお、テスト 1 に解答し、テスト 2 に解答しなかった生徒は、確率的な要素として分析に含めた。

分析 3 では、分析 2 と同様に、テスト 1 からテスト 3 のすべての解答データを使用した。テスト 1 に解答したがテスト 2 に解答しなかった生徒や、テスト 1 およびテスト 2 に解答したがテスト 3 に解答しなかった生徒も確率的な要素として分析に含めた。

ただし、結果および考察の節における個人パラメタに関する報告では、欠損時点のある生徒は除外する。

分析 2 と分析 3 のいずれにおいても、分析 1 と同様の手続きで分析を行った。ただし、分析 2 における chain は 5 本、それぞれの chain における iteration は 50,000 回、burn-in を 15,000 回とし、thinning インターバルは 4 とした。また、分析 3 における chain は 5 本、それぞれの chain における iteration は 40,000 回、burn-in を 15,000 回とし、thinning インターバルは 4 とした。なお、それぞれの iteration の回数は、試験的に分析を実施し、 \hat{R} の値を踏まえて決定した。分析 2 に使用した R のスクリプトを Appendix E の分析 1 のスクリプトに続けて掲載し、分析 2 のスクリプトに続けて分析 3 のスクリプトを掲載する。

モデル比較による事前パラメタ等の決定 分析 1 と同様に、WAIC を用いたモデル比較により、分析に使用する事前パラメタ等を決定した。分析 2 と分析 3 は、同様の手順でモデル比較を実施した。

まずははじめに、項目パラメタの時点間の等値制約の有無、および δ パラメタを用いたモ

デル記述と δ パラメタを用いないモデル記述の等価性に関して比較するためのモデルを設定した。項目パラメタの時点間の等価制約とは、測定不变 (measurement invariance) と呼ばれ、すべての t において、 g_{it} および s_{it} に対して $g_{it} = g_i$, $s_{it} = s_i$ の制約を課すことである。 δ パラメタに関して、本研究では、総合的な能力 θ の変化量を直接推定するために $\mu_t = \delta_t + \mu_{t-1}$, $\delta_t \sim N(0, 2)$ (cf. 式 (11)) としており、モデル適合の観点において、提案されているモデル $\mu_t \sim N(0, 2)$ (Zhan, Jiao, Liao et al., 2019; Zhan, Jiao, Man et al., 2019) と大きな差異が生じないことを確認する必要があった。次の 4 個のモデルを比較対象とした。

- モデル A 項目パラメタに等価制約を課し、 δ パラメタを使用する。
- モデル B 項目パラメタに等価制約を課し、 δ パラメタを使用しない。
- モデル C 項目パラメタに等価制約を課さず、 δ パラメタを使用する。
- モデル D 項目パラメタに等価制約を課さず、 δ パラメタを使用しない。

また、上の 4 個のモデルのそれぞれにおいて、事前パラメタの値に関して比較するモデルを設定した。モデル比較の対象とした事前パラメタの値の組み合わせは、分析 1 におけるモデル比較において特に WAIC の値が高かったモデル 1.5 やモデル 1.6 を除いて、次の 4 通りとした。なお、モデル 2.1 からモデル 2.4 は、モデル 1.1 からモデル 1.4 の再掲であり、具体的な事前パラメタの値はモデル 1.1 からモデル 1.4 に示したものと同じである。

- モデル 2.1 項目パラメタとアトリビュートパラメタのいずれにも事前情報を与えない。
- モデル 2.2 項目パラメタのみに対して事前情報を与える。
- モデル 2.3 アトリビュートパラメタのみに対して事前情報を与える。
- モデル 2.4 項目パラメタとアトリビュートパラメタの両方に対して事前情報を与える。

項目パラメタの等価制約および δ パラメタに関するモデル 4 種類と事前パラメタに関するモデル 4 種類を掛け合わせた合計 16 個のモデルに関して WAIC を計算し、モデル比較を行った。なお、例えば、項目パラメタに等価制約を課し、 δ パラメタを使用するモデル A において、項目パラメタとアトリビュートパラメタのいずれにも事前情報を与えない (モデル 2.1) とき、そのモデルを「A-2.1」と記す。

フィードバック テスト 1 と同様に、テスト 2 の後とテスト 3 の後それぞれに、フィードバックコンテンツを作成して配布した。フィードバックの構成はフィードバック 1 と同様に、①フィードバックシート（1 ページ）、②要求アトリビュートに関する説明（1 ページ）、③採点後の答案用紙（表紙と裏表紙を除く 6 ページ）、④各項目の詳解（4 ページ）とし、各コンテンツの内容はそれぞれのテスト項目に合わせて修正した。フィードバックシートに記載するアトリビュート習得確率に応じたコメントは、フィードバック 2、フィードバック 3 のいずれにおいても Table 6 から Table 8 に示したものを使用した。A3 用紙で 1 面に 4 ページずつ（i.e. 4in1）として両面印刷し、各教室の教室長および各生徒の担任講師に配布を依頼した。

4 種類のコンテンツからなるフィードバック 2 の例を、Appendix D のフィードバック 1 の例に続けて掲載し、フィードバック 2 の例に続けてフィードバック 3 の例を掲載する。

結 果

記述統計量 テスト 2 の平均正答数は 5.56 問（2 年生 4.55 問、3 年生 6.29 問）、テスト 3 の平均正答数は 6.33 問（2 年生 5.44 問、3 年生 7.00 問）であった。テスト 1 からテスト 3 までの各問題項目の正答率と平均正答数を Table 14 に示す。

テスト 2 において正答率が 10% 未満である項目は項目 (10) (8.3%) であり、テスト 3 において正答率が 10% 未満である項目は項目 (12) (2.4%), (3) (7.1%) であった。テスト 2 の項目 (10) は、テスト 1 の項目 (10) と同様、高校入試問題で難易度の高い問題として多く出題されるような形式であり、直交座標上の点の座標を、文字を用いて表して解き進める必要のある問題であった。テスト 3 の項目 (12) は文章中から二つの変数を選び、それらの関数関係を式に表す問題であった。また、テスト 3 の項目 (3) は、テスト 1 の項目 (3) と同様、合成関数の考え方を要求する問題であった。

テスト 2 において正答率が 60% 以上である項目は項目 (5) (79.2%), (1) (70.8%), (8) (66.7%), (11) (66.7%) であり、テスト 3 において正答率が 60% 以上である項目は項目 (5) (97.6%), (1) (71.4%) であった。いずれのテストにおいても、項目 (5) は直交座標上にかかれた直線の切片を読み取る問題であり、項目 (1) は一次関数の関係式と y の値が与えられ、 y の値を関係式に代入することにより x の値を求める問題であった。また、テスト 2 の項目 (8) は直交座標上の 2 点間の距離を求める問題、項目 (11) は文章中の二つの変数の間の関数関係の有無について判断する問題であった。

事前パラメタ等の決定 テスト 2 およびテスト 3 の両方において、16 個のそれぞれのモデルで MCMC 法による分析を実施した。すべてのモデルで $\hat{R} \leq 1.05$ であることを確認するとともに、トレースプロットを目視により確認し、5 本の chain の収束を確かめた。分析 2 および分析 3 において WAIC および PPP を算出した結果を Table 15 に示す。

分析 2 において、項目パラメタに等値制約を課すモデル A, B よりも、等値制約を課さないモデル C, D で、標準誤差を考慮しても WAIC が小さいと考えられた。 δ パラメタの使用の有無に関して、 δ パラメタを使用するモデル C と δ パラメタを使用しないモデル D との間には、標準誤差を考慮すると WAIC に大きな差は認められないことを確認したため、モデル C を選択した。また、分析 2 のモデル C 内の比較においてモデル C-2.3 で WAIC が最小となり、PPP も妥当な範囲内であったことから、分析 2 はモデル C-2.3 で実施することとした。

分析 3 において、分析 2 と同様にして、モデル C を選択した。また、モデル C 内の比較では、モデル C-2.1 で WAIC が最小となったが、分析 1 および分析 2 ではモデル 2.3 の事前パラメタを用いたこと、モデル C-2.1 とモデル C-2.3 の間で標準誤差を考慮しても WAIC に大きな差が認められることから、分析 3 はモデル C-2.3 で実施することとした。モデル C-2.3 において PPP が妥当な範囲内であることを確認した。

項目パラメタ 推定された項目パラメタ g , s および SD と 95%CI を、Table 16 および Table 17 に示す。分析 2 において、テスト 2 の guessing パラメタの推定値は $\text{range}_{g_{i2}} = [.034, .518]$ であり項目 (5) が最大、slipping パラメタの推定値は $\text{range}_{s_{i2}} = [.046, .833]$ であり項目 (10) が最大であった。分析 3 においては、テスト 3 の guessing パラメタの推定値は $\text{range}_{g_{i3}} = [.023, .907]$ であり項目 (5) が最大、slipping パラメタの推定値は $\text{range}_{s_{i3}} = [.040, .928]$ であり項目 (12) が最大であった。

項目パラメタに対して時点間の等値制約を課さないモデルが選択されたことに関して、時点間の項目パラメタの差異を視覚的に確認するため、分析 3 における各回のテストでの項目パラメタの推定値と SD , 95%CI を Figure 11 に示す。95%CI の重なりがないものは、guessing パラメタに関してテスト 1, 2 とテスト 3 の項目 (5), slipping パラメタに関してテスト 1 とテスト 3 の項目 (2), テスト 1 とテスト 2 の項目 (4), テスト 1 とテスト 3 の項目 (9), テスト 1 とテスト 2 の項目 (11), テスト 1 とテスト 3 の項目 (12) であった。ただし、テスト 1 の項目 (11) には問題項目の不備があり、テスト 3 の項目 (12) には、次節で後述するように不備のある可能性があった。全体的に、slipping パラメタにおいてテ

スト間の大きなばらつきが認められた。

アトリビュートパラメタ 分析 3において推定されたアトリビュートパラメタおよび SD と 95%CI を Table 18 に示す。分析 3において、習得の困難度を示す切片パラメタ λ_{0k} の値は、 $\lambda_{0(1)} = 0.00 (SD = 0.73)$, $\lambda_{0(2)} = 0.30 (SD = 1.03)$, $\lambda_{0(3)} = 0.47 (SD = 0.83)$ であり、95%CI を考慮すると、3 個のアトリビュート間で大きな差はみられなかった。また、総合的な能力 θ による識別力を表す傾きパラメタ λ_k の値は、A1 と A3 で高く $\lambda_1 = 4.70 (SD = 1.09)$, $\lambda_3 = 4.83 (SD = 1.15)$, A2 で比較的低く $\lambda_2 = 2.87 (SD = 1.20)$ であった。

分析 3 のアトリビュートパラメタに関して、特徴を視覚的に確認するために、総合的な能力 θ と各アトリビュート習得確率の関係を Figure 12 に示す。近似曲線を見ると、A2 の近似曲線の傾きが他の二つと比べて緩やかであり、能力 θ による A2 習得の識別力が低いことが読み取れた。

個人パラメタ 分析 3において推定された総合的な能力 θ に関する統計量を Table 19 に示す。テスト 3 に解答した完全データである 42 名の能力 θ について、テスト 1 における平均値は $M_{\theta_1} = 0.07 (SD = 0.95)$, テスト 2 における平均値は $M_{\theta_2} = 0.15 (SD = 0.97)$, テスト 3 における平均値は $M_{\theta_3} = 0.23 (SD = 0.96)$ であった。総合的な能力 θ の平均パラメタ μ_θ の変化量を表す δ パラメタの推定値は、 $\delta_2 = 0.10 (SD = 0.09)$, $\delta_3 = 0.11 (SD = 0.09)$ であった。総合的な能力 θ の分散パラメタを 1 としたことを考慮すると、テスト 1 からテスト 2, テスト 2 からテスト 3 いずれの間にも、総合的な能力 θ の全体的な大きな増加は認められなかった。

分析 3 における個人ごとの能力 θ の推定値と SD , 95%CI を Figure 13 に示す。能力 θ の値が中央値付近の個人では、テスト間の θ の推定値の変動が比較的大きいことが読み取れた。Figure 13 における個人 18 や個人 24, 個人 28 では、他の生徒と比較して大きな θ の増加が認められた。

また、能力 θ の全体の分布のテスト間の変化を確認するために、分析 3 における各テストの θ の分布を Figure 14 に示す。第 4 章で言及した分析 1 における θ の分布と同様、分析 3 のいずれのテストにおいても θ の分布は周辺に集中していた。また、テスト間の変化に関して、能力 θ の平均値 M_θ だけでなく分布全体として若干の増加の傾向が認められた。

本研究では全 3 回のテストがあり、それぞれの個人 n について、テスト 1 からテスト 2

の間の能力 θ の変化量 ($d_{\theta(1.2)} = \theta_{n2} - \theta_{n1}$) と、テスト 2 からテスト 3 の間の能力 θ の変化量 ($d_{\theta(2.3)} = \theta_{n3} - \theta_{n2}$) のデータが得られた。また、 $d_{\theta(1.2)}$ と $d_{\theta(2.3)}$ を合計することによって、本研究全体を通した能力 θ の変化量 ($d_{\theta(1.3)}$) が得られた。

そこで、テスト 1 からテスト 2 の間の総合的な能力 θ の変化量 $d_{\theta(1.2)}$ の三分位によって群分けした、分析 3 におけるテスト間の θ の変化を Figure 15 に示す。変化量 $d_{\theta(1.2)}$ と能力 θ との関連に注目すると、変化量 $d_{\theta(1.2)}$ の大きい群で θ の値は高い値に集中し、変化量 $d_{\theta(1.2)}$ の小さい群で θ の値は低い値に集中していることが読み取れた。しかしながら、実際に個人ごとの θ の平均値と変化量 $d_{\theta(1.2)}$ の間の散布図 (Figure 16 に示す。) や相関係数を見ると、ほとんど関連は認められなかった ($r_{\theta \cdot d_{\theta(1.2)}} = .15$)。

また、Figure 15において、変化量 $d_{\theta(1.2)}$ と変化量 $d_{\theta(2.3)}$ との関連に着目する。変化量 $d_{\theta(1.2)}$ の大きい群における折れ線グラフの傾斜に注目すると、テスト 1 からテスト 2 では傾きが急である一方、テスト 2 からテスト 3 の間では傾きが比較的緩やかであることが読み取れた。また、変化量 $d_{\theta(1.2)}$ の小さい群において、テスト 1 からテスト 2 で比較的緩やかな θ の増加を示している個人は、テスト 2 からテスト 3 の間の傾きが比較的急であることが読み取れた。このことから、 $d_{\theta(1.2)}$ と $d_{\theta(2.3)}$ に負の相関があることが示唆され、実際に散布図を Figure 17 (左) に示す。 $d_{\theta(1.2)}$ と $d_{\theta(2.3)}$ の間の相関係数は、 $r_{d_{\theta(1.2)} \cdot d_{\theta(2.3)}} = -.24$ であり、弱い負の相関があった。なお、正答数 (時点 t の個人 n の正答数を c_{nt} とする。) の変化量において同様の傾向が認められることを確認するために、テスト 1 からテスト 2 の間の正答数の変化量 $d_{c(1.2)}$ と、テスト 2 からテスト 3 の間の正答数の変化量 $d_{c(2.3)}$ の散布図を Figure 17 (右) に示す。 $d_{c(1.2)}$ と $d_{c(2.3)}$ の間の相関係数は、 $r_{d_{c(1.2)} \cdot d_{c(2.3)}} = -.51$ であり、中程度の負の相関が認められた。

さらに、本研究全体を通した総合的な能力 θ の変化量 $d_{\theta(1.3)}$ の三分位によって群分けした、分析 3 におけるテスト間の θ の変化を Figure 18 に示す。折れ線グラフの傾斜に着目しても、特に目立つ特徴を読み取ることはできなかった。また、変化量 $d_{\theta(1.3)}$ と能力 θ との関連に注目しても、いずれの群においても、高い θ の値から低い θ の値まで散らばっていることが読み取れ、特徴的な傾向は認められなかった。実際に、個人ごとの θ の平均値と変化量 $d_{\theta(1.3)}$ の散布図を Figure 19 に示す。散布図からも、能力 θ と変化量 $d_{\theta(1.3)}$ の間の関連は認められず、能力 θ と変化量 $d_{\theta(1.3)}$ の間の相関係数は、 $r_{\theta \cdot d_{\theta(1.3)}} = .10$ であった。

完全データである 42 名に関して、分析 3 における各アトリビュート習得確率間の相関係数を Table 20 に示す。全体的にアトリビュート習得確率の間の相関係数は高かった

($\text{range}_r = [.73, .95]$)。特に、相関係数が .90 を超えていたものとして、A3 の習得確率に関するテスト 1 とテスト 3 の間の相関係数 ($r_{3(1-3)} = .95$)、A3 の習得確率に関するテスト 1 とテスト 2 の間の相関係数 ($r_{3(1-2)} = .93$)、A1 の習得確率に関するテスト 1 とテスト 3 の間の相関係数 ($r_{1(1-3)} = .92$)、テスト 1 における A2 の習得確率と A3 の習得確率の間の相関係数 ($r_{2-3(1)} = .92$) があった。

また、分析 3において推定されたアトリビュート習得パターンに関するクロス集計表を、完全データ 42 名から作成し、Table 21 に示す。すべてのテストを通して、すべてのアトリビュートを習得していないパターン (“000”；テスト 1 で 16 名、テスト 2 で 15 名、テスト 3 で 17 名) およびすべてのアトリビュートを習得しているパターン (“111”；テスト 1 で 20 名、テスト 2 で 20 名、テスト 3 で 21 名) に推定された生徒が多かった。各テスト間での変動に注目すると、新たにアトリビュートを習得した生徒もいれば、習得していたアトリビュートが未習得となった生徒もいた。しかし、全体的には、大きな変動は認められなかった。

それぞれのアトリビュートに関する、テスト間のアトリビュート習得確率の変化を確認するために、分析 3 における各アトリビュート習得確率の平均値の推移を Figure 20 に示す。いずれのアトリビュートにおいても大きな変化は認められなかった。また、各アトリビュートを習得していると推定された生徒数の推移を Figure 21 に示す。アトリビュートを習得していると推定された生徒数にも大きな変化はみられなかった。

考 察

研究 2 では、テスト 2 およびテスト 3 を用いて、縦断的 CDM に基づくフィードバックによる、学習者の能力やアトリビュート習得における効果を検討した。テスト 2 に 48 名、テスト 3 に 42 名の中学生 2、3 年生が解答した (i.e. 3 回すべてのテストに解答した生徒は 42 名であった)。縦断的 HO-DINA モデルを使用し、モデル比較を行った後、項目パラメタに時点間の等値制約を課さずに δ パラメタを使用して、アトリビュートパラメタのみに對して事前情報を与えるモデル (モデル C-2.3) で分析を行った。また、テスト 1 実施後と同様に、テスト 2 実施後、テスト 3 実施後のそれぞれにおいて、解答した生徒に対するフィードバックを行った。

問題項目内容の再検討 分析 2 実施後および分析 3 実施後のそれれにおいて、問題項目の内容に関して再検討を行った。テスト 2 では、いずれの項目においても内容に不備はないと考えられた。テスト 3 では、項目 (12) の内容に不備のある可能性が考えられた。テスト 3 の項目 (12) を Figure 22 (上) に示す。また、テスト 3 の項目 (12) は、複数の正答のうちいずれを答えるても正解とするものであり、想定解答の一覧を Figure 22 (下) に示す。項目 (12) は、「二つの歯車 A, B がかみ合って回転するとき、 $(A \text{ の歯数}) \times (A \text{ の回転数}) = (B \text{ の歯数}) \times (B \text{ の回転数})$ の関係が成り立つ」という知識に偏った内容になっており、項目 (12) の文章にある記述から関数関係を読み取ることは困難であったと考えられた。項目 (12) は A1 「代数的手続きを理解」と A2 「関数的思考の理解」を要求していたが、知識としての関係式への当てはめによって解くことのできる項目内容では、A2 で必要としている、一方の変数から他方の変数を決定することの理解や、その理解をもとにして具体例を捉える能力を測定できていなかった可能性が考えられた。

正答数と総合的な能力パラメタ 3 回のテストを通して、平均正答数は 4.52 問、5.56 問、6.33 問と少しずつ上昇していた。これらはそれぞれ 14 問の、32.3%，39.7%，45.2% にあたり、本研究で用いたテストの難易度は全体的に高かったといえる。また、テスト 1 からテスト 3 までの平均正答数の上昇はおよそ 1.8 問であり、大きな上昇は認められなかつた。潜在変数である総合的な能力 θ に関しても全体的な大きな上昇は認められなかつたことから、本研究での 3 回のテストとフィードバックを行ったとしても全体的な能力の向上は得られなかつたといえる。CDM に基づくフィードバックによる能力向上への効果に関する考察は、総合考察の章で言及する。

ここで、潜在変数である能力 θ は、観測変数である正答数 c をよく反映していたことが示唆される。能力 θ と正答数 c の関係を確認するために、分析 3 における、テストごとの能力 θ と正答数 c の散布図を Figure 23 に示す。分析 3 において、各時点における能力 θ と正答数 c の間には強い相関があり ($r_{(\theta \cdot c)1} = .87$, $r_{(\theta \cdot c)2} = .88$, $r_{(\theta \cdot c)3} = .92$), 正答数が多い生徒ほど総合的な能力 θ が高い傾向にあることが示された。

総合的な能力パラメタの変化 総合的な能力 θ および正答数 c の変化量のそれれにおいて、 $d_{\theta(1 \cdot 2)}$ と $d_{\theta(2 \cdot 3)}$ の間、および $d_{c(1 \cdot 2)}$ と $d_{c(2 \cdot 3)}$ の間に負の相関が認められたことについて、中学校の数学の授業で関数領域（中学 2 年生は「一次関数」、中学 3 年生は「関数 $y = ax^2$ 」）の単元が扱われたことによって、それぞれの中学校の授業における学習の効果が混入した可能性が考えられる。今回の実験参加者には、異なる中学校に通う生徒が含ま

れており、中学校によって関数領域の単元を扱う時期が異なっていた。本研究のテスト 1 からテスト 2 の間に関数領域が扱われた中学校もあれば、テスト 2 からテスト 3 の間に関数領域が扱われた中学校もあった。生徒の在籍中学校の情報や中学校で関数領域が扱われた時期に関するデータは収集していないため、確認することができないが、中学校で関数領域の授業があった期間には θ が比較的大きく増加し、そうでない期間にはあまり増加しなかった可能性が考えられる。

個人ごとの能力 θ の平均値と変化量 $d_{\theta(1,2)}$ の間や、 θ と変化量 $d_{\theta(1,3)}$ の間に関連が認められなかつたことから、3回のテストを通して、能力 θ の高低はその変化とは関係しなかつたといえる。すなわち、能力 θ の高い人ほど θ の値が増加しやすいといった傾向や、 θ の低い人ほど θ の値が増加しやすいといった傾向は認められなかつたと考えられる。個人の能力 θ の分布全体として若干ではあるものの上昇が認められたことと合わせると、個人の能力の高低に拘らずに CDM 実践の効果が均しく得られる期待を示唆しているといえる。ただし、本研究では、能力 θ の全体的な向上が大きくなかったこと、能力 θ の平均パラメタ μ_θ に対して時点間で増加する制約 ($\delta_t \geq 0$) を課していたことから、解釈には注意が必要である。CDM 実践による学習改善の効果と個人の能力との関連の有無に関しては、今後の CDM 実践研究を通して検討を重ねていく必要があるだろう。

アトリビュート習得の変化とアトリビュート内容 アトリビュート習得パターンや習得確率にテスト間で大きな変動が認められなかつたことは、能力 θ の向上に関して行った考察と同様に、本研究での3回のテストとフィードバックによる学習改善への大きな効果は得られなかつたことを示唆している。CDM 適用によって得られた情報をより効果的に学習へ活かすための取り組みは、総合考察の章で展望する。

また、アトリビュート習得確率間の相関係数が高かつたことや、アトリビュート習得パターン “000” および “111” に推定された生徒が多かつたことは、問題項目によって実際に測定されていたアトリビュート内容が、各アトリビュート間で互いに似ていた可能性を示唆している。本研究においてアトリビュートは3個に分けられたものの、それぞれが関数領域に焦点を当てた能力であったことは言うまでもない。例えば、A1「代数的手手続きの理解」に関して項目 (1) などで要求していた、一次関数の関係式と y の値が与えられ、 y の値を関係式に代入することにより x の値を求めるという手続きは、A2「関数的思考の理解」に含まれる一方の値から他方の値を決定することの理解との関係が強い可能性がある。ただし、縦断的 HO-DINA モデルでは、能力 θ と各アトリビュート習得確率の間には

Figure 12 に示したような関係性があった。このことは、能力 θ が高い個人ではそれぞれのアトリビュート習得確率が高くなりやすく、アトリビュート習得確率間の相関関係が高くなりやすいモデル設定であることを意味する。アトリビュート習得確率間に強い相関が認められたことは、モデル設定との兼ね合いで解釈する必要があり、本研究において、実際に測定された各アトリビュート内容の間の類似の程度について考察することは難しい。

なお、研究 1 の考察内で触れたアトリビュートの階層関係については、分析 3 では認められなかつた。

研究 2 の限界 分析結果に関する考察では、はじめに、正答数 c と総合的な能力 θ について考察した。平均正答数や能力 θ の全体的な大きな向上が認められなかつたことや、正答数 c と能力 θ の相関が高かつたことに言及した。

続いて、個人ごとのテスト間の能力 θ の変化について考察した。テスト 1 からテスト 2 の間の変化量 $d_{\theta(1,2)}$ の三分位によって群分けした分析を通して、変化量 $d_{\theta(1,2)}$ と変化量 $d_{\theta(2,3)}$ との間に負の相関が認められることに言及した。この要因として、各生徒がそれぞれの中学校で受けた数学の関数領域の授業による学習効果が混入していた可能性を示唆した。また、本研究全体を通した能力 θ の変化量 $d_{\theta(1,3)}$ の三分位によって群分けした分析も行い、能力 θ と変化量 $d_{\theta(1,3)}$ の間に関連が認められなかつたことを述べ、個人の能力の高低に拘らずに CDM 実践の効果が均しく得られる期待を示唆した。

最後に、アトリビュート習得確率間の相関係数が高かつたことから、問題項目によって実際に測定されていたアトリビュート内容が、各アトリビュート間で互いに似ていた可能性を示唆した。

研究 2 では、分析 3 の結果から、総合的な能力 θ やアトリビュート習得確率、習得パターンのそれぞれの変化に注目して考察を行った。テスト間でこれらの個人パラメタに大きな変化が認められなかつたことは、本研究の目的に照らして成果であり、CDM 実践における課題であると考えられる。CDM 実践において、フィードバックコンテンツを配布するだけでは、生徒の能力やアトリビュート習得の大きな向上は見込めないことを示唆することができたと考えられる。次章の総合考察で、学習改善への CDM の有効活用について展望する。

Table 14
各回のテストの正答率と平均正答数

項目	テスト 1			テスト 2			テスト 3		
	Y2	Y3	全体	Y2	Y3	全体	Y2	Y3	全体
(1)	.458	.757	.639	.65	.750	.708	.556	.833	.714
(2)	.042	.270	.180	.20	.536	.396	.556	.625	.595
(3)	.042	.135	.098	.25	.321	.292	.056	.083	.071
(4)	.417	.622	.541	.20	.286	.250	.389	.417	.405
(5)	.500	.811	.689	.60	.929	.792	1.000	.958	.976
(6)	.125	.405	.295	.20	.321	.271	.444	.542	.500
(7)	.292	.405	.361	.30	.357	.333	.444	.583	.524
(8)	.292	.676	.525	.60	.714	.667	.278	.667	.500
(9)	.000	.108	.066	.15	.286	.229	.167	.375	.286
(10)	.000	.054	.033	.05	.107	.083	.000	.250	.143
(11)	.208	.324	.279	.60	.714	.667	.556	.583	.571
(12)	.083	.405	.279	.15	.179	.167	.000	.042	.024
(13)	.250	.324	.295	.45	.536	.500	.444	.500	.476
(14)	.167	.297	.246	.15	.250	.208	.556	.542	.548
平均正答数	2.88	5.59	4.52	4.55	6.29	5.56	5.44	7.00	6.33

注) Y2: 2 年生, Y3: 3 年生。

Table 15
分析2および分析3におけるWAICによるモデル比較

モデル	g, s	λ_0, λ	EC	δ	分析2			分析3		
					WAIC	SE	PPP	WAIC	SE	PPP
A-2.1	.	.	○	○	1674.2	37.3	.76	2615.1	43.7	.74
A-2.2	○	.	○	○	1677.9	37.0	.75	2613.4	43.4	.74
A-2.3	.	○	○	○	1674.1	37.3	.76	2612.2	43.6	.74
A-2.4	○	○	○	○	1677.7	37.0	.76	2612.2	43.4	.74
B-2.1	.	.	○	.	1675.3	37.2	.76	2612.1	43.6	.74
B-2.2	○	.	○	.	1677.1	37.0	.75	2612.3	43.4	.74
B-2.3	.	○	○	.	1674.2	37.3	.76	2610.2	43.7	.74
B-2.4	○	○	○	.	1676.0	37.1	.75	2607.4	43.3	.74
C-2.1	.	.	.	○	1644.4	38.4	.76	2515.8	45.2	.76
C-2.2	○	.	.	○	1650.8	37.6	.77	2536.6	44.3	.80
C-2.3	.	○	.	○	1644.2	38.5	.76	2515.9	45.2	.77
C-2.4	○	○	.	○	1647.8	37.7	.78	2534.8	44.3	.80
D-2.1	1642.8	38.4	.76	2506.7	45.1	.78
D-2.2	○	.	.	.	1650.7	37.7	.77	2509.0	44.2	.81
D-2.3	.	○	.	.	1642.2	38.4	.76	2508.0	45.2	.77
D-2.4	○	○	.	.	1649.2	37.7	.78	2509.6	44.2	.81

注) g, s の列は、項目パラメタに関して次の事前パラメタを設定したことを表す。

・ : $a_g = 1, b_g = 1, a_s = 1, b_s = 1,$

○ : $a_g = 1, b_g = 3, a_s = 1, b_s = 3.$

λ_0, λ の列は、アトリビュートパラメタに関して次の事前パラメタを設定したことを表す。

・ : $\mu_{\lambda_{0k}} = (0, 0, 0)^T, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (4, 4, 4)^T, \mu_{\lambda_0} = (0, 0, 0)^T, \sigma_{\lambda_0}^2 = (4, 4, 4)^T,$

○ : $\mu_{\lambda_{0k}} = (-1, 0.5, 0.5)^T, \sigma_{\lambda_{0k}}^2 = (2, 4, 4)^T, \mu_{\lambda_0} = (0.5, 1, 1)^T, \sigma_{\lambda_0}^2 = (4, 4, 4)^T.$

EC の列に関して、・は項目パラメタに対して時点間の等値制約を課さないことを表し、○は等値制約を課すことを表す。

δ の列に関して、・は δ パラメタを使用しないことを表し、○は δ パラメタを使用することを表す。

Table 16
分析2および分析3におけるguessingパラメタ

項目	分析2			分析3		
	g_{i1}	g_{i2}	g_{i1}	g_{i2}	g_{i3}	
(1)	.329 (.091; .161, .515)	.423 (.110; .209, .638)	.317 (.090; .152, .503)	.441 (.104; .240, .646)	.450 (.121; .210, .681)	
(2)	.035 (.033; .001, .122)	.054 (.050; .001, .189)	.035 (.034; .001, .124)	.052 (.048; .001, .178)	.238 (.109; .053, .469)	
(3)	.050 (.036; .002, .135)	.255 (.068; .127, .393)	.048 (.036; .002, .134)	.256 (.068; .132, .396)	.048 (.036; .002, .137)	
(4)	.183 (.085; .035, .365)	.063 (.054; .002, .203)	.192 (.082; .052, .367)	.061 (.052; .002, .196)	.118 (.080; .008, .307)	
(5)	.458 (.091; .282, .638)	.518 (.109; .302, .726)	.470 (.090; .297, .644)	.549 (.105; .339, .746)	.907 (.054; .775, .981)	
(6)	.119 (.061; .025, .260)	.143 (.073; .027, .304)	.122 (.059; .030, .258)	.160 (.074; .037, .319)	.262 (.098; .088, .468)	
(7)	.298 (.067; .171, .433)	.244 (.077; .104, .400)	.300 (.067; .173, .434)	.234 (.077; .097, .392)	.323 (.099; .139, .525)	
(8)	.126 (.083; .007, .316)	.244 (.105; .063, .465)	.146 (.085; .013, .333)	.300 (.105; .109, .514)	.085 (.071; .003, .265)	
(9)	.026 (.024; .001, .088)	.039 (.038; .001, .143)	.026 (.024; .001, .089)	.038 (.037; .001, .137)	.043 (.041; .001, .154)	
(10)	.021 (.019; .001, .070)	.034 (.031; .001, .115)	.021 (.020; .001, .072)	.033 (.031; .001, .113)	.041 (.039; .001, .145)	
(11)	.199 (.071; .057, .338)	.367 (.143; .061, .621)	.192 (.071; .053, .333)	.358 (.136; .070, .605)	.338 (.135; .062, .584)	
(12)	.052 (.045; .002, .168)	.040 (.038; .001, .141)	.044 (.040; .001, .147)	.047 (.042; .001, .159)	.023 (.022; .001, .083)	
(13)	.200 (.067; .081, .342)	.187 (.086; .049, .378)	.202 (.067; .085, .344)	.192 (.085; .055, .380)	.353 (.094; .175, .537)	
(14)	.217 (.057; .113, .335)	.135 (.062; .035, .271)	.214 (.057; .112, .332)	.138 (.060; .039, .269)	.440 (.093; .255, .618)	

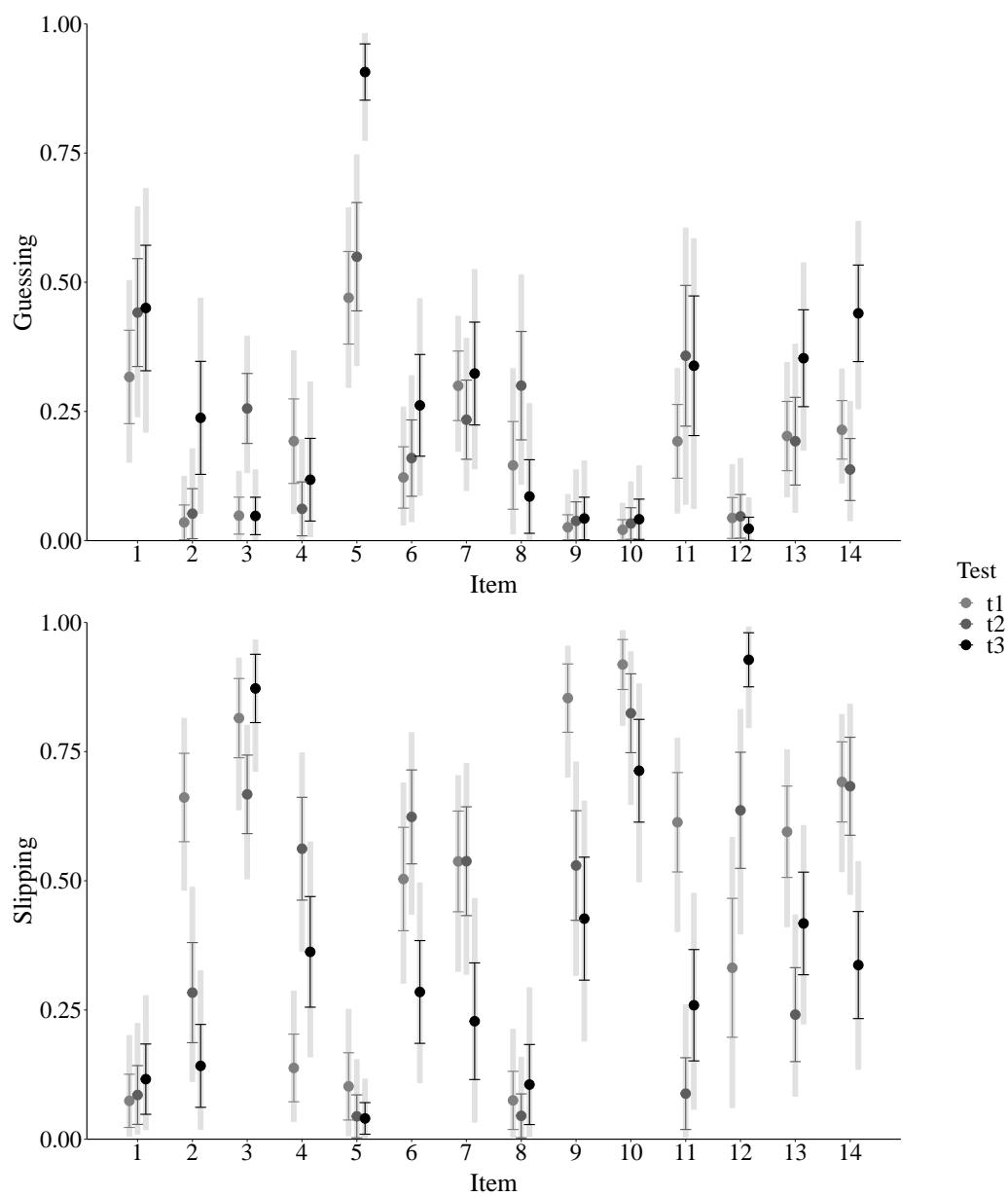
注) 括弧内はSDおよび95%CI。

Table 17
分析2および分析3におけるslippingハラメタ

項目	分析2			分析3		
	s_{i1}	s_{i2}	s_{i1}	s_{i2}	s_{i3}	
(1)	.084 (.057; .007, .221)	.085 (.057; .010, .225)	.074 (.051; .006, .201)	.086 (.057; .010, .224)	.116 (.068; .019, .278)	
(2)	.660 (.087; .477, .815)	.309 (.099; .129, .515)	.661 (.086; .482, .814)	.284 (.097; .112, .488)	.142 (.080; .019, .326)	
(3)	.804 (.084; .606, .929)	.667 (.076; .502, .801)	.815 (.077; .637, .931)	.667 (.076; .504, .801)	.872 (.066; .712, .966)	
(4)	.126 (.066; .024, .276)	.576 (.097; .380, .759)	.138 (.065; .035, .287)	.562 (.099; .364, .747)	.362 (.107; .159, .575)	
(5)	.106 (.065; .008, .255)	.048 (.043; .001, .161)	.102 (.065; .007, .251)	.044 (.042; .001, .154)	.040 (.031; .002, .116)	
(6)	.516 (.097; .319, .697)	.625 (.088; .442, .785)	.503 (.100; .302, .689)	.624 (.091; .436, .787)	.285 (.099; .109, .496)	
(7)	.521 (.107; .287, .701)	.551 (.104; .332, .734)	.538 (.097; .325, .704)	.538 (.105; .319, .727)	.228 (.113; .033, .466)	
(8)	.083 (.060; .005, .228)	.046 (.043; .001, .159)	.075 (.056; .004, .213)	.045 (.042; .001, .158)	.106 (.077; .005, .293)	
(9)	.855 (.065; .704, .954)	.554 (.103; .347, .747)	.854 (.066; .701, .954)	.530 (.106; .317, .730)	.427 (.119; .190, .654)	
(10)	.920 (.048; .802, .984)	.833 (.073; .666, .946)	.919 (.048; .801, .984)	.824 (.076; .648, .943)	.713 (.099; .498, .881)	
(11)	.608 (.100; .386, .776)	.088 (.072; .003, .267)	.613 (.096; .402, .776)	.088 (.069; .003, .260)	.259 (.108; .058, .476)	
(12)	.289 (.146; .026, .567)	.616 (.123; .347, .822)	.332 (.134; .061, .584)	.636 (.112; .397, .831)	.928 (.052; .796, .991)	
(13)	.602 (.086; .425, .756)	.276 (.090; .112, .463)	.595 (.088; .411, .753)	.241 (.091; .083, .434)	.417 (.099; .223, .607)	
(14)	.691 (.078; .517, .823)	.679 (.098; .463, .842)	.691 (.078; .518, .822)	.683 (.095; .474, .842)	.337 (.104; .135, .537)	

注) 括弧内はSDおよび95%CI。

Figure 11
分析3における各回のテストの項目パラメタ



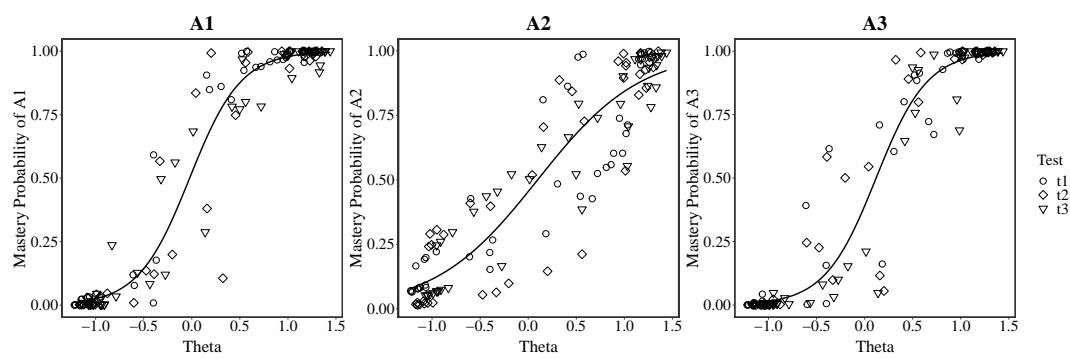
注) エラーバーは SD , 薄灰色の縦線は 95%CI。t1 : テスト 1, t2 : テスト 2, t3 : テスト 3。

Table 18
分析2および分析3におけるアトリビュートパラメタ

	分析2		分析3	
	λ_{0k}	λ_k	λ_{0k}	λ_k
A1	-0.04 (0.73; -1.51, 1.39)	4.34 (1.12; 2.44, 6.80)	0.00 (0.73; -1.46, 1.41)	4.70 (1.09; 2.84, 7.06)
A2	0.57 (1.08; -1.57, 2.77)	2.69 (1.20; 0.82, 5.44)	0.30 (1.03; -1.69, 2.43)	2.87 (1.20; 1.04, 5.64)
A3	-0.05 (0.83; -1.66, 1.64)	4.75 (1.18; 2.73, 7.29)	0.47 (0.83; -1.12, 2.18)	4.83 (1.15; 2.87, 7.33)

注) 括弧内は SD および 95%CI。 λ_{0k} : 切片パラメタ, λ_k : 傾きパラメタ。A1 : 傾きパラメタの理解, A3 : 直交座標上で表現の理解。

Figure 12
分析 3 における θ と各アトリビュート習得確率の関係



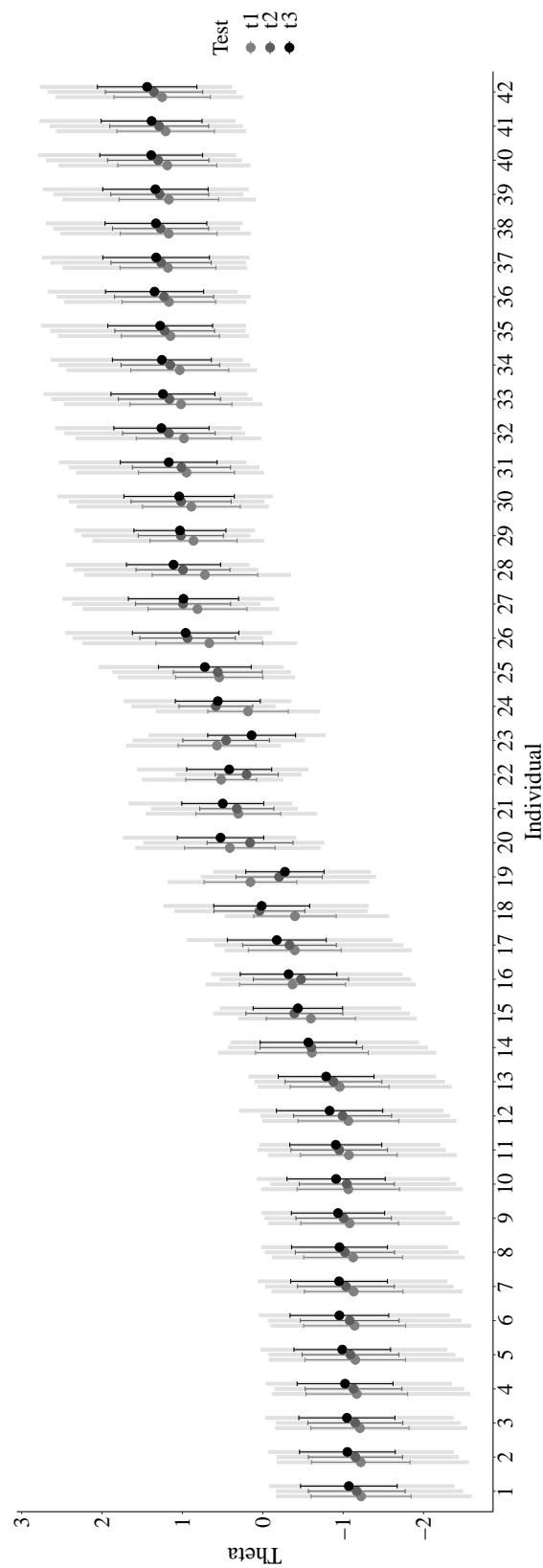
注) 近似曲線の形状がアトリビュートパラメタによって決定される。1 個のプロットは 1 人の生徒を表す。
完全データである 42 名 \times 3 時点から作図。A1: 代数的手手続きの理解, A2: 関数的思考の理解, A3: 直交座標上での表現の理解。t1: テスト 1, t2: テスト 2, t3: テスト 3。

Table 19
分析3における θ に関する統計量

M_0	μ_0	δ	SD_0	Σ_0 / r_0		
				t1	t2	t3
t1	0.07	0	0	0.95	1	.99
t2	0.15	0.10 (0.09; 0.00, 0.32)	0.10 (0.09; 0.00, 0.32)	0.97	.87 (.09; .64, .99)	1
t3	0.23	0.21 (0.12; 0.03, 0.49)	0.11 (0.09; 0.00, 0.35)	0.96	.84 (.11; .57, .99)	.89 (.08; .68, .99)

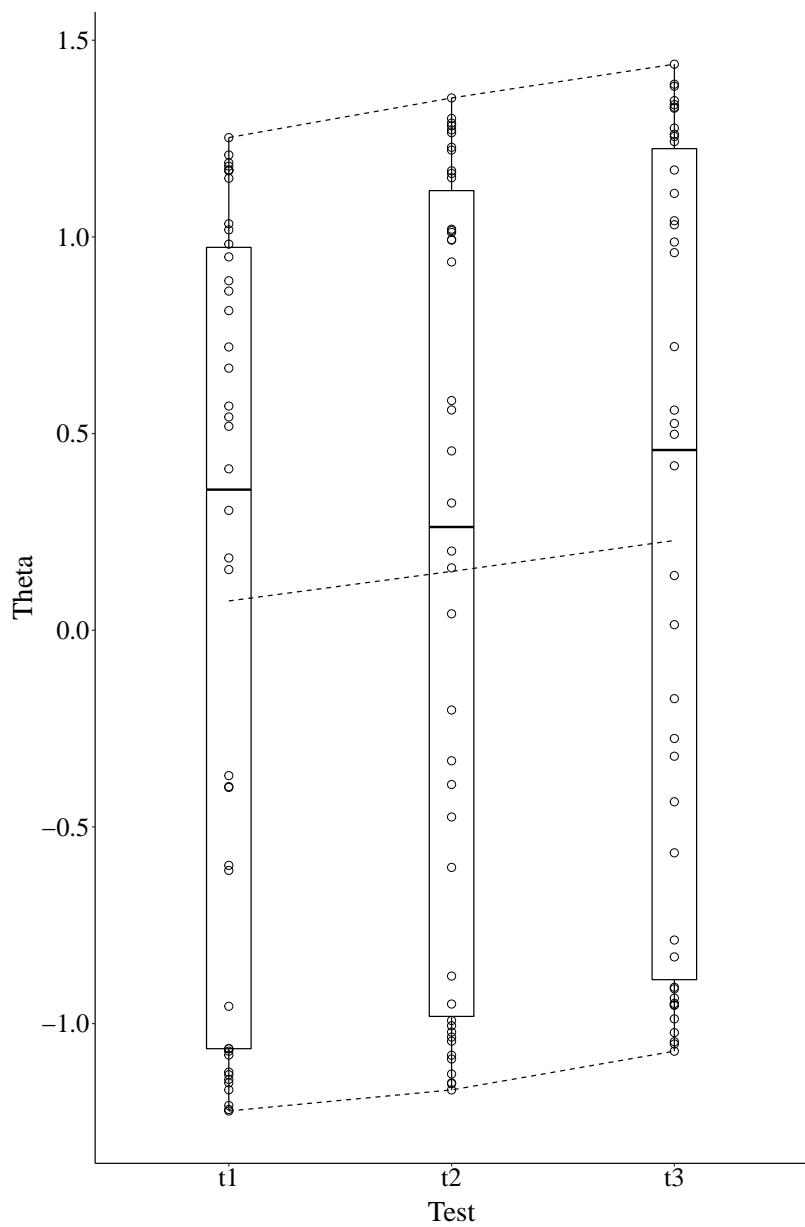
注) $M_0 : \theta$ の推定値の平均値, $\mu_0 : \theta$ の事前分布の平均パラメタの推定値, $\delta : \delta$ パラメタの推定値, $SD_0 : \theta$ の推定値の標準偏差, $\Sigma_0 : \theta$ の事前分布の分散共分散行列パラメタの推定値 (下三角部分および対角部分; 対角部分は 1 に固定), $r_0 : \theta$ の推定値の相關行列 (上三角部分)。括弧内は SD および 95%CI。t1 : テスト 1, t2 : テスト 2, t3 : テスト 3。 M_0 , SD_0 , r_0 は完全データである 42 名から算出。

Figure 13
分析 3 における能力 θ の個人別のテスト間の変化



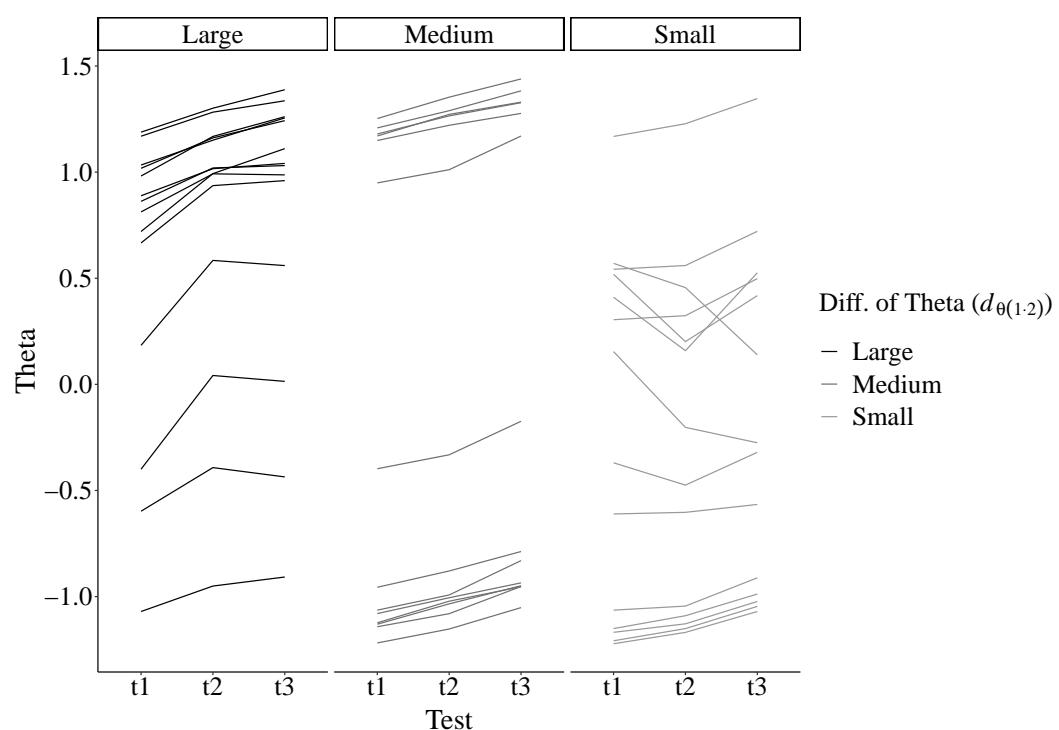
注) 個人ごとの θ の平均値で昇順に並べた。エラーバーは SD , 薄灰色の縦線は 95%CI。t1 : テスト 1, t2 : テスト 2, t3 : テスト 3。

Figure 14
分析 3 における各テストの θ の分布



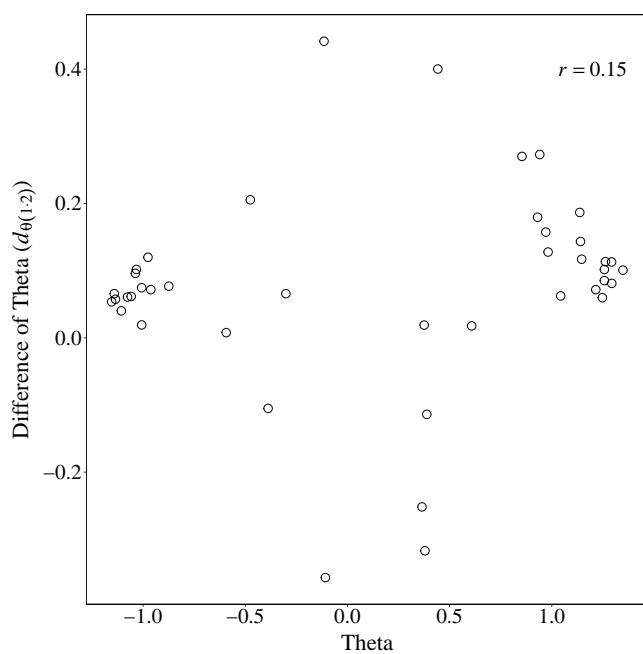
注) 3 本の点線は上から順に θ の最大値、平均値 M_θ 、最小値。1 個のプロットは 1 人の生徒を表す。完全データ 42 名から作図。t1 : テスト 1, t2 : テスト 2, t3 : テスト 3。

Figure 15
 $d_{\theta(1,2)}$ によって群分けした分析 3 におけるテスト間の θ の変化



注) テスト 1 からテスト 2 の間の総合的な能力 θ の変化量 $d_{\theta(1,2)}$ の三分位によって群分けした。完全データ 42 名から作図。t1 : テスト 1, t2 : テスト 2, t3 : テスト 3。

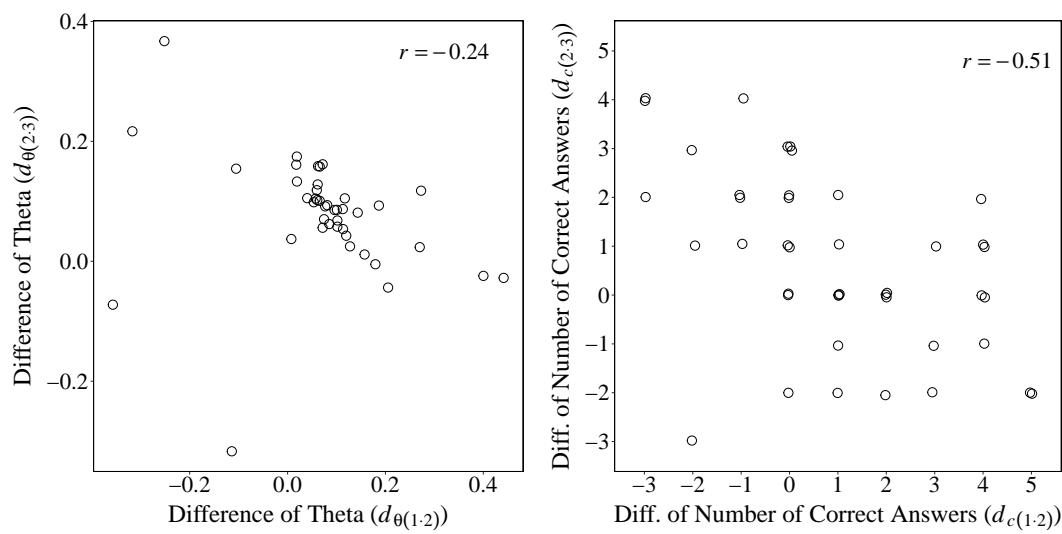
Figure 16
個人ごとの θ の平均値と変化量 $d_{\theta(1,2)}$ の散布図



注) 完全データ 42 名から作図。

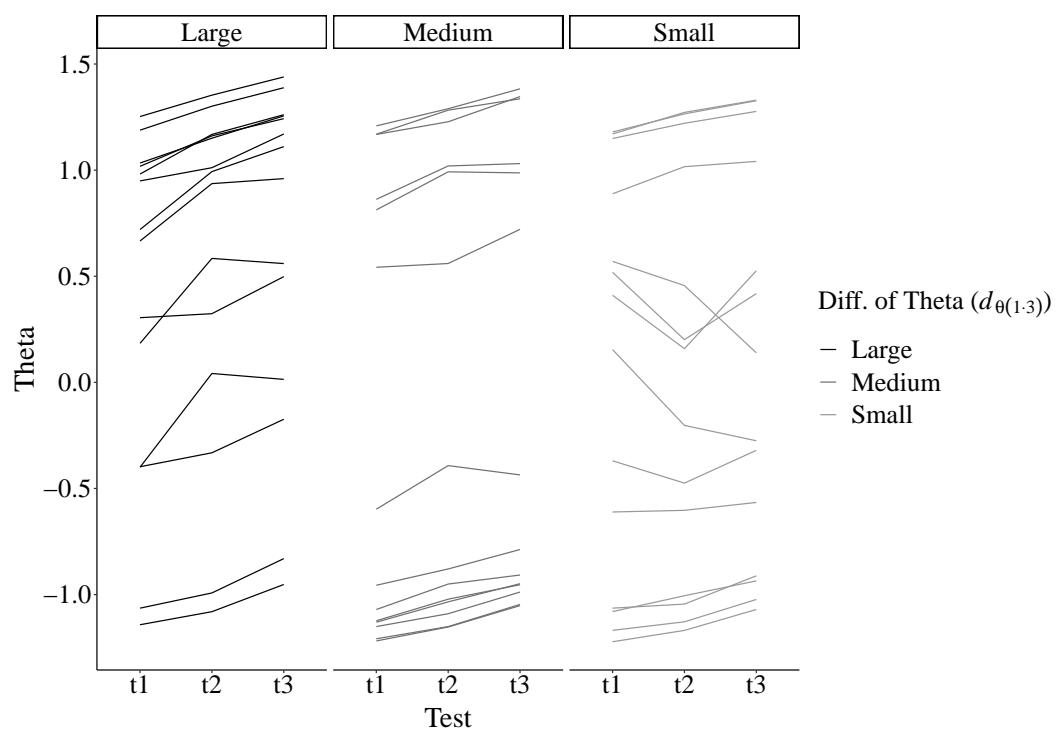
Figure 17

変化量 $d_{\theta(1 \cdot 2)}$ と変化量 $d_{\theta(2 \cdot 3)}$ の散布図および変化量 $d_{c(1 \cdot 2)}$ と変化量 $d_{c(2 \cdot 3)}$ の散布図



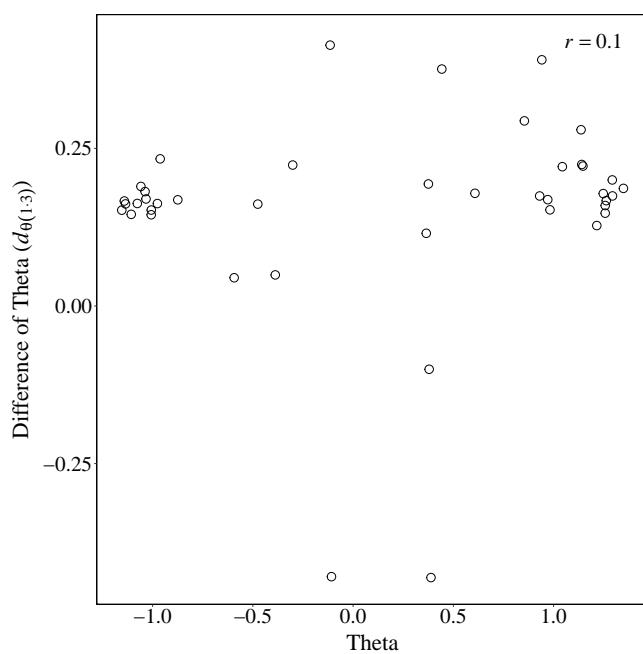
注) 能力 θ に関する変化量 $d_{\theta(1 \cdot 2)}$ と変化量 $d_{\theta(2 \cdot 3)}$ の散布図 (左)。正答数 c に関する変化量 $d_{c(1 \cdot 2)}$ と変化量 $d_{c(2 \cdot 3)}$ の散布図 (右)。右図はジッタープロット。完全データ 42 名から作図。

Figure 18
 $d_{\theta(1,3)}$ によって群分けした分析 3 におけるテスト間の θ の変化



注) テスト 1 からテスト 3 の間の総合的な能力 θ の変化量 $d_{\theta(1,3)}$ の三分位によって群分けした。完全データ 42 名から作図。t1 : テスト 1, t2 : テスト 2, t3 : テスト 3。

Figure 19
個人ごとの θ の平均値と変化量 $d_{\theta(1,3)}$ の散布図



注) 完全データ 42 名から作図。

Table 20
分析 3 におけるアトリビュート習得確率の相関係数

	$\alpha_{1(1)}$	$\alpha_{2(1)}$	$\alpha_{3(1)}$	$\alpha_{1(2)}$	$\alpha_{2(2)}$	$\alpha_{3(2)}$	$\alpha_{1(3)}$	$\alpha_{2(3)}$	$\alpha_{3(3)}$
$\alpha_{1(1)}$									
$\alpha_{2(1)}$.88								
$\alpha_{3(1)}$.89	.92							
$\alpha_{1(2)}$.86	.75	.75						
$\alpha_{2(2)}$.80	.79	.83	.73					
$\alpha_{3(2)}$.87	.89	.93	.82	.83				
$\alpha_{1(3)}$.92	.84	.87	.89	.79	.89			
$\alpha_{2(3)}$.86	.86	.85	.73	.90	.84	.83		
$\alpha_{3(3)}$.89	.88	.95	.75	.84	.88	.85	.87	

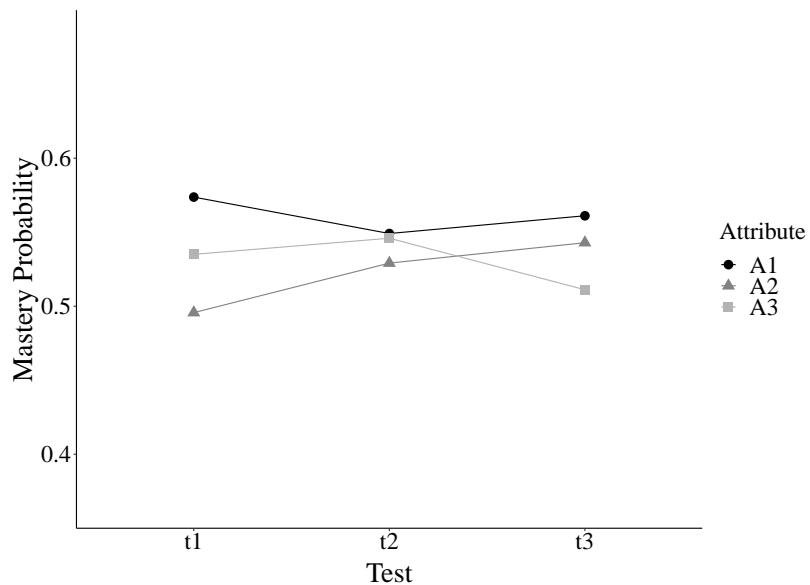
注) 完全データである 42 名から算出。アトリビュート習得確率 ($P(\alpha_{kt} = 1)$)
間の相関係数であるが、便宜上、行名および列名は $\alpha_{k(t)}$ と記載した。 $\alpha_{1(t)}$: 代
数的手手続きの理解、 $\alpha_{2(t)}$: 関数的思考の理解、 $\alpha_{3(t)}$: 直交座標上での表現の理解。

Table 21
分析3におけるアトリビュート習得パターンのクロス集計表

		テスト2						テスト3											
		テスト1			テスト2			テスト1			テスト2			テスト3					
		000	100	010	001	110	101	011	111	合計	000	100	010	001	110	101	011	111	合計
000	14			1			1	16	000	15			1		1	1	16		
100		1				1	2	100						1	1	1	2		
010							0	010									0		
001	1							1	001	1								1	
110								0	110									0	
101						1	1	1	3	101							3	3	
011								0	011								0		
111		1	1	1				17	20	111	1	1				18	20		
合計†	15	2	1	2	0	1	1	20	42	合計	17	0	1	0	2	1	0	21	42
		テスト2						テスト3											
		テスト1			テスト2			テスト1			テスト2			テスト3					
		000	100	010	001	110	101	011	111	合計	000	100	010	001	110	101	011	111	合計
000	15			2						17									
100																	0		
010											1	1							
001												0							
110							1										2		
101												1	1						
011													1						
111						1	1							0					
合計†	15	2	1	2	0	1	1	20	42	合計	17	0	1	0	2	1	0	21	42

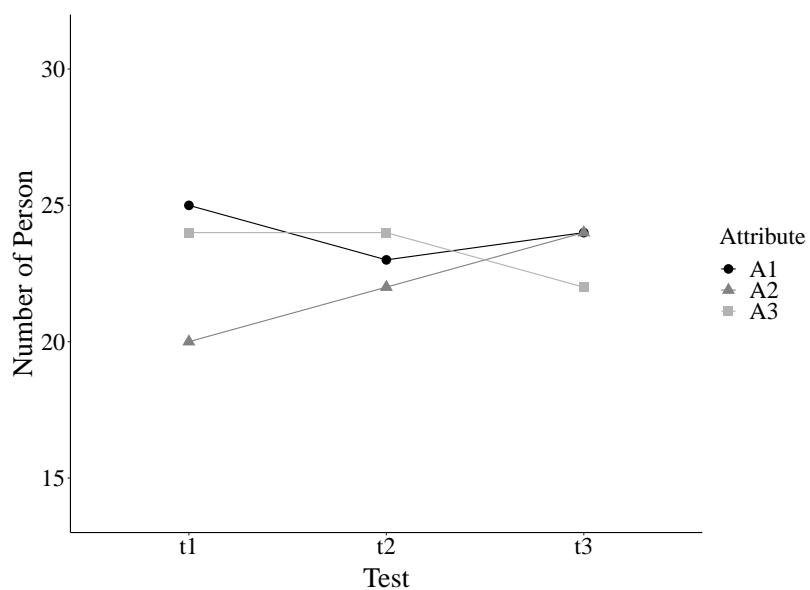
注) アトリビュート習得パターンを表す3桁の数字は、左から A1, A2, A3 の習得の有無を表し、1 はアトリビュートを習得済、0 はアトリビュートを未習得であることを意味する。完全データである42名から作成。A1 : 代数的手続きの理解、A2 : 関数的思考の理解、A3 : 直交座標上で表現の理解。

Figure 20
分析 3 における各アトリビュート習得確率の平均値の推移



注) A1: 代数的手続きの理解, A2: 関数的思考の理解, A3: 直交座標上での表現の理解。t1: テスト 1, t2: テスト 2, t3: テスト 3。

Figure 21
分析 3 において各アトリビュートを習得していると推定された生徒数の推移



注) A1: 代数的手手続きの理解, A2: 関数的思考の理解, A3: 直交座標上での表現の理解。t1: テスト 1, t2: テスト 2, t3: テスト 3。

Figure 22
テスト 3 の項目 (12)

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x, y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答えてても正解です。

文章 Aさんは分速 80m で 5 分歩くと、400m 進みました。

- 例
 ア 歩いた速さ
 イ 歩いた時間
 ウ 歩いた距離

解答 $x : \text{イ}, y : \text{ウ}$, 関係式: $y = 80x$

$\text{※ } x : \text{イ}, y : \text{ア}$, 関係式: $y = \frac{400}{x}$ や $x : \text{ア}, y : \text{ウ}$, 関係式: $y = 5x$ なども正解です。

文章 歯数 15 の歯車 S と歯数 30 の歯車 T がかみ合って回転するとき、歯車 T が 1 回転すると歯車 S は 2 回転し

ます。また、歯車 S と歯数 10 の歯車 U がかみ合って回転するとき、歯車 U が 1 回転すると歯車 S は $\frac{2}{3}$ 回転します。

- ア 歯車 S の歯数
 イ 歯車 T の回転数
 ウ 歯車 U の回転数
 エ 歯車 U の歯数

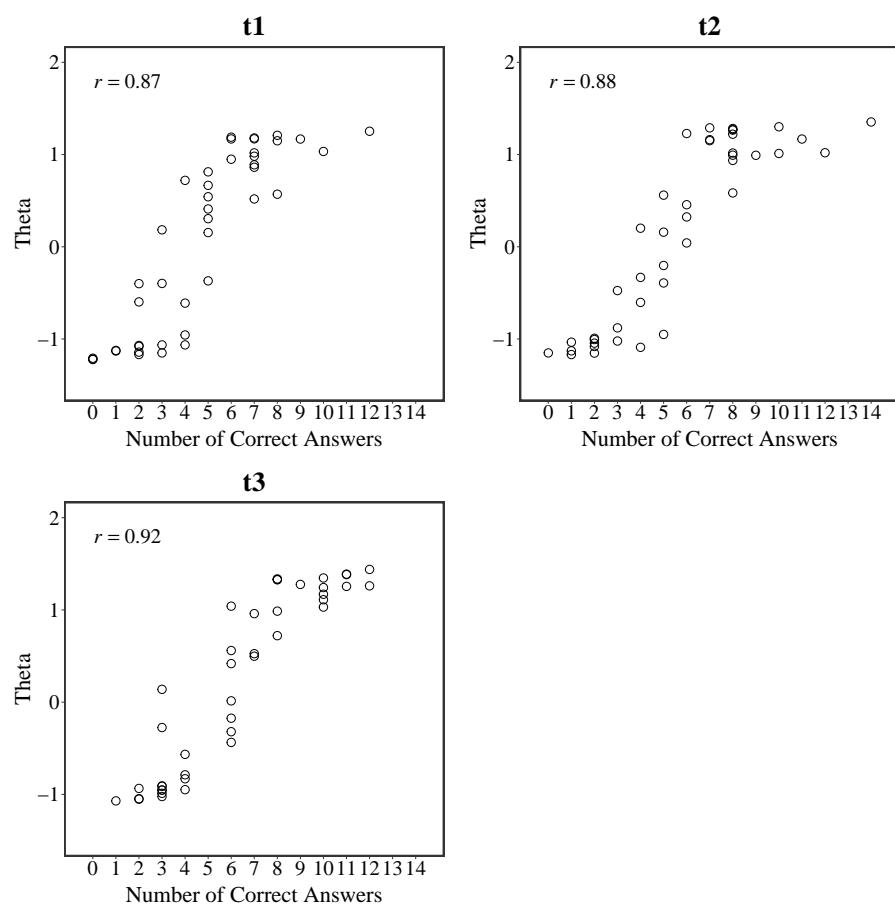
(答 12) $x :$ _____ $y :$ _____ 関係式: _____

想定解答一覧

$x : \text{ア} \quad y : \text{ア}$ 関係式: $y = \frac{1}{15}x$	$x : \text{イ} \quad y : \text{ウ}$ 関係式: $y = 3x$
$x : \text{イ} \quad y : \text{ア}$ 関係式: $y = 15x$	$x : \text{ウ} \quad y : \text{イ}$ 関係式: $y = \frac{1}{3}x$
$x : \text{ア} \quad y : \text{ウ}$ 関係式: $y = \frac{1}{15}x$	$x : \text{イ} \quad y : \text{エ}$ 関係式: $y = 10x$
$x : \text{ウ} \quad y : \text{ア}$ 関係式: $y = 15x$	$x : \text{エ} \quad y : \text{イ}$ 関係式: $y = \frac{1}{10}x$
$x : \text{ア} \quad y : \text{エ}$ 関係式: $y = \frac{2}{3}x$	$x : \text{ウ} \quad y : \text{エ}$ 関係式: $y = \frac{10}{x}$
$x : \text{エ} \quad y : \text{ア}$ 関係式: $y = \frac{3}{2}x$	$x : \text{エ} \quad y : \text{ウ}$ 関係式: $y = \frac{10}{x}$

注) 問題 (上) と想定解答一覧 (下)。

Figure 23
分析3における各テストの θ と正答数の散布図



注) 1個のプロットは1人の生徒を表す。完全データである42名から作図。t1: テスト1, t2: テスト2, t3: テスト3。

第6章 総合考察

本研究の目的は、認知診断モデルに基づくテストを開発し、複数回のテストを実施することで、実践的な研究例の少ない縦断的 CDM を活用したフィードバックによる学習者の能力やアトリビュート習得への効果と、縦断的 CDM を適用しフィードバックを実施する上での現状の難しさを検討することであった。そこで、本研究では中学校における数学教育や関数教育の重要性に注目し、中学 2 年生および中学 3 年生を対象とした数学の関数領域のテストを開発し、3 回のテストとフィードバックを行った。

本稿第 3 章では、アトリビュートとテスト問題の作成の手続きについて詳説した。文献調査に基づいてアトリビュート候補を作成し、専門家等との協議を通して最終的な 3 個のアトリビュートを決定した。また、設定されたアトリビュートを測定できるような問題項目候補を作成し、専門家等との協議を通して最終的な 14 個の問題項目を選択、修正した。第 4 章ではテスト 1 を、第 5 章ではテスト 2 とテスト 3 を実施、分析、考察した。テスト 1 実施後には HO-DINA モデルを用いた分析とフィードバック、テスト 2 およびテスト 3 実施後には縦断的 HO-DINA モデルを用いた分析とフィードバックを行った。

第 4 章では、分析 1 の結果を、問題項目内容の観点とアトリビュート内容の観点から考察した。問題項目内容の観点からは、テスト 1 における難易度の高かった項目や、slipping パラメタが高く推定された項目について、その要因を検討した。アトリビュート内容の観点からは、アトリビュートの定義と実際に測定されたアトリビュート内容に乖離があった可能性に言及した。第 5 章では、分析 3 の結果を、テスト間での総合的な能力 θ の変化と、アトリビュート習得確率および習得パターンの変化に注目して考察した。総合的な能力 θ の全体的な大きな向上は認められず、アトリビュート習得確率や習得パターンに関してても大きな変化は認められなかった。

本章では、はじめに、各回のテスト後に分析を繰り返していた本研究に特有な事項として、全 3 回の分析結果を統合して得られる情報を考察する。続いて、第 4 章で強調したように、分析結果の考察の前提となっている、アトリビュートの定義と実際に測定されたアトリビュートの内容に注目して考察を行う。アトリビュートの定義に関しては、参加者数や問題項目数が少なかったことによる難しさを中心に、問題項目内容との関連、項目パラメタとの関連、正答率との関連、テストの受験者層との関連の観点から議論する。最後に、本研究の限界に触れた上で、今後の CDM 実践のための取り組みを展望する。

分析結果を統合した考察

本研究では、それぞれのテストの後に分析を繰り返していた。第4章および第5章では、分析1から得られる情報や分析3から得られる情報に限定した考察を行っていた。本項では、アトリビュート内容に注目する考察に先立って、すべての分析結果を統合して得られた結果を報告し、簡単に考察を行う。

項目パラメタ はじめに、分析間の項目パラメタの推定値を比較する。分析1におけるテスト1の項目パラメタ、分析2におけるテスト1の項目パラメタ、分析3におけるテスト1の項目パラメタを視覚的に比較するために、その推定値と SD 、95%CIをFigure 24に示す。また、分析2におけるテスト2の項目パラメタ、分析3におけるテスト2の項目パラメタに関して同様に、推定値と SD 、95%CIをFigure 25に示す。

Figure 24から、テスト1の項目パラメタに関して分析間に大きな違いはなく、いずれの分析においてもほぼ等しく推定されたことが読み取れた。同様にして、Figure 25から、テスト2の項目パラメタはいずれの分析においてもほぼ等しく推定されたことが読み取れた。

敢えて取り上げるならば、テスト1の項目(12)のslippingパラメタにおいて、他の項目と比較して大きな分析間の違いが認められた。このテスト1の項目(12)のslippingパラメタにおける分析間の違いは、実際に測定されたアトリビュート内容の影響を受けていると考えられ、次項でアトリビュートパラメタとの関連で考察し、次節でのアトリビュート内容に関する考察に接続する。

続いて、すべての分析において推定された項目パラメタを用いて、項目の正答率と項目パラメタの間の関連を調べるために、正答率と項目パラメタの散布図をFigure 26に示す。正答率とguessingパラメタの関連について強い正の相関が認められ、 $r_{p,g} = .84$ (時点 t の項目 i の正答率を p_{it} とする。)であった。また、正答率とslippingパラメタの関連について強い負の相関が認められ、 $r_{p,s} = -.94$ であった。これらのことから、正答率の高い項目ではguessingパラメタが高く推定され、正答率の低い項目ではslippingパラメタが高く推定されたことが示された。

アトリビュートパラメタ 本研究では、アトリビュートパラメタに対する時点間での等価制約を前提として進めてきた。項目パラメタと同様に、アトリビュートパラメタに関して分析間の比較を行うため、各分析におけるアトリビュートパラメタの推定値と SD 、95%CIをFigure 27に示す。テスト1のみが反映されている分析1と、テスト1およびテ

スト 2 が反映されている分析 2, すべてのテストが反映されている分析 3 との間で, アトリビュートパラメタの推定値の差異に関して, SD を考慮すると, 1 SD 以上の大きな変動は認められない。

しかしながら, SD や 95%CI が大きいことを踏まえて推定値のみに注目すると, その他の各種パラメタの推定結果に十分に影響を及ぼし得る大きさの, 分析間の違いがあると考えられる。アトリビュートパラメタの特徴を視覚的に確認するために, アトリビュートパラメタによって決定される能力 θ とアトリビュート習得確率の関係性を表す曲線を Figure 28 に示す。曲線の形状は, 分析間で若干異なっており, A2 において比較的大きな違いが認められた。A2 では, 分析を重ねるごとに, アトリビュート習得の難易度を表す切片パラメタ λ_{0k} が低くなる傾向が認められた。各回のテスト項目で測定しようとしていたアトリビュートの内容に大きな違いはなかったものの, テストを重ねるにつれて, 実際に測定されたアトリビュート内容は若干変わっていた可能性が考えられる。

測定されたアトリビュート内容の変動に関して, 本研究における問題項目が少なかったことと, アトリビュートの定義として幅広い要素を含んでいたことが要因と考えられる。一度のテストではアトリビュートに関して測定される側面が少なく, テスト 1 やテスト 2 では実質的なアトリビュートの内容が偏って限定的であった可能性がある。

例えば, 第 4 章で言及したように, テスト 1 では, A2 を測定していた全 5 項目 ((3), (7), (11), (12), (14)) のうち, 4 項目 ((3), (7), (11), (14)) で slipping パラメタが高く推定された。このことは, 実際に測定されていた A2 の内容が, 項目 (12) で測定されていた内容に限定的になっていたことを示唆する。テスト 1 の項目 (12) の正答率は比較的低かったものの ($p_{12(1)} = .279$), 正答率と slipping パラメタの強い負の相関 ($r_{p.s} = -.94$) にもかかわらず, 分析 1 において比較的低い slipping パラメタが推定されており ($s_{12} = .207$), 前項で言及した通り, 分析 2 で $s_{12(1)} = .289$, 分析 3 で $s_{12(1)} = .332$ と少しづつ高くなっていた。slipping パラメタの分析間の増加は, A2 におけるアトリビュートの習得困難度を表す切片パラメタが, 分析 1 で $\lambda_{0(2)} = 1.14$, 分析 2 で $\lambda_{0(2)} = 0.57$, 分析 3 で $\lambda_{0(2)} = 0.30$ と低下し, 実際の測定内容から構成される A2 の習得難易度が少しづつ低下していたこととの関連で捉えることができる。テストを重ねるにつれて, A2 のその他の側面を測定している項目の情報が, 測定される A2 の内容に含まれるようになった可能性を考えることができるだろう。なお, 実際に測定されるアトリビュート内容を意図的に設定することの難しさに関しては, 次節で述べる。

また、時点間でアトリビュートパラメタに若干の変動が認められたことは、アトリビュートパラメタに対して時点間での等値制約を課さないモデルが、より適している可能性を示唆する。本研究では、3回のテストは類題から構成するよう作成したが、完全に同じ問題ではないため、テスト間でアトリビュートの内容が変わっている可能性も考えられる。本研究では、アトリビュートパラメタに等値制約を課さないモデルによる分析は実施しなかつたが、モデル比較の対象の一つとして含めるべきであった可能性がある。

個人パラメタ 項目パラメタに関する分析間比較では、項目パラメタの推定値は分析間でほぼ等しかったことについて述べ、項目の正答率と項目パラメタの間の強い相関関係に言及した。アトリビュートパラメタに関する分析間比較では、アトリビュートパラメタの推定値における分析間の $1 SD$ 以上の差は認められないものの、 SD が大きいことを踏まえると、その他の各種パラメタの推定結果に十分に影響を及ぼし得る大きさの違いがあることについて述べた。そして、テスト 1 で実際に測定された A2 の内容が偏って限定的であった可能性について考察した。また、アトリビュートパラメタに時点間の等値制約を課さないモデルが適していた可能性にも言及した。本項では、最後に、個人パラメタに関してすべての分析結果を統合して考察する。

個人パラメタに関して分析間比較を行うため、各分析のテスト 1 における個人パラメタに関する統計量を Figure 29、分析 2 と分析 3 のテスト 2 における個人パラメタに関する統計量を Figure 30 に示す。いずれのテストにおいても、 θ やアトリビュート習得確率の推定値の分布に分析間の大きな違いは認められず、テスト 2 における μ_0 にも分析間の大きな違いは認められなかった。敢えて取り上げるならば、テスト 1 における A2 の習得確率の分布が、分析を重ねるごとに高まっている。これは、前項で言及した A2 の習得困難度の低下によるものであると考えられる。

また、アトリビュート習得パターンに関して分析間比較を行うため、テスト 1 のアトリビュート習得パターンについて、分析 1 と分析 2 の推定結果のクロス集計表と、分析 1 と分析 3 の推定結果のクロス集計表を、Table 22 に示す。テスト 1 における分析 1 と分析 2 の比較 (Table 22 (上)) について、分析 1 では “100” と推定されていたにもかかわらず分析 2 では “101” と推定された生徒が 2 名、分析 1 では “101” と推定されていたにもかかわらず分析 2 では “111” と推定された生徒が 3 名いた。また、テスト 1 における分析 1 と分析 3 の比較 (Table 22 (下)) についても、分析 1 と分析 3 でアトリビュート習得パターンに違いが認められた生徒は、合計で 10 名いた。同様に、テスト 2 のアトリビュート習得

パタンにおける分析2と分析3の推定結果のクロス集計表をTable 23に示す。4名の生徒においてアトリビュート習得パタンの推定結果の分析間の違いが認められた。多くの生徒ではアトリビュート習得の推定結果に分析間の違いは認められなかつたものの、数名の生徒においてアトリビュート習得の推定結果に分析間の違いが認められた。このことは、生徒にとってフィードバックされる内容が変動してしまうことを意味している。この課題に関しては、認知診断モデル実践の展望の節でも取り上げる。

アトリビュート定義に関する限界

本節では、第4章で言及した、定義されたアトリビュートと実際に測定されたアトリビュートの乖離に焦点を向け、アトリビュート定義に関する限界を考察する。

予備的検討を通して設定したアトリビュートの定義は、あくまでも構成概念を表現するものであるため、定義した内容と実際に問題項目によって測定されていた内容が完全に対応していなかつた可能性が考えられる。アトリビュート個数を3個または4個にするために、アトリビュートの定義として幅広い要素を想定していた本研究においては、問題項目によって規定される実質的なアトリビュートの内容は、設定した定義に足らないことが容易に起こり得た。例えば、A3の「直交座標上での表現の理解」は、グラフの傾きと x , y の値の増減の関係性の理解や、直交座標上の2点間の距離に関する理解、グラフの交点の意味に関する理解など、直交座標上で示されるあらゆる情報を読み取る能力を含めて定義していた。しかしながら、少ない項目数であらゆる情報を読み取る能力すべてに関して問うことは難しく、項目内容によって規定されていたA3の実質的な内容は、設定した定義とは異なっていた可能性がある。実際に測定されていたと考えられるアトリビュート内容については、本節で例をあげながら具体的に考察していく。

本節では、第4章と第5章および前節で行われた考察を統合しながら、アトリビュートの実質的な内容に影響を与える要素について議論する。具体的には、問題項目内容、項目パラメタ、項目の正答率、テストの受験者層との関連から考察する。認知診断モデルを実践段階に引き上げるための重要な要素の一つとして、参加者数や問題数があまり多くない状況での推定の有用性の確保があるだろう。実際に測定されていたアトリビュートが、定義したアトリビュートと異なっていた場合には、誤った解釈によるフィードバックが行われてしまう可能性がある。アトリビュートや問題項目の作成から全3回のテストとフィードバックを行った本研究の実践を通して、参加者数や問題数が少なく情報量の少ない状況

において、実際に測定されるアトリビュートの内容を意図通りに構成することは困難である可能性が示唆された。本研究の参加者は 61 名であり、そのうち 3 回の完全データが得られたのは 42 名であった。これは比較的大きな 1 学級から比較的小さな 1 学年の人数にあたるだろう。また、本研究で使用したテストは、実施時間を 20 分間として 14 項目から構成される比較的短いテストであった。本研究において情報量不足が要因となって生じたアトリビュートの定義内容に関する限界は、認知診断モデルの実践において大きな障壁と感じられる可能性があるため、本研究の結果を深く考察し、今後の CDM 研究で検討を重ねる必要があると考えている。

なお、アトリビュート定義に関する限界への対応に関しては、認知診断モデル実践の展望の節で後述する。

使用モデルの適切性 はじめに、本研究では DINA モデル群（HO-DINA モデル、縦断的 HO-DINA モデル）を使用したが、より適切な項目反応関数がある可能性に言及しておく。本研究でのアトリビュートは、先述した通り、いくつかの能力の集まりとしてそれぞれのアトリビュートが定義されていた。すなわち、本研究で定義したアトリビュートは、いくつかの部分アトリビュートから構成されていた。そのため、DINA モデルのもとでは、能力を一括りにして 3 個のアトリビュートにまとめるのではなく、それぞれの能力を別々のアトリビュートとして構成することが、モデルの仮定に沿っているだろう。または、アトリビュートの包含関係を表現できるモデルを構築して使用することも考えられる。ただし、情報量が少ない状況においてはアトリビュート数にも限界があることに加え、小さな個々のアトリビュートの習得状況が細かく推定されたとしても学習改善に有用な情報とは限らない。より適切な項目反応関数がある可能性を認識した上で、DINA モデル群を使用して幅広いアトリビュートを設定する際の、アトリビュートの定義内容に関する限界を議論する。

アトリビュートの定義と問題項目 幅広いアトリビュートを定義している場合、一つの項目が測定する内容は、アトリビュートの定義全体に対応しないことが考えられる。そのため、幅広いアトリビュートの定義を測定しようとするには、複数の項目で測定される内容を集約することによって、実際に測定されるアトリビュートの内容を幅広い定義に近づけていく必要がある。

しかしながら、本研究では、アトリビュート定義の幅広さに対して項目数が少ないとみに、幅広いアトリビュートを測定するための項目数が不足し、実質的なアトリビュートの

内容が十分に構成されていなかった可能性が考えられる。また、測定されるアトリビュートの内容が十分に構成されていない状況では、一つの項目の小さな変化によって、アトリビュートの実質的な内容が大きく変わってしまう可能性が考えられる。

例として再び A3 をあげる。分析 1において、A3 を要求するテスト項目が実質的に規定していた A3 の内容は、テスト 1 の項目 (5) 「直線のグラフの切片の読み取り」、(6) 「点の座標の読み取り」、「直線のグラフの傾きの読み取り」、(7) 「グラフの形状（直線、曲線）と変化の割合の一定性の関係の理解」、「点の座標の読み取り」、(8) 「2 点間の距離の求め方」、(9) 「点の座標の読み取り」、「直線の式の求め方」、「交点の座標の求め方」、(10) 「直線上の点の座標の文字を用いた表し方」、「2 点間の距離の求め方」、(13) 「一次関数の傾きの値とグラフの方向の関係性の理解」、(14) 「関数関係を表すグラフの選択」であった。

一方で、分析 3 では、これらの問題項目にテスト 2 とテスト 3 の項目も加わり、テスト 2 の項目 (7) 「グラフにおける変域（値域）の読み取り」、「グラフの形状（直線、曲線）と変化の割合の一定性の関係の理解」、「点の座標の読み取り」、(13) 「反比例の比例定数の値とグラフの形状」、テスト 3 の項目 (7) 「点の座標の読み取り」、「 x の値が増加したときの y の値の増減とグラフの方向の関係の理解」、「グラフにおける変域（値域）の読み取り」（それぞれのテストのその他の問題項目では、テスト 1 に同じ。）の要素が A3 の内容を実質的に規定していた。

このような状況で、テスト 1 に A3 を測定するような新たな項目を加えた場合と、テスト 3 に A3 を測定する新たな項目を加えた場合では、項目を加えることによる影響がテスト 1 で大きくなることは容易に想像できるだろう。幅広いアトリビュートを定義するために、様々な側面の能力を要求するような問題項目を作成したとしても、それぞれの側面が 1 回または 2 回しか問われていないようなテストでは、一つの小さな変化によって容易にアトリビュートの実質的な内容が変わり得ると考えられる。

アトリビュートの定義と項目パラメタ 前項では、アトリビュートの実質的な内容が問題項目によって規定されることについて考察してきたが、この議論においては項目パラメタも考慮に入れなければならない。例えば、分析 1 における状況を考える。テスト 1 の項目 (10) では、A3 に関して「直線上の点の座標の文字を用いた表し方」と「2 点間の距離の求め方」の側面を規定していた。しかしながら、分析 1 で推定された項目 (10) の slipping パラメタは $s_{10} = .919$ と極めて高かった。このことは、(A1 は習得しているものとして,) A3 を習得しているにもかかわらず項目 (10) に正答できない確率が 91.9% ある

ことを表していた。従って、項目(10)に正答せずともA3を習得していると推定されることになる。実際に、テスト1の項目(10)の正誤と分析1におけるA3の習得確率の関係をFigure31に示す。項目(10)に誤答している生徒のうち半数弱がA3を習得していると推定されていることが読み取れる。すなわち、作問者は、A3を習得している生徒には「直線上の点の座標の文字を用いた表し方」を知っていてほしいという意図を込めていたにもかかわらず、高いslippingパラメタによって、「直線上の点の座標の文字を用いた表し方」がA3の実質的な内容に含まれなかつたことを意味する。また、次項以降で考察するが、前節で言及したように項目パラメタと正答率の間には強い相関があったことから、項目(10)がA3の内容を構成しなかつた要因には、項目(10)の難易度との関連を考慮する必要がある。なお、「2点間の距離の求め方」は項目(8)と(10)の両方によって測定されているため、このような議論においては項目(8)との兼ね合いで考慮されるが、ここでは言及しない。

同様にして、guessingパラメタが高い場合に関しては、例えばテスト3の項目(5)($g_{5(3)} = .907$)において、A3を習得していないくとも項目(5)に正答できるということは、項目(5)で問っていた「直線のグラフの切片の読み取り」がA3の実質的な内容に含まれていないことを意味している可能性がある。実際に、テスト3の項目(5)の正誤と分析3におけるA3の習得確率の関係をFigure32に示す。項目(5)に誤答した生徒においても、比較的高いA3の習得確率が推定されており、実際に測定されたA3の内容のうち、項目(5)で測定された内容は重視されていなかつたことが考えられる。

このように、実際に測定されるアトリビュートの内容を意図通りに構成するためには、項目パラメタが高くならないよう問題項目を作成する必要がある。項目パラメタが高くなつた項目で問っていた側面は、アトリビュートの実質的な内容に含まれなくなつてしまふ。

なお、一般的に、項目パラメタが高く推定された項目があつたときには、その項目がアトリビュートをよく測定できておらず、項目の質が悪かつたと解釈される。しかしながら、本研究では、情報量の不足により、測定されるアトリビュートの内容が十分に構成されておらず、一つの小さな変化によってアトリビュートの実質的な内容が変わってしまう状況であった。このような状況では、項目パラメタの高い項目が測定していた側面がアトリビュートの実質的な内容に含まれなかつたという、上述したような解釈も可能であると考えられる。このことに関する考察は、「情報量の少ない状況におけるアトリビュート定

義の限界に関する考察」の項で取り上げる。

アトリビュート定義と項目の正答率 これまで述べてきたように、正答率の低い問題では slipping パラメタが高く推定されていた ($r_{p,s} = -.94$)。また、前項では、項目パラメタの高い項目で測定されていた側面が、アトリビュートの実質的な内容に含まれなかつた可能性に言及した。これらのことは、正答率によるアトリビュートの実質的な内容への影響がある可能性を示唆している。第 4 章の章末で言及した問題項目の難易度とアトリビュートの定義の関連を、次項から考察する。

情報量の少ない状況におけるアトリビュート定義の限界に関する考察 本節のこれまでの議論から、幅広いアトリビュートの実質的な内容を意図的に構成する難しさが考察できる。

ここで、項目パラメタとアトリビュート習得確率に対して、正答率が低い要因を説明するための二つの手段という見方ができる。一つ目は項目の質に原因帰属する説明であり、二つ目はアトリビュート習得確率に原因帰属する説明である。ここでは例として、A2 を要求し、合成関数の考え方を問うていたテスト 1 の項目 (3) をあげる。作問者は、A2 を習得している生徒に対して合成関数の考え方まで応用できることを要求したい、すなわち、A2 の定義に合成関数の考え方の理解を含めたいと考えているとする。

項目 (3) における先述した二つの手段とは、項目 (3) の正答率が低いことを、項目 (3) が A2 を正しく測定できていないことによって説明することと、多くの受験者の A2 の習得確率が低いことによって説明することである。正答率の低さの要因が、受験者の A2 の習得確率が低いことによって説明されれば、A2 の定義に合成関数の考え方の理解が含まれていることになる。しかしながら、受験者が少ないとには正答率の低い問題の正答者は極めて少なくなる。項目 (3) の正答者の情報が不足するため、A2 の定義に合成関数を含み、アトリビュート習得確率に原因帰属するほどの情報が得られず、低い正答率が高い slipping パラメタによって説明されてしまう。また、項目数が少ないと、当該項目の他でアトリビュートの実質的な内容を十分に構成することが困難になる。項目 (3) の他に合成関数の考え方を問うている項目がないため、A2 の定義に合成関数を含み、アトリビュート習得確率に原因帰属するほどの情報が得られず、低い正答率が高い slipping パラメタによって説明される。

情報量の少ない状況において、アトリビュートの内容を固定する方法の一つが、事前情報を与えることである。上の例では、項目 (3) の slipping パラメタが高くないという事前

情報を与えることによって、項目(3)で測定している内容がA2の内容に含まれることを固定することができ、項目(3)の正答率の低さは受験者のA2の習得確率の低さによって説明されると考えられる。実際に、モデル1.3において項目(3)のみslippingパラメタを低くする事前情報($s_3 \sim Beta(1, 6)$)に変更したモデル(モデル1.3'とする。)で分析を行った場合の、項目(3)の正誤とA2習得確率の関係をFigure 33(右)に示す。モデル1.3と比較してモデル1.3'では、項目(3)に正答した個人ではA2習得確率の変動があまり認められない一方で、項目(3)に誤答した個人ではA2の習得確率が全体的に低下している。なお、モデル1.3'によるslippingパラメタの推定結果は、Figure 34に示すように、事前情報に一致して項目(3)でのみ低下が認められた(モデル1.3': $s_3 = .573 (SD = .150)$ cf. モデル1.3: $s_3 = .791 (SD = .092)$)。このとき、モデル1.3'ではWAIC = 788.9 (SE = 29.4)であり、モデル1.3のWAIC(782.9, SE = 29.5)よりも大きかった。この例ではSEを考慮すると大きなWAICの差ではないものの、WAICに基づくモデル比較が必ずしも正解でなく、実際に測定されるアトリビュートの内容を意図的に固定するために事前情報を与えることの有用性が考えられる。

受験者層への分析結果の依存性 本節のこれまでの議論を踏まえると、事前情報を与えない場合、情報量の少ない状況では、全く同じ問題項目であっても受験者としてどのような集団を選択するかによって、測定されるアトリビュートの内容が変わることになる。例えば、本研究のテストを高校生に実施した場合、項目(3)や(10)の正答率が高まるによって、合成関数の考え方方がA2の実質的な内容に含まれたり、直線上の点の座標の文字を用いた表し方がA3の実質的な内容に含まれたりすることにより、項目(3)や(10)のslippingパラメタは低くなると考えられる。このことは、本研究をそのまま高校生対象として実施することで明らかにできるだろう。

現状のDINAモデルでは、情報量が少ない状況で問題項目を作成する際には、受験者集団の能力分布を踏まえた上で項目の正答率や項目パラメタを考慮する必要がある。テストを実施する前に測定されるアトリビュート内容を意図的に構成することは、非常に困難に感じられる。

情報量が少ないとによる困難

本研究では、参加者61名、項目数14問であり、情報量が少ない状況であった。前節では、アトリビュート定義に関する困難について考察した。本節では、情報量が少ないと

によって生じていると考えられるその他の困難について考察する。

推定結果の敏感性 情報量の少ない状況において、事前情報による推定結果の変動が大きいと考えられる。前節での(3)のslippingパラメタの事前分布に対する事前情報が、その例の一つである。また、第4章で述べたように、テスト1の事前パラメタはフィードバック時（モデル1.6）と分析時（モデル1.3）で異なっていた。分析1におけるモデル1.6による分析結果とモデル1.3による分析結果に関して、アトリビュート習得パターンのクロス集計表をTable 24に示す。項目パラメタが低くなる方向に強い事前情報を与えているモデル1.6で、アトリビュート習得パターンを過小に推定していることを読み取ることができ、事前情報による推定結果への影響が現れている。

さらに、分析3において、本研究では総合的な能力 θ の分布の平均パラメタ μ_θ は、時点間で低下しないことを想定して、 $\delta_t \geq 0$ の制約を課しているモデルC-2.3で分析を行った。しかしながら、平均パラメタ μ_θ の値に対して制約を課していないモデルD-2.3で分析を行ったところ、 $\mu_{\theta_2} = -0.04$ ($SD = 0.20$, 95%CI = [-0.44, 0.37]), $\mu_{\theta_3} = -0.25$ ($SD = 0.24$, 95%CI = [-0.71, 0.24]) (μ_{θ_1} は0に固定)と推定され、 μ_θ は時点を重ねるごとに減少していた。95%CIは大きいものの、事前情報による推定結果への大きな影響が現れている。

全体の関連の中での解釈の必要性 本研究での分析結果は、あくまでもモデル1.3およびモデルC-2.3のもとでの結果であり、事前情報の与え方によっては推定結果が大きく変わることに注意する必要があった。前項での事前情報による推定結果への影響に加え、前節での議論まで踏まえると、すべての分析設定が互いに密接に影響を与え合うと考えられる。認知診断モデルが全体の要素の関わりをモデル化したものであることは言うまでもないが、情報量の少ない状況ではそれらの関わりがより敏感になり、それぞれのパラメタの解釈が困難になる。

認知診断モデル実践の展望

本章ではこれまで、第4章と第5章で行われた考察や3回の分析結果を統合しながら、本研究での認知診断モデルの実践における限界や困難について述べてきた。本節では、それらの限界や困難を踏まえた上で、今後の認知診断モデル実践を展望する。具体的には、問題項目に関する側面、フィードバック方法に関する側面、認知診断モデルと他の教育実践との併用に関する側面から展望する。

質の高い問題項目の作成と蓄積 情報量の少ない状況において、アトリビュートの実質的な内容を意図通りに構成するためには、受験者集団の能力分布を踏まえた上で項目の正答率や項目パラメタを考慮する必要があった。一方で、実際にテストを実施する前に受験者集団の能力分布や正答率を予測することは困難であった。そのため、作問者の意図が反映されるような質の高い問題項目を作成するためには、実際に複数回のテストを実施して修正していく必要があると考えられる。

教育の実践場面で、問題項目の修正を繰り返していくためには、長期間に渡って、問題項目とそれらの正答率や各種パラメタ、および認知診断モデルに関するノウハウを蓄積していく必要があるだろう。学校などの教育機関内で実践を行ったデータとノウハウを残していくことや、認知診断モデルの実践研究を通して教育関係者向けに問題項目プールを作成していくことが考えられる。教育機関内や研究を通して蓄積された質の高い問題項目リストは、テスト作成の負担を軽減するだろう。また、教育機関内で蓄積されたデータやノウハウは、受験者の集団の能力分布と項目の正答率を予測するときに役立つと考えられる。

さらには、問題項目に限らず、データや分析結果を含めて蓄積しておくことも考えられる。過去の問題項目に関する情報を分析に加えることが可能となれば、テスト実施時の受験者数や項目数が少ない状況においても、情報量を増やし、分析結果の敏感性を下げることが期待できる。このような長期的な運用も可能性として考慮しつつ、CDM 実践研究を重ねて、認知診断モデルのより良い実践方法を検討していくことが必要だろう。

フィードバックの内容とその変動 本研究では、各回のテスト後に毎度分析を実施し、フィードバックを行った。分析間比較に関して考察したように、本研究で行った分析では、分析間で個人パラメタの推定結果が異なることを許すモデルであった。全体的な比較ではあまり大きな分析間の違いは認められなかったが、それぞれの個人の推定結果に目を向けると、分析間で比較的大きな違いが認められる可能性は十分に考えられる。このことは、生徒にとってフィードバックされる内容が時点間で異なってしまう可能性があることを意味していた。例えば、Figure 35 に示す生徒では、フィードバック 2 では、テスト 2 における A3 の習得確率は 88% とフィードバックされたが、フィードバック 3 では、テスト 2 における A3 の習得確率のグラフは約 50% の位置にかかれていたということが生じていた。

このようなフィードバック内容の変動を避けるためには、変動部分をフィードバックし

ない方法と、分析ごとに推定されたパラメタを固定していく方法が考えられる。変動部分をフィードバックしない方法では、過去のテストに関する推定結果の値には、過去の時点での分析結果の値を記載すればよい。分析ごとに推定されたパラメタを固定していく方法に関しては、Zhan (2020b) のマルコフ推定法など、すでに提案されているモデルが存在する。しかしながら、マルコフ推定法では時点間の項目パラメタを固定する必要があることや、分析ごとに推定されたパラメタを固定することによって各分析に使うことのできる情報量が減ることを考慮すると、現状では必ずしも良い方法とは限らないと考えられる。

また、フィードバック内容の変動への対応と合わせて、分析結果の見せ方への配慮の必要性も考えられる。本研究に参加した生徒に対して本研究の3回のテストとフィードバックの感想を尋ねたところ、「(アトリビュート習得確率に関して) 0% と書かれると心にくるものがある」という感想が得られた。生徒のやる気を削ぐ可能性のある内容については、見せ方を工夫することの必要性が示唆される。

フィードバック内容の変動に関しては、分析ごとに推定されたパラメタを固定していくモデルに関して実践研究を重ねるとともに、質の高い問題項目の追及と情報量を補う方法の研究を行いながら、フィードバックする際の推定結果の見せ方について今後も検討していく必要があるだろう。

他の教育実践との併用の必要性 第5章の考察で言及した通り、時点間の能力 θ の全体的な向上は認められなかった。フィードバックコンテンツをただ返却するだけでは、学習改善の効果は得られない可能性が考えられる。個人ごとに注目すれば能力 θ が比較的大きく増加した生徒もいたが、そのような生徒は動機づけが高く、自らフィードバックコンテンツを活用して復習に取り組める生徒であった可能性が高い。十分な学習改善の効果を得るためにには、第1章で取り上げたような、これまでに提案されている教育的工夫との併用が大切だろう。

第1章では、中学校における数学教育や関数教育の重要性について触れた後、関数理解を促進するための教育的な工夫として、グラフ電卓の活用による成績向上の効果が示されている (e.g. Harskamp et al. 2000; Quesada & Maxwell, 1994) ことについて述べた。Slavit (1997) や Ruthven (1990) は、グラフ電卓を活用することで、グラフの諸性質に関する理解が高まることや、グラフと数式との関連づけに関する能力が高まることを示していた。また、Schwarz and Dreyfus (1995) は、数式、表、グラフの3種類の表現形式間の変換を要求する具体的な活動を行うことができるソフトウェアを活用し、関数の諸性質に

関する理解を促進していた。このような複数の表現形式間の結び付きの獲得は関数理解において重要視されており (Leinhardt et al., 1990), 本研究では A3 の「直交座標上の表現の理解」で測定されていた要素であると考えられる。本研究において A3 の習得確率が低く推定された生徒に対して、グラフ電卓等のソフトウェアを使った活動を行うことや, Brenner et al. (1997) で行われていた具体的な関数的事象を多様な形式で表現する活動を行うことで、より大きな教育的効果が得られることが期待できる。また、阿部 (2012) で主張されていた関数教育における数学的な概念と現実的な事象との結び付けの重要性に関しては、本研究では A2 の「関数的思考の理解」に含まれていた要素であると考えられる。そのため、A2 の習得確率が低く推定された生徒に対して、久保・岡崎 (2013) で行われていたような、数学的表記と具体的な関数的事象との対応づけの活動を行うことによって、より大きな教育的効果が得られると考えられるだろう。

第 1 章では続いて確認テストに関する現在の課題について言及し、確認テストの学習への活用の可能性として、フィードバック (Harks et al., 2014; Hattie & Timperley, 2007) と、テストの意図や位置づけに対して生徒が抱く認識による影響（「テストへの適応」；村山, 2006）を取り上げた。そして、フィードバックと「テストへの適応」を、Hattie and Timperley (2007) によるフィードバックの三つの軸（目標、道筋、次の段階）に当てはめて捉えた。具体的には、作問者がテストに込めた意図を生徒と共有することは目標の提示の役割を果たすと考えられた。また、テスト結果から得られる生徒の学習上の強みや弱みをフィードバックし、今後克服していくべき部分を示すことにより、目標達成のための道筋の提示が可能であると考えられた。さらに、弱みに対する学習方略を生徒にフィードバックすることが次の段階の提示の役割を果たすことを述べた。

本研究においては、測定していたアトリビュートやその内容、および各問題項目が要求していたアトリビュートの習得に必要な考え方についてフィードバックによって配布していたため、テストの意図を共有するための環境は整っていた。本研究では、フィードバックコンテンツを配布しただけであったため、実際によく共有できていたかどうかについては断言できないものの、テストに認知診断モデルを適用することによって従来よりもテストの意図が明確になり (cf. 佐宗, 2022), テストの意図の生徒との共有による、学習の「目標」の提示が可能である点での認知診断モデルの有用性を示すことができたと考える。

また、本研究では各アトリビュートの習得確率をフィードバックしていた。テストに認知診断モデルを適用することで、アトリビュートごとに能力を分類した上で生徒の強みと

弱みに関する情報をフィードバックすることができた。目標達成のために克服すべき部分を示すことによる、生徒への「道筋」提示における認知診断モデルの有用性を確認することができたと考える。「次の段階」の提示としては、本研究のフィードバックに含めた、弱みに関する情報、各問題項目が要求していたアトリビュートに関する考え方および各項目の詳解が、その役割を果たすと考えられる。ただし、本研究においてはフィードバックコンテンツを配布しただけであったため、このような「次の段階」に関する情報を活用するかどうかは、生徒の動機づけ等に依存していた可能性が考えられる。

CDM の実践を行った本研究において、村山（2006）の「テストへの適応」や Hattie and Timperley（2007）のフィードバックの三つの軸の観点から見ると、テストに対する認知診断モデルの適用によって、テストを学習改善に活用するための材料は揃っていたと考えられる。一方で、本研究では、生徒の総合的な能力 θ やアトリビュート習得に関して全体的な大きな効果は認められなかった。このことから、テストへの認知診断モデルの適用によって得られるフィードバックに有用な情報と、関数理解のための教育的工夫を組み合わせていくことで、より効果的に生徒の関数理解を高めていくことができると考えられる。

本研究の総括

最後に本研究を総括する。本研究の目的は、縦断的認知診断モデルの実践とフィードバックを行い、生徒の能力とアトリビュート習得への効果や認知診断モデル実践における難しさを検討することであった。認知診断モデルの開発研究が多く進められるなかで、アトリビュートの設定からテストの作成および実施とフィードバックまでのすべてを行った研究は少なく、その点に本研究の意義があったと考える。本研究では、中学2年生と中学3年生に対して数学の関数領域に関するアトリビュートとテストを作成し、全3回のテストを実施した。テスト1実施後には HO-DINA モデルを用いた分析とフィードバック、テスト2およびテスト3実施後には縦断的 HO-DINA モデルを用いた分析とフィードバックを行った。

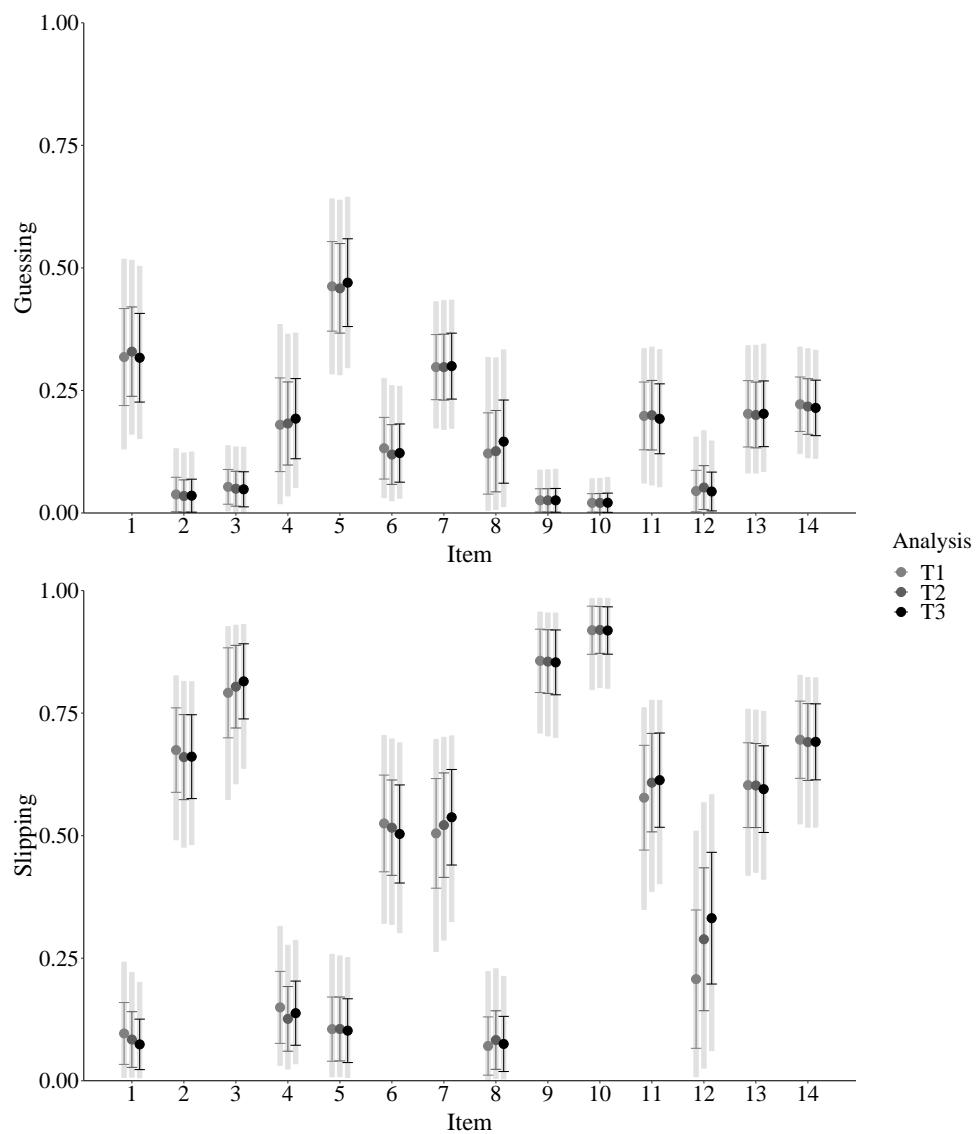
第3章ではアトリビュートの設定とテスト問題の作成の手続きについて詳説した。第4章では、分析1の結果を、問題項目内容の観点とアトリビュート内容の観点から考察した。第5章では、分析3の結果について、総合的な能力 θ やアトリビュート習得の変化に注目して考察した。分析3の結果、総合的な能力 θ やアトリビュート習得における全体的な大きな効果は認められなかった。

本章では、はじめに、各種パラメタの推定結果に関して分析間の比較を行った。いずれのパラメタにおいても、*SD* を考慮すると全体的には大きな違いは認められなかった。しかししながら、アトリビュートパラメタの推定値に関して分析間で若干の変動が見られた。続いて、アトリビュートの設定や問題項目の作成を行った本研究を通して、受験者数や問題項目数が少ない状況において、アトリビュートの実質的な内容を意図通りに構成することの難しさが示唆されたことを述べた。また、情報量が少ないとことにより、事前情報や受験者集団の能力分布など、あらゆる要因に関して推定結果が敏感であるという困難さと、全体の関連の中での解釈の難しさにも言及した。本研究の推定結果は、参加者数や問題項目数の少なさによって事前情報に対して敏感であり、推定結果の安定性に限界があった。本研究で生じたパラメタ推定に関するこれらの問題点の多くは、参加者数や問題項目数を増やすことによって解決できると考えられる。一方で、教育現場の実践場面では、従来のシミュレーション研究や既存データへのモデル適用の研究で扱われているほどの受験者数や問題項目数が得られる場面は少ないだろう。

そこで、本研究では、情報量が少ない状況における認知診断モデル実践の構想として、教育機関内や認知診断モデルの実践研究を通して、問題項目の修正を繰り返して蓄積すること、それらの問題項目を使用した過去のデータを分析の際に利用することで情報量を増やすことを提案した。また、フィードバックされる推定結果が変動することについて、分析ごとに推定されたパラメタを固定していくモデルの実践研究の可能性について言及した。さらに、総合的な能力 θ の全体的な大きな向上が認められなかつた一方で、テストへの認知診断モデルの適用から得た情報は有用なフィードバックに寄与することを考察し、認知診断モデルと他の教育実践との併用が大切である可能性について述べた。

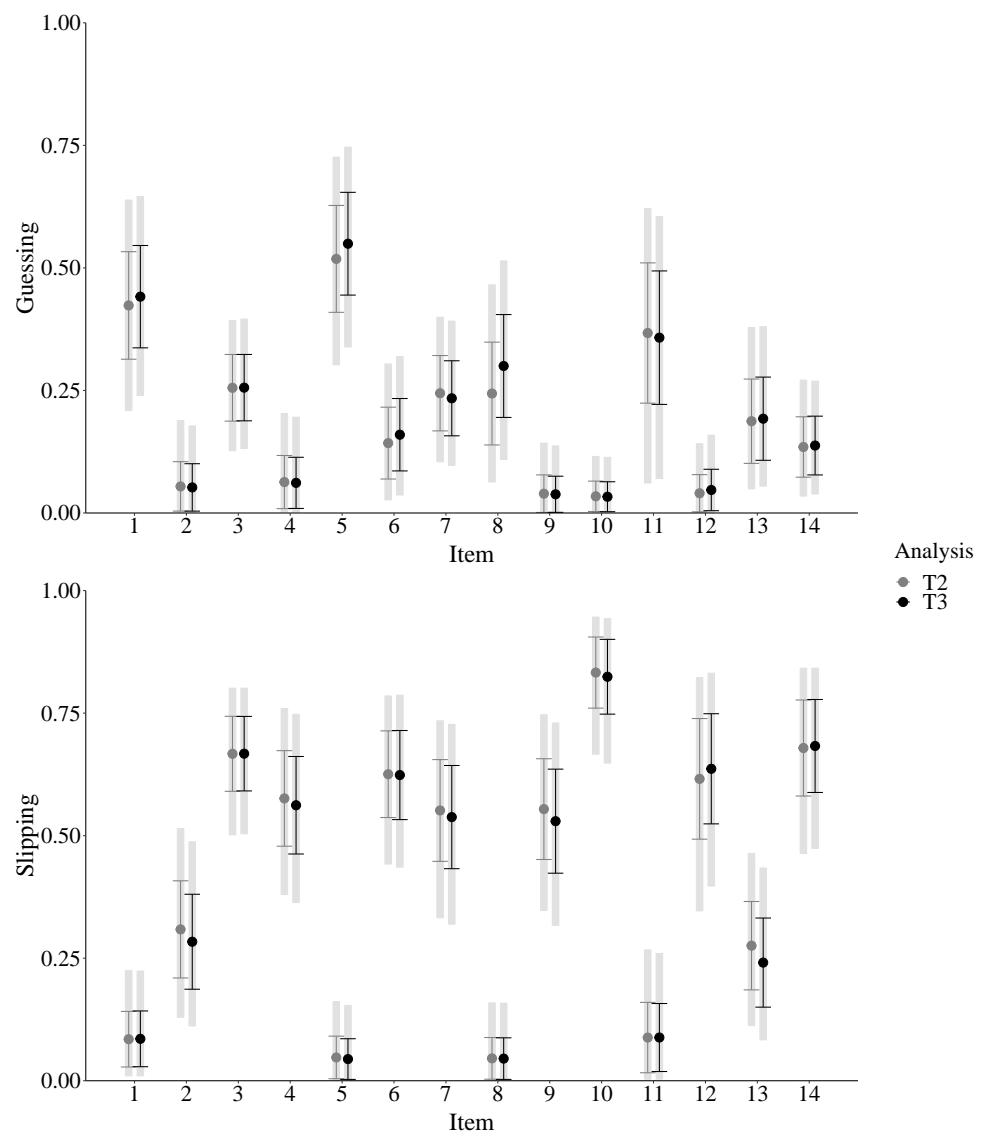
本研究の一度の実践だけでは、あらゆる要素に関して断言することはできない。認知診断モデルには、本研究で使用した HO-DINA モデルや縦断的 HO-DINA モデルの他にも、様々なモデルがある。認知診断モデルを適用する対象も、当然ながら中学数学の関数領域に限られない。本研究は実践研究の一つとして、認知診断モデルの実践において課題となり得る要素を示唆したに過ぎないかもしれない。今後も認知診断モデルの実践研究を重ねることで、実践における困難の解消を目指し、認知診断モデルを実践段階へと引き上げる必要があるだろう。

Figure 24
テスト 1 の項目パラメタに関する分析間比較



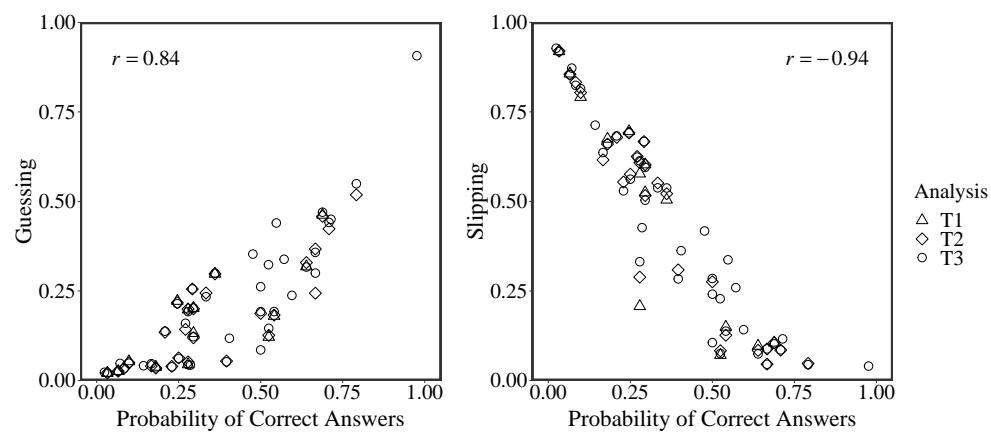
注) エラーバーは SD , 薄灰色の縦線は 95%CI。T1 : 分析 1, T2 : 分析 2, T3 : 分析 3。

Figure 25
テスト 2 の項目パラメタに関する分析間比較



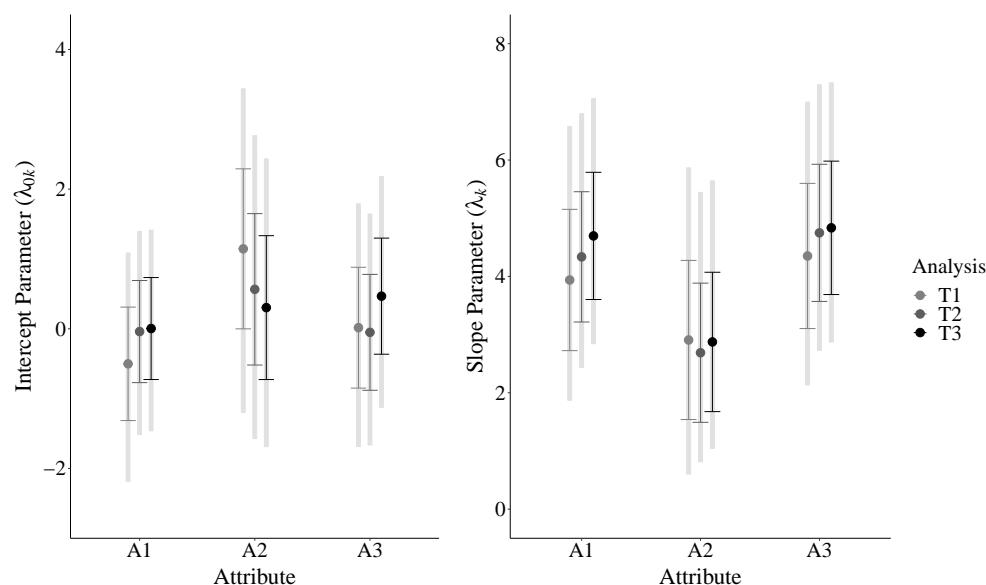
注) エラーバーは SD , 薄灰色の縦線は 95%CI。T2 : 分析 2, T3 : 分析 3。

Figure 26
正答率と項目パラメタの推定値の散布図



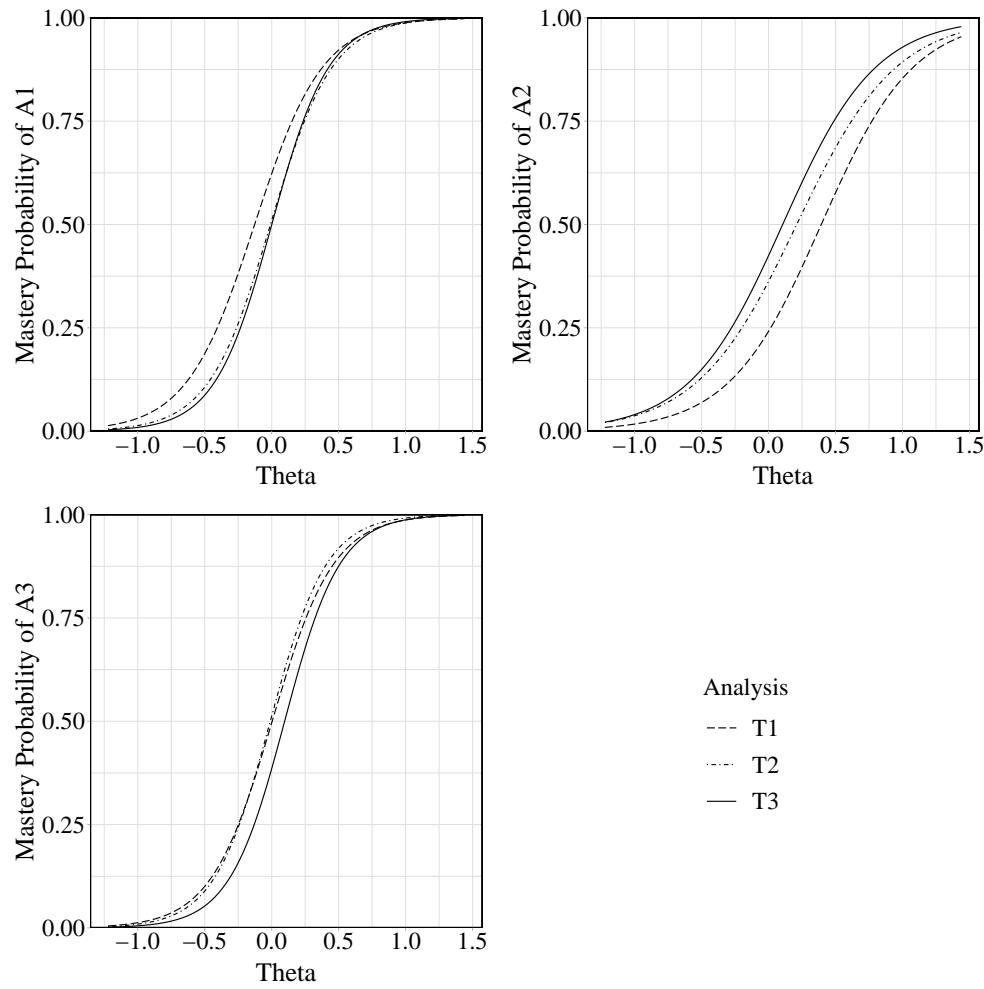
注) T1 : 分析 1, T2 : 分析 2, T3 : 分析 3。

Figure 27
アトリビュートパラメタに関する分析間比較



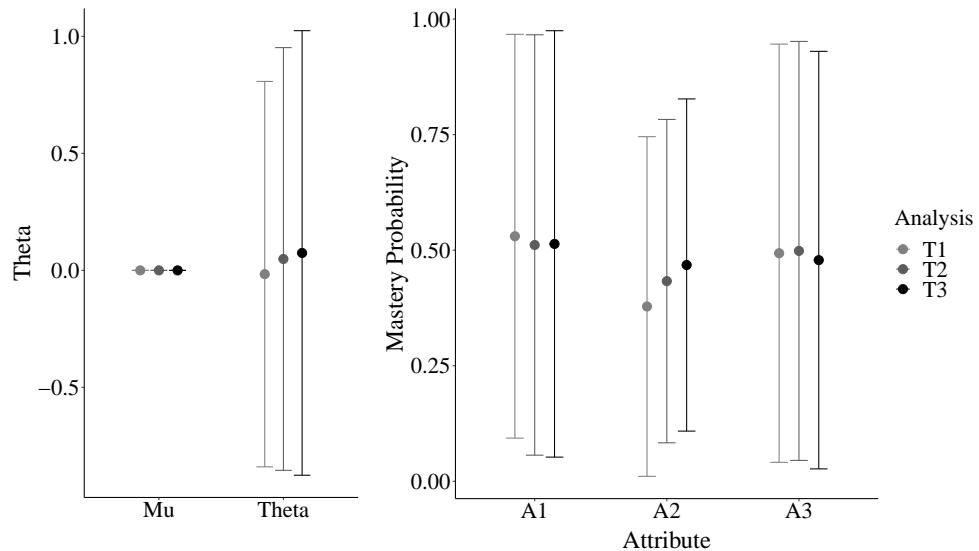
注) エラーバーは SD , 薄灰色の縦線は 95%CI。A1:代数的手手続きの理解, A2:関数的思考の理解, A3:直交座標上での表現の理解。T1:分析 1, T2:分析 2, T3:分析 3。

Figure 28
能力 θ とアトリビュート習得確率の関係性の分析間比較



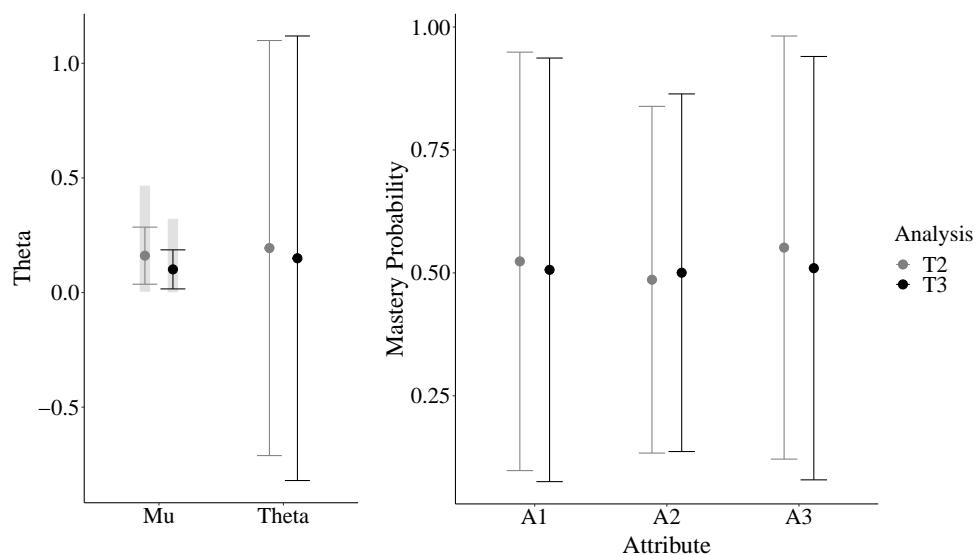
注) 曲線の形状がアトリビュートパラメタによって決定される。A1:代数的手続きの理解, A2:関数的思考の理解, A3:直交座標上での表現の理解。T1:分析1, T2:分析2, T3:分析3。

Figure 29
テスト 1 の個人パラメタに関する分析間比較



注) 平均値のプロット、エラーバーは SD 。Mu は能力 θ の平均パラメタ μ_0 。ただし、テスト 1 の μ_0 は 0 に固定。完全データ 42 名から作図。A1：代数的手続きの理解、A2：関数的思考の理解、A3：直交座標上での表現の理解。T1：分析 1、T2：分析 2、T3：分析 3。

Figure 30
テスト 2 の個人パラメタに関する分析間比較



注) 平均値のプロット、エラーバーは SD 。Mu は能力 θ の平均パラメタ μ_0 。ただし、 μ_0 では推定値のプロット、エラーバーは SD (i.e. 事後標準偏差)、薄灰色の縦線は 95%CI。完全データ 42 名から作図。A1：代数的手手続きの理解、A2：関数的思考の理解、A3：直交座標上での表現の理解。T2：分析 2、T3：分析 3。

Table 22
テスト 1 のアトリビュート習得パターンに関する分析間比較

		分析 1								
分析 2		000	100	010	001	110	101	011	111	合計
000		15								15
100			2							2
010				2						0
001					2					2
110						2				0
101			2				6			8
011							2			0
111							3	12		15
合計		15	4	0	2	0	9	0	12	42
		分析 1								
分析 3		000	100	010	001	110	101	011	111	合計
000		15				1				16
100			2							2
010				2						0
001					1					1
110						2				0
101			1				2			3
011							2			0
111			1				7	12		20
合計		15	4	0	2	0	9	0	12	42

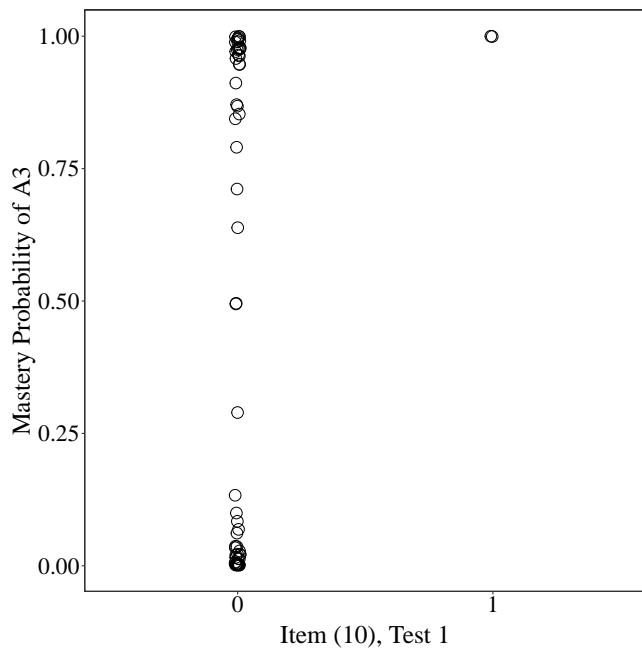
注) アトリビュート習得パターンを表す 3 桁の数字は、左から A1, A2, A3 の習得の有無を表し、1 はアトリビュートを習得済、0 はアトリビュートを未習得であることを意味する。完全データ 42 名から作成。A1 : 代数的手手続きの理解, A2 : 関数的思考の理解, A3 : 直交座標上での表現の理解。

Table 23
テスト 2 のアトリビュート習得パターンに関する分析間比較

分析 3	分析 2								合計
	000	100	010	001	110	101	011	111	
000	14						1		15
101		2							2
011			1						1
001				1			1		2
111					1				0
101						1			1
011							1		1
111						2		18	20
合計	14	2	1	1	0	4	2	18	42

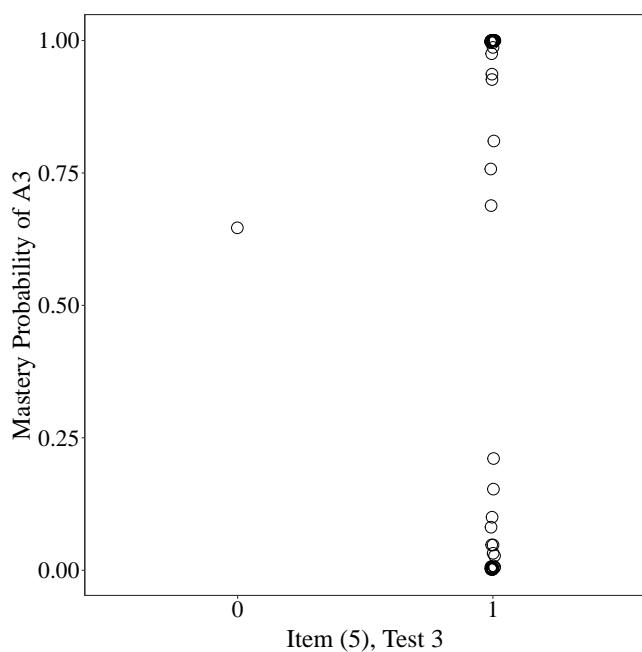
注) アトリビュート習得パターンを表す 3 桁の数字は、左から A1, A2, A3 の習得の有無を表し、1 はアトリビュートを習得済、0 はアトリビュートを未習得であることを意味する。完全データ 42 名から作成。A1 : 代数的手続きの理解, A2 : 関数的思考の理解, A3 : 直交座標上での表現の理解。

Figure 31
テスト 1 の項目 (10) の正誤と分析 1 における A3 習得確率



注) テスト 1 に解答した 61 名から作図。横軸は 1 が正答, 0 が誤答。A3 : 直交座標上での表現の理解。

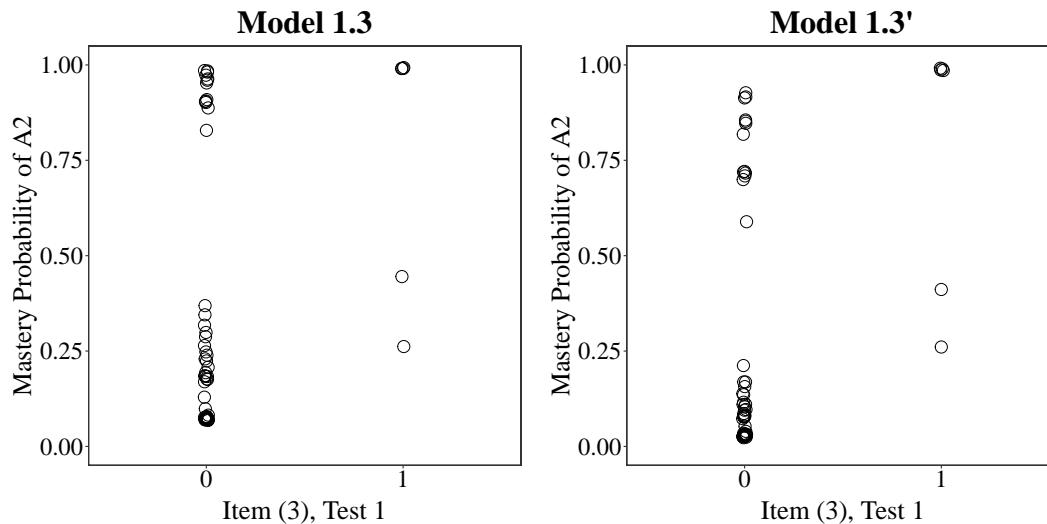
Figure 32
テスト 3 の項目 (5) の正誤と分析 3 における A3 習得確率



注) 完全データ 42 名から作図。横軸は 1 が正答, 0 が誤答。A3 : 直交座標上での表現の理解。

Figure 33

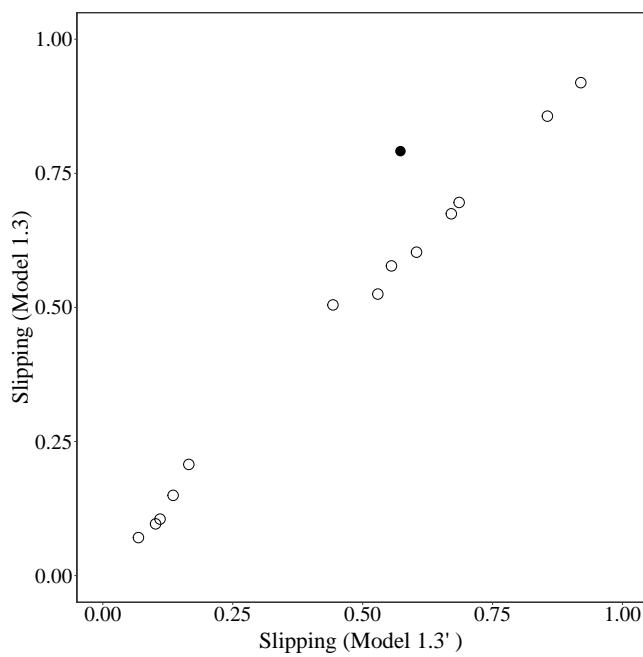
テスト 1 項目 (3) の正誤と A2 習得確率の関係に対する s_3 の事前情報の影響



注) モデル 1.3 による分析結果(左)と、モデル 1.3 において s_3 の事前分布だけを $Beta(1, 6)$ に変更したモデル(モデル 1.3')による分析結果(右)。テスト 1 に解答した 61 名から作図。横軸は 1 が正答、0 が誤答。A2 : 関数的思考の理解。

Figure 34

テスト 1 の項目パラメタに対する s_3 の事前情報の影響



注) 横軸は、モデル 1.3 において s_3 の事前分布だけを $Beta(1, 6)$ に変更したモデル(モデル 1.3')による推定値。縦軸はモデル 1.3 による推定値。●が項目 (3) を表す。

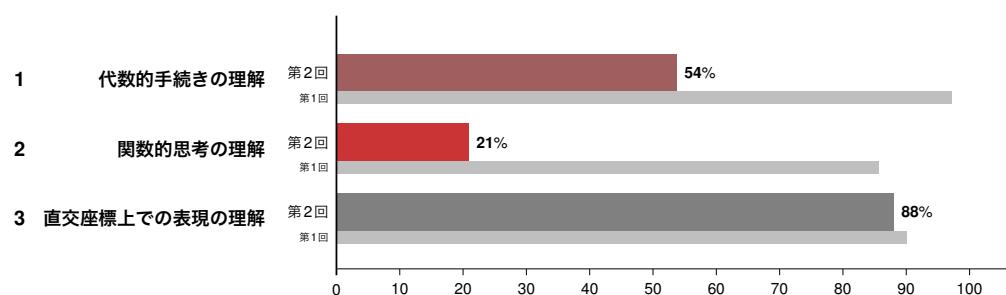
Table 24
分析 1 のアトリビュート習得パターンにおけるモデル 1.3 とモデル 1.6 の比較

モデル 1.3	モデル 1.6								合計
	000	100	010	001	110	101	011	111	
000	26								26
100		5							5
010			1						0
001	2			1					3
110					5				0
101		5				5			10
011						5			0
111	2	3	1	4	3		4	4	17
合計	30	13	0	2	4	8	0	4	61

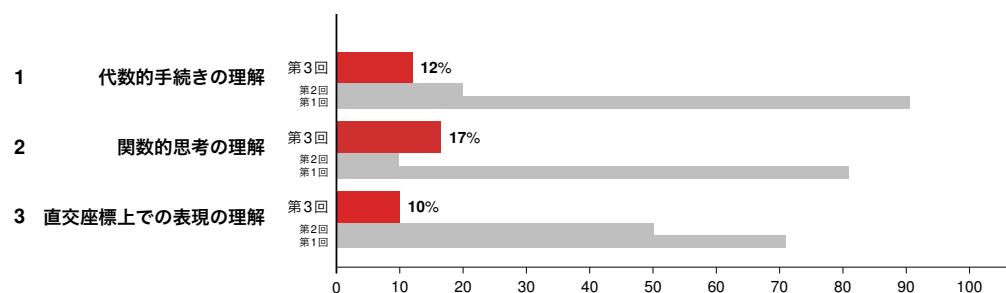
注) アトリビュート習得パターンを表す 3 桁の数字は、左から A1, A2, A3 の習得の有無を表し、1 はアトリビュートを習得済、0 はアトリビュートを未習得であることを意味する。テスト 1 に解答した 61 名から作成。A1 : 代数的手手続き的理解, A2 : 関数的思考の理解, A3 : 直交座標上での表現の理解。

Figure 35
フィードバック 2 とフィードバック 3 におけるアトリビュート習得確率図示欄

測定能力別 達成状況



測定能力別 達成状況



注) フィードバック 2 で返却したフィードバックシート内のアトリビュート習得確率を図示する棒グラフ(上)。フィードバック 3 で返却したフィードバックシート内のアトリビュート習得確率を図示する棒グラフ(下)。図に示した生徒の ID は 1313。

引用文献

- 阿部 好貴 (2012). 数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察——関数領域に焦点をあてて—— 数学教育学研究：全国数学教育学会誌, 18(1), 23–29. https://doi.org/10.24529/jasme.18.1_23
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663–689. <https://doi.org/10.3102/00028312034004663>
- Brin, S., & Page, L. (1998). The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer networks and ISDN systems*, 30(1–7), 107–117. [https://doi.org/10.1016/S0169-7552\(98\)00110-X](https://doi.org/10.1016/S0169-7552(98)00110-X)
- Brooks, S. P., & Gelman, A. (1998). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of computational and graphical statistics*, 7(4), 434–455. <https://doi.org/10.1080/10618600.1998.10474787>
- Cai, J., Nie, B., & Moyer, J. C. (2010). The teaching of equation solving: Approaches in Standards-based and traditional curricula in the United States. *Pedagogies: An International Journal*, 5(3), 170–186. <https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.485724>
- Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Mathematical Association of America Research Sampler*, 9. Retrieved from <https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function> (December 8, 2022)
- Chen, J., de la Torre, J., & Zhang, Z. (2013). Relative and absolute fit evaluation in cognitive diagnosis modeling. *Journal of Educational Measurement*, 50(2), 123–140. <https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.2012.00185.x>
- Chen, Y., Li, X., Liu, J., & Ying, Z. (2017). Regularized latent class analysis with application in cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 82(3), 660–692. <https://doi.org/10.1007/s11336-016-9545-6>
- Chiu, C. Y., & Douglas, J. (2013). A nonparametric approach to cognitive diagnosis by proximity to ideal response patterns. *Journal of Classification*, 30(2), 225–250. <https://doi.org/10.1007/s00357-013-9132-9>
- 中央教育審議会 (2019). 児童生徒の学習評価の在り方について（報告） 中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会 Retrieved from https://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2019/04/17/1415602_1_1_1.pdf (2022年12月5日)
- Crooks, T. J. (1988). The impact of classroom evaluation practices on students. *Review of educational research*, 58(4), 438–481. <https://doi.org/10.3102/00346543058004438>
- de la Torre, J. (2011). The generalized DINA model framework. *Psychometrika*, 76(2), 179–199. <https://doi.org/10.1007/s11336-011-9207-7>
- de la Torre, J., & Chiu, C. Y. (2016). A general method of empirical Q-matrix validation. *Psychometrika*, 81(2), 253–273. <https://doi.org/10.1007/s11336-015-9467-8>
- de la Torre, J., & Douglas, J. A. (2004). Higher-order latent trait models for cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 69(3), 333–353. <https://doi.org/10.1007/BF02295640>
- Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In Cho, S. (ed.) *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: developing functional relationships through quan-

- titative reasoning. In Cai, J., & Knuth, E. (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215–238). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_13
- Fonger, N. L., Ellis, A., & Dogan, M. F. (2016). Students' conceptions supporting their symbolizations and meanings of function rules. In Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: University of Arizona.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2014). *Bayesian data analysis* (3rd ed.). Boca Raton, FL: CRC Press.
- Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical science*, 7(4), 457–472. <https://doi.org/10.1214/ss/1177011136>
- Gleich, D. F. (2015). PageRank beyond the Web. *SIAM Review*, 57(3), 321–363. <https://doi.org/10.1137/140976649>
- Guskey, T. R. (1994). What you assess may not be what you get. *Educational Leadership*, 51(6), 51–54.
- Hallett, D. H. (2006). What Have We Learned from Calculus Reform?: The Road to Conceptual Understanding. In Hastings, N. B., Gordon, F. S., Gordon, S. P., & Narayan, J. (Eds.), *A Fresh Start for Collegiate Mathematics* (1st ed., Vol. 69, pp. 43–45). Mathematical Association of America.
- Harks, B., Rakoczy, K., Hattie, J., Besser, M., & Klieme, E. (2014). The effects of feedback on achievement, interest and self-evaluation: The role of feedback's perceived usefulness. *Educational Psychology*, 34(3), 269–290. <https://doi.org/10.1080/01443410.2013.785384>
- Harskamp, E., Suhre, C., & Van Streun, A. (2000). The graphics calculator and students' solution strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 12(1), 37–52. <https://doi.org/10.1007/BF03217073>
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Henson, R. A., Templin, J. L., & Willse, J. T. (2009). Defining a family of cognitive diagnosis models using log-linear models with latent variables. *Psychometrika*, 74(2), 191–210. <https://doi.org/10.1007/s11336-008-9089-5>
- 星野 崇宏・莊島 宏二郎・樋口 耕一・富田 英司 (2016). 教育心理学研究のためのテキストデータの
計量分析 教育心理学年報, 55, 313–321. <https://doi.org/10.5926/arepj.55.313>
- Hu, B., & Templin, J. (2019). Using diagnostic classification models to validate attribute hierarchies and evaluate model fit in Bayesian networks. *Multivariate Behavioral Research*, 55(2), 300–311. <https://doi.org/10.1080/00273171.2019.1632165>
- Hurley, J. F., Koehn, U., & Ganter, S. L. (1999). Effects of calculus reform: Local and national. *The American Mathematical Monthly*, 106(9), 800–811. <https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005125>
- 儀田 正美 (1987). 関数の思考水準とその指導についての研究 日本数学教育学会誌, 69(3), 2–12. https://doi.org/10.32296/jjsme.69.3_2
- Jang, E. E. (2005). *A validity narrative: Effects of reading skills diagnosis on teaching and learning in the context of NG TOEFL* (Unpublished doctoral dissertation). University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Jang, E. E. (2009). Cognitive diagnostic assessment of L2 reading comprehension ability: Validity arguments for Fusion Model application to LanguEdge assessment. *Language Testing*, 26(1), 31–73. <https://doi.org/10.1177/0265532208097336>
- Junker, B. W., & Sijtsma, K. (2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and con-

- nections with nonparametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 25(3), 258–272. <https://doi.org/10.1177/01466210122032064>
- 嘉瀬 貴祥・坂内 くら・大石 和男 (2016). 日本人成人のライフスキルを構成する行動および思考——計量テキスト分析による探索的検討—— *社会心理学研究*, 32(1), 60–67. <https://doi.org/10.14966/jssp.0929>
- 公田 藏 (1998). 「近代数学」と学校数学——数学の普及の歴史から（数学史の研究）—— *数理解析研究所講究録*, 1064, 75–91. <http://hdl.handle.net/2433/62446>
- 久保 拓也・岡崎 正和 (2013). 小中接続期における関数概念の発達の様相に関する研究 *数学教育学研究：全国数学教育学会誌*, 19(2), 175–183. https://doi.org/10.24529/jasme.19.2_175
- Kudo, T. (2005). MeCab: Yet Another Part-of-Speech and Morphological Analyzer. <https://taku910.github.io/mecab/>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22(3), 215–243. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- MacLellan, E. (2001). Assessment for learning: the differing perceptions of tutors and students. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 26(4), 307–318. <https://doi.org/10.1080/02602930120063466>
- Mayer, R. E. (1989). Introduction to the special section. *Journal of Educational Psychology*, 81(4), 452–456. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.81.4.452>
- Meng, X. L. (1994). Posterior predictive *p*-values. *The annals of statistics*, 22(3), 1142–1160. <https://doi.org/10.1214/aos/1176325622>
- 文部科学省 (2018). 中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編 日本文教出版
- 文部科学省 (2019). 高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編理数編 学校図書
- Mory, E. H. (2004). Feedback research revisited. In Jonassen, D., & Driscoll, M. (Eds.). *Handbook of Research on Educational Communications and Technology: A Project of the Association for Educational Communications and Technology* (2nd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781410609519>
- 村山 航 (2004). テスト形式の違いによる学習方略と有効性の認知の変容 *心理学研究*, 75(3), 262–268. <https://doi.org/10.4992/jjpsy.75.262>
- 村山 航 (2006). テストへの適応——教育実践上の問題点と解決のための視点—— *教育心理学研究*, 54(2), 265–279. https://doi.org/10.5926/jjep1953.54.2_265
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council. (1996). *National science education standards*. National Academies Press.
- 西村 圭一 (2001). 数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究 *日本数学教育学会誌*, 83(11), 2–12. https://doi.org/10.32296/jjsme.83.11_2
- 布川 和彦 (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成——教科書の考察を中心に—— *上越教育大学研究紀要*, 33, 85–96.
- Ontario Ministry of Education. (2013). Paying attention to algebraic reasoning: Support document for paying attention to mathematics education; K-12. Retrieved from <https://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebra.pdf> (September 5, 2022)
- Perry, J. (1900). The teaching of mathematics. *Nature*, 62(1605), 317–320. <https://doi.org/10.1038/120>

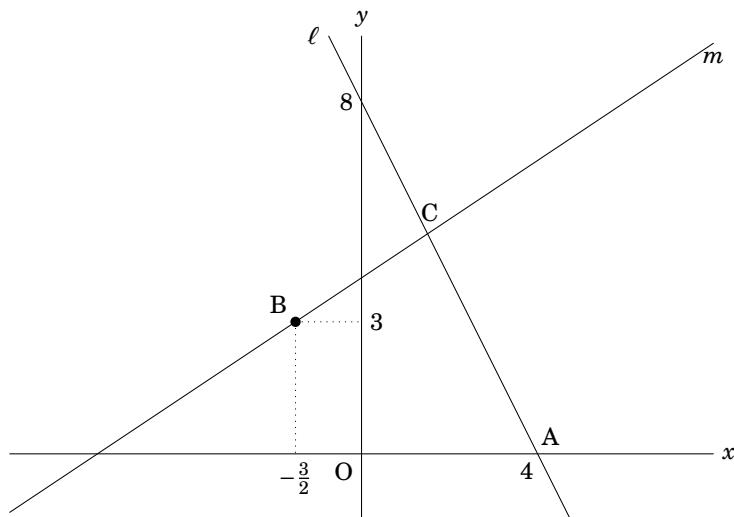
- Petersen, J. L., & Hyde, J. S. (2017). Trajectories of self-perceived math ability, utility value and interest across middle school as predictors of high school math performance. *Educational Psychology*, 37(4), 438–456. <https://doi.org/10.1080/01443410.2015.1076765>
- Plummer, M. (2003). JAGS: A program for analysis of Bayesian graphical models using Gibbs sampling. In Hornik, K., Leisch, F., & Zeileis, A. (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Workshop on Distributed Statistical Computing (DSC 2003)*. March 20–22, 2003, Technische Universität Wien, Vienna, Austria. Retrieved from <https://www.r-project.org/conferences/DSC-2003/Proceedings/Plummer.pdf> (November 26, 2022)
- Quesada, A. R., & Maxwell, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, 27(2), 205–215. <https://doi.org/10.1007/BF01278922>
- R Core Team (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>
- Rupp, A. A., & Templin, J. (2008). The effects of Q-matrix misspecification on parameter estimates and classification accuracy in the DINA model. *Educational and Psychological Measurement*, 68(1), 78–96. <https://doi.org/10.1177/0013164407301545>
- Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational studies in mathematics*, 21(5), 431–450. <https://doi.org/10.1007/BF00398862>
- 佐宗 駿 (2022). テストの結果を日々の学習方略の改善に活かすには?——認知診断モデルによる理解の深さの定量的評価と実践への展開—— 東京大学教育学研究科修士論文 (未公刊)
- Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational studies in mathematics*, 29(3), 259–291. <https://doi.org/10.1007/BF01274094>
- Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, 33(3), 259–281. <https://doi.org/10.1023/A:1002937032215>
- 鈴木 雅之 (2012). 教師のテスト運用方法と学習者のテスト観の関連——インフォームドアセスマントとテスト内容に着目して—— 教育心理学研究, 60(3), 272–284. <https://doi.org/10.5926/jjep.60.272>
- Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer International Handbooks of Education, vol 4. Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_9
- Tang, F., & Zhan, P. (2020). The development of an instrument for longitudinal learning diagnosis of rational number operations based on parallel tests. *Frontiers in Psychology*, 11, 2246. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.02246>
- Tatsuoka, K. K. (1983). Rule space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. *Journal of educational measurement*, 20(4), 345–354. <https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.1983.tb00212.x>
- Templin, J. L., & Henson, R. A. (2006). Measurement of psychological disorders using cognitive diagnosis models. *Psychological Methods*, 11(3), 287–305. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.11.3.287>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- von Davier, M. (2005). A general diagnostic model applied to language testing data. *ETS Research*

- Report Series*, 2005(2), i–35. <https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2005.tb01993.x>
- Walker, C. M., Zhang, B., & Surber, J. (2008). Using a multidimensional differential item functioning framework to determine if reading ability affects student performance in mathematics. *Applied Measurement in Education*, 21(2), 162–181. <https://doi.org/10.1080/08957340801926201>
- Wang, C., & Lu, J. (2021). Learning attribute hierarchies from data: Two exploratory approaches. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 46(1), 58–84. <https://doi.org/10.3102/1076998620931094>
- Wang, J., & Goldschmidt, P. (2003). Importance of middle school mathematics on high school students' mathematics achievement. *The Journal of Educational Research*, 97(1), 3–17. <https://doi.org/10.1080/00220670309596624>
- Wang, S., Yang, Y., Culpepper, S. A., & Douglas, J. A. (2018). Tracking skill acquisition with cognitive diagnosis models: A higher-order, hidden markov model with covariates. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 43(1), 57–87. <https://doi.org/10.3102/1076998617719727>
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11, 3571–3594.
- Wu, H. M. (2019). Online individualised tutor for improving mathematics learning: A cognitive diagnostic model approach. *Educational Psychology*, 39(10), 1218–1232. <https://doi.org/10.1080/01443410.2018.1494819>
- Xu, G., & Zhang, S. (2016). Identifiability of diagnostic classification models. *Psychometrika*, 81(3), 625–649. <https://doi.org/10.1007/s11336-015-9471-z>
- 山口一大 (2018). 認知診断モデルにおけるモデル選択の比較——シミュレーションによる小サンプル状況下での検証—— 東京大学大学院教育学研究科附属学校教育高度化・効果検証センター研究紀要, 4, 34–45.
- 山口一大・岡田謙介 (2017a). TIMSS2007 算数データの日本人サンプルを用いた認知診断モデルと項目反応理論モデルの比較 日本テスト学会誌, 13(1), 1–16. https://doi.org/10.24690/jart.13.1_1
- 山口一大・岡田謙介 (2017b). 近年の認知診断モデルの展開 行動計量学, 44(2), 181–198. <https://doi.org/10.2333/jbhmk.44.181>
- Yamaguchi, K., & Templin, J. (2022). A Gibbs sampling algorithm with monotonicity constraints for diagnostic classification models. *Journal of Classification*, 39(1), 24–54. <https://doi.org/10.1007/s00357-021-09392-7>
- Zhan, P. (2020a). Longitudinal learning diagnosis: Minireview and future research directions. *Frontiers in Psychology*, 11, 1185. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01185>
- Zhan, P. (2020b). A Markov estimation strategy for longitudinal learning diagnosis: Providing timely diagnostic feedback. *Educational and Psychological Measurement*, 80(6), 1145–1167. <https://doi.org/10.1177/0013164420912318>
- Zhan, P., Jiao, H., Liao, D., & Li, F. (2019). A longitudinal higher-order diagnostic classification model. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 44(3), 251–281. <https://doi.org/10.3102/1076998619827593>
- Zhan, P., Jiao, H., Man, K., & Wang, L. (2019). Using JAGS for Bayesian cognitive diagnosis modeling: A tutorial. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 44(4), 473–503. <https://doi.org/10.3102/1076998619826040>

Appendix A

高等学校入学試験問題例

下の図のように、点 $A(4, 0)$ と点 $(0, 8)$ を通る直線を ℓ 、点 $B(-\frac{3}{2}, 3)$ を通り、傾きが $\frac{2}{3}$ である直線を m とする。また、 ℓ と m の交点を C とする。
このとき、次の(1)～(3)の問い合わせに答えなさい。



- (1) 直線 m の式を求めなさい。
- (2) C の座標を求めなさい。
- (3) O を出発点として、四角形 $OACB$ の周上を $O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ の順に O から B まで動く点を P とする。
 $\triangle OPB$ の面積が四角形 $OACB$ の面積の $\frac{1}{4}$ になるときの P の座標をすべて求めなさい。

(2010 年度福島県立高等学校入学試験問題 問 6 より作成)

想定される認知的要素

- (1) 直線の式を求める。
 - $y = ax + b$ という一般形の理解。求めるべき値は a と b であるということがわかる。
 - 「傾きが $\frac{2}{3}$ である」との記述から、 $a = \frac{2}{3}$ であることがわかる。 a が傾きであるとわかる。
 - 直線 m 上の点 B の座標を、直線 m の式に代入できることがわかる。一次関数が二元一次方程式の解の集合であることを理解できる。代入することで、 b に関する方程式になることがわかる。
 - 方程式が解ける。直交座標系で x , y 座標を読み取れる。実数の四則演算ができる。

(2) 直線の式を求める。2直線の交点を求める。

- 直線 ℓ の式を求める。
 - 直線 ℓ 上の点 $(4, 0)$ と $(0, 8)$ を、直線 ℓ の式に代入できることがわかる。代入することで、 a , b に関する連立方程式になることがわかる。
 - あるいは機械的に、「2点の座標を $y = ax + b$ の x , y にそれぞれ代入すれば a , b が求まる」という知識がある。
 - より効率的には、グラフから $b = 8$ とわかる。切片 b が、グラフでは y 軸との交点の y 座標であることがわかる。 a , b の意味とグラフの特徴を関連づけられる。
 - その他、(1) と同じ。
- 一次関数が二元一次方程式の解の集合であることを理解できる。2直線の交点は、2つの二元一次方程式をともに満たす x , y の組であることがわかる。それがすなわち、連立方程式を解くということであることがわかる。
- あるいは機械的に、「2直線の式の連立方程式を解けば、交点の座標が求まる」という知識がある。
- 方程式が解ける。直交座標系で x , y 座標を読み取れる。実数の四則演算ができる。連立方程式が解ける。

(3) 座標を文字で置き、方程式を立て、座標を求める。

- 四角形 OACB の面積の $\frac{1}{4}$ を求めることができる。
 - OC に補助線を引くことができる。座標軸上で面積を求めやすい三角形を知っている。
 - $\triangle OAC$ の面積を求めることができる。1つの辺が x 軸または y 軸に平行な三角形の面積の求め方がわかる。底辺 OA の長さと、高さを各点の座標から求めることができる。
 - $\triangle OCB$ の面積を求めることができる。1つの頂点が座標軸上にあり、象限をまたぐ三角形の面積の求め方がわかる。(1)で求めた直線 m の式から、BC と y 軸との交点が式における b に対応することがわかる。 a , b の意味とグラフの特徴を関連づけられる。1つの辺が x 軸または y 軸に平行な三角形の面積の求め方がわかる。
- 点 P の x 座標を文字で置ける。OA 上では y 座標が 0 であることを理解できる。AC, CB 上では、用いた文字を ℓ , m の式に代入することで点 P の y 座標が表せることを理解できる。抽象的な（文字を含む）値を扱うことができる。未知数を文字で置き、方程式を立てて求めるという流れ（代数学的解法）を身につけている。
- 点 P が OA 上にあるとき、1つの辺が x 軸または y 軸に平行な三角形の面積の求め方がわかる。実数として高さを算出できる。文字を含む形で底辺 OP の長さを表すことができる。 x 軸または y 軸に平行な線分の長さの求め方を知っている。
- 点 P が BC 上にあるとき、1つの頂点が座標軸上にあり、象限をまたぐ三角形の面積の求め方がわかる。1つの辺が x 軸または y 軸に平行な三角形の面積の求め方がわかる。実数として線分の長さを算出できる。文字を含む形で高さを表すことができる。 x 軸または y 軸に平行な線分の長さの求め方を知っている。
- $\triangle OPB$ の面積を文字を用いて表せる。四角形 OACB の面積の $\frac{1}{4}$ の値と結び方程式を作ることができ。その方程式を解くことで、求めるべき x 座標が求まることが理解できる。

Appendix B

共起ネットワーク作成手続きの数理的説明

w は名詞, S は一つの文を表し, 文 S は名詞 w を要素に持つ集合とする。 \mathfrak{S} は, 文 S を要素に持つ, 文書内のすべての文の集合 (i.e. 集合系) とし, $\mathfrak{S}(w)$ は名詞 w が出現する文の集合 (i.e. $\mathfrak{S}(w) = \{S \mid w \in S\}$) とする。また, W は文書内に出現するすべての単語の集合 (i.e. W は集合系 \mathfrak{S} の和集合 $\bigcup \mathfrak{S}$ であり, $W = \bigcup \mathfrak{S} = \{w \mid \exists S \in \mathfrak{S} : w \in S\}$) とする。ノードの集合 V およびエッジの集合 E からなる単純グラフである共起ネットワークを $G(V, E)$ とする。なお, $|A|$ は集合 A の要素の個数を表すものとする。

名詞の出現頻度の高さの評価に使用した出現比率 R は, 名詞 w について,

$$R_w = \frac{|\mathfrak{S}(w)|}{|\mathfrak{S}|},$$

によって算出した。また, 名詞間の共起頻度の高さの評価に使用した Jaccard 係数 J は, 二つの名詞 w_1, w_2 間の Jaccard 係数 $J_{(w_1, w_2)}$ について,

$$J_{(w_1, w_2)} = \frac{|\mathfrak{S}(w_1) \cap \mathfrak{S}(w_2)|}{|\mathfrak{S}(w_1) \cup \mathfrak{S}(w_2)|} (w_1 \neq w_2),$$

によって算出した。

共起ネットワーク $G(V, E)$ の作成にあたり, 名詞の出現比率の閾値 R_{thre} および Jaccard 係数の閾値 J_{thre} を設定した。出現比率 R , Jaccard 係数 J , およびそれらの閾値 R_{thre}, J_{thre} を用いて, 共起ネットワーク G を,

$$V = \{w \mid R_w \geq R_{thre}, \exists w_o \in W : (J_{(w, w_o)} \geq J_{thre}, w_o \neq w)\},$$

$$E = \{\{w_1, w_2\} \mid w_1 \in V, w_2 \in V, w_1 \neq w_2\},$$

から構成した。また, G のサブグラフ $G'(V', E')$ は, ノード v_1 からノード v_2 へのパス $P(v_1, v_2)$ をノードの列, その連続する長さ 2 の部分列を $P'_2 = (w_1, w_2)$ として,

$$V' = \{v \mid (\exists A \subseteq V)(\forall v_o \in A)(\exists P(v, v_o))(\forall P'_2 : (J_{(w_1, w_2)} \geq J_{thre})\},$$

$$E' = \{\{w_1, w_2\} \mid w_1 \in V', w_2 \in V', w_1 \neq w_2\},$$

から構成した。

辞書に追加した単語とその品詞

形態素解析において独自に辞書に追加した単語とその品詞を, 括弧括り, 半角スペース区切りで以下に示す。

(数学的活動, 名詞) (比例, 名詞) (反比例, 名詞) (身に付ける, 動詞) (身に付け, 動詞) (身に付けよ, 動詞) (身に付け, 動詞) (身に付けられ, 動詞) (身に付けよ, 動詞) (身に付けろ, 動詞) (身に付けりや, 動詞) (身に付けん, 動詞) (関数関係, 名詞) (折れ線グラフ, 名詞) (独立変数, 名詞) (従属変数, 名詞) (座標平面, 名詞) (2倍, 名詞) (3倍, 名詞) (1/2倍, 名詞) (1/3倍, 名詞) (m倍, 名詞) (比例定数, 名詞) (y=ax, 名詞) (y/x=a,

名詞) ($y=a/x$, 名詞) ($xy=a$, 名詞) (数直線, 名詞) (正の数, 名詞) (負の数, 名詞) (数学的表現, 名詞) (長さ, 名詞) (周の長さ, 名詞) ($l=2\pi r$, 名詞) ($S=\pi r^2$, 名詞) (一次関数, 名詞) (方程式, 名詞) (二元一次方程式, 名詞) (変化の割合, 名詞) ($y=ax+b$, 名詞) ($ax+by+c=0$, 名詞) ($b \neq 0$, 名詞) ($x-2y+6=0$, 名詞) ($y=(1/2)x+3$, 名詞) (連立二元一次方程式, 名詞) (x_1 , 名詞) (x_2 , 名詞) (y_1 , 名詞) (y_2 , 名詞) ($((y_2-y_1)/(x_2-x_1)$, 名詞) ($x=0$, 名詞) (x 軸, 名詞) (y 軸, 名詞) (x 座標, 名詞) (y 座標, 名詞) (一直線, 名詞) (n 角形, 名詞) (多角形, 名詞) (三角形, 名詞) (二次関数, 名詞) (関数 $y=ax^2$, 名詞) ($y=ax^2$, 名詞) (m^2 倍, 名詞) (x^2 , 名詞) (2 乗, 名詞) (絶対値, 名詞) (制動距離, 名詞) (パラボラアンテナ, 名詞) (放物線, 名詞) (停止距離, 名詞) (4 倍, 名詞) (相似比, 名詞) (面積比, 名詞) (変域, 名詞) (増加量, 名詞) (最大値, 名詞) (最小値, 名詞) (二次方程式, 名詞) (二次不等式, 名詞) (情報機器, 名詞) (平行移動, 名詞) ($y=a(x-p)^2+q$, 名詞) ($x=p$, 名詞) ((p, q) , 名詞) ((x, y) , 名詞) ($(x, y/x)$, 名詞) ((x, \sqrt{y}) , 名詞) ($y=ax^2+bx+c$, 名詞) ($f(x)$, 名詞) ($ax^2+bx+c=0$, 名詞) (共有点, 名詞) (位置関係, 名詞) (外分, 名詞) (対称軸, 名詞) (線対称, 名詞) (数学 I, 名詞) (数学 A, 名詞) (数学 II, 名詞) (数学 B, 名詞) (数学 III, 名詞) (数学 C, 名詞) (平面図形, 名詞) (空間図形, 名詞) (解析幾何学, 名詞) (直交座標, 名詞) (初等幾何, 名詞) (中線定理, 名詞) (三平方の定理, 名詞) (境界線, 名詞) (使用限度量, 名詞) (線形計画法, 名詞) (指數関数, 名詞) (対数関数, 名詞) (正の整数, 名詞) (負の整数, 名詞) (指數法則, 名詞) ($y=2^x$, 名詞) ($y=(1/2)^x$, 名詞) ($2^x=4$, 名詞) ($2^x=3$, 名詞) ($\log_2(3)$, 名詞) ($2^1=2$, 名詞) ($2^2=4$, 名詞) (2^x , 名詞) ($1 < \log_2(3) < 2$, 名詞) (2^x , 名詞) ($a^x \times a^y = a^{(x+y)}$, 名詞) ($\log_a(XY) = \log_a(X) + \log_a(Y)$, 名詞) ($a^x \div a^y = a^{(x-y)}$, 名詞) ($((a^x)^y = a^{(xy)})$, 名詞) ($y = \log_a(x)$, 名詞) ($x = a^y$, 名詞) ($y = x$, 名詞) (放射性物質, 名詞) (自然現象, 名詞) (等星, 名詞) (体内残量, 名詞) (片対数方眼紙, 名詞) (三角関数, 名詞) (一般角, 名詞) (弧度法, 名詞) (度数法, 名詞) (加法定理, 名詞) (2 倍角の公式, 名詞) (図形と軽量, 名詞) (三角比, 名詞) (弧の長さ, 名詞) ($\text{asin } \theta + \text{bcos } \theta = \sqrt{(a^2+b^2)\sin(\theta + \alpha)}$, 名詞) (回転移動, 名詞) (回転運動, 名詞) (観覧車, 名詞) (一定時間, 名詞) (微分係数, 名詞) (導関数, 名詞) (定数倍, 名詞) (概形, 名詞) (不定積分, 名詞) (定積分, 名詞) (多項式関数, 名詞) (分数関数, 名詞) (無理関数, 名詞) (微分法, 名詞) (積分法, 名詞) ($x=a$, 名詞) (極値, 名詞) ($a \leq x \leq b$, 名詞) ($f(x) \geq 0$, 名詞) ($y=f(x)$, 名詞) ($x=t$, 名詞) ($a \leq t \leq b$, 名詞) ($S(t)$, 名詞) ($S'(t)=f(t)$, 名詞) (区分求積法, 名詞) (左右対称, 名詞) (被積分関数, 名詞)

なお、独自に追加した単語の辞書を作成するための CSV ファイルを含め、その他の作成したスクリプトファイルは、OSF (<https://osf.io/6nqdg/>) および GitHub (<https://github.com/kd-kojima/kojima2023>) 上に掲載する。

ストップワードとした単語

形態素解析においてストップワードとした単語を、一重引用符括り、半角スペース区切りで以下に示す。

‘が’ ‘の’ ‘を’ ‘に’ ‘へ’ ‘と’ ‘か ら’ ‘よ り’ ‘で’ ‘や’ ‘し’ ‘や ら’ ‘か’ ‘な り’
‘だ の’ ‘ば か り’ ‘ま で’ ‘だけ’ ‘ほ ど’ ‘く ら イ’ ‘ぐ ら イ’ ‘な ん’ ‘な り’ ‘や ら’ ‘が て
ら’ ‘な ゾ’ ‘な ん ゾ’ ‘か り’ ‘ず つ’ ‘の ん ん’ ‘き り’ ‘も’ ‘こ そ’ ‘で も’ ‘し か’ ‘さ え’
‘ば’ ‘け れ ど’ ‘け れ ど も’ ‘の に’ ‘の で’ ‘か ら’ ‘し’ ‘て’ ‘で’ ‘な り’ ‘な ガ ら’ ‘た
り’ ‘つ つ’ ‘と こ ろ で’ ‘ま ま’ ‘もの の’ ‘か’ ‘な’ ‘と も’ ‘の’ ‘ぞ’ ‘ぜ’ ‘かい’ ‘よ’
‘ね’ ‘さ’ ‘の に’ ‘や ら’ ‘が’ ‘も の の’ ‘わ’ ‘も ん’ ‘か シ ら’ ‘って ば’ ‘さ’ ‘よ’
‘ね’ ‘な’ ‘こ と’ ‘,’ ‘/’ ‘, /’ ‘「 ’ ‘」 ‘(’ ‘)’ ‘[’ ‘]’ ‘‘ ’ ‘」 ‘, ’ ‘(’ ‘), ’
‘, [’ ‘], ’ ‘) [’ ‘] (’ ‘ア’ ‘イ’ ‘ウ’ ‘エ’ ‘オ’ ‘カ’ ‘キ’ ‘こ れ’ ‘こ れ ら’ ‘あ れ’
‘あ れ ら’ ‘そ れ’ ‘そ れ ら’ ‘ど れ’ ‘よ う’ ‘こ こ’ ‘と き’ ‘そ こ’ ‘あ そ こ’ ‘ど こ’ ‘も の’
‘た め’ ‘あ る’ ‘に つ い て’ ‘そ れ ぞ れ’ ‘さ’ ‘ゆ え’ ‘も ち’ ‘も と’ ‘元’ ‘明 ら か’ ‘滑
ら か’ ‘何’ ‘上’ ‘中’ ‘下’ ‘基’ ‘次’ ‘場 合’ ‘的’ ‘方’ ‘力’ ‘化’ ‘生 徒’ ‘指 導’ ‘学
習’ ‘等’ ‘間’ ‘際’ ‘分’ ‘本’ ‘1’ ‘2’ ‘3’ ‘4’ ‘5’ ‘6’ ‘7’ ‘8’ ‘9’ ‘0’ ‘10’ ‘小
学校’ ‘算 数’ ‘科’ ‘中 学 校’ ‘数 学’ ‘科’ ‘数’ ‘学 科’ ‘学 校’ ‘学 年’ ‘...’ ‘,...’
‘,...’ ‘一’ ‘二’ ‘三’ ‘四’ ‘五’ ‘六’ ‘七’ ‘八’ ‘九’ ‘一 つ’ ‘二 つ’ ‘三 つ’ ‘四
つ’ ‘五 つ’ ‘六 つ’ ‘七 つ’ ‘八 つ’ ‘九 つ’ ‘幾 つ’ ‘性’ ‘か く’ ‘取 扱 い’ ‘取 扱 い’
‘他’ ‘後’ ‘数 学 I’ ‘数 学 A’ ‘数 学 II’ ‘数 学 B’ ‘数 学 III’ ‘数 学 C’ ‘い づ れ’ ‘い ろ ろ
‘様 々’ ‘す べ て’ ‘日’ ‘当 た り’ ‘個’ ‘早 め’ ‘感 じ’ ‘180’ ‘°’ ‘新 た’ ‘考 え’ ‘調
べ’ ‘扱 い’

共起ネットワーク作成スクリプト

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#
# Kojima, K. (2023). Application of Cognitive Diagnosis Models (Senior thesis).
# Script for co-occurrence network
#



# -----
# Import modules
#
import sys, math, itertools
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
import networkx as nx

import MeCab
import neologdn, unicodedata

# -----
# Set variables
#
filename = 'integrated' # which text data to use
```

```

PLOT_FOR_THEESIS = False
FIG_DRAW REP_FOR_THEESIS = 1

MIN_WORD_RATIO = { # (word_freq / num_of_sentence)
    'course_guidelines': 0.02, # 0.02
    'integrated': 0.02, # 0.02
    'course_01': 0.022, # 0.022
    'course_02': 0.022, # 0.022
    'course_03': 0.028 # 0.028
}
MIN_JACCARD = {
    'course_guidelines': 0.24, # 0.24
    'integrated': 0.24, # 0.24
    'course_01': 0.24, # 0.24
    'course_02': 0.30, # 0.30
    'course_03': 0.35 # 0.35
}

LAYOUT_K_FACTOR = {
    'course_guidelines': 2, # 2
    'integrated': 2, # 2
    'course_01': 2, # 2
    'course_02': 2, # 2
    'course_03': 1.5 # 1.5
}
LAYOUT_ITERATION = {
    'course_guidelines': 3000, # 3000
    'integrated': 3000, # 3000
    'course_01': 3000, # 3000
    'course_02': 3000, # 3000
    'course_03': 3000 # 3000
}
NODE_SIZE_FACTOR = {
    'course_guidelines': 30000,
    'integrated': 30000,
    'course_01': 30000,
    'course_02': 30000,
    'course_03': 30000
}
EDGE_WIDTH_FACTOR = {
    'course_guidelines': 8,
    'integrated': 8,
    'course_01': 8,
    'course_02': 8,
    'course_03': 8
}

min_word_ratio = MIN_WORD_RATIO[filename]
min_jaccard = MIN_JACCARD[filename]
layout_k_factor = LAYOUT_K_FACTOR[filename]
layout_iteration = LAYOUT_ITERATION[filename]
node_size_factor = NODE_SIZE_FACTOR[filename]
edge_width_factor = EDGE_WIDTH_FACTOR[filename]

IPA_DIC = '/opt/homebrew/lib/mecab/dic/ipadic'
USER_DIC = '/opt/homebrew/lib/mecab/dic/user/user.dic'

```

```

stopwords_path = './stopwords.txt'

raw_dir = './rawdata'
text_dir = './textdata'
noun_dir = './noundata'
csv_dir = './csv'
result_dir = './result'

thesis_dir = './thesis_fig'

# -----
# Read stopwords
#
stopwords = []
with open(stopwords_path, 'r', encoding='utf-8') as f:
    stopwords = f.read().split('\n')

# -----
# Read rawdata
#
rawdata = ''
with open(f'{raw_dir}/{filename}.txt', 'r', encoding='utf-8') as f:
    rawdata = f.readlines()

# -----
# Split sentence
#
rawdata = ''.join(rawdata).replace('\n', '').replace('。', '。 \n')
rawdata = neologdn.normalize(rawdata)
rawdata = unicodedata.normalize('NFKC', rawdata)

with open(f'{text_dir}/{filename}.txt', 'w', encoding='utf-8') as f:
    f.write(rawdata)

# -----
# Read textdata
#
textdata = []
with open(f'{text_dir}/{filename}.txt', 'r', encoding='utf-8') as f:
    textdata = f.readlines()

textdata = [line.replace('\n', '') for line in textdata]

# -----
# Get nouns
#
nouns = []
mecab = MeCab.Tagger(f'-d \"\{IPA_DIC}\\" -u \"\{USER_DIC}\\" -Odump')
for line in textdata:
    morph = [x.split(' ') for x in mecab.parse(line).split('\n')[:-1]]
    nouns.append([x[1] for x in morph if '名詞' in x[2] and x[1] not in stopwords])

with open(f'{noun_dir}/{filename}.txt', 'w', encoding='utf-8') as f:
    for line in nouns:
        f.write(','.join(line))
        f.write('\n')

nouns = [set(line) for line in nouns]

```

```

num_of_sentences = len(nouns)

# -----
# Count nouns
#
freqs = {}
for word in list(itertools.chain.from_iterable(nouns)):
    freqs[word] = freqs.get(word, 0) + 1

freqs_df = pd.DataFrame.from_dict(freqs, orient='index', columns=['freq'])

plt.rcParams['font.family'] = 'Hiragino Sans'
plt.bar(freqs_df.sort_values('freq', ascending=False)[0:50].index.values, freqs_df.sort_
    values('freq', ascending=False)['freq'][0:50])
plt.show()

# -----
# Make combinations
#
combinations = [list(itertools.combinations(set(line), 2)) for line in nouns]
combinations = [[tuple(sorted(combi)) for combi in line] for line in combinations]

# -----
# Count combinations
#
combi_freqs = {}
for combi in list(itertools.chain.from_iterable(combinations)):
    combi_freqs[combi] = combi_freqs.get(combi, 0) + 1

combi_df = pd.DataFrame([[key[0], key[1], value] for key, value in combi_freqs.items()],
    columns=['w1', 'w2', 'freq'])

# -----
# Calculate Jaccard coef
#
w1_freq = []
w1_ratio = []
w2_freq = []
w2_ratio = []
jaccards = []
for _, row in combi_df.iterrows():
    jaccard = 1
    union = freqs_df.loc[row.w1].freq + freqs_df.loc[row.w2].freq - row.freq
    if union != 0:
        jaccard = row.freq / union
    w1_freq.append(freqs_df.loc[row.w1].freq)
    w1_ratio.append(freqs_df.loc[row.w1].freq / num_of_sentences)
    w2_freq.append(freqs_df.loc[row.w2].freq)
    w2_ratio.append(freqs_df.loc[row.w2].freq / num_of_sentences)
    jaccards.append(jaccard)

# -----
# Make dataframe
#
combi_df['w1_freq'] = w1_freq
combi_df['w1_ratio'] = w1_ratio
combi_df['w2_freq'] = w2_freq
combi_df['w2_ratio'] = w2_ratio

```

```

combi_df['jaccard'] = jaccards
combi_df.sort_values('jaccard', ascending=False).to_csv(f'{csv_dir}/{filename}_df.csv')

# -----
# Set graph
#
G = nx.Graph()
G.add_nodes_from(freqs_df.index.values)
for _, row in combi_df.iterrows():
    if row.w1_ratio >= min_word_ratio and row.w2_ratio >= min_word_ratio and row.jaccard
        >= min_jaccard:
        G.add_edge(row.w1, row.w2, weight=row.jaccard)

G.remove_nodes_from(list(nx.isolates(G)))

if filename == 'integrated':
    # because the subgraph composed from following two nodes is isolated from other
    # subgraphs (even if thin edges are added).
    G.remove_node('知識')
    G.remove_node('技能')

    # get subgraphs
    connecteds = []
    connected_indices = []
    colors = []
    for i, c in enumerate(nx.connected_components(G)):
        connecteds.append(c)
        connected_indices.append(i)
        colors.append(1/50 * i)

    # set colors
    node_colors = []
    for node in G.nodes():
        for i, c in enumerate(connecteds):
            if node in c:
                node_colors.append(colors[i])
                break

    # add thin edges
    for _, row in combi_df.iterrows():
        if row.w1 in list(G.nodes()) and row.w2 in list(G.nodes()):
            G.add_edge(row.w1, row.w2, weight=row.jaccard)

    # get edge list
    thick_edges = []
    thin_edges = []
    for i, edge in enumerate(G.edges(data='weight')):
        w1, w2, weight = edge
        if weight >= min_jaccard:
            thick_edges.append(i)
        else:
            thin_edges.append(i)

# -----
# Plot graph
#
if not PLOT_FOR_THESIS:
    plt.figure(figsize=(8, 8))

```

```

k = layout_k_factor / math.sqrt(len(G.nodes()))
layout = nx.spring_layout(G, k=k, iterations=layout_iteration)

pr = nx.pagerank(G)
pr_values = np.array([pr[node] for node in G.nodes()])
nx.draw_networkx_nodes(G, layout, node_color=node_colors, cmap=plt.cm.get_cmap('Set3')
    , alpha=0.7, node_size=pr_values * node_size_factor)

edge_width = [weight * edge_width_factor for _, _, weight in G.edges(data='weight')]
nx.draw_networkx_edges(G, layout, edgelist=tuple([list(G.edges())[i] for i in thick_
    edges]), alpha=0.4, edge_color='#999999', width=[edge_width[i] for i in thick_
    edges])
nx.draw_networkx_edges(G, layout, edgelist=tuple([list(G.edges())[i] for i in thin_
    edges]), style='dashed', alpha=0.4, edge_color='bbbbbb', width=[edge_width[i] for
    i in thin_edges])

nx.draw_networkx_labels(G, layout, font_family='Hiragino Sans', font_size=10, font_
    weight='bold')

plt.axis('off')
# plt.savefig(f'{result_dir}/{filename}.png', dpi=300)
plt.show()

sys.exit()

# -----
# Plot for thesis
#
matplotlib.use('pgf')
plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams['pgf.texsystem'] = 'lualatex'
plt.rcParams['pgf.preamble'] = r'\usepackage{unicode-math}\setmainfont{IPAexGothic}\
    \setmathfont{Fira Math}'
plt.rcParams['pgf.rcfonts'] = False

print('Groups:')
for connected in connecteds:
    print(connected)

color_thesis = {
    'A7': '#c3d825',
    'A8': '#59b9c6',
    'A9': '#5383c3',
}
nodes_thesis = {
    'A7': [],
    'A8': [],
    'A9': [],
    'others': []
}

# Classify groups
for connected in connecteds:
    if 'グラフ' in connected and '式' in connected:
        nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
    elif '座標' in connected and '平面' in connected:
        nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])

```

```

        elif '変化の割合' in connected and '一定' in connected:
            nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif 'x' in connected and 'y' in connected:
            nodes_thesis['A7'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '一方' in connected and '他方' in connected:
            nodes_thesis['A7'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '日常' in connected:
            nodes_thesis['A8'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '実験' in connected and '予測' in connected:
            nodes_thesis['A8'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '実験' in connected and '観察' in connected:
            nodes_thesis['A8'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '具体' in connected and '事象' in connected:
            nodes_thesis['A8'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '円' in connected and '方程式' in connected:
            nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '不等式' in connected and '領域' in connected:
            nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '定積分' in connected and '面積' in connected:
            nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '関数関係' in connected and '意味' in connected:
            nodes_thesis['A7'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '概念' in connected and '実感' in connected:
            nodes_thesis['A7'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        elif '交点' in connected and '意味' in connected:
            nodes_thesis['A9'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])
        else:
            nodes_thesis['others'].extend([list(G.nodes()).index(node) for node in connected])

for cnt in range(FIG_DRAW REP FOR THESIS):
    k = layout_k_factor / math.sqrt(len(G.nodes()))
    layout = nx.spring_layout(G, k=k, iterations=layout_iteration)
    layout_thesis = {}
    for i, pos in enumerate(layout.values()):
        layout_thesis[i] = pos

    pr = nx.pagerank(G)
    pr_values = np.array([pr[node] for node in G.nodes()])

    edge_width = [weight * edge_width_factor for _, _, weight in G.edges(data='weight')]

    # Plot classified graph
    plt.figure(figsize=(8, 8))

    nx.draw_networkx_nodes(G, layout_thesis, nodelist=nodes_thesis['others'], node_color='#ffffff', alpha=0.7, node_size=pr_values[nodes_thesis['others']] * node_size_factor, edgecolors='#aaaaaa')
    nx.draw_networkx_nodes(G, layout_thesis, nodelist=nodes_thesis['A9'], node_color=color_thesis['A9'], alpha=0.75, node_size=pr_values[nodes_thesis['A9']] * node_size_factor)
    nx.draw_networkx_nodes(G, layout_thesis, nodelist=nodes_thesis['A8'], node_color=color_thesis['A8'], alpha=0.45, node_size=pr_values[nodes_thesis['A8']] * node_size_factor * 0.7, linewidths=1.0, edgecolors=color_thesis['A8'])
    nx.draw_networkx_nodes(G, layout_thesis, nodelist=nodes_thesis['A8'], node_color=color_thesis['A8'], alpha=0.3, node_size=pr_values[nodes_thesis['A8']] * node_size_factor)
    nx.draw_networkx_nodes(G, layout_thesis, nodelist=nodes_thesis['A7'], node_color=color_thesis['A7'], alpha=0.6, node_size=pr_values[nodes_thesis['A7']] * node_size_

```

```

        factor * 0.3, linewidths=3.0, edgecolors=color_thesis['A7'])
nx.draw_networkx_nodes(G, layout_thesis, nodelist=nodes_thesis['A7'], node_color=color
    _thesis['A7'], alpha=0.4, node_size=pr_values[nodes_thesis['A7']] * node_size_
    factor)

nx.draw_networkx_edges(G, layout, edgelist=tuple([list(G.edges())[i] for i in thick_
    edges]), alpha=0.4, edge_color='#999999', width=[edge_width[i] for i in thick_
    edges])
nx.draw_networkx_edges(G, layout, edgelist=tuple([list(G.edges())[i] for i in thin_
    edges]), style='dashed', alpha=0.4, edge_color='#bbbbbb', width=[edge_width[i] for
    i in thin_edges])

nx.draw_networkx_labels(G, layout, font_family='Hiragino Sans', font_size=10)

plt.scatter([], [], c=color_thesis['A7'], label='$\mathbf{A7_c}$', alpha=0.7)
plt.scatter([], [], c=color_thesis['A8'], label='$\mathbf{A8_c}$', alpha=0.7)
plt.scatter([], [], c=color_thesis['A9'], label='$\mathbf{A9_c}$', alpha=0.7)

plt.axis('off')
plt.legend()
plt.savefig(f'{thesis_dir}/{filename}_{cnt:03}.pdf', dpi=300)
plt.show()

# Plot unclassified graph
plt.figure(figsize=(8, 8))

nx.draw_networkx_nodes(G, layout, node_color=node_colors, cmap=plt.cm.get_cmap('YlOrRd
    _r'), alpha=0.8, node_size=pr_values * node_size_factor)

nx.draw_networkx_edges(G, layout, edgelist=tuple([list(G.edges())[i] for i in thick_
    edges]), alpha=0.4, edge_color='#999999', width=[edge_width[i] for i in thick_
    edges])
nx.draw_networkx_edges(G, layout, edgelist=tuple([list(G.edges())[i] for i in thin_
    edges]), style='dashed', alpha=0.4, edge_color='#bbbbbb', width=[edge_width[i] for
    i in thin_edges])

nx.draw_networkx_labels(G, layout, font_family='Hiragino Sans', font_size=10)

for i, c in enumerate(colors):
    plt.scatter([], [], c=plt.cm.get_cmap('YlOrRd_r')((i+1)/len(colors)), label=f'{i+1}'
        , alpha=0.8)

plt.axis('off')
plt.legend()
plt.savefig(f'{thesis_dir}/{filename}_unclassified_{cnt:03}.pdf', dpi=300)
plt.show()

```

Appendix C

第1回テスト問題

関 数

学習状況診断テスト

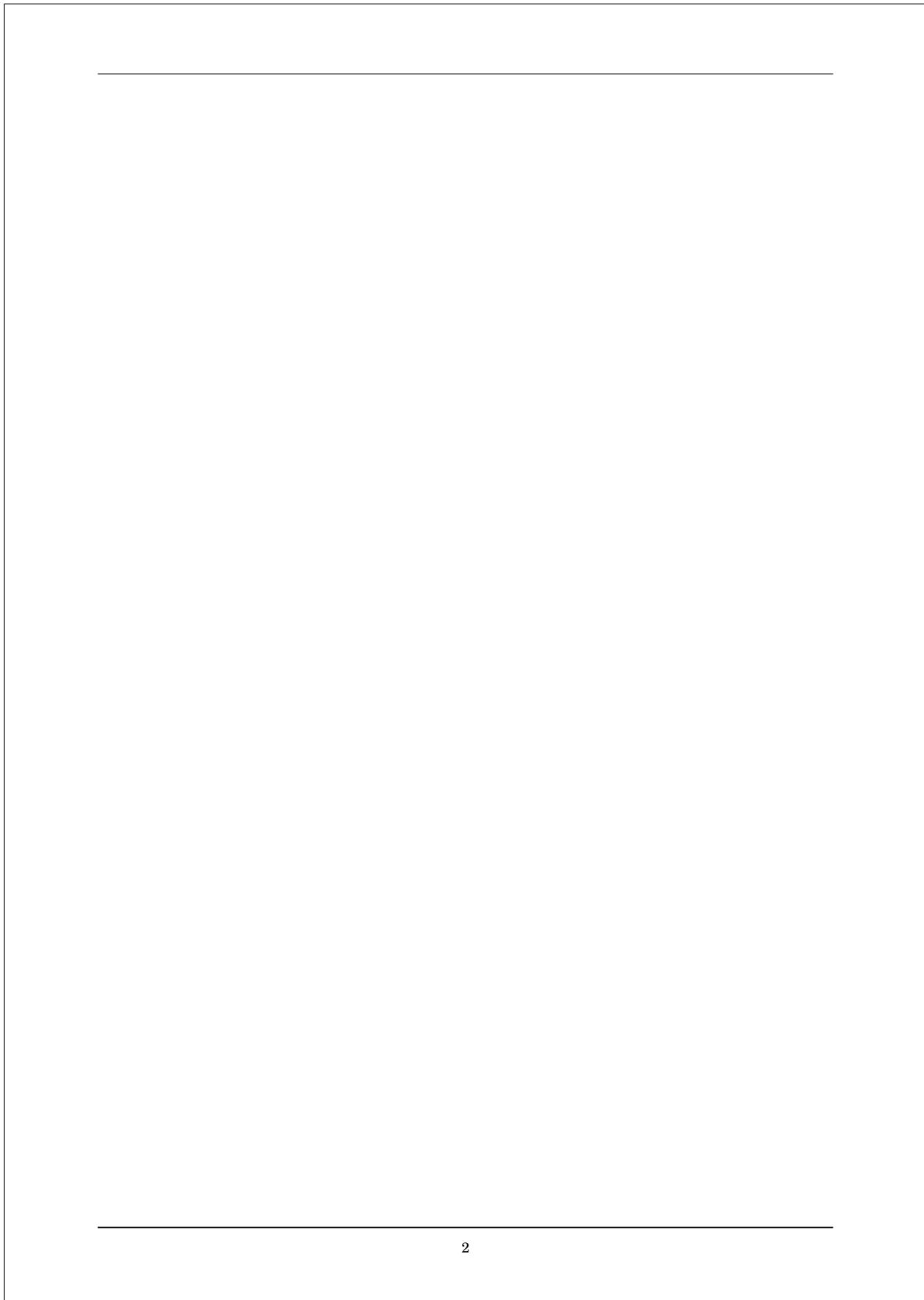
第1回

このテストは、「関数」に関する学習状況を診断して、今後の勉強に活かすためのものです。

このテストの結果が成績や評価に関係することはありませんが、今後の勉強に役立つアドバイスがもらえるよう、真剣に取り組んでください。

問題は全部で14問あります。テストは20分で取り組んでください。わからない問題は後回しにして、最後の問題まで考えるようしましょう。

生徒個人番号



関数 – 学習状況診断テスト

(1) 一次関数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ において、 $y = 6$ であるとき、 x を求めてください。

(答 1) _____

(2) 一次関数において、 $x = -3$ のとき $y = 5$, $x = 12$ のとき $y = 0$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

(答 2) _____

(3) 3つの数量 x , y , z がある。 y は x の関数であり、 z は y の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア x の値を決めると、 y の値がただ一つに定まる。
- イ x の値を決めると、 z の値がただ一つに定まる。
- ウ y の値を決めると、 z の値がただ一つに定まる。
- エ z の値を決めると、 y の値がただ一つに定まる。

(答 3) _____

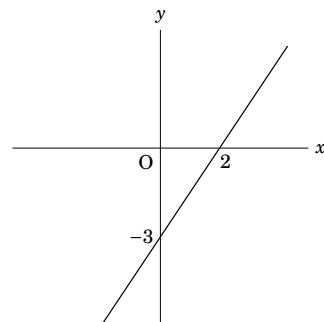
(4) 一次関数 $y = 2x - 6$ において、 x が $t+2$ であるとき、 y を t を用いて表してください。

(答 4) _____

関数 – 学習状況診断テスト

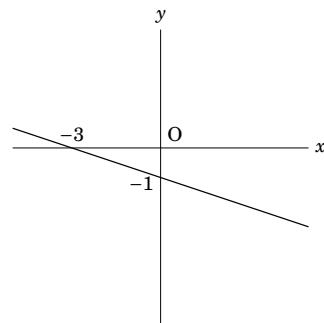
- (5) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の切片を答えてください。

(答 5)



- (6) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の傾きを答えてください。

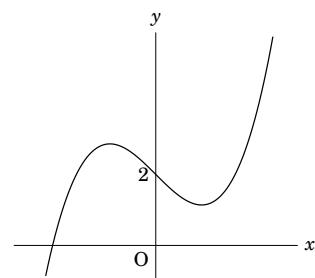
(答 6)



- (7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、正しいものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア 変化の割合は一定である。
イ x の値を一つ決めると、 y の値もただ一つに定まる。
ウ $x=2$ のとき、 $y=0$ である。
エ y の値を一つ決めると、 x の値もただ一つに定まる。

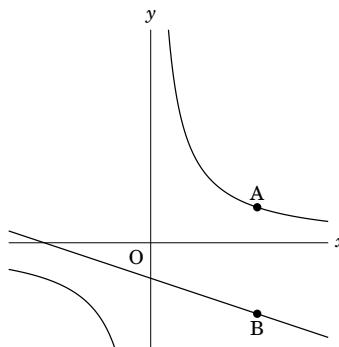
(答 7)



関数 – 学習状況診断テスト

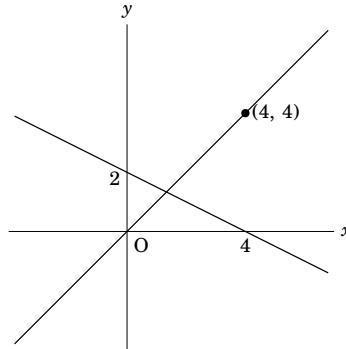
- (8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、一次関数 $y = -\frac{1}{3}x - 1$ のグラフがかけられている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(3, 1), $y = -\frac{1}{3}x - 1$ 上に点 B(3, -2) をとるととき、線分 AB の長さを求めてください。ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

(答 8)

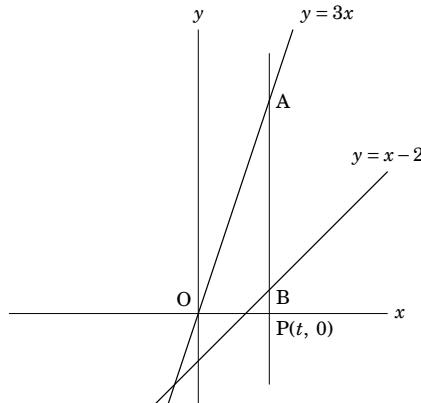


- (9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。

(答 9) (,)



- (10) 右の図のように、直線 $y = 3x$ と直線 $y = x - 2$ がある。 x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = 3x$ 、直線 $y = x - 2$ との交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 7 となるときの点 P の x 座標を求めてください。ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。また、点 P の x 座標は正とする。



(答 10)

関数 – 学習状況診断テスト

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章 水槽に 3cm の高さまで水が入っています。この水槽に、1 秒あたり 200mL の水が出る蛇口から水を加えます。水を加えた後の水槽に入っている水の高さが 5cm になるように、15 秒間水を注ぎ、蛇口を閉めました。

- ア 「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」は関数関係はない。
- イ 「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は関数関係はない。
- ウ 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」と「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は関数関係はない。
- エ 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」と「水を注ぐ時間」は関数関係はない。

(答 11)

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答えても正解です。

文章 Aさんは分速 80m で 5 分歩くと、400m 進みました。

- 例
- ア 歩いた速さ
 - イ 歩いた時間
 - ウ 歩いた距離

解答 $x : \text{イ}, y : \text{ウ}$, 関係式 : $y = 80x$

※ $x : \text{イ}, y : \text{ア}$, 関係式 : $y = \frac{400}{x}$ や $x : \text{ア}, y : \text{ウ}$, 関係式 : $y = 5x$ なども正解です。

文章 Cさんは、植物の成長を観察しています。植物が芽を出した日を 1 日目として、今日で 12 日目です。今日の植物の長さは 36cm でした。植物は 1 日にちょうど 3cm ずつ伸びています。

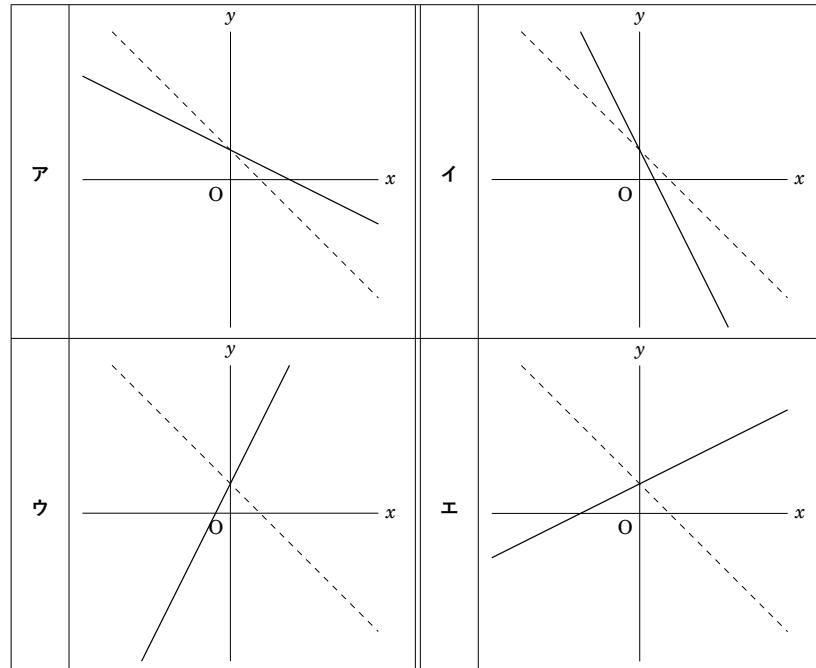
- ア 植物が芽を出した日
- イ 植物が芽を出してからの日数
- ウ 植物の長さ
- エ 植物が 1 日に伸びる長さ

(答 12) $x :$ _____ $y :$ _____ 関係式 : _____

関数 – 学習状況診断テスト

(13) 傾き a を $-1 < a < 0$ の範囲で決定したとき、一次関数 $y = ax + 1$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

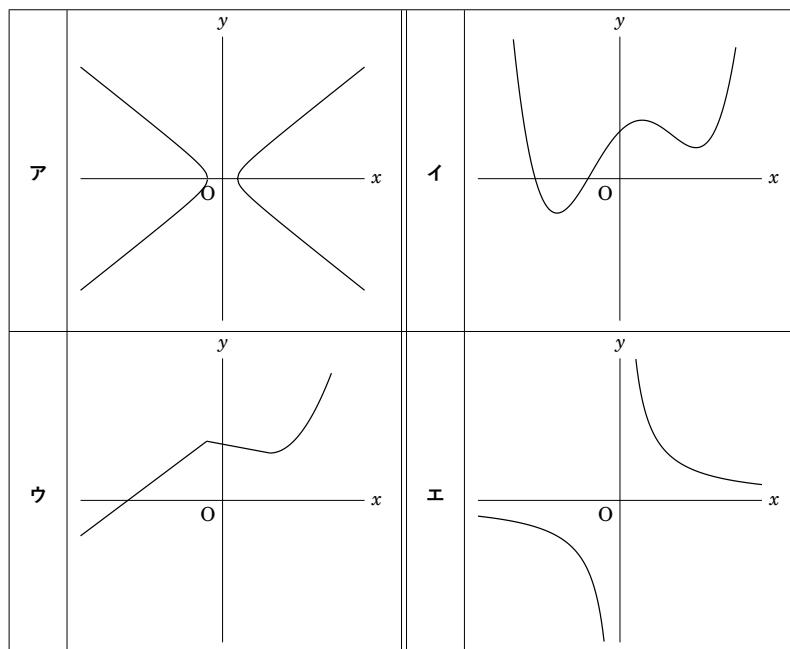
ただし、点線は $y = -x + 1$ のグラフである。



(答 13)

関数 – 学習状況診断テスト

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。



(答 14)

第2回テスト問題

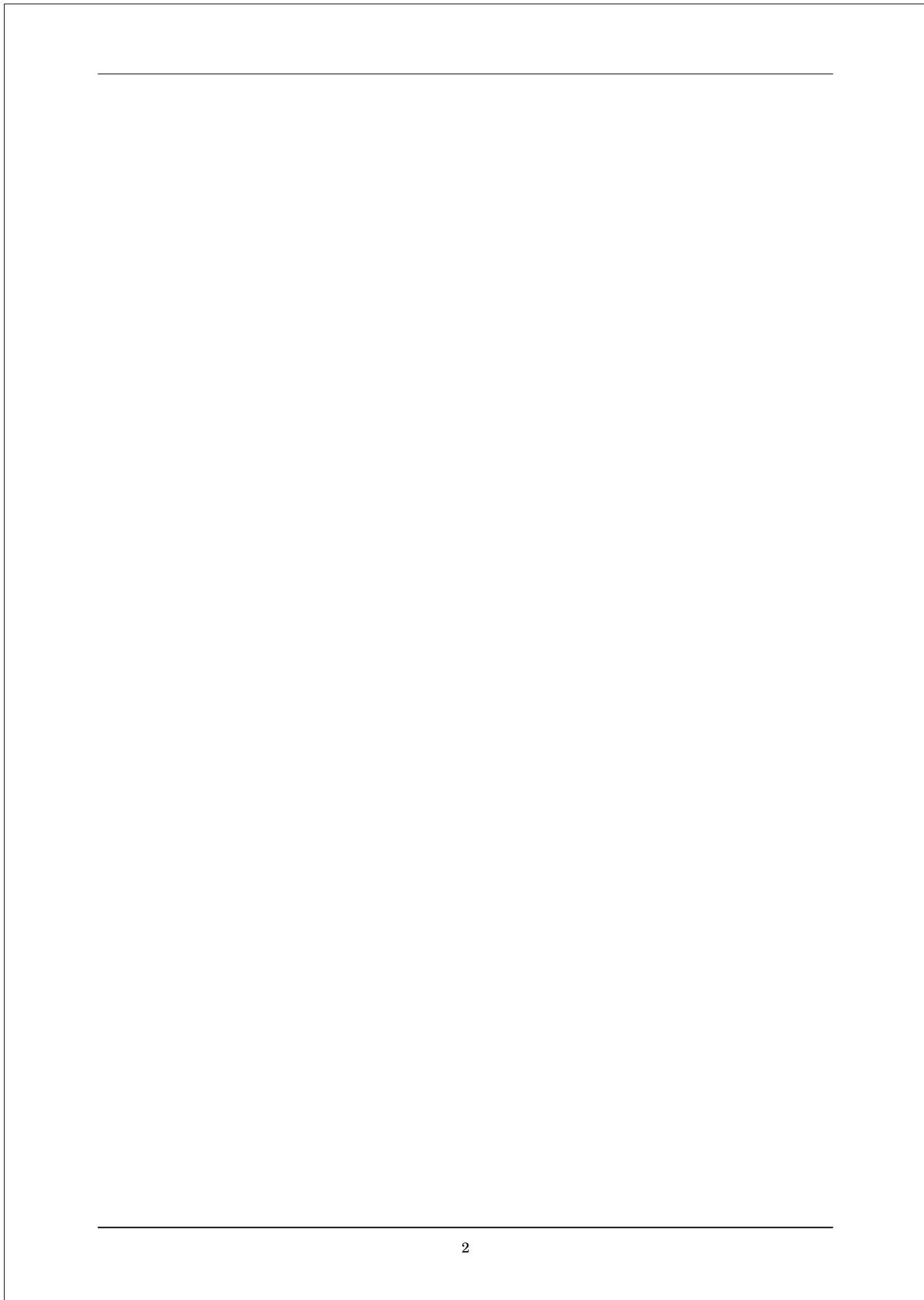
関 数

学習状況診断テスト

第2回

このテストは、「関数」に関する学習状況を診断して、今後の勉強に活かすためのものです。
このテストの結果が成績や評価に関係することはありませんが、今後の勉強に役立つアドバイスがもらえるよう、真剣に取り組んでください。
問題は全部で14問あります。テストは20分で取り組んでください。わからない問題は後回しにして、最後の問題まで考えるようしましょう。

生徒個人番号



関数 – 学習状況診断テスト

(1) 一次関数 $y = -4x + 1$ において、 $y = 2$ であるとき、 x を求めてください。

(答 1) _____

(2) 一次関数において、 $x = -3$ のとき $y = -11$ 、 $x = 1$ のとき $y = -3$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

(答 2) _____

(3) 3つの数量 s , t , u がある。 t は s の関数であり、 u は t の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア s の値を決めると、 t の値がただ一つに定まる。
- イ s の値を決めると、 u の値がただ一つに定まる。
- ウ t の値を決めると、 s の値がただ一つに定まる。
- エ t の値を決めると、 u の値がただ一つに定まる。

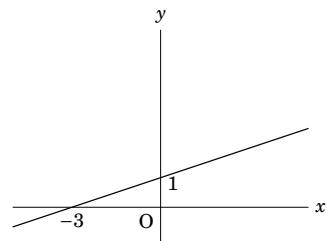
(答 3) _____

(4) 一次関数 $y = 2x + 2$ において、 y が t であるとき、 x を t を用いて表してください。

(答 4) _____

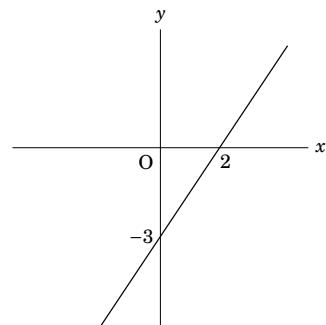
関数 – 学習状況診断テスト

- (5) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の切片を答えてください。



(答 5) _____

- (6) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の傾きを答えてください。

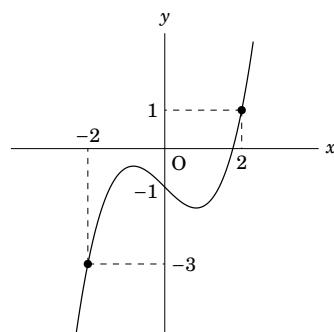


(答 6) _____

- (7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、誤っているものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア x の変域が $-2 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $-3 \leq y \leq 1$ である。
イ 変化の割合は一定でない。
ウ $x=0$ のとき、 $y=-1$ である。
エ y の値を一つ決めると、 x の値もただ一つに定まる。

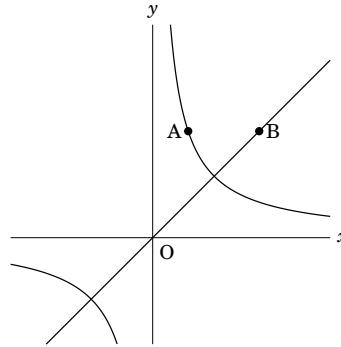
(答 7) _____



関数 – 学習状況診断テスト

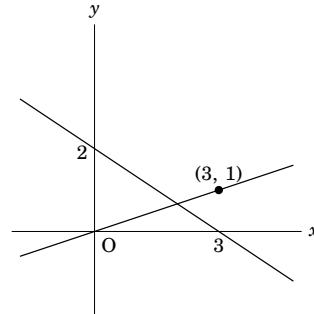
- (8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、比例 $y = x$ のグラフが描かれている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(1, 3), $y = x$ 上に点 B(3, 3) をとるととき、線分 AB の長さを求めてください。
- ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

(答 8)

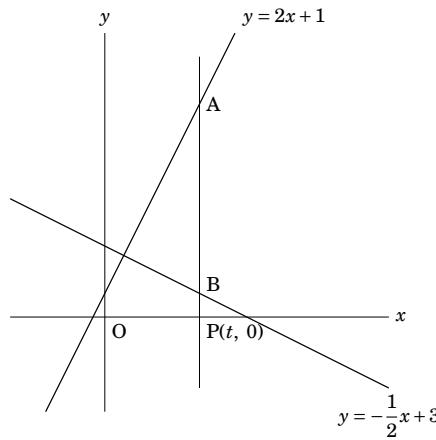


- (9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。

(答 9) (,)



- (10) 右の図のように、直線 $y = 2x + 1$ と直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ がある。 x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = 2x + 1$ 、直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ との交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 5 となるときの点 P の x 座標を求めてください。
- ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。
- また、点 P の x 座標は正とする。



(答 10)

関数 – 学習状況診断テスト

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章 ボール径 0.3mm のボールペン A とボール径 0.6mm のボールペン B があります。ボールペン A で 1m の線を引くと、インクを 1mL 使います。ボールペン B で 1m の線を引くと、インクを 2mL 使います。

- ア 「ボールペン A で引いた線の長さ」と「ボールペン A のインクの使用量」は関数関係はない。
- イ 「ボールペン B のインクの使用量」と「ボールペン B で引いた線の長さ」は関数関係はない。
- ウ 「ボールペン A のインクの使用量」と「ボールペン A のボール径」は関数関係はない。
- エ 「ボールペン A のボール径」と「ボールペン B のインクの使用量」は関数関係はない。

(答 11)

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答えても正解です。

文章 Aさんは分速 80m で 5 分歩くと、400m 進みました。

- 例
- ア 歩いた速さ
 - イ 歩いた時間
 - ウ 歩いた距離

解答 $x : \text{イ}, y : \text{ウ}$, 関係式: $y = 80x$

※ $x : \text{イ}, y : \text{ア}$, 関係式: $y = \frac{400}{x}$ や $x : \text{ア}, y : \text{ウ}$, 関係式: $y = 5x$ なども正解です。

文章 ある赤色の絵の具 R をある布 C の上に 1mL たらすと、面積 $2\pi\text{cm}^2$ の円状に広がります。最大容量 10mL のスポットを使って、8mL の絵の具 R を布 C の上にたらしたら、半径 4cm の円ができました。

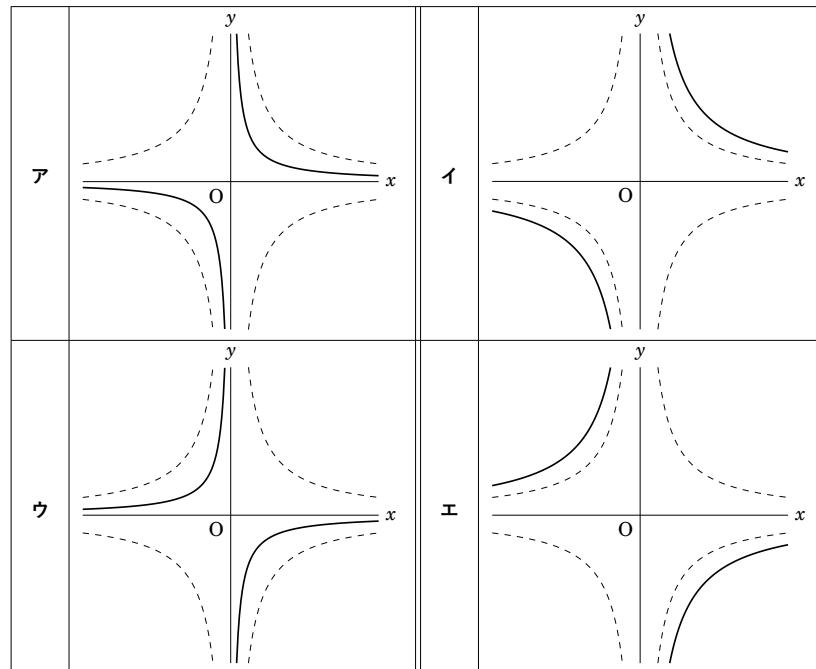
- ア 絵の具 R をたらす量
- イ 布 C に広がる円形の面積
- ウ スポットの最大容量
- エ 布 C に広がる円形の半径

(答 12) $x :$ _____ $y :$ _____ 関係式:

(※ 円周率には π を用いること。)

関数 – 学習状況診断テスト

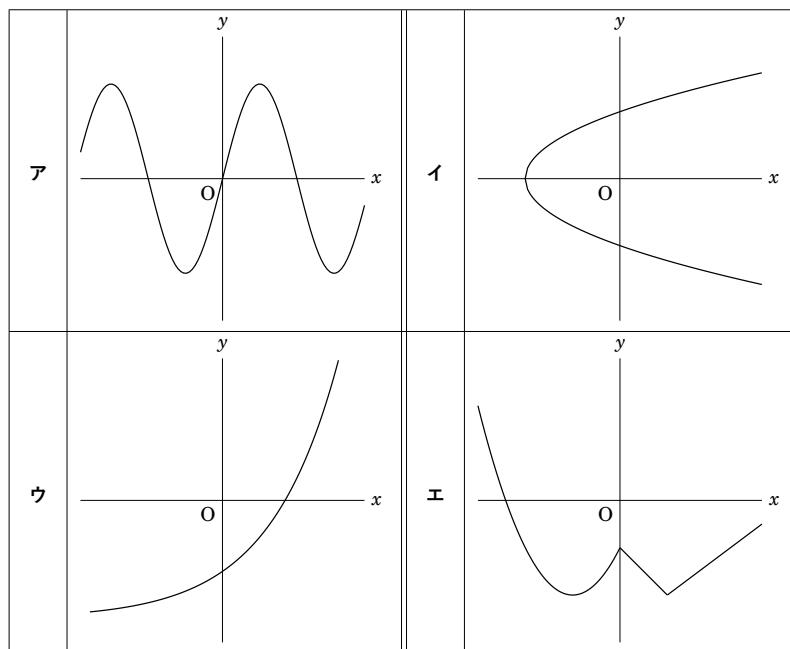
- (13) 比例定数 a を $1 \leq a < 3$ の範囲で決定したとき、反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。
- ただし、点線は $y = \frac{3}{x}$ および $y = -\frac{3}{x}$ のグラフである。



(答 13)

関数 – 学習状況診断テスト

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。



(答 14)

第3回テスト問題

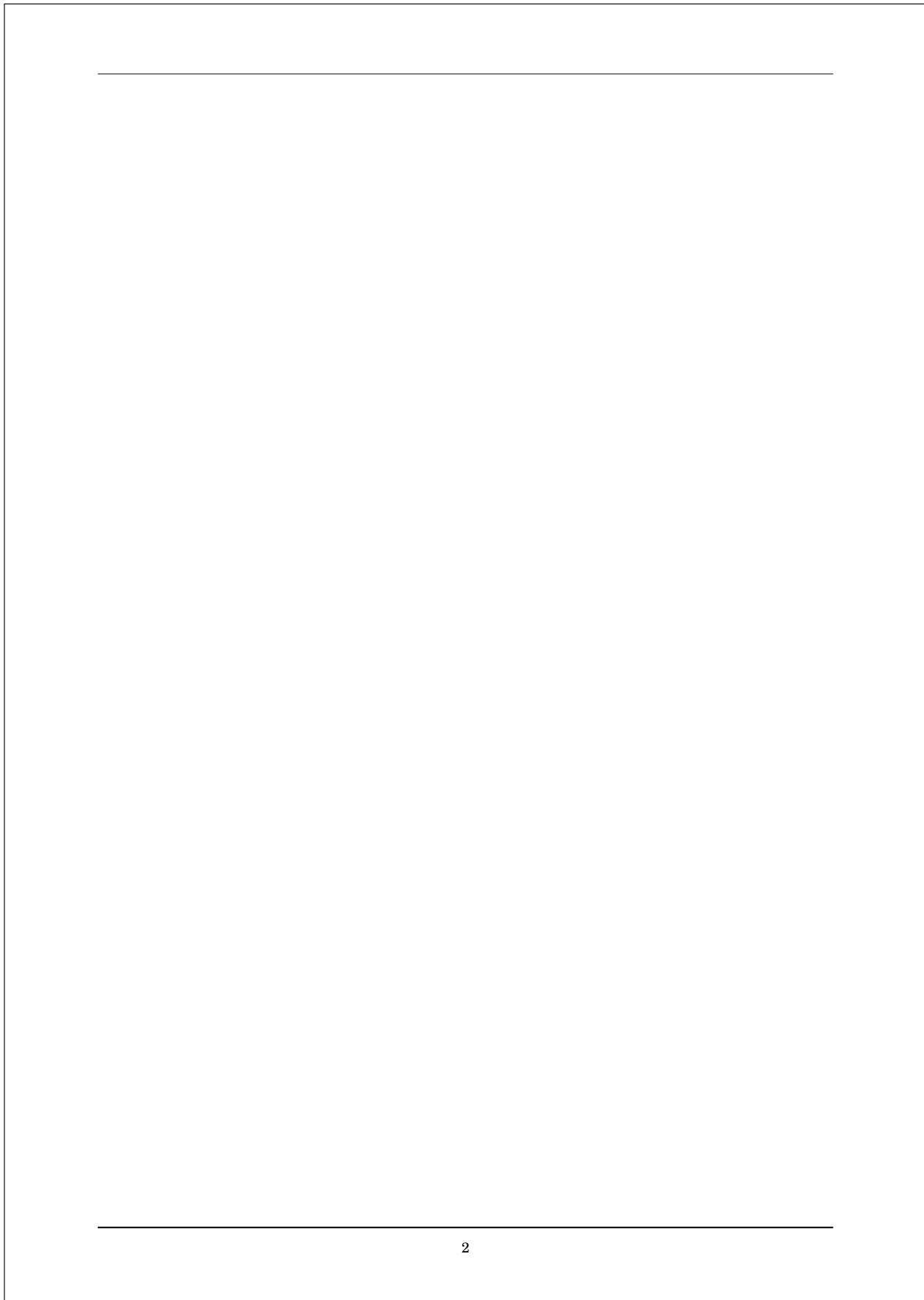
関 数

学習状況診断テスト

第3回

このテストは、「関数」に関する学習状況を診断して、今後の勉強に活かすためのものです。
このテストの結果が成績や評価に関係することはありませんが、今後の勉強に役立つアドバイスがもらえるよう、真剣に取り組んでください。
問題は全部で14問あります。テストは20分で取り組んでください。わからない問題は後回しにして、最後の問題まで考えるようしましょう。

生徒個人番号



関数 – 学習状況診断テスト

(1) 一次関数 $y = 3x + 2$ において、 $y = 4$ であるとき、 x を求めてください。

(答 1)

(2) 一次関数において、 $x = -2$ のとき $y = 2$ 、 $x = 3$ のとき $y = 12$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

(答 2)

(3) 3つの数量 a 、 b 、 c がある。 b は a の関数であり、 c は b の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア c の値を決めると、 b の値がただ一つに定まる。
- イ a の値を決めると、 c の値がただ一つに定まる。
- ウ b の値を決めると、 c の値がただ一つに定まる。
- エ a の値を決めると、 b の値がただ一つに定まる。

(答 3)

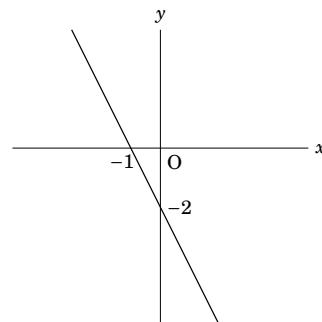
(4) 一次関数 $y = 3x - 2$ において、 y が t であるとき、 x を t を用いて表してください。

(答 4)

関数 – 学習状況診断テスト

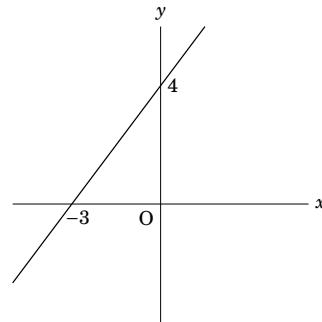
- (5) 右の図に、一次関数のグラフがかかっている。この一次関数の切片を答えてください。

(答 5)



- (6) 右の図に、一次関数のグラフがかかっている。この一次関数の傾きを答えてください。

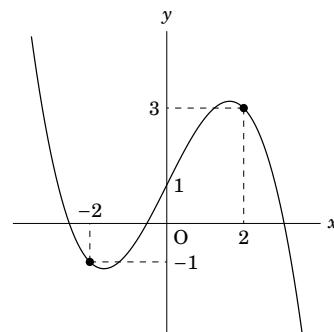
(答 6)



- (7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、誤っているものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

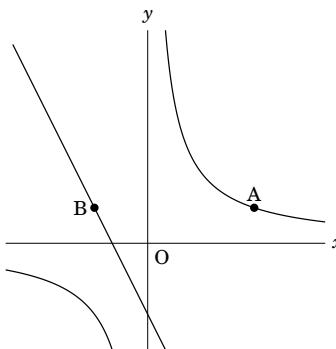
- ア $x = -2$ のとき、 $y = -1$ である。
イ x の値を一つ決めると、 y の値もただ一つに定まる。
ウ x の値が増加するとき、 y の値も必ず増加する。
エ $0 \leq x \leq 2$ の範囲では、 y の値は必ず正である。

(答 7)



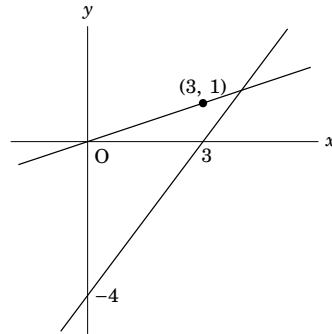
関数 – 学習状況診断テスト

- (8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、比例 $y = -2x - 2$ のグラフがかけられている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(3, 1), $y = -2x - 2$ 上に点 B $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ をとるととき、線分 AB の長さを求めてください。
- ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。



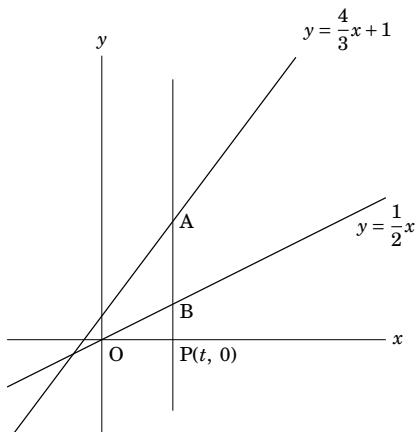
(答 8)

- (9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。



(答 9) (,)

- (10) 右の図のように、直線 $y = \frac{4}{3}x + 1$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ がある。 x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = \frac{4}{3}x + 1$ 、直線 $y = \frac{1}{2}x$ との交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 3 となるときの点 P の x 座標を求めてください。
- ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。
- また、点 P の x 座標は正とする。



(答 10)

関数 – 学習状況診断テスト

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章 A さんと B さんが 15 時 00 分に家を出ました。A さんは分速 60m で、B さんは分速 70m で歩いています。
A さんの忘れ物に気づいた C さんは、15 時 04 分に家を出て分速 100m で走って A さんを追いかけました。
C さんは A さんに 15 時 10 分に追いつきました。

- ア 「A さんの歩く速さ」と「C さんが A さんに追いつく時刻」は関数関係はない。
- イ 「C さんが A さんに追いつく時刻」と「C さんが家を出る時刻」は関数関係はない。
- ウ 「B さんの歩く速さ」と「C さんが A さんに追いつく時刻」は関数関係はない。
- エ 「C さんが A さんに追いつく時刻」と「C さんの走る速さ」は関数関係はない。

(答 11)

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答へても正解です。

例

文章 A さんは分速 80m で 5 分歩くと、400m 進みました。

- ア 歩いた速さ
- イ 歩いた時間
- ウ 歩いた距離

解答 $x : \text{イ}, y : \text{ウ}$, 関係式: $y = 80x$

※ $x : \text{イ}, y : \text{ア}$, 関係式: $y = \frac{400}{x}$ や $x : \text{ア}, y : \text{ウ}$, 関係式: $y = 5x$ なども正解です。

文章 齒数 15 の歯車 S と歯数 30 の歯車 T がかみ合って回転するとき、歯車 T が 1 回転すると歯車 S は 2 回転します。また、歯車 S と歯数 10 の歯車 U がかみ合って回転するとき、歯車 U が 1 回転すると歯車 S は $\frac{2}{3}$ 回転します。

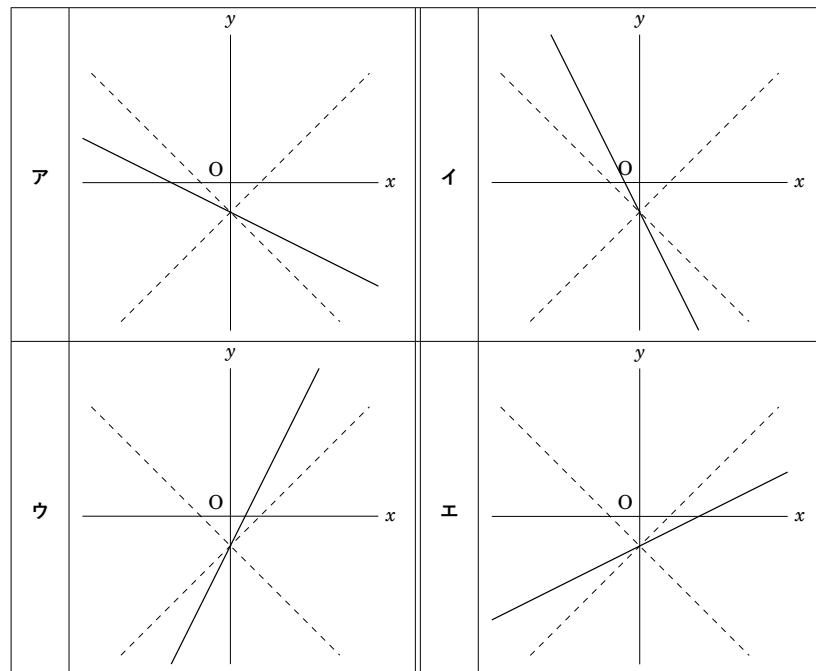
- ア 歯車 S の歯数
- イ 歯車 T の回転数
- ウ 歯車 U の回転数
- エ 歯車 U の歯数

(答 12) $x :$ _____ $y :$ _____ 関係式: _____

関数 – 学習状況診断テスト

(13) 傾き a を $a > 1$ の範囲で決定したとき、一次関数 $y = ax - 1$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

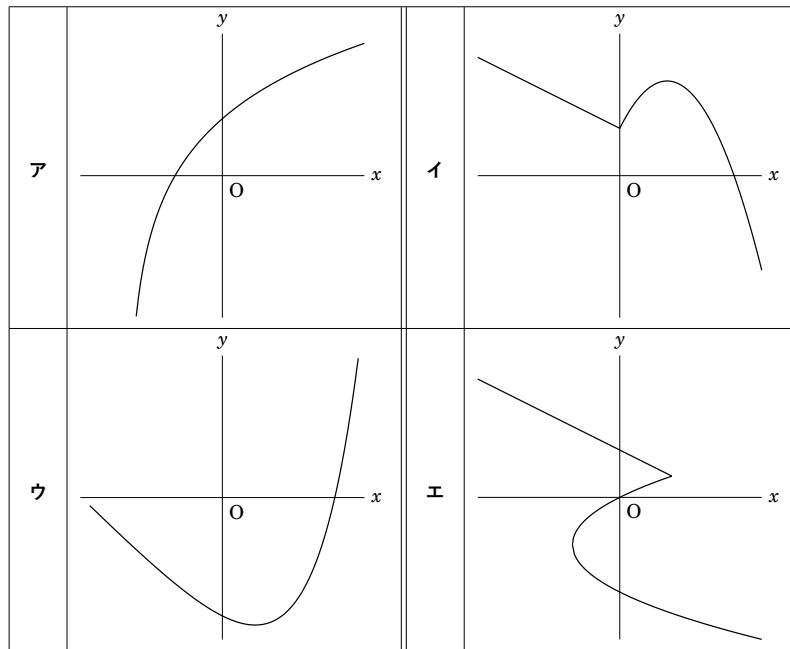
ただし、点線は $y = -x - 1$ および $y = x - 1$ のグラフである。



(答 13)

関数 – 学習状況診断テスト

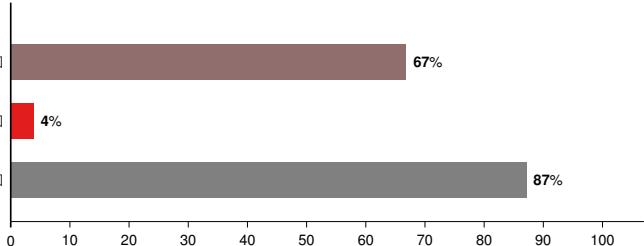
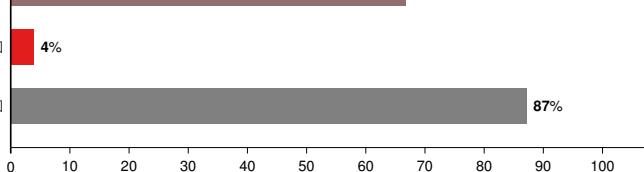
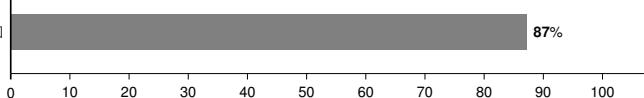
(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。



(答 14) _____

Appendix D

第1回フィードバック例

フィードバックシート																																																																																								
関数 学習状況診断テスト 第1回 (7月第4週実施)													番号: 0001307																																																																											
測定能力別 達成状況																																																																																								
1	代数的手続きの理解	第1回		67%																																																																																				
2	関数的思考の理解	第1回		4%																																																																																				
3	直交座標上での表現の理解	第1回		87%																																																																																				
測定能力別 コメント																																																																																								
1	代数的手手続きの理解	文字を使った式を扱うことができる。それぞれの関数の一般形 ($y = ax + b$ など) を扱うことができる。自力で文字を使って式を立てられる。																																																																																						
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">方程式や連立方程式を解く力や、文章中の情報から式を立てる力がついているようです。分数や符号のケアレスミスに気をつけて取り組みましょう。関数との関連では、それぞれの関数の一般式を確認しておきましょう。関数やグラフの式の求め方や、交点の座標の求め方を確認してみましょう。文章中の情報を読み取り式を立てる練習を重ねると、数学力を向上させることができるでしょう。</div>																																																																																								
2	関数的思考の理解	関数の定義「一方の値を決めると他方の値がただ一つに定まる」を理解できる。具体的な例を関数として捉えることができる。																																																																																						
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">関数の定義（「y が x の関数である」とは、「x の値を決めると y の値がただ一つに定まる」ことである）を確認しておきましょう。関数的な視点で具体的な例を捉えられるように、関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。とくに、関係式が示されていない事柄に対して、2つの変数の関数関係を意識できるようにすると良いでしょう。</div>																																																																																								
3	直交座標上での表現の理解	直交座標上にかかれたグラフが意味する内容や、グラフの特徴が意味する内容を、数学的用語や数式と結び付けて理解できる。																																																																																						
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">直交座標上の情報を読み取る感覚が身についてきているようです。直交座標上の情報を言葉や数式による表現と結びつけて捉えるようにすると、難易度の高い問題を解くときに活用しやすくなるでしょう（例えば、交点の座標はなぜグラフの式の連立方程式を解くことで求められるのでしょうか？）。「関数のグラフは、関係式を満たす x, y の組の点の集合である」という感覚を身につけると、関数の問題に対する理解度が格段に高まります。</div>																																																																																								
全体概要																																																																																								
正答数: 7 問 /14 (平均 4.5 問)																																																																																								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"><thead><tr><th></th><th>(1)</th><th>(2)</th><th>(3)</th><th>(4)</th><th>(5)</th><th>(6)</th><th>(7)</th><th>(8)</th><th>(9)</th><th>(10)</th><th>(11)</th><th>(12)</th><th>(13)</th><th>(14)</th></tr></thead><tbody><tr><td>正誤</td><td>○</td><td>×</td><td>×</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>×</td><td>○</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>○</td><td>○</td></tr><tr><td>正答率 (%)</td><td>63.9</td><td>18.0</td><td>9.8</td><td>54.1</td><td>68.9</td><td>29.5</td><td>36.1</td><td>52.5</td><td>6.6</td><td>3.3</td><td>27.9</td><td>27.9</td><td>29.5</td><td>24.6</td></tr><tr><td>難易度</td><td>中</td><td>難</td><td>難</td><td>中</td><td>易</td><td>難</td><td>中</td><td>中</td><td>難</td><td>難</td><td>難</td><td>難</td><td>難</td><td>難</td></tr><tr><td>測定能力</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2, 3</td><td>3</td><td>1, 3</td><td>1, 3</td><td>2</td><td>1, 2</td><td>3</td><td>2, 3</td></tr></tbody></table>															(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	正誤	○	×	×	○	○	○	×	○	×	×	×	×	○	○	正答率 (%)	63.9	18.0	9.8	54.1	68.9	29.5	36.1	52.5	6.6	3.3	27.9	27.9	29.5	24.6	難易度	中	難	難	中	易	難	中	中	難	難	難	難	難	難	測定能力	1	1	2	1	3	3	2, 3	3	1, 3	1, 3	2	1, 2	3	2, 3
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)																																																																										
正誤	○	×	×	○	○	○	×	○	×	×	×	×	○	○																																																																										
正答率 (%)	63.9	18.0	9.8	54.1	68.9	29.5	36.1	52.5	6.6	3.3	27.9	27.9	29.5	24.6																																																																										
難易度	中	難	難	中	易	難	中	中	難	難	難	難	難	難																																																																										
測定能力	1	1	2	1	3	3	2, 3	3	1, 3	1, 3	2	1, 2	3	2, 3																																																																										

	1. 代数的手手続きの理解	2. 関数的思考の理解	3. 直交座標上での表現の理解
(1)	• y に 6 を代入し, x に関する方程式 $6 = \frac{1}{2}x + 2$ を解く。		
(2)	• $y = ax + b$ に $x = -3$, $y = 5$ を代入した $5 = -3a + b$ と, $x = 12$, $y = 0$ を代入した $0 = 12a + b$ の連立方程式を解く。		
(3)		• y が x の関数であるとき, x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる (ア, ウは正しい)。 • 2 つの関数から, z は x の関数である (イは正しい)。	
(4)	• x に $(t+2)$ を代入して, 式を整理する。		
(5)			• 切片とは, 直線と y 軸との交点である。
(6)			• 2 点 $(-3, 0)$, $(0, -1)$ を読み取る。 • 傾き = 2 点間の変化の割合 = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ • グラフに示された 2 点間の, x の増加量は 3, y の増加量は -1 である。
(7)		• y が x の関数であるとき, x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。 • 関数の定義をグラフと結びつけて捉える (右記第 3 項目)。	• グラフが曲線のとき, 変化の割合は一定でない (アは誤り)。 • 点 $(0, 2)$ は, $x = 0$ のとき $y = 2$ であることを表す (ウは誤り)。 • $y = 2$ となる x の値が 3 つあることを読み取るなど (エは誤り)。
(8)			• 線分 AB は y 軸に平行である。 • 2 点 $(3, 1)$, $(3, -2)$ の間に格子を意識して数える, または y 座標の差 $1 - (-2)$ を計算する。
(9)	• 原点 O と点 $(4, 4)$ を通る直線の式を求める ($y = ax$ へ代入する場合)。 • 2 点 $(0, 2)$, $(4, 0)$ を通る直線の式を求める ($y = ax + b$ へ代入する場合)。 • 2 つの直線の式 $y = x$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$ の連立方程式を解く。		• 原点 O と $(4, 4)$ を通る直線は, 比例 $y = x$ のグラフである。 • 2 点 $(0, 2)$, $(4, 0)$ を通る直線の式を求める (切片と傾きをグラフから読み取る場合)。 • 2 直線の交点の座標は, 2 つの直線の式の連立方程式の解である。
(10)	• 方程式 $3t - (t - 2) = 7$ を立て, 解く。		• 点 A の座標を $(t, 3t)$, 点 B の座標を $(t, t - 2)$ と, t を用いて表す。 • 線分 AB の長さを, $3t - (t - 2)$ と表す。
(11)		• 関数の定義を具体例と結びつけて捉える。 • 関数の定義をもとに, 一方の値を決めたときに他方の値が決まるかどうかを考える。 • 「最初に水槽に入っていた水の高さ」がどうであっても, 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」は決まらない (関数関係はない)。 • 「最初に水槽に入っていた水の高さ」が高くなれば, その分「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は高くなる (関数関係にある)。 • 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」が大きくなれば, その分「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は高くなる (関数関係にある)。 • 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」が大きくなれば, その分「水を注ぐ時間」は短くで済む (関数関係にある)。	
(12)	• 必要な変数を, 適切に文字 x , y に設定する。 • 設定した変数に合うような式を立てる。	• 関数の定義を具体例と結びつけて捉える。 • (11) と同様に, 関数関係にある 2 つの数量を見つける。	
(13)			• 傾き a が $-1 < a < 0$ のとき, 傾き -1 のグラフよりも, 傾きが緩やかである。 • 傾き a が負のとき, グラフは右下がりになる。
(14)		• y が x の関数であるとき, x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。 • 関数の定義をグラフと結びつけて捉える。 • 関数は, 比例, 反比例, 一次関数, 関数 $y = ax^2$ だけに限られない。	• アは, 一つの x の値に対して二つの y の値が対応していることがあることを読み取る。(「 y は x の関数である」とはいえない。) • イ, ウ, エは, x の値を決めると, y の値がただ一つに定まっている。

関数 - 学習状況診断テスト

- (1) 一次関数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ において、 $y = 6$ であるとき、 x を求めてください。

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{1}{2}x + 2 & 3a - b &= -5 \\ 4 &= \frac{1}{2}x & -12a - b &= 0 \\ \frac{1}{2}x &= 4 & 3a - b + 5 &= 0 \\ && + 12a - 4b &= -20 \\ && \hline & -3b &= -20 \\ && b &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

(答1) $x = 8$

- (2) 一次関数において、 $x = -3$ のとき $y = 5$ 、 $x = 12$ のとき $y = 0$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

$$\begin{aligned} 5 &= -3a + b & 15a &= -5 \\ 0 &= 12a + b & a &= -\frac{1}{3} \\ 3a + 5 - b &= 0 & \text{代入して } b &= 8 \text{ は正解} \\ -2 - 12a + 0 - b &= 0 & y &= -\frac{1}{3}x + 4 \\ 15a + 5 &= 0 & & y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{aligned}$$

- (3) 3つの数量 x 、 y 、 z がある。 y は x の関数であり、 z は y の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア x の値を決めると、 y の値がただ一つに定まる。 $y = ax$
- イ x の値を決めると、 z の値がただ一つに定まる。
- ウ y の値を決めると、 z の値がただ一つに定まる。
- エ z の値を決めると、 y の値がただ一つに定まる。

(答3)

工

- (4) 一次関数 $y = 2x - 6$ において、 x が $t+2$ であるとき、 y を t を用いて表してください。

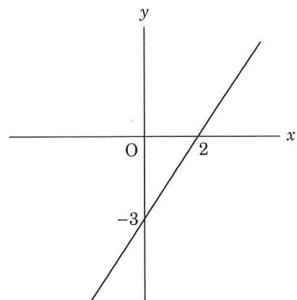
$$\begin{aligned} y &= 2t + 4 - 6 \\ y &= 2t - 2 \end{aligned}$$

(答4) $y = 2t - 2$

関数 - 学習状況診断テスト

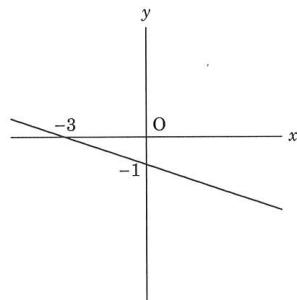
- (5) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の切片を答えてください。

(答5) -3



- (6) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の傾きを答えてください。

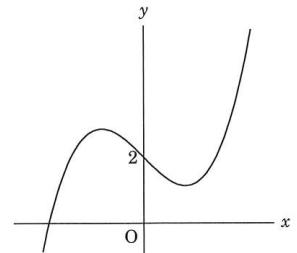
(答6) $-\frac{1}{3}$



- (7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、正しいものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア 変化の割合は一定である。
- イ x の値を一つ決めると、 y の値もただ一つに定まる。
- ウ $x=2$ のとき、 $y=0$ である。
- エ y の値を一つ決めると、 x の値もただ一つに定まる。

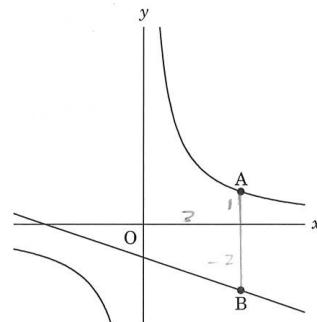
(答7) イ



関数 - 学習状況診断テスト

- (8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、一次関数 $y = -\frac{1}{3}x - 1$ のグラフがかかれている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(3, 1), $y = -\frac{1}{3}x - 1$ 上に点 B(3, -2) をとるとき、線分 AB の長さを求めてください。ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

(答 8) 3cm

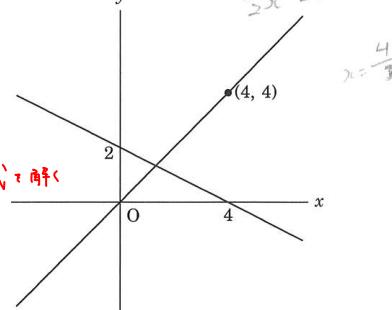


- (9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = x \end{cases}$$

式は正解。連立方程式で解く

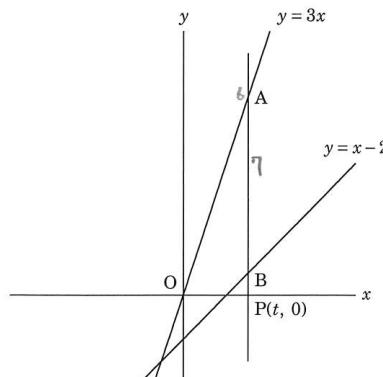
$$(\text{答 9}) \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$



- (10) 右の図のように、直線 $y = 3x$ と直線 $y = x - 2$ がある。 x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = 3x$ 、直線 $y = x - 2$ との交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 7 となるときの点 P の x 座標を求めてください。

ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。

また、点 P の x 座標は正とする。



$$(\text{答 10}) \quad t = \frac{5}{2}$$

関数 - 学習状況診断テスト

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章

水槽に 3cm の高さまで水が入っています。この水槽に、1 秒あたり 200mL の水が出る蛇口から水を加えます。水を加えた後の水槽に入っている水の高さが 5cm になるように、15 秒間水を注ぎ、蛇口を閉めました。

- ア 「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」は関数関係はない。
- イ 「最初に水槽に入っていた水の高さ」と「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は関数関係はない。
- ウ 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」と「水を加えた後の水槽内の水の高さ」は関数関係はない。
- エ 「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」と「水を注ぐ時間」は関数関係はない。

(答 11) ✓ ✗
ア

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答へても正解です。

文章 Aさんは分速 80m で 5 分歩くと、400m 進みました。

- 例
- ア 歩いた速さ
 - イ 歩いた時間
 - ウ 歩いた距離

解答 $x : イ$, $y : ウ$, 関係式: $y = 80x$

※ $x : イ$, $y : ア$, 関係式: $y = \frac{400}{x}$ や $x : ア$, $y : ウ$, 関係式: $y = 5x$ なども正解です。

文章 Cさんは、植物の成長を観察しています。植物が芽を出した日を 1 日目として、今日で 12 日目です。今日の植物の長さは 36cm でした。植物は 1 日にちょうど 3cm ずつ伸びています。

- ア 植物が芽を出した日
- イ 植物が芽を出してからの日数
- ウ 植物の長さ
- エ 植物が 1 日に伸びる長さ

$$y = 3x$$

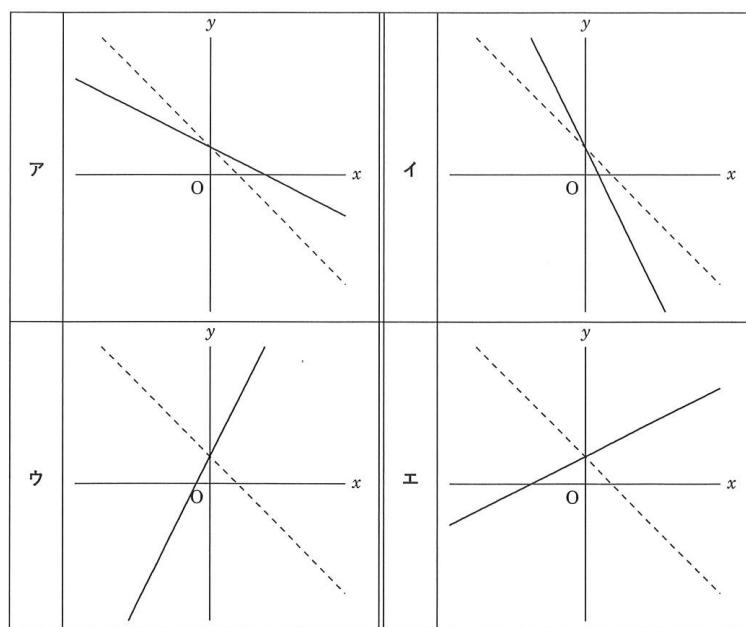
(答 12) $x : イ$ $y : ウ$ 関係式: $y = 3x$

正解一覧	<u>$x : イ$</u> , <u>$y : ウ$</u> , 関係式: $y = 3x$
	<u>$x : ウ$</u> , <u>$y : イ$</u> , 関係式: $y = \frac{1}{3}x$
	<u>$x : イ$</u> , <u>$y : エ$</u> , 関係式: $y = \frac{36}{x}$
	<u>$x : エ$</u> , <u>$y : イ$</u> , 関係式: $y = \frac{36}{x}$
	<u>$x : ウ$</u> , <u>$y : エ$</u> , 関係式: $y = \frac{1}{12}x$
	<u>$x : エ$</u> , <u>$y : ウ$</u> , 関係式: $y = 12x$

関数 - 学習状況診断テスト

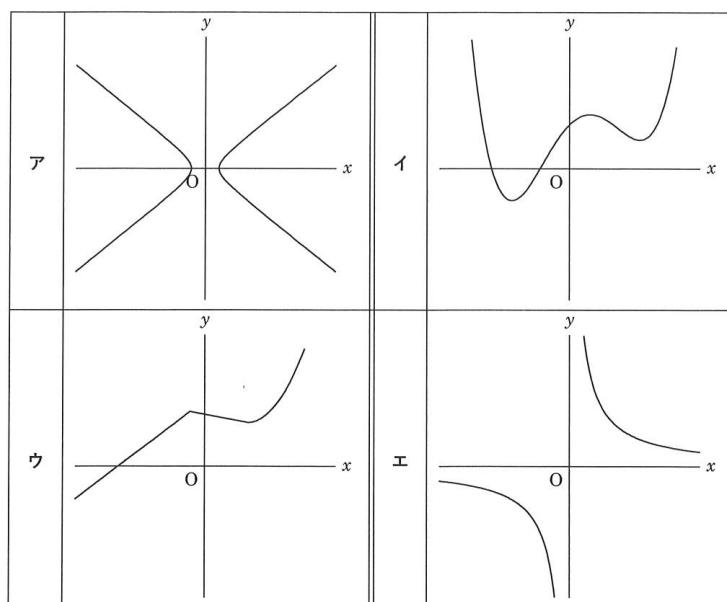
(13) 傾き a を $-1 < a < 0$ の範囲で決定したとき、一次関数 $y = ax + 1$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

ただし、点線は $y = -x + 1$ のグラフである。



Q
答 13) P

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。



(答 14)

ア

詳解 p.1

(1) 一次関数 $y = \frac{1}{2}x + 2$ において、 $y = 6$ であるとき、 x を求めてください。

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ の } y \text{ に } 6 \text{ を代入して、 } x \text{ に関する方程式を解く。} \\ 6 = \frac{1}{2}x + 2 & \quad x = (-4) \times \left(-\frac{2}{1} \right) \\ -\frac{1}{2}x = 2 - 6 & \quad x = 8 \\ -\frac{1}{2}x = -4 & \end{aligned}$$

(2) 一次関数において、 $x = -3$ のとき $y = 5$ 、 $x = 12$ のとき $y = 0$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

一次関数の一般式 $y = ax + b$ に、 $x = -3$ 、 $y = 5$ と $x = 12$ 、 $y = 0$ をそれぞれ代入して、連立方程式を解く。

$$\begin{cases} 5 = -3a + b & \cdots ① \\ 0 = 12a + b & \cdots ② \end{cases} \quad \begin{array}{l} ① \text{ に代入して,} \\ 5 = (-3) \times \left(-\frac{1}{3} \right) + b \\ 5 = 1 + b \\ 5 - 1 = b \\ b = 4 \end{array}$$

加減法で ① - ② より、
 $5 = -15a$
 $15a = -5$
 $a = -\frac{5}{15}$
 $a = -\frac{1}{3}$

よって、 $y = -\frac{1}{3}x + 4$

(3) 3つの数量 x 、 y 、 z がある。 y は x の関数であり、 z は y の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

ア y は x の関数であることから、 x の値を決めるとき、 y の値がただ一つに定まるため、**ア**は正しいといえる。

イ z は y の関数であることから、 y の値を決めるとき、 z の値がただ一つに定まるため、**イ**は正しいといえる。

以上の2のことから、 x の値を決めるとき y の値が一つに定まり、そのときの y の値に応じて z の値も定まるため、**イ**も正しいといえる。

一方、 z の値を決めて、 y の値は一つに定まるとは限らない。同様に、 y の値を決めて、 x の値は一つに定まるとは限らない。よって、**エ**は必ずしも正しいといえない。

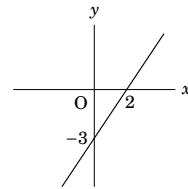
(4) 一次関数 $y = 2x - 6$ において、 x が $t+2$ であるとき、 y を t を用いて表してください。

$y = 2x - 6$ の x に $t+2$ を代入する。

$$\begin{aligned} y &= 2(t+2) - 6 && (\text{括弧を付けることを忘れずに}) \\ y &= 2t + 4 - 6 \\ y &= 2t - 2 \end{aligned}$$

このことは、 $y = 2x - 6$ のグラフが、点 $(t+2, 2t-2)$ を通るということを意味する。グラフ上の点の座標を文字を用いて表して解き進める考え方には、グラフと絡めた高難易度の問題で頻出。

(5) 右の図に、一次関数のグラフがかけられている。この一次関数の切片を答えてください。



切片とは、直線と y 軸との交点の座標である。グラフから、一次関数のグラフは y 軸と、点 $(0, -3)$ で交わっている。よって切片は -3 。

効率的ではないが、別の解き方として、直線の式 $y = ax + b$ を求め、 b を答える方法もある。その場合には、グラフから、直線が2点 $(0, -3)$ 、 $(2, 0)$ を通っていることを読み取り、 $x = 0$ 、 $y = -3$ と $x = 2$ 、 $y = 0$ をそれぞれ $y = ax + b$ に代入する。連立方程式 $\begin{cases} -3 = 0a + b \\ 0 = 2a + b \end{cases}$ を解いて、 $a = \frac{3}{2}$ 、 $b = -3$ 。切片は -3 。

(6) 右の図に、一次関数のグラフがかけられている。この一次関数の傾きを答えてください。

直線上の2点の座標がわかれば、その2点間の変化の割合を求ることで、直線の傾きを求めることができる。グラフから、直線は2点 $(-3, 0)$ 、 $(0, -1)$ を通っていることが読み取れる。

$$\begin{aligned} \text{傾き} &= \text{変化の割合} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} \\ &= \frac{0 - (-1)}{-3 - 0} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(5) と同様、直線の式 $y = ax + b$ を求め、 a を答える方法もある。その場合には、 $x = -3$ 、 $y = 0$ と $x = 0$ 、 $y = -1$ をそれぞれ $y = ax + b$ に代入する。連立方程式 $\begin{cases} 0 = -3a + b \\ -1 = 0a + b \end{cases}$ を解いて、 $a = -\frac{1}{3}$ 、 $b = -1$ 。傾きは $-\frac{1}{3}$

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = -1.$$

傾きは $-\frac{1}{3}$

傾きは $-\$

詳解 p.2

(7) 右の図は、ある関数のグラフを描いたものである。この関数について、正しいものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

グラフが曲線のとき、変化の割合は一定でない。これはグラフ上から適当に2点を取ったとき、点を取る位置によって変化の割合が異なることから説明できる。よってアは誤り。

グラフはy軸と、点(0, 2)で交わっており、これは、 $x=0$ のとき $y=2$ であることを意味している。 $x=2$ の点では明らかにy座標は0でない(図1)。よってウは誤り。

エに関して、yの値を一つ決めるとき、xの値もただ一つに定まるかどうかを確認するため、yの値を適当に一つ決めてみる。ここで、 $y=\frac{3}{2}$ あたりに設定すると、このyの値に対応するxの値が3つあることがグラフから読み取れる(図2)。よって、エは誤り。

イに関して、同様にxの値を適当に決めて考えていくと、必ずyの値は一つしか対応しないことがわかる(図3)。よってイが正しい。

(8) 右の図には、反比例 $y=\frac{3}{x}$ のグラフと、一次関数 $y=-\frac{1}{3}x-1$ のグラフが描かれている。 $y=\frac{3}{x}$ 上に点A(3, 1), $y=-\frac{1}{3}x-1$ 上に点B(3, -2)をとると、線分ABの長さを求めてください。

ただし、原点Oから点(0, 1)および原点Oから点(1, 0)の長さを1cmとする。

線分ABはy軸に平行である。このとき、線分の長さは、点Bから点Aまでのyの増加量であり、

$$(大きい方のy座標)-(小さい方のy座標)$$

で求めることができる。

$$\text{よって, } AB = (1) - (-2) = 3(\text{cm})$$

マス目を意識して数えることでも正解できる。ただし、(4)で書いたような、点の座標を文字で置いて解き進める問題では、マス目を数える方法は使えない。増加量を意識して(大きい方の座標)-(小さい方の座標)によって求める方が、応用の幅が広い。

(9) 右の図の2つのグラフの交点の座標を求めてください。

原点Oと点(4, 4)を通る直線は、比例 $y=x$ のグラフであるとすぐわかる。もう一方の直線は、2点(0, 2), (4, 0)を通っている。(5)の方法で切片が2であることがわかり、(6)の方法で傾きが $\frac{2-0}{0-(-4)} = \frac{1}{2}$ であることがわかれば、直線の式 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ が求められる。

交点の座標を求めるためには、2つのグラフの式の連立方程式を解けばよい。交点とは、いずれの関係式も満たすx, yの組だからである。

$$\begin{cases} y = x & \cdots ① \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

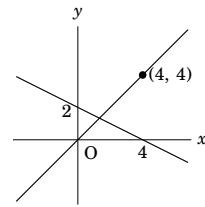
代入法から、②のyに①を代入して、

$$x = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{3}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\text{①に代入して, } y = \frac{4}{3} \text{。よって, 交点の座標は } \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$



原点Oと点(4, 4)を通る直線が、比例 $y=x$ のグラフであるとすぐわかるなければ、原点を通ることから、比例の一般式 $y=ax$ に $x=4, y=4$ を代入して、 $4=4a$ から $a=1$ を求めればよい。原点を通ることと比例のグラフであるということが結びついていなければ、一次関数の一般式 $y=ax+b$ に、 $x=0, y=0$ と $x=4, y=4$ をそれぞれ代入して、連立方程式 $\begin{cases} 0=0a+b \\ 4=4a+b \end{cases}$ を解き、 $a=1, b=0$ を求めればよい。

2点(0, 2), (4, 0)を通る直線の式に関しても、切片が2であることを読み取れた場合には、 $y=ax+2$ として、もう一つの点(4, 0)から $x=4, y=0$ を代入し、 $0=4a+2$ から $a=-\frac{1}{2}$ と求めることができる。あるいは、一次関数の一般式 $y=ax+b$ に、 $x=0, y=2$ と $x=4, y=0$ をそれぞれ代入して、連立方程式 $\begin{cases} 2=0a+b \\ 0=4a+b \end{cases}$ を解けば、 $a=-\frac{1}{2}, b=2$ と求められる。

このように、グラフの特徴の意味を言葉や式での表現と結びつけて理解できていれば、連立方程式を解く必要がなかったり、方程式さえ解く必要がなくなったりする。計算量が減ることで、計算上でのケアレスミスによる失点を減らすことができるとともに、問題にかかる時間も短くなる。

詳解 p.3

(10) 右の図のように、直線 $y = 3x$ と直線 $y = x - 2$ がある。 x 軸上に点 P をとり、 P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = 3x$ 、直線 $y = x - 2$ との交点をそれぞれ点 A , B とする。線分 AB の長さが 7 となるときの点 P の x 座標を求めてください。

ただし、点 P の x 座標を t とおき、 AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。

また、点 P の x 座標は正とする。

3 点 A , B , P の x 座標は同じであるから、点 P の x 座標を t としたとき、点 A , B の x 座標も t となる。点 A は直線 $y = 3x$ 上の点であるから、 x に t を代入して、 y 座標は $3t$ と表せる。同様に、点 B は直線 $y = x - 2$ 上の点であるから、 x に t を代入して、 y 座標は $t - 2$ と表せる。

点 P の座標が正であることから、点 B の y 座標よりも点 A の y 座標の方が大きく、線分 AB は y 軸に平行であるから、 AB の長さは t を用いて、

$$(大きい方の y 座標) - (小さい方の y 座標) = (3t) - (t - 2)$$

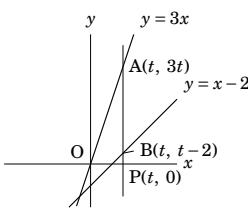
と表せる。
この長さが 7 になればよいか
ら、

$$(3t) - (t - 2) = 7$$

$$3t - t + 2 = 7$$

$$2t = 5$$

$$t = \frac{5}{2}$$



この問題が、グラフ上の点の座標を文字を用いて表して解き進める問題。

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

水槽に 3cm の高さまで水が入っています。この水槽に、1 秒あたり 200mL の水が出る蛇口から水を加えます。水を加えた後の水槽に入っている水の高さが 5cm になるように、15 秒間水を注ぎ、蛇口を閉めました。

関数の定義をもとに、一方の値を決めたときに他方の値が決まるかどうかを考える。

アに関して、「最初に水槽に入っていた水の高さ」はどうであっても、「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積」は決まらないため、関数関係なく、アは正しい。例えば、最初に水槽に入っていた水の高さが 6cm であったからといって、蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積が 400mL に増えていることにはならない。

イに関して、「最初に水槽に入っていた水の高さ (x)」が高くなれば、その分「水を加えた後の水槽内の水の高さ (y)」は高くなるため、関数関係にあり、イは誤り。例えば、最初に水槽に入っていた水の高さが 4cm であったら、15 秒間水を注いだ後の水槽内の水の高さは 6cm になる。具体的な関係式は、 $y = x + 2$ 。

ウに関して、「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積 (x)」が大きくなれば、その分「水を加えた後の水槽内の水の高さ (y)」は高くなるため、関数関係にあり、ウは誤り。例えば、蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積が 400mL であったら、15 秒間水を注いだ後の水槽内の水の高さは 7cm になる。具体的な関係式は、 $y = \frac{1}{100}x + 3$ 。

エに関して、「蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積 (x)」が大きくなれば、その分「水を注ぐ時間 (y)」は短くて済むため、関数関係にあり、エは誤り。例えば、蛇口から 1 秒あたりに出る水の容積が 400mL であったら、水を加えた後の水槽内の水の高さを 5cm にするためには、7.5 秒間水を注げば済む。具体的な関係式は、 $y = \frac{3000}{x}$ 。

なお、具体例は、水槽が直方体の形状の場合を想定しています。

問題文「次の文章について」の部分の誤字、失礼しました。正しくは「次の文章について」でした。

詳解 p.4

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答ても正解です。

Cさんは、植物の成長を観察しています。植物が芽を出した日を1日目として、今日で12日目です。今日の植物の長さは36cmでした。植物は1日にちょうど3cmずつ伸びています。

まずは、ア～エのうち関数関係にある2つの数量を見つける。

アの「植物が芽を出した日」は、他の数量と関数関係はない。例えば、植物が7月12日に芽を出しても、9月2日に芽を出しても、1日にちょうど3cmずつ伸びる植物は、12日目には36cmになる。

一方、他のイ～エの数量であれば、どの組み合わせを選んでも、それぞれ関数関係にある。

例えば、イとウに関して、植物が芽を出してからの日数が15日になれば、1日にちょうど3cmずつ伸びる植物の長さは45cmになる。具体的な関係式は、イを x , ウを y とすれば $y = 3x$ であり、ウを x , イを y とすれば $y = \frac{1}{3}x$ である。

イとエに関して、植物が1日に伸びる長さが6cmであれば、36cmになるのは6日目となる。具体的な関係式は、イを x , エを y とした場合にも、エを x , イを y とした場合にも、 $y = \frac{36}{x}$ である。

ウとエに関して、植物が1日に伸びる長さが6cmであると、12日後の植物の長さは72cmになる。具体的な関係式は、ウを x , エを y とすれば $y = \frac{1}{12}x$ であり、エを x , ウを y とすれば $y = 12x$ である。

解答一覧は解答用紙を参照してください。

(13) 傾き a を $-1 < a < 0$ の範囲で決定したとき、一次関数 $y = ax + 1$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

ただし、点線は $y = -x + 1$ のグラフである。

傾き a を $-1 < a < 0$ の範囲で決定するということは、傾き a は負になる。そのため、一次関数 $y = ax + 1$ のグラフは右下がりになる。

また、傾き a は、-1から0の間であるから、 $y = -x + 1$ のグラフの傾きよりも、緩やかになる。例えば、 a が $-\frac{1}{2}$ の場合などを考えるときわかりやすい。

グラフが右下がりであり、点線のグラフ $y = -x + 1$ よりも傾きが緩やかな直線がかけられているアが正解。

なお、各選択肢に実線でかけられているグラフは、

$$\text{ア} : y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad (-1 < a < 0)$$

$$\text{イ} : y = -2x + 1 \quad (a < -1)$$

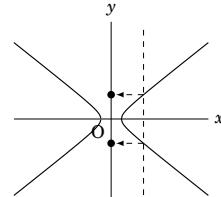
$$\text{ウ} : y = 2x + 1 \quad (a > 1)$$

$$\text{エ} : y = \frac{1}{2}x + 1 \quad (0 < a < 1)$$

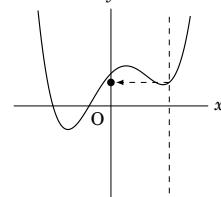
である。

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。

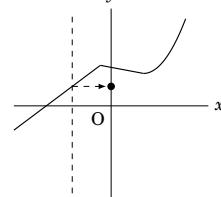
y が x の関数であるとき、 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。それぞれの選択肢のグラフで、 x の値を適当に決めて、対応する y の値が一つに定まるか二つ以上になるか確認していく。



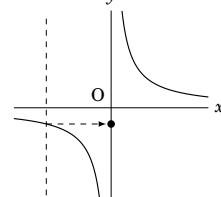
アに関して、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が二つある。よって、 y は x の関数であるといえない。



イに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



ウに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



エに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。

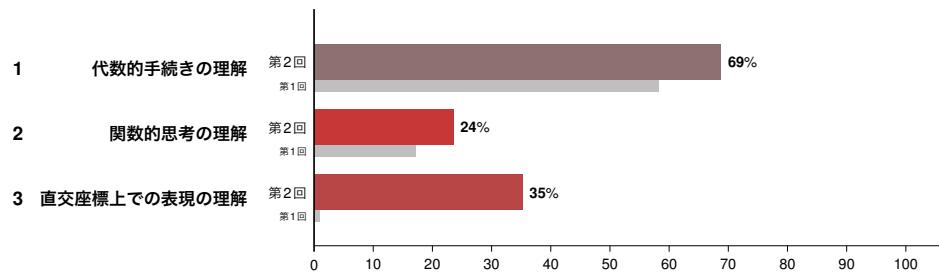
第2回フィードバック例

フィードバックシート

関数 学習状況診断テスト 第2回 (9月第2,3週実施)

番号 : 0001203

測定能力別 達成状況



※第1回の分析の際に少しミスがありましたので、本フィードバックシートの第1回の達成状況と、前回のフィードバックシートの達成状況が一部異なる場合があります。

測定能力別 コメント

- 1 代数的手続きを理解 文字を使った式を扱うことができる。それぞれの関数の一般形 ($y = ax + b$ など) を扱うことができる。自力で文字を使って式を立てられる。

方程式や連立方程式を解く力や、文章中の情報から式を立てる力がついているようです。分数や符号のケアレスミスに気をつけて取り組みましょう。関数との関連では、それぞれの関数の一般式を確認しておきましょう。関数やグラフの式の求め方や、交点の座標の求め方を確認してみましょう。文章中の情報を読み取り式を立てる練習を重ねると、数学力を向上させることができるでしょう。

- 2 関数的思考を理解 関数の定義「一方の値を決めると他方の値がただ一つに定まる」を理解できる。具体的な例を関数として捉えることができる。

関数の定義（「 y が x の関数である」とは、「 x の値を決めると y の値がただ一つに定まる」ことである）を確認しておきましょう。関数的な視点で具体的な例を捉えられるように、関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。とくに、関係式が示されていない事柄に対して、2つの変数の関数関係を意識できるようにすると良いでしょう。

- 3 直交座標上での表現を理解 直交座標上にかかれたグラフが意味する内容や、グラフの特徴が意味する内容を、数学的用語や数式と結び付けて理解できる。

点の座標を読み取ることができるようです。関数のグラフの概形をかく力もついてきているでしょう。グラフに関する特徴（傾き、切片、変化の割合、変域、交点）の理解には不安があるようです。グラフの特徴を、言葉や数式と結びつけながら確認しておきましょう。（例えば、「グラフが右下がり」とは、「グラフが点(1, 2)を通る」とは、それぞれどんなことを意味しているのでしょうか？）。

全体概要

正答数 : 4 問 /14 (平均 5.6 問)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
正誤	○	×	×	○	×	○	×	○	×	×	×	×	×	×
正答率 (%)	70.8	39.6	29.2	25.0	79.2	27.1	33.3	66.7	22.9	8.3	66.7	16.7	50.0	20.8
難易度	易	中	難	難	易	難	中	易	難	難	易	難	中	難
測定能力	1	1	2	1	3	3	2, 3	3	1, 3	1, 3	2	1, 2	3	2, 3

	1. 代数的手手続きの理解	2. 関数的思考の理解	3. 直交座標上での表現の理解
(1)	• y に 2 を代入し, x に関する方程式 $2 = -4x + 1$ を解く。		
(2)	• $y = ax + b$ に $x = -3$, $y = -11$ を代入した $-11 = -3a + b$ と, $x = 1$, $y = -3$ を代入した $-3 = a + b$ の連立方程式を解く。		
(3)		• t が s の関数であるとき, s の値を決めるとき t の値がただ一つに定まる (ア, エは正しい)。 • 2 つの関数から, u は s の関数である (イは正しい)。	
(4)	• y に t を代入して, $x = \dots$ の形に整理する。		
(5)			• 切片とは、直線と y 軸との交点である。
(6)			• 2 点 $(2, 0)$, $(0, -3)$ を読み取る。 • 傾き = 2 点間の変化の割合 = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ • グラフに示された 2 点間の, x の増加量は 2, y の増加量は 3 である。
(7)		• y が x の関数であるとき, x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。 • 関数の定義をグラフと結びつけて捉える (右記第 4 項目)。	• $-2 \leq x \leq 2$ で, y の値は -3 から 1 の間を動く (アは正しい)。 • グラフが曲線のとき, 変化の割合は一定でない (イは正しい)。 • 点 $(0, -1)$ は, $x = 0$ のとき $y = -1$ であることを表す (ウは正しい)。 • $y = -1$ となる x の値が 3 つあることを読み取るなど (エは誤り)。
(8)			• 線分 AB は x 軸に平行である。 • 2 点 $(1, 3)$, $(3, 3)$ の間に格子を意識して数える, または x 座標の差 $3 - 1$ を計算する。
(9)	• 原点 O と点 $(3, 1)$ を通る直線の式を求める ($y = ax$ へ代入する場合)。 • 2 点 $(0, 2)$, $(3, 0)$ を通る直線の式を求める ($y = ax + b$ へ代入する場合)。 • 2 つの直線の式 $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$ の連立方程式を解く。		• 原点 O と $(3, 1)$ を通る直線は, 比例 $y = \frac{1}{3}x$ のグラフである。 • 2 点 $(0, 2)$, $(3, 0)$ を通る直線の式を求める (切片と傾きをグラフから読み取る場合)。 • 2 直線の交点の座標は, 2 つの直線の式の連立方程式の解である。
(10)	• 方程式 $2t + 1 - \left(\frac{1}{2}t + 3 \right) = 5$ を立て, 解く。		• 点 A の座標を $(t, 2t + 1)$, 点 B の座標を $(t, \frac{1}{2}t + 3)$ と, t を用いて表す。 • 線分 AB の長さを, $2t + 1 - \left(\frac{1}{2}t + 3 \right)$ と表す。
(11)		• 関数の定義を具体例と結びつけて捉える。 • 関数の定義をもとに, 一方の値を決めたときに他方の値が決まるかどうかを考える。 • 「ボールペン A で引いた線の長さ」が長くなれば、「ボールペン A のインクの使用量」は増える (関数関係にある)。 • イはボールペン B に関して同上。 • 「ボールペン A のボール径」が大きくなれば、「ボールペン A のインクの使用量」は増える (関数関係にある)。 • 「ボールペン A のボール径」を決めて, 「ボールペン B のインクの使用量」は決まらない (関数関係がない)。	
(12)	• 必要な変数を, 適切に文字 x , y に設定する。 • 設定した変数に合うような式を立てる。	• 関数の定義を具体例と結びつけて捉える。 • (11) と同様に, 関数関係にある 2 つの数量を見つける。	
(13)			• 比例定数 a が小さくなるほど, そのグラフは原点に近づく。 • 比例定数 a が正のとき, グラフは右上と左下にある。
(14)		• y が x の関数であるとき, x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。 • 関数の定義をグラフと結びつけて捉える。 • 関数は、比例、反比例、一次関数、関数 $y = ax^2$ だけに限られない。	• イは, 一つの x の値に対して二つの y の値が対応していることがあることを読み取る。(「 y は x の関数である」とはいえない)。 • ア, ウ, エは, x の値を決めると, y の値がただ一つに定まっている。

関数 - 学習状況診断テスト

- (1) 一次関数 $y = -4x + 1$ において、 $y = 2$ であるとき、 x を求めてください。

$$\begin{aligned} 2 &= -4x + 1 \\ 1 &= -4x \\ \frac{1}{4} &= x \end{aligned}$$

(答1) $x = -\frac{1}{4}$

- (2) 一次関数において、 $x = -3$ のとき $y = -11$ 、 $x = 1$ のとき $y = -3$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

$$\begin{cases} -11 = -3a + b \\ -3 = a + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -14 &= -2a \\ 7 &= a \end{aligned}$$

(答2) $y = 7x$
 $y = 2x - 5$

- (3) 3つの数量 s 、 t 、 u がある。 t は s の関数であり、 u は t の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア s の値を決めるとき、 t の値がただ一つに定まる。
- イ s の値を決めるとき、 u の値がただ一つに定まる。
- ウ t の値を決めるとき、 s の値がただ一つに定まる。
- エ t の値を決めるとき、 u の値がただ一つに定まる。

(答3) 1
✗

- (4) 一次関数 $y = 2x + 2$ において、 y が t であるとき、 x を t を用いて表してください。

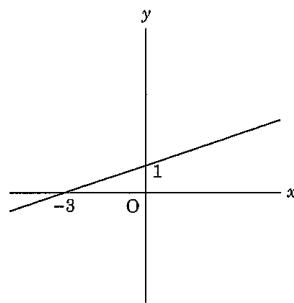
$$\begin{aligned} t &= 2x + 2 \\ t - 2 &= 2x \\ \frac{t-2}{2} &= x \end{aligned}$$

(答4) $x = \frac{t-2}{2}$

関数 - 学習状況診断テスト

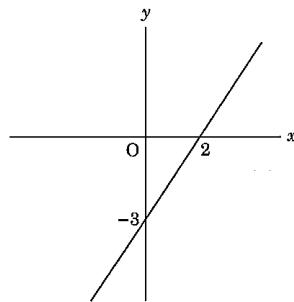
- (5) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の切片を答えてください。

(答5) $\frac{-3}{1}$



- (6) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の傾きを答えてください。

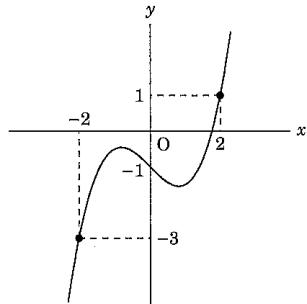
(答6) $\frac{-3}{2}$
 $\left(-\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \right)$



- (7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、誤っているものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

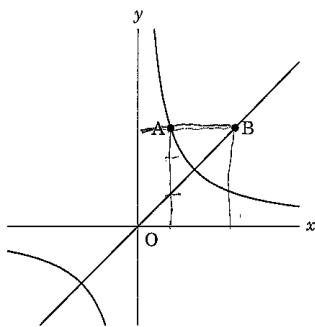
- ア x の変域が $-2 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $-3 \leq y \leq 1$ である。
- イ 変化の割合は一定でない。
- ウ $x=0$ のとき、 $y=-1$ である。
- エ y の値を一つ決めると、 x の値もただ一つに定まる。

(答7) イ
エ



関数 - 学習状況診断テスト

- (8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、比例 $y = x$ のグラフが描かれている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(1, 3), $y = x$ 上に点 B(3, 3)をとるとき、線分 AB の長さを求めてください。
ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

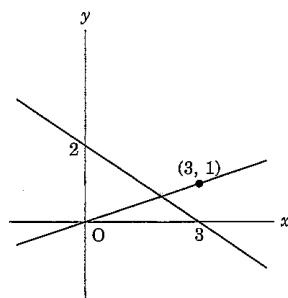


(答 8) Lcm

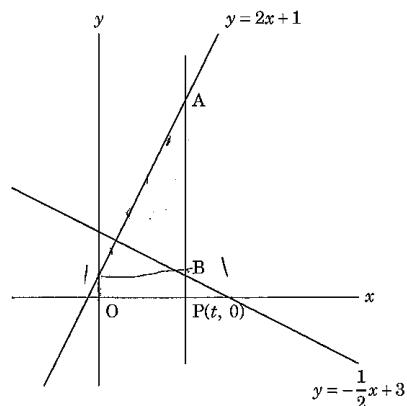
- (9) 右の図の 2つのグラフの交点の座標を求めてください。

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$$

(答 9) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$



- (10) 右の図のよう、直線 $y = 2x + 1$ と直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ がある。 x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = 2x + 1$ 、直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ の交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 5 となるときの点 P の x 座標を求めてください。
ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。
また、点 P の x 座標は正とする。



(答 10) $\frac{14}{5}$ (= 2.8)

関数 - 学習状況診断テスト

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章

ボール径 0.3mm のボールペン A とボール径 0.6mm のボールペン B があります。ボールペン A で 1m の線を引くと、インクを 1mL 使います。ボールペン B で 1m の線を引くと、インクを 2mL 使います。

- ア 「ボールペン A で引いた線の長さ」と「ボールペン A のインクの使用量」は関数関係はない。
- イ 「ボールペン B のインクの使用量」と「ボールペン B で引いた線の長さ」は関数関係はない。
- ウ 「ボールペン A のインクの使用量」と「ボールペン A のボール径」は関数関係はない。
- エ 「ボールペン A のボール径」と「ボールペン B のインクの使用量」は関数関係はない。

(答11) ウ
エ

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答へても正解です。

文章 例

Aさんは分速 80m で 5 分歩くと、400m 進みました。

- ア 歩いた速さ
- イ 歩いた時間
- ウ 歩いた距離

解答 $x: \text{イ}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = 80x$

※ $x: \text{イ}, y: \text{ア}$, 関係式: $y = \frac{400}{x}$ や $x: \text{ア}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = 5x$ なども正解です。

文章

ある赤色の絵の具 R をある布 C の上に 1mL たらすと、面積 $2\pi cm^2$ の円状に広がります。最大容量 10mL のスポットを使って、8mL の絵の具 R を布 C の上にたらしたら、半径 4cm の円ができました。

- ア 絵の具 R をたらす量
- イ 布 C に広がる円形の面積
- ウ スポットの最大容量
- エ 布 C に広がる円形の半径

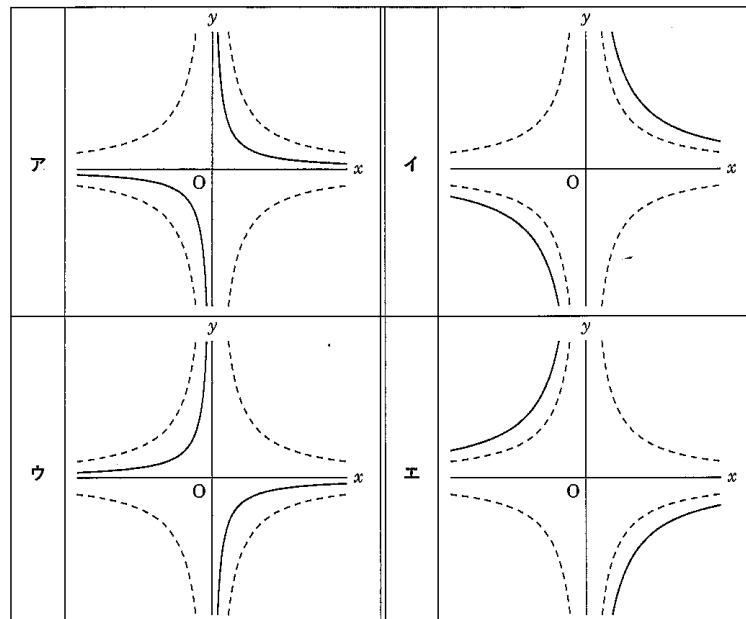
$$y = 2\pi x$$

正解一覧	(答12) <u>$x: \text{ア}, y: \text{イ}$</u>	<u>$y: \text{ウ}$</u>	関係式: <u>$y = 16\pi x$</u>
	<u>$x: \text{イ}, y: \text{ア}$</u>	<u>$y: \text{ウ}$</u>	関係式: $y = \frac{1}{2\pi}x$
	<u>$x: \text{ア}, y: \text{エ}$</u>	<u>$y: \text{ウ}$</u>	関係式: $y = \sqrt{2x}$
	<u>$x: \text{エ}, y: \text{ア}$</u>	<u>$y: \text{ウ}$</u>	関係式: $y = \frac{1}{2}x^2$
	<u>$x: \text{イ}, y: \text{エ}$</u>	<u>$y: \text{ウ}$</u>	関係式: $y = \sqrt{\frac{1}{\pi}x}$
	<u>$x: \text{エ}, y: \text{イ}$</u>	<u>$y: \text{ウ}$</u>	関係式: $y = \pi x^2$

関数 - 学習状況診断テスト

(13) 比例定数 a を $1 \leq a < 3$ の範囲で決定したとき、反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

ただし、点線は $y = \frac{3}{x}$ および $y = -\frac{3}{x}$ のグラフである。

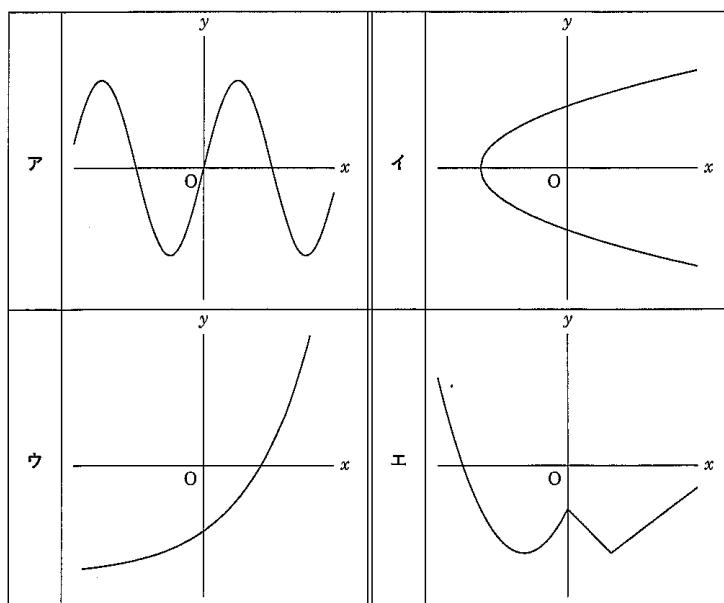


✓ 13) イ

ア

関数 - 学習状況診断テスト

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。



(答14) イ

詳解 p.1

(1) 一次関数 $y = -4x + 1$ において、 $y = 2$ であるとき、 x を求めてください。

$$\begin{array}{l} y = -4x + 1 \text{ の } y \text{ に } 2 \text{ を代入して、 } x \text{ に関する方程式を解く。} \\ 2 = -4x + 1 \\ 4x = 1 - 2 \\ 4x = -1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{array}$$

(2) 一次関数において、 $x = -3$ のとき $y = -11$ 、 $x = 1$ のとき $y = -3$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

一次関数の一般式 $y = ax + b$ に、 $x = -3$ 、 $y = -11$ と $x = 1$ 、 $y = -3$ をそれぞれ代入して、連立方程式を解く。

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -11 = -3a + b \\ -3 = a + b \end{array} \right. \cdots (1) \\ \text{②に代入して,} \\ -3 = 2 + b \\ -3 - 2 = b \\ b = -5 \\ \text{よって, } y = 2x - 5 \\ \text{加減法で } ① - ② \text{ より,} \\ -8 = -4a \\ -4a = 8 \\ a = \frac{8}{4} \\ a = 2 \end{array}$$

(3) 3つの数量 s 、 t 、 u がある。 t は s の関数であり、 u は t の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

t は s の関数であることから、 s の値を決めると、 t の値がただ一つに定まるため、アは正しいといえる。

u は t の関数であることから、 t の値を決めると、 u の値がただ一つに定まるため、エは正しいといえる。

以上の2つのことから、 s の値を決めると t の値が一つに定まり、そのときの t の値に応じて u の値も定まるため、イも正しいといえる。

一方、 u の値を決めても、 t の値は一つに定まるとは限らない。同様に、 t の値を決めても、 s の値は一つに定まるとは限らない。よって、ウは必ずしも正しいといえない。

(4) 一次関数 $y = 2x + 2$ において、 y が t であるとき、 x を t を用いて表してください。

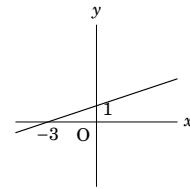
$$y = 2x + 2 \text{ の } y \text{ に } t \text{ を代入し, } x = (\dots) \text{ の形に変形する。}$$

$$\begin{array}{l} t = 2x + 2 \\ -2x = -t + 2 \\ 2x = t - 2 \\ x = \frac{t-2}{2} \end{array}$$

このことは、 $y = 2x - 6$ のグラフが、点 $\left(\frac{t-2}{2}, t\right)$ を通るということを意味する。

また、一般に「 y を x を用いて表す」とは、「 $y = (x \text{を含む式})$ 」の形にすることを意味する。

(5) 右の図に、一次関数のグラフがかけられている。この一次関数の切片を答えてください。

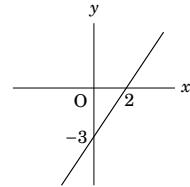


切片とは、直線と y 軸との交点の y 座標である。グラフから、一次関数のグラフは y 軸と、点 $(0, 1)$ で交わっている。よって切片は 1。

(6) 右の図に、一次関数のグラフがかけられている。この一次関数の傾きを答えてください。

直線上の2点の座標がわかれば、その2点間の変化の割合を求ることで、直線の傾きを求めることができる。グラフから、直線は2点 $(0, -3)$ 、 $(2, 0)$ を通っていることが読み取れる。

$$\begin{aligned} \text{傾き} &= \text{変化の割合} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} \\ &= \frac{0 - (-3)}{2 - 0} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



グラフと座標軸との交点の座標を読み取ることに難しさを感じている人がいました。例えば(6)では、直線と x 軸との交点に 2 と書いてあります。 x 軸上の点の y 座標は 0 だから、直線と x 軸との交点の座標は $(2, 0)$ 。

図に書いてある2つの数字 2、-3 から、 $(2, -3)$ などの座標を作り出さないように。

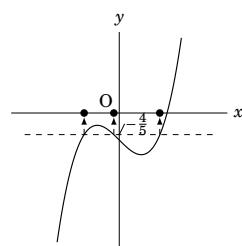
(7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、誤っているものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

$-2 \leq x \leq 2$ で、 y の値は -3 から 1 の間を動くことから、 y の変域は $-3 \leq y \leq 1$ といえる。よってアは正しい。

グラフが曲線のとき、変化の割合は一定でない。これはグラフ上から適当に2点を取ったとき、点を取る位置によって変化の割合が異なることから説明できる。よってイは正しい。

グラフは y 軸と、点 $(0, -1)$ で交わっており、これは、 $x = 0$ のとき $y = -1$ であることを意味している。よってウは正しい。

エに関して、 y の値を一つ決めると、 x の値もただ一つに定まるかどうかを確認するため、 y の値を適当に一つ決めてみる。ここで、 $y = -\frac{4}{5}$ あたりに設定すると、この y の値に対応する x の値が3つあることがグラフから読み取れる。よって、エは誤り。



詳解 p.2

(8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、比例 $y = x$ のグラフがかかれている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(1, 3), $y = x$ 上に点 B(3, 3) をとると、線分 AB の長さを求めてください。

ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

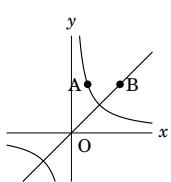
線分 AB は x 軸に平行である。このとき、線分の長さは、点 A から点 B までの x の増加量であり、

$$(大きい方の x 座標)-(小さい方の x 座標)$$

求めることができる。

$$\text{よって, } AB = 3 - 1 = 2(\text{cm})$$

マス目を意識して数えることでも正解できる。ただし、増加量を意識して (大きい方の座標)-(小さい方の座標) によって求める方が、応用の幅が広い。



(9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。

原点 O と点 (3, 1) を通る直線は、比例のグラフであり、傾きは y の増加量 $= \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$ 。よって $y = \frac{1}{3}x$ 。もう一方の直線は、2 点 (0, 2), (3, 0) を通っている。y 軸との交点から切片が 2 であることがわかり、傾きは $\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$ である。よって $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 。

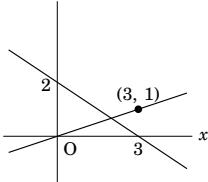
交点の座標を求めるためには、2 つのグラフの式の連立方程式を解けばよい。交点とは、いずれの関係式も満たす x, y の組だからである。

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x & \dots \text{①} \\ y = -\frac{2}{3}x + 2 & \dots \text{②} \end{cases}$$

代入法から、②の y に①を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x &= -\frac{2}{3}x + 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{①に代入して, } y = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}。よって, \text{ 交点の座標は } \left(2, \frac{2}{3}\right)。$$



直線の式の求め方は、第 1 回の詳解に書いた通りいくつかの方法がある。原点 O と点 (3, 1) を通る直線は、比例の一般式 $y = ax$ に $x = 3, y = 1$ を代入して、 $1 = 3a$ から $a = \frac{1}{3}$ を求めてよい。2 点 (0, 2), (3, 0) を通る直線の式に関して、切片が 2 であることを読み取れた場合には、 $y = ax + b$ として、もう一つの点 (3, 0) から $x = 3, y = 0$ を代入し、 $0 = 3a + b$ から $a = -\frac{2}{3}$ と求めることができる。または、一次関数の一般式 $y = ax + b$ に、 $x = 0, y = 2$ と $x = 3, y = 0$ をそれぞれ代入して、連立方程式 $\begin{cases} 2 = 0a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$ を解けば、 $a = -\frac{2}{3}, b = 2$ と求められる。

(10) 右の図のように、直線 $y = 2x + 1$ と直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ がある。x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = 2x + 1$ 、直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ の交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 5 となるときの点 P の x 座標を求めてください。

ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。

また、点 P の x 座標は正とする。

3 点 A, B, P の x 座標は同じであるから、点 P の x 座標を t としたとき、点 A, B の x 座標も t となる。点 A は直線 $y = 2x + 1$ 上の点であるから、 x に t を代入して、 y 座標は $2t + 1$ と表せる。同様に、点 B は直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 上の点であるから、 x に t を代入して、 y 座標は $-\frac{1}{2}t + 3$ と表せる。

点 P の座標が正であることから、点 B の y 座標よりも点 A の y 座標の方が大きく、線分 AB は y 軸に平行であるから、AB の長さは t を用いて、

$$(大きい方の y 座標)-(小さい方の y 座標) = (2t + 1) - \left(-\frac{1}{2}t + 3\right)$$

と表せる。

この長さが 5 になればよいから、

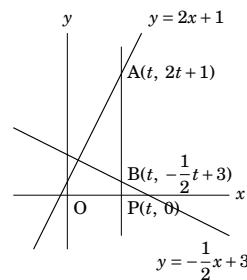
$$(2t + 1) - \left(-\frac{1}{2}t + 3\right) = 5$$

$$2t + 1 + \frac{1}{2}t - 3 = 5$$

$$\frac{5}{2}t = 7$$

$$t = 7 \times \frac{2}{5}$$

$$t = \frac{14}{5}$$



入試の難易度の高い問題はこのような形式である。座標を文字で置いて解き進めれば、たいていの問題は答えに辿り着くことができる。

詳解 p.3

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

ボール径 0.3mm のボールペン A とボール径 0.6mm のボールペン B があります。ボールペン A で 1m の線を引くと、インクを 1mL 使います。ボールペン B で 1m の線を引くと、インクを 2mL 使います。

関数の定義をもとに、一方の値を決めたときに他方の値が決まるかどうかを考える。

アに関して、「ボールペン A で引いた線の長さ (x)」が大きくなれば、その分「ボールペン A のインクの使用量 (y)」は増えるため、関数関係にあり、アは誤り。例えば、ボールペン A で 3m の線を引くと、ボールペン A のインクを 3mL 使うと考えられる。具体的な関係式は $y = x$ 。

イに関して、「ボールペン B で引いた線の長さ (x)」が大きくなれば、その分「ボールペン B のインクの使用量 (y)」は増えるため、関数関係にあり、イは誤り。例えば、ボールペン B で 3m の線を引くと、ボールペン B のインクを 6mL 使うと考えられる。具体的な関係式は $y = 2x$ 。

ウに関して、「ボールペン A のボール径 (x)」が大きくなれば、その分「ボールペン A のインクの使用量 (y)」は増えるため、関数関係にあり、ウは誤り。このことは、ボール径 0.3mm のボールペン A のインクの使用量と、ボール径 0.6mm のボールペン B のインクの使用量を比較すれば予想できる。例えば、ボールペン A のボール径が 0.9mm になると、線を 1m 引いたときのインクの使用量は 3mL になるとと考えられる。具体的な関係式は、 $y = \frac{10}{3}x$ 。

エに関して、「ボールペン A のボール径」を決めても、「ボールペン B のインクの使用量」は決まらないため、関数関係になく、エは正しい。「ボールペン B のインクの使用量」に影響を及ぼす数量は、「ボールペン B で引いた線の長さ」か「ボールペン B のボール径」。

(12) 次の文章中の 2 つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2 つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答えてても正解です。

ある赤色の絵の具 R をある布 C の上に 1mL たらすと、面積 $2\pi\text{cm}^2$ の円状に広がります。最大容量 10mL のスポットを使って、8mL の絵の具 R を布 C の上にたらしたら、半径 4cm の円ができました。

まずは、ア～エのうち関数関係にある 2 つの数量を見つける。

ウの「スポットの最大容量」は、他の数量と関数関係にない。例えば、スポットの最大容量が 10mL であっても 30mL であっても、絵の具 R を 1mL たらすと面積 $2\pi\text{cm}^2$ の円状に広がる。

一方、他のア、イ、エの数量であれば、どの組み合わせを選んでも、それぞれ関数関係にある。

例えば、アとイに関して、絵の具 R を 2mL たらすと、布 C に広がる円形の面積は $4\pi\text{cm}^2$ になると考えられる。具体的な関係式は、アを x , イを y とすれば $y = 2\pi x$ であり、イを x , アを y とすれば $y = \frac{1}{2\pi}x$ である。

アとエに関して、絵の具 R を 2mL たらすと、布 C に広がる円形の面積が $4\pi\text{cm}^2$ となることから、半径は 2cm であると考えられる。具体的な関係式は、アを x , エを y とすれば $y = \sqrt{2x}$ 、エを x , アを y とすれば、 $y = \frac{1}{2}x^2$ である。

イとエに関して、布 C に広がる円形の半径が 3cm であれば、円形の面積は $9\pi\text{cm}^2$ になる。具体的な関係式は、イを x , エを y とすれば $y = \sqrt{\frac{1}{\pi}x}$ であり、エを x , イを y とすれば $y = \pi x^2$ である。

解答一覧は解答用紙を参照してください。

ア、イ、エの数量であれば、どの組み合わせを選んでも、それぞれ関数関係にあったが、今回の問題では、選ぶ数量によって関係式が難しくなるため、いくつかの関数関係の候補を見つけ出すことが必要であったかもしれない。

解答欄の真下に円周率 π について書いてあったが、 π をつけ忘れた人がいました。問題は全体を見るようにして、情報の見落としがないようにしましょう。

詳解 p.4

(13) 比例定数 a を $1 \leq a < 3$ の範囲で決定したとき、反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。
ただし、点線は $y = \frac{3}{x}$ および $y = -\frac{3}{x}$ のグラフである。

比例定数 a を $1 \leq a < 3$ の範囲で決定するということは、比例定数 a は正になる。そのため、反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフは右上と左下にかかる。

また、比例定数 a が小さくなるほど、反比例のグラフは原点に近づく。このことは、 $y = \frac{1}{x}$ と $y = \frac{4}{x}$ などの具体例で、 $x=1$ などの値を調べてみればわかる。

グラフが右上と左下にあり、点線のグラフ $y = \frac{3}{x}$ よりも原点に近いアが正解。

なお、各選択肢に実線でかかれているグラフは、

$$\text{ア} : y = \frac{1}{x} \quad (1 \leq a < 3)$$

$$\text{イ} : y = \frac{5}{x} \quad (a \geq 3)$$

$$\text{ウ} : y = -\frac{1}{x} \quad (-3 < a \leq -1)$$

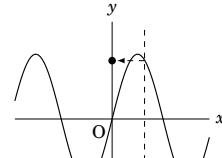
$$\text{エ} : y = -\frac{5}{x} \quad (a \leq -3)$$

である。

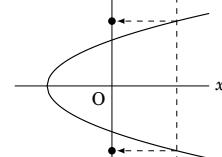
この問題では比例定数が a という文字によって示されていて、そのままでは具体的なグラフを書いてみることができない。こういうときに、例えば $a=1$ のときにはどんなグラフになるのか、 $a=2$ のときにはどんなグラフになるのか、 $a=4$ のときには…と具体的な数字で実験してみると、数学の問題を解く上で大切な考え方になる。

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。

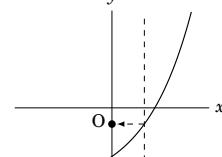
y が x の関数であるとき、 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。それぞれの選択肢のグラフで、 x の値を適当に決めて、対応する y の値が一つに定まるか二つ以上になるか確認していく。



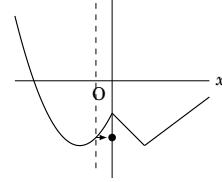
アに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



イに関して、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が二つある。よって、 y は x の関数であるといえない。



ウに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



エに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。

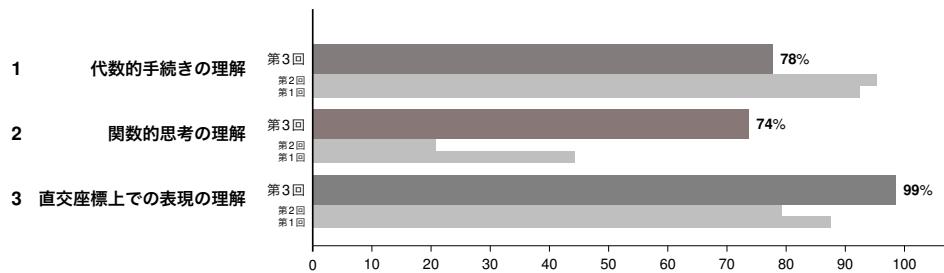
第3回フィードバック例

フィードバックシート

関数 学習状況診断テスト 第3回 (10月第3,4週実施)

番号 : 0003304

測定能力別 達成状況



測定能力別 コメント

- 1 代数的手続きの理解 文字を使った式を扱うことができる。それぞれの関数の一般形 ($y = ax + b$ など) を扱うことができる。自力で文字を使って式を立てられる。

方程式や連立方程式をミスなく解く力や、文章中の情報から式を立てる力がついているようです。関数との関連では、それぞれの関数の一般式を覚えることができています。関数やグラフの式の求め方や、交点の座標の求め方は確認しておきましょう。グラフ上の点の座標を文字で置く考え方 ($P(t, t-2)$ など) を身につけると、解くことができる関数の問題が増えるでしょう。

- 2 関数的思考の理解 関数の定義「一方の値を決めると他方の値がただ一つに定まる」を理解できる。具体的な例を関数として捉えることができる。

関数の定義（「 y が x の関数である」とは、「 x の値を決めると y の値がただ一つに定まる」ことである）を大まかに覚えることができているようです。関数の定義を数式での表現と結びつけられると、関数的な考え方方がしやすくなるでしょう。関数的な視点で、具体的な例を捉える力がついてきているでしょう。その調子で、今後も関数の定義の意味を具体的な出来事やグラフに落とし込みながら、演習を進めていきましょう。

- 3 直交座標上での表現の理解 直交座標上にかけられたグラフが意味する内容や、グラフの特徴が意味する内容を、数学的用語や数式と結び付けて理解できる。

直交座標上の情報を読み取る感覚が身についてきているようです。直交座標上の情報を言葉や数式による表現と結びつけて捉えるようにすると、難易度の高い問題を解くときに活用しやすくなるでしょう（例えば、交点の座標はなぜグラフの式の連立方程式を解くことで求められるのでしょうか？）。「関数のグラフは、関係式を満たす x, y の組の点の集合である」という感覚を身につけると、関数の問題に対する理解度が格段に高まります。

全体概要

正答数 : 8 問 /14 (平均 6.3 問)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
正誤	○	×	×	○	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○
正答率 (%)	71.4	59.5	7.1	40.5	97.6	50.0	52.4	50.0	28.6	14.3	57.1	2.4	47.6	54.8
難易度	易	中	難	中	易	中	中	中	難	難	中	難	中	中
測定能力	1	1	2	1	3	3	2, 3	3	1, 3	1, 3	2	1, 2	3	2, 3

	1. 代数的手手続きの理解	2. 関数的思考の理解	3. 直交座標上での表現の理解
(1)	• y に 4 を代入し、 x に関する方程式 $4 = 3x + 2$ を解く。		
(2)	• $y = ax + b$ に $x = -2$, $y = 2$ を代入した $2 = -2a + b$ と、 $x = 3$, $y = 12$ を代入した $12 = 3a + b$ の連立方程式を解く。		
(3)		• b が a の関数であるとき、 a の値を決めるとき b の値がただ一つに定まる（ウ、エは正しい）。 • 2 つの関数から、 c は a の関数である（イは正しい）。	
(4)	• y に t を代入して、 $x = \dots$ の形に整理する。		
(5)			• 切片とは、直線と y 軸との交点である。
(6)			• 2 点 $(-3, 0)$, $(0, 4)$ を読み取る。 • 傾き = 2 点間の変化の割合 = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ • グラフに示された 2 点間の、 x の増加量は 3, y の増加量は 4 である。
(7)		• y が x の関数であるとき、 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。 • 関数の定義をグラフと結びつけて捉える（右記第 4 項目）。	• 点 $(-2, -1)$ は、 $x = -2$ のとき $y = -1$ であることを表す（アは正しい）。 • x の値をどこにとっても、対応する y の値は 1 つ。（イは正しい）。 • 例えば、 $x \leq -2$ や $2 \geq x$ では、 x の値が増加すると y の値は減少する（ウは誤り）。 • $0 \leq x \leq 2$ ではグラフは x 軸より上にあり、 y は正である。（エは正しい）。
(8)			• 線分 AB は x 軸に平行である。 • 2 点 $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, $(3, 1)$ の x 座標の差 $3 - \left(-\frac{3}{2}\right)$ を計算する。
(9)	• 2 つの直線の式を求める（一般形 $y = ax$, $y = ax + b$ に代入する場合）。 • 2 つの直線の式 $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x - 4$ の連立方程式を解く。		• 2 つの直線の式を求める（グラフの特徴から求める場合）。 • 2 直線の交点の座標は、2 つの直線の式の連立方程式の解である。
(10)	• 方程式 $\frac{4}{3}t + 1 - \frac{1}{2}t = 3$ を立て、解く。		• 点 A の座標を $\left(t, \frac{4}{3}t + 1\right)$, 点 B の座標を $\left(t, \frac{1}{2}t\right)$ と、 t を用いて表す。 • 線分 AB の長さを、 $\frac{4}{3}t + 1 - \frac{1}{2}t$ と表す。
(11)		• 関数の定義を具体例と結びつけて捉える。 • 関数の定義をもとに、一方の値を決めたときに他方の値が決まるかどうかを考える。 • 「Aさんの歩く速さ」が速くなれば、「CさんがAさんに追いつく時刻」は遅くなる（関数関係にある）。 • 「Cさんが家を出る時間」が遅くなれば、「CさんがAさんに追いつく時刻」は遅くなる（関数関係にある）。 • 「Bさんの歩く速さ」が速くなっても、「CさんがAさんに追いつく時刻」には影響しない（関数関係がない）。 • 「Cさんの走る速さ」が速くなれば、「CさんがAさんに追いつく時刻」は速くなる（関数関係にある）。	
(12)	• 必要な変数を、適切に文字 x , y に設定する。 • 設定した変数に合うような式を立てる。	• 関数の定義を具体例と結びつけて捉える。 • (11) と同様に、関数関係にある 2 つの数量を見つける。	
(13)			• 傾き a が正のとき、グラフは右上がりになる。 • 傾き a が $a > 1$ のとき、傾き 1 のグラフよりも、傾きが急である。
(14)		• y が x の関数であるとき、 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。 • 関数の定義をグラフと結びつけて捉える。 • 関数は、比例、反比例、一次関数、関数 $y = ax^2$ だけに限られない。	• エは、一つの x の値に対して二つ以上の y の値が対応していることがあることを読み取る。（「 y は x の関数である」とはいえない。） • ア、イ、ウは、 x の値を決めると、 y の値がただ一つに定まっている。

関数 - 学習状況診断テスト

- (1) 一次関数 $y = 3x + 2$ において、 $y = 4$ であるとき、 x を求めてください。

$$\begin{aligned} 4 &= 3x + 2 \\ -3x &= 2 - 4 \\ -3x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{-3} \end{aligned}$$

(答1) $x = \frac{2}{3}$

- (2) 一次関数において、 $x = -2$ のとき $y = 2$ 、 $x = 3$ のとき $y = 12$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

$$\begin{aligned} 2 &= -2a + b & 2 &= -2x + \frac{5}{2} + b \\ -2 &= 2a + b & 2 &= -5 + b \\ -10 &= -4a & 2 &= -5 - 2 \\ 4a &= 10 & -b &= -7 \\ a &= \cancel{\frac{10}{4}} & b &= 7 \\ &= \cancel{\frac{5}{2}} & & \end{aligned}$$

(答2) $y = \frac{5}{2}x + 7$
 $y = 2x + 6$

- (3) 3つの数量 a 、 b 、 c がある。 b は a の関数であり、 c は b の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

- ア c の値を決めるとき、 b の値がただ一つに定まる。
 イ a の値を決めるとき、 c の値がただ一つに定まる。
 ベ b の値を決めるとき、 c の値がただ一つに定まる。
 エ a の値を決めるとき、 b の値がただ一つに定まる。
- (答3) $\boxed{1}$
ア

- (4) 一次関数 $y = 3x - 2$ において、 y が t であるとき、 x を t を用いて表してください。

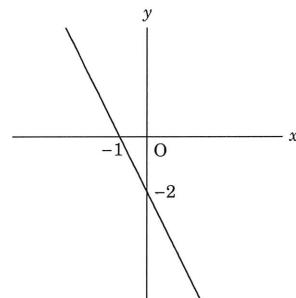
$$\begin{aligned} t &= 3x - 2 \\ -3x &= -2 - t \\ x &= -\frac{-2-t}{3} \end{aligned}$$

(答4) $x = -\frac{-2-t}{3}$ $\left(= \frac{2+t}{3} \right)$

関数 - 学習状況診断テスト

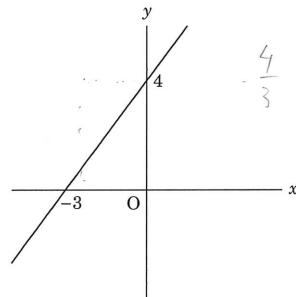
- (5) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の切片を答えてください。

(答 5)

-2

- (6) 右の図に、一次関数のグラフがかかれている。この一次関数の傾きを答えてください。

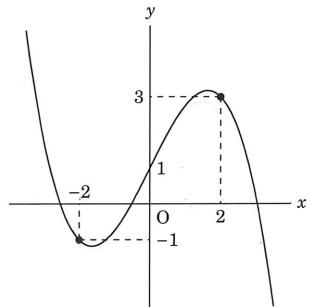
(答 6)

 $\frac{4}{3}$ 

- (7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、誤っているものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

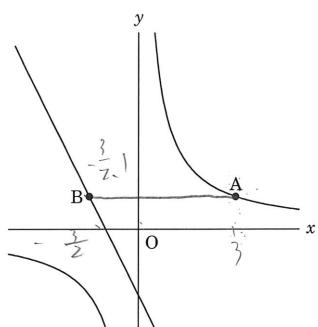
- ア $x = -2$ のとき、 $y = -1$ である。
イ x の値を一つ決めると、 y の値もただ一つに定まる。
ウ x の値が増加するとき、 y の値も必ず増加する。
エ $0 \leq x \leq 2$ の範囲では、 y の値は必ず正である。

(答 7)

ウ

関数 - 学習状況診断テスト

- (8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、比例 $y = -2x - 2$ のグラフがかかれている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(3, 1), $y = -2x - 2$ 上に点 B $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ をとるとき、線分 AB の長さを求めてください。
ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

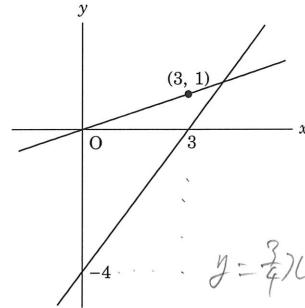


$$\frac{4}{12} \quad \frac{9}{12} \quad \text{答} 8 \quad \frac{9}{2} \text{ cm}$$

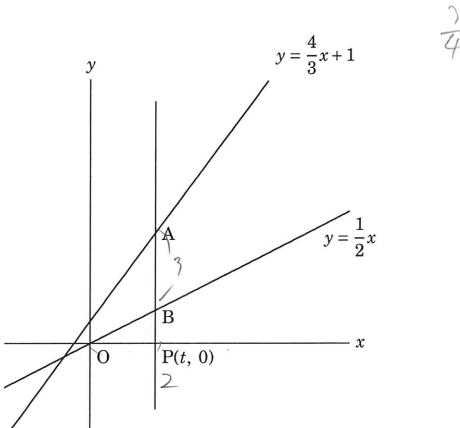
$$\frac{3}{2} + 3 \quad \frac{3}{2} + \frac{6}{2} \quad \frac{9}{2}$$

- (9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x \\ y &= \frac{4}{3}x - 4 \\ y &= \frac{4}{12}x \\ -y &= -\frac{9}{12}x - 4 \quad \text{答} 9 \quad \left(\frac{48}{5}, \frac{16}{5}\right) \\ y &= -\frac{5}{12}x + 4 \quad \left(4, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{4}{3}x - 4 &= \frac{1}{3}x \\ \frac{4}{3}x &= 4 \\ x &= \frac{12}{5} \quad \text{答} 10 \quad \text{ただし、点 } P \text{ の } x \text{ 座標を } t \text{ とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。} \\ y &= \frac{4}{3}x - 4 \quad \text{また、点 } P \text{ の } x \text{ 座標は正とする。} \\ y &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$



$$2 \quad t = \frac{12}{5}$$

(答) 10

関数 - 学習状況診断テスト

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

文章 AさんとBさんが15時00分に家を出ました。Aさんは分速60mで、Bさんは分速70mで歩いています。
Aさんの忘れ物に気づいたCさんは、15時04分に家を出て分速100mで走ってAさんを追いかきました。
CさんはAさんに15時10分に追いつきました。

- ア 「Aさんの歩く速さ」と「CさんがAさんに追いつく時刻」は関数関係はない。
 イ 「CさんがAさんに追いつく時刻」と「Cさんが家を出る時刻」は関数関係はない。
 ウ 「Bさんの歩く速さ」と「CさんがAさんに追いつく時刻」は関数関係はない。
 エ 「CさんがAさんに追いつく時刻」と「Cさんの走る速さ」は関数関係はない。

1
(答✓11)
ウ

(12) 次の文章中の2つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字 x , y としたか示したうえで、 y を x の式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答えても正解です。

文章 Aさんは分速80mで5分歩くと、400m進みました。
例 ア 歩いた速さ
イ 歩いた時間
ウ 歩いた距離

解答 $x: \text{イ}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = 80x$
※ $x: \text{イ}, y: \text{ア}$, 関係式: $y = \frac{400}{x}$ や $x: \text{ア}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = 5x$ なども正解です。

歯数15の歯車Sと歯数30の歯車Tがかみ合って回転するとき、歯車Tが1回転すると歯車Sは2回転します。また、歯車Sと歯数10の歯車Uがかみ合って回転するとき、歯車Uが1回転すると歯車Sは $\frac{2}{3}$ 回転します。

- ア 歯車Sの歯数
イ 歯車Tの回転数
ウ 歯車Uの回転数
エ 歯車Uの歯数

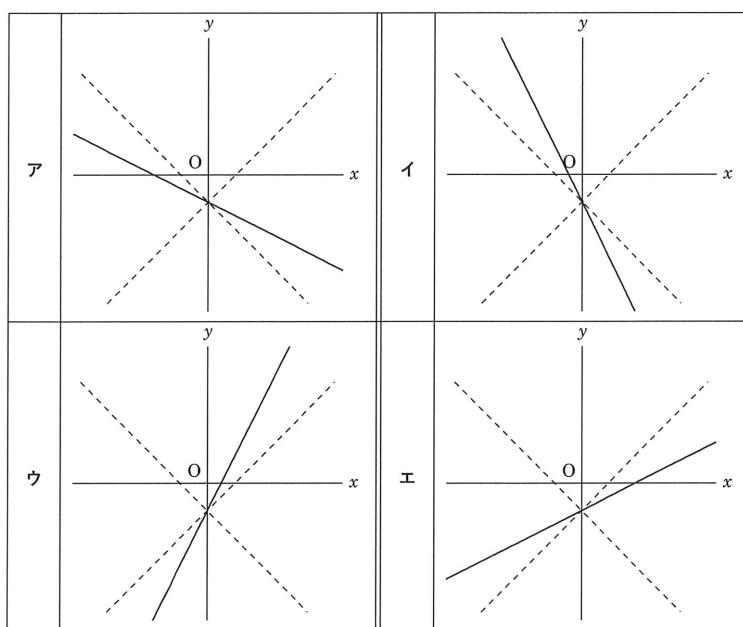
正解一覧	(答✓12) $x:$	$y:$	関係式:
$x: \text{ア}, y: \text{イ}$, 関係式: $y = \frac{1}{15}x$	$x: \text{ア}, y: \text{エ}$, 関係式: $y = \frac{2}{3}x$	$x: \text{イ}, y: \text{エ}$, 関係式: $y = 10x$	
$x: \text{イ}, y: \text{ア}$, 関係式: $y = 15x$	$x: \text{エ}, y: \text{ア}$, 関係式: $y = \frac{3}{2}x$	$x: \text{エ}, y: \text{イ}$, 関係式: $y = \frac{1}{10}x$	
$x: \text{ア}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = \frac{1}{15}x$	$x: \text{イ}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = 3x$	$x: \text{ウ}, y: \text{エ}$, 関係式: $y = \frac{10}{x}$	
$x: \text{ウ}, y: \text{ア}$, 関係式: $y = 15x$	$x: \text{ウ}, y: \text{イ}$, 関係式: $y = \frac{1}{3}x$	$x: \text{エ}, y: \text{ウ}$, 関係式: $y = \frac{10}{x}$	

関数 - 学習状況診断テスト



(13) 傾き a を $a > 1$ の範囲で決定したとき、一次関数 $y = ax - 1$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

ただし、点線は $y = -x - 1$ および $y = x - 1$ のグラフである。

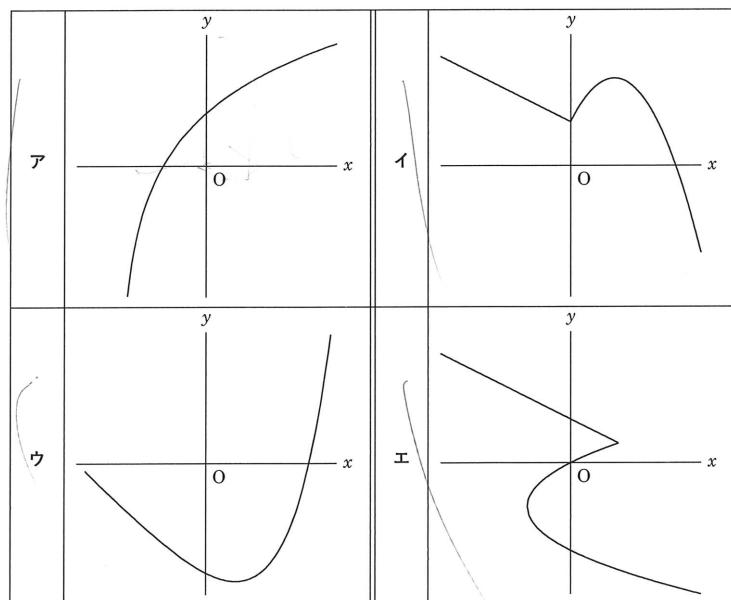


(答 13)

7

関数 - 学習状況診断テスト

(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。



(答 14)

詳解 p.1

(1) 一次関数 $y = 3x + 2$ において、 $y = 4$ であるとき、 x を求めてください。

$y = 3x + 2$ の y に 4 を代入して、 x に関する方程式を解く。

$$\begin{array}{l} 4 = 3x + 2 \\ -3x = 2 - 4 \\ -3x = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = (-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ x = \frac{2}{3} \end{array}$$

(2) 一次関数において、 $x = -2$ のとき $y = 2$ 、 $x = 3$ のとき $y = 12$ である。このとき、 y を x の式で表してください。

一次関数の一般式 $y = ax + b$ に、 $x = -2$ 、 $y = 2$ と $x = 3$ 、 $y = 12$ をそれぞれ代入して、連立方程式を解く。

$$\begin{cases} 2 = -2a + b & \cdots(1) \\ 12 = 3a + b & \cdots(2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{①に代入して,} \\ 2 = -2 \times 2 + b \\ 2 = -4 + b \\ 2 + 4 = b \\ b = 6 \end{array}$$

加減法で ① - ② より,
 $-10 = -5a$
 $5a = 10$
 $a = \frac{10}{5}$
 $a = 2$

よって、 $y = 2x + 6$

(3) 3つの数量 a 、 b 、 c がある。 b は a の関数であり、 c は b の関数である。この2つの関数について、関数の定義をもとに、必ずしも正しいといえないものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

b は a の関数であることから、 a の値を決めるとき、 b の値がただ一つに定まるため、エは正しいといえる。

c は b の関数であることから、 b の値を決めるとき、 c の値がただ一つに定まるため、ウは正しいといえる。

以上の2つのことから、 a の値を決めるとき、 b の値が一つに定まり、そのときの b の値に応じて c の値も定まるため、イも正しいといえる。

一方、 b の値を決めて、 a の値は一つに定まるとは限らない。同様に、 c の値を決めて、 b の値は一つに定まるとは限らない。よって、アは必ずしも正しいといえない。

(4) 一次関数 $y = 3x - 2$ において、 y が t であるとき、 x を t を用いて表してください。

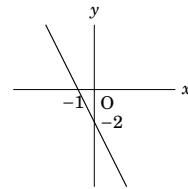
$y = 3x - 2$ の y に t を代入し、 $x = (\dots)$ の形に変形する。

$$\begin{array}{l} t = 3x - 2 \\ -3x = -t - 2 \\ 3x = t + 2 \\ x = \frac{t+2}{3} \end{array}$$

このことは、 $y = 2x - 6$ のグラフが、点 $\left(\frac{t+2}{3}, t\right)$ を通るということを意味しています。

また、一般に「 y を x を用いて表す」とは、「 $y = (x$ を含む式) の形にする」ことを意味します。

(5) 右の図に、一次関数のグラフがかけられている。この一次関数の切片を答えてください。

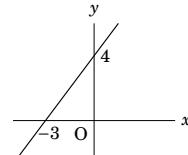


切片とは、直線と y 軸との交点の y 座標である。グラフから、一次関数のグラフは y 軸と、点 $(0, -2)$ で交わっている。よって切片は -2 。

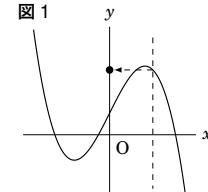
(6) 右の図に、一次関数のグラフがかけられている。この一次関数の傾きを答えてください。

直線上の2点の座標がわかれば、その2点間の変化の割合を求ることで、直線の傾きを求めることができる。グラフから、直線は2点 $(-3, 0)$ 、 $(0, 4)$ を通っていることが読み取れる。

$$\begin{aligned} \text{傾き} &= \text{変化の割合} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} \\ &= \frac{4 - 0}{0 - (-3)} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



(7) 右の図は、ある関数のグラフをかいたものである。この関数について、誤っているものを次のア～エのうちから一つ選んでください。

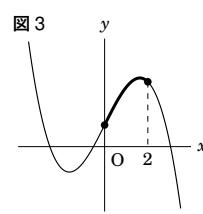
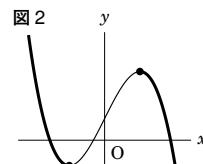


アに関して、グラフを読み取ると、 $x = -2$ のとき $y = -1$ である。よって、アは正しい。

イに関して、 x の値を一つ決めるとき、 y の値もただ一つに定まるかどうかを確認するため、 x の値を適当に一つ決めてみる。いろいろな x の値を試してみると、必ず y の値が一つしか対応しないことがわかる（図1）。よって、イは正しい。

ウに関して、図2のグラフの太線の部分は右下がりになっていて、 x の値が増加すると y の値が減少することが読み取れる。よって、ウは誤り。

エに関して、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲では、グラフが x 軸より上側にあり、 y の値が正になることが読み取れる（図3）。よって、エは正しい。



詳解 p.2

(8) 右の図には、反比例 $y = \frac{3}{x}$ のグラフと、比例 $y = -2x - 2$ のグラフがかけられている。 $y = \frac{3}{x}$ 上に点 A(3, 1), $y = -2x - 2$ 上に点 B $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ をとるとき、線分 AB の長さを求めてください。

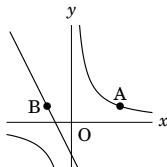
ただし、原点 O から点 (0, 1) および原点 O から点 (1, 0) の長さを 1cm とする。

線分 AB は x 軸に平行である。このとき、線分の長さは、点 A から点 B までの x の増加量であり、

(大きい方の x 座標)-(小さい方の x 座標)

で求めることができる。

$$\text{よって, } AB = 3 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}(\text{cm})$$



今回の問題は、マス目を意識して数えることが少し難しかったと思います。

増加量を意識して (大きい方の座標)-(小さい方の座標) によって求められると良いですね。

問題文「比例 $y = -2x - 2$ のグラフ」は、正しくは「一次関数 $y = -2x - 2$ のグラフ」でした。

(9) 右の図の 2 つのグラフの交点の座標を求めてください。

原点 O と点 (3, 1) を通る直線は、比例のグラフであり、傾きは y の増加量 $= \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$ 。よって $y = \frac{1}{3}x$ 。もう一方の直線は、2 点 (0, -4), (3, 0) を通っている。y 軸との交点から切片が -4 であることがわかり、傾きは $\frac{0-(-4)}{3-0} = \frac{4}{3}$ である。よって $y = \frac{4}{3}x - 4$ 。

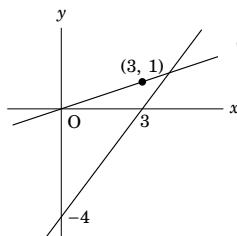
交点の座標を求めるためには、2 つのグラフの式の連立方程式を解けばよい。交点とは、いずれの関係式も満たす x, y の組だからである。

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x & \dots \text{①} \\ y = \frac{4}{3}x - 4 & \dots \text{②} \end{cases}$$

代入法から、②の y に①を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x &= \frac{4}{3}x - 4 \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}x &= -4 \\ -x &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{①に代入して, } y = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} \text{。よって, 交点の座標は } \left(4, \frac{4}{3}\right)$$



(10) 右の図のように、直線 $y = \frac{4}{3}x + 1$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ がある。x 軸上に点 P をとり、P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y = \frac{4}{3}x + 1$ 、直線 $y = \frac{1}{2}x$ との交点をそれぞれ点 A, B とする。線分 AB の長さが 3 となるときの点 P の x 座標を求めてください。

ただし、点 P の x 座標を t とおき、AB の長さに関する方程式を立てることによって求めること。

また、点 P の x 座標は正とする。

3 点 A, B, P の x 座標は同じであるから、点 P の x 座標を t としたとき、点 A, B の x 座標も t となる。点 A は直線 $y = \frac{4}{3}x + 1$ 上の点であるから、x に t を代入して、y 座標は $\frac{4}{3}t + 1$ と表せる。同様に、点 B は直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上の点であるから、x に t を代入して、y 座標は $\frac{1}{2}t$ と表せる。

点 P の座標が正であることから、点 B の y 座標よりも点 A の y 座標の方が大きく、線分 AB は y 軸に平行であるから、AB の長さは t を用いて、

$$(\text{大きい方の } y \text{ 座標}) - (\text{小さい方の } y \text{ 座標}) = \left(\frac{4}{3}t + 1\right) - \frac{1}{2}t$$

と表せる。

この長さが 3 になればよいから、

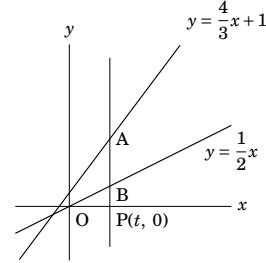
$$\left(\frac{4}{3}t + 1\right) - \frac{1}{2}t = 3$$

$$\frac{8}{6}t - \frac{3}{6}t = 3 - 1$$

$$\frac{5}{6}t = 2$$

$$t = 2 \times \frac{6}{5}$$

$$t = \frac{12}{5}$$



入試の難易度の高い問題はこのような形式です。座標を文字で置いて解き進めれば、たいていの問題は答えに辿り着くことができます。

もちろん、一般式 $y = ax$ や $y = ax + b$ に、点の座標を代入して直線の式を求めて良いです。

詳解 p.3

(11) 次の文章について、正しい記述をア～エのうちから一つ選んでください。

AさんとBさんが15時00分に家を出ました。Aさんは分速60mで、Bさんは分速70mで歩いています。Aさんの忘れ物に気づいたCさんは、15時04分に家を出て分速100mで走ってAさんを追いかけました。CさんはAさんに15時10分に追いつきました。

関数の定義をもとに、一方の値を決めたときに他方の値が決まるかどうかを考える。

アに関して、「Aさんの歩く速さ(分速xm)」が速くなれば、その分「CさんがAさんに追いつく時刻(15時y分)」は遅くなるため、関数関係にあり、アは誤り(ただし、Aさんの進む速さはCさんの走る速さより速くてはいけないため、 $x < 100$)。例えば、Aさんが分速80mで歩いていたら、CさんがAさんに追いつく時刻は15時20分になる。具体的な関係式は $y = \frac{400}{100-x}$ 。

イに関して、「Cさんが家を出る時刻(15時x分)」が早くなれば、その分「CさんがAさんに追いつく時刻(15時y分)」も早くなるため、関数関係にあり、イは誤り(ただし、Cさんが家を出る時刻はAさんが家を出る時刻より早くてはいけないため、 $x \geq 0$)。例えば、Cさんが15時02分に家を出てAさんを追いかけると、15時05分に追いつく。具体的な関係式は $y = \frac{5}{2}x$ 。

ウに関して、「Bさんの歩く速さ」が速くなったり遅くなったりしても、「CさんがAさんに追いつく時刻」は変わらないため、関数関係になく、ウは正しい。

エに関して、「Cさんの走る速さ(分速xm)」が速くなれば、その分「CさんがAさんに追いつく時刻(15時y分)」は早くなるため、関数関係にあり、エは誤り(ただし、Cさんの走る速さはAさんの歩く速さより速くてはいけないため、 $x > 60$)。例えば、Cさんが分速120mで走れば、CさんがAさんに追いつく時刻は15時08分になる。具体的な関係式は $y = \frac{4x}{x-60}$ 。

(12) 次の文章中の2つの数量を選び、関数関係を式に表してください。

ただし、例を参考に、2つの数量はア～エのうちから記号で選び、どの数量を文字x, yとしたか示したうえで、yをxの式で表してください。

また、正答は複数個あり、そのうちのいずれを答えるても正解です。

歯数15の歯車Sと歯数30の歯車Tがかみ合って回転するとき、歯車Tが1回転すると歯車Sは2回転します。また、歯車Sと歯数10の歯車Uがかみ合って回転するとき、歯車Uが1回転すると歯車Sは $\frac{2}{3}$ 回転します。

今回は、ア～エのうちどの2つの数量を選んでも、それらの2つの数量は関数関係にある。

アとイに関して、歯車Sと歯車Tがかみ合って回転するとき(歯車Sの歯数)×(歯車Sの回転数)=(歯車Tの歯数)×(歯車Tの回転数)の関係が成り立つことを利用する。ア「歯車Sの歯数」をx, イ「歯車Tの回転数」をyとすると、歯車Sの回転数が2、歯車Tの歯数が30であるから、 $x \times 2 = 30 \times y$ となり、 $y = (\dots)$ の形に変形すると、 $y = \frac{1}{15}x$ 。

その他の組み合わせでも、同様にして考えることができる。ただし、イとエの組み合わせを選ぶときには、歯車Tと歯車Uがかみ合って回転しているときの、それぞれの回転数を考える必要があった。歯車Tと歯車Uがかみ合って回転しているとき、(歯車Tの歯数)×(歯車Tの回転数)=(歯車Uの歯数)×(歯車Uの回転数)だから、歯車Tが1回転する間に、歯車Uは3回転することがわかる。よって、イ「歯車Tの回転数」をx, エ「歯車Uの歯数」をyとすると、 $30 \times x = y \times 3$ となり、 $y = 10x$ 。

解答一覧は解答用紙を参照してください。

今回は、ア～エのうちどの2つの数量を選んでも、それらの2つの数量は関数関係にあるものでした。

問題の内容としては、「歯車Aと歯車Bがかみ合って回転するとき、(歯車Aの歯数)×(歯車Aの回転数)=(歯車Bの歯数)×(歯車Bの回転数)が成り立つ」ということが理解できていると、容易に解くことができる問題でした。

この関係性を覚えていなかったとしても、選んだ数量の変化によく注目して考えれば答えに辿り着くことはできるはずですが、かなり難易度が高いものになってしまったかもしれません。その点は申し訳ありませんが、歯車に関する上記の関係式は覚えておきましょう。

今回、出題内容に不十分な点があつたため、想定していた12個の解答以外にも、正しいと考えられるものは正解とすることにしていましたが、該当する回答はありませんでした。

詳解 p.4

(13) 傾き a を $a > 1$ の範囲で決定したとき、一次関数 $y = ax - 1$ のグラフはどのようにかけるか。次のア～エのうちから一つ選んでください。

ただし、点線は $y = -x - 1$ および $y = x - 1$ のグラフである。

傾き a を $a > 1$ の範囲で決定するということは、傾き a は正になる。そのため、一次関数 $y = ax - 1$ のグラフは右上がりになる。

また、傾き a は、1より大きいから、 $y = x - 1$ のグラフよりも、傾きが急になる。例えば、 $a = 2$ の場合などを考えるとわかりやすい。

グラフが右上がりであり、点線のグラフ $y = x - 1$ よりも傾きが急な直線がかかっているウが正解。

なお、各選択肢に実線でかかれているグラフは、

$$\text{ア} : y = -\frac{1}{2}x - 1 \quad (-1 < a < 0)$$

$$\text{イ} : y = -2x - 1 \quad (a < -1)$$

$$\text{ウ} : y = 2x - 1 \quad (a > 1)$$

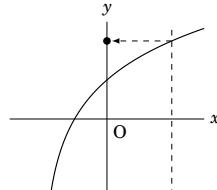
$$\text{エ} : y = \frac{1}{2}x - 1 \quad (0 < a < 1)$$

である。

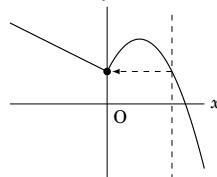
(14) 次のア～エのグラフのうち、関数の定義に照らして、「 y は x の関数である」といえないものを一つ選んでください。

y が x の関数であるとき、 x の値を決めるとき y の値がただ一つに定まる。それぞれの選択肢のグラフで、 x の値を適当に決めて、対応する y の値が一つに定まるか二つ以上になるか確認していく。

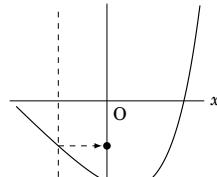
アに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



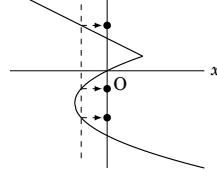
イに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



ウに関して、どの x の値をとっても、 y の値は一つに定まる。例えば、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が一つに定まっている。よって、 y は x の関数である。



エに関して、右図のような x の値を考えると、対応する y の値が三つある。よって、 y は x の関数であるといえない。



Appendix E

分析に使用したスクリプトは、本研究において使用したデータや、作成した他のすべてのスクリプトファイルとともに、OSF (<https://osf.io/6nqdg/>) および GitHub (<https://github.com/kd-kojima/kojima2023>) 上にも掲載する。今後の CDM 研究やテスト研究等に活用されたい。

第1回分析スクリプト

```
#  
# Kojima, K. (2023). Application of Cognitive Diagnosis Models (Senior thesis).  
# Script for analysis 1  
  
#  
  
rm(list=ls())  
  
library(jagsUI)  
library(MCMCvis)  
library(GDINA)  
library(Hmisc)  
library(loo)  
  
options(scipen = 100)  
  
set.seed(1843)  
  
# -----  
# import data  
#  
T <- 1  
  
Q <- read.csv("./qmat1.csv", row.names = 1)  
I <- nrow(Q)  
K <- ncol(Q)  
  
datacsv <- read.csv("./t1.csv", row.names = 1)  
X <- datacsv[,1:I]  
N <- nrow(X)  
  
g2 <- datacsv[datacsv[, "YEAR"] == 2,]  
g3 <- datacsv[datacsv[, "YEAR"] == 3,]  
num <- as.data.frame(cbind(nrow(g2), nrow(g3), nrow(g2)+nrow(g3)))  
colnames(num) <- c("2nd", "3rd", "sum")  
rownames(num) <- c("num")  
  
pcorr <- as.data.frame(cbind(c(colMeans(g2[,1:I])), mean(colMeans(g2[,1:I]))*I), c(colMeans  
    (g3[,1:I]), mean(colMeans(g3[,1:I]))*I), c(colMeans(X), mean(colMeans(X))*I))  
colnames(pcorr) <- c("Year2", "Year3", "All")  
rownames(pcorr) <- c(paste0("(", 1:I, ")"), "All")  
  
# -----  
# HO-DINA  
#  
mean.lambda0 <- c(-1, 0.5, 0.5)  
pr.lambda0 <- c(0.5, 0.25, 0.25)  
mean.lambda <- c(0.5, 1, 1)  
pr.lambda <- c(0.25, 0.25, 0.25)
```

```

a.s <- 1
b.s <- 1
a.g <- 1
b.g <- 1

data <- list(
  N = N,
  I = I,
  K = K,
  X = X,
  Q = Q,
  a.s = a.s,
  b.s = b.s,
  a.g = a.g,
  b.g = b.g,
  mean.lambda0 = mean.lambda0,
  pr.lambda0 = pr.lambda0,
  mean.lambda = mean.lambda,
  pr.lambda = pr.lambda
)
modfile <- "HO-DINA.jags"
cat("

model {
  for (n in 1:N) {
    for (i in 1:I) {
      for (k in 1:K) {
        w[n, i, k] <- pow(alpha[n, k], Q[i, k])
      }
      eta[n, i] <- prod(w[n, i, 1:K])
      p[n, i] <- g[i] + (1 - s[i] - g[i]) * eta[n, i]
      X[n, i] ~ dbern(p[n, i])
    }
  }
  for (n in 1:N) {
    for (k in 1:K) {
      logit(prob.a[n, k]) <- lambda[k] * theta[n] - lambda0[k]
      alpha[n, k] ~ dbern(prob.a[n, k])
    }
    theta[n] ~ dnorm(0, 1)
  }
  for (k in 1:K) {
    lambda0[k] ~ dnorm(mean.lambda0[k], pr.lambda0[k])
    lambda[k] ~ dnorm(mean.lambda[k], pr.lambda[k]) T(0, )
  }
  for (i in 1:I) {
    s[i] ~ dbeta(a.s, b.s)
    g[i] ~ dbeta(a.g, b.g) T(, 1 - s[i])
  }

  for (n in 1:N) {
    for (i in 1:I) {
      log_lik[n, i] <- logdensity.bern(X[n, i], p[n, i])

      resstat[n, i] <- pow(X[n, i] - p[n, i], 2) / (p[n, i] * (1 - p[n, i]))
      X_rep[n, i] ~ dbern(p[n, i])
      resstat_rep[n, i] <- pow(X_rep[n, i] - p[n, i], 2) / (p[n, i] * (1 - p[n, i]))
    })
  }
}

```

```

        }
    }
    resstat_sum <- sum(resstat[1:N, 1:I])
    resstat_rep_sum <- sum(resstat_rep[1:N, 1:I])
    ppp <- step(resstat_rep_sum - resstat_sum)
}
", file = modfile)

params <- c("alpha", "g", "s", "lambda0", "lambda", "theta", "log_lik", "ppp", "X_rep", "resstat_sum", "resstat_rep_sum")

inits <- function(){
  list(
    s = runif(I, 0, 0.5),
    g = runif(I, 0, 0.5),
    lambda0 = rnorm(K, 0, 4),
    lambda = abs(rnorm(K, 0, 4))
  )
}

n_chains <- 5
n_iter <- 10000
n_burnin <- 6000
n_thin <- 2

res_mcmc_hodina <- jags(
  data = data,
  inits = inits,
  parameters.to.save = params,
  model.file = modfile,
  n.chains = n_chains,
  n.iter = n_iter,
  n.burnin = n_burnin,
  n.thin = n_thin,
  parallel = TRUE,
  n.cores = n_chains
)

# Rhats over 1.05
Rhats <- data.frame(rownames = rownames(res_mcmc_hodina$summary), Rhat = res_mcmc_hodina$summary[, "Rhat"])
Rhats_over <- data.frame(Rhat = Rhats[!is.na(Rhats$Rhat) & Rhats$Rhat > 1.05, "Rhat"])
rownames(Rhats_over) <- Rhats[!is.na(Rhats$Rhat) & Rhats$Rhat > 1.05, "rownames"]
Rhats_over

alpha_indices <- grep("alpha\\\[", rownames(res_mcmc_hodina$summary))
ipar_indices <- grep("[gs]\\\[", rownames(res_mcmc_hodina$summary))
kpar_indices <- grep("(lambda0|lambda)\\\[", rownames(res_mcmc_hodina$summary))
theta_indices <- grep("^theta\\\[", rownames(res_mcmc_hodina$summary))

HODINA_MCMC <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[alpha_indices, "mean"], nrow = N, ncol = K)
alpha_mcmc_hodina <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[alpha_indices, "50%"], nrow = N, ncol = K)
ipar_mcmc_hodina_mean <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[ipar_indices, "mean"], nrow = I, ncol = 2)
ipar_mcmc_hodina_sd <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[ipar_indices, "sd"], nrow = I, ncol = 2)

```

```

ipar_mcmc_hodina <- cbind(ipar_mcmc_hodina_mean[,1], ipar_mcmc_hodina_sd[,1], ipar_mcmc_
    hodina_mean[,2], ipar_mcmc_hodina_sd[,2])
colnames(ipar_mcmc_hodina) <- c("guessing", "SDg", "slipping", "SDs")
rownames(ipar_mcmc_hodina) <- c(paste0("Q", 1:I))
kpar_mcmc_hodina_mean <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[kpar_indices, "mean"], nrow = K,
    ncol = 2)
kpar_mcmc_hodina_sd <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[kpar_indices, "sd"], nrow = K, ncol
    = 2)
kpar_mcmc_hodina <- cbind(kpar_mcmc_hodina_mean[,1], kpar_mcmc_hodina_sd[,1], kpar_mcmc_
    hodina_mean[,2], kpar_mcmc_hodina_sd[,2])
colnames(kpar_mcmc_hodina) <- c("lambda0", "SD0", "lambda", "SD")
rownames(kpar_mcmc_hodina) <- c(paste0("A", 1:K))
theta_mcmc_hodina_mean <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[theta_indices, "mean"], nrow = N,
    ncol = 1)
theta_mcmc_hodina_sd <- matrix(res_mcmc_hodina$summary[theta_indices, "sd"], nrow = N,
    ncol = 1)
theta_mcmc_hodina <- cbind(theta_mcmc_hodina_mean, theta_mcmc_hodina_sd)
colnames(theta_mcmc_hodina) <- c("theta", "SD")

i_theta <- cbind(theta_mcmc_hodina_mean, rowSums(X))
colnames(i_theta) <- c("theta", "sum")

log_lik_array <- res_mcmc_hodina$sims.list$log_lik
log_lik_mat <- matrix(0, nrow = dim(log_lik_array)[1], ncol = N*I)
for (m in 1:dim(log_lik_array)[1]) {
    log_lik_mat[m,] <- unlist(log_lik_array[m, ,])
}

waic_mcmc_hodina <- waic(log_lik_mat)
ppp_mcmc_hodina <- pp.check(res_mcmc_hodina, observed = "resstat_sum", simulated =
    "resstat_rep_sum")
waic_mcmc_hodina
ppp_mcmc_hodina

pat_table <- apply(alpha_mcmc_hodina, 1, function(x){
    paste0(x[1],x[2],x[3])
})
pat <- c("000", "100", "010", "001", "110", "101", "011", "111", pat_table)
xtable <- table(pat) - 1
xtable <- c(xtable, sum(xtable))
names(xtable) <- c(names(xtable)[1:8], "SUM")

# -----
# output
#
MCMCtrace(res_mcmc_hodina, params = c("g", "s", "lambda0", "lambda", "theta"), filename =
    paste0("MCMCtrace_hodina_t", T, ".pdf"))

# write mastery probability
write.csv(HODINA_MCMC, paste0("prob_T", T, "_1.csv"), quote = FALSE)

# save RData
save(list = ls(), file = paste0("t", T, ".RData"))

```

第2回分析スクリプト

```
#  
# Kojima, K. (2023). Application of Cognitive Diagnosis Models (Senior thesis).  
# Script for analysis 2  
#  
  
rm(list=ls())  
  
library(jagsUI)  
library(MCMCvis)  
library(GDINA)  
library(Hmisc)  
library(loo)  
library(tidyverse)  
  
options(scipen = 100)  
  
set.seed(1843)  
  
# -----  
# import data  
#  
T <- 2  
  
Qcsv <- read.csv("./qmat1.csv", row.names = 1)  
I <- nrow(Qcsv)  
K <- ncol(Qcsv)  
  
Q <- array(0, dim = c(I, K, T), dimnames = list(rownames(Qcsv), colnames(Qcsv), paste0("T"  
, 1:T)))  
for (t in 1:T) {  
  Q[, , t] <- as.matrix(Qcsv)  
}  
  
datacsv1 <- read.csv("./t1.csv")  
datacsv2 <- read.csv("./t2.csv")  
datacsv <- full_join(datacsv1, datacsv2, by = "ID")  
N <- nrow(datacsv)  
  
datafull <- array(0, dim = c(N, ncol(datacsv1) - 1, T), dimnames = list(datacsv[, "ID"],  
  colnames(datacsv1)[-1], paste0("T", 1:T)))  
X <- array(0, dim = c(N, I, T), dimnames = list(datacsv[, "ID"], rownames(Qcsv), paste0("T"  
, 1:T)))  
for (t in 1:T) {  
  datafull[, , t] <- as.matrix(datacsv[, (2+(t-1)*(ncol(datacsv1)-1)):(ncol(datacsv1)+(t-1)  
    *(ncol(datacsv1)-1))])  
  X[, , t] <- datafull[, 1:I, t]  
  
  # confirm if YEARS match  
  if (t > 1) {  
    if (identical(datafull[, "YEAR", 1], datafull[, "YEAR", t])) {  
      print(paste0("YEARS match, OK. | t = ", t))  
    }  
  }  
}  
  
g2 <- 0  
for (t in 1:T) {
```

```

x <- datafull[datafull[, "YEAR", 1] == 2, , t]
g2 <- array(g2, dim = c(nrow(x), ncol(datafull[, , 1]), T), dimnames = list(rownames(x),
  colnames(datafull[, , t]), paste0("T", 1:T)))
g2[, , t] <- x
}

g3 <- 0
for (t in 1:T) {
  x <- datafull[datafull[, "YEAR", 1] == 3, , t]
  g3 <- array(g3, dim = c(nrow(x), ncol(datafull[, , 1]), T), dimnames = list(rownames(x),
    colnames(datafull[, , t]), paste0("T", 1:T)))
  g3[, , t] <- x
}

num <- as.data.frame(cbind(nrow(g2[, , 1]), nrow(g3[, , 1]), nrow(g2[, , 1]) + nrow(g3[, , 1])))
for (t in 2:T) {
  num <- as.data.frame(rbind(num, cbind(nrow(g2[complete.cases(g2[, , t]), , t]), nrow(g3[
    complete.cases(g3[, , t]), , t]), nrow(g2[complete.cases(g2[, , t]), , t]) + nrow(g3[
    complete.cases(g3[, , t]), , t]))))
}
colnames(num) <- c("2nd", "3rd", "SUM")
rownames(num) <- paste0("T", 1:t)

pcorr <- as.data.frame(cbind(c(colMeans(g2[, 1:I, 1], na.rm = TRUE), mean(colMeans(g2[, 1:I,
  1], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(g3[, 1:I, 1], na.rm = TRUE), mean(colMeans(g3[, 1:I,
  1], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(X[, , 1], na.rm = TRUE), mean(colMeans(X[, , 1], na.rm =
  = TRUE))*I)))
for (t in 2:T) {
  pcorr <- as.data.frame(cbind(pcorr, c(colMeans(g2[, 1:I, t], na.rm = TRUE), mean(
    colMeans(g2[, 1:I, t], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(g3[, 1:I, t], na.rm = TRUE), mean(
    colMeans(g3[, 1:I, t], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(X[, , t], na.rm = TRUE), mean(
    colMeans(X[, , t], na.rm = TRUE))*I)))
}
colnames(pcorr) <- c(paste0("T1", c("Y2", "Y3", "ALL")), paste0("T2", c("Y2", "Y3", "ALL"))
)
rownames(pcorr) <- c(paste0("(", 1:I, ")"), "All")

complete_indices <- !is.na(X[, 1, 1]) & !is.na(X[, 1, 2])

# -----
# Long-HO-DINA
#
mean.lambda0 <- c(-1, 0.5, 0.5)
pr.lambda0 <- c(0.5, 0.25, 0.25)
mean.lambda <- c(0.5, 1, 1)
pr.lambda <- c(0.25, 0.25, 0.25)

a.s <- c(1, 1)
b.s <- c(1, 1)
a.g <- c(1, 1)
b.g <- c(1, 1)

data <- list(
  N = N,
  I = I,
  K = K,
  T = T,
  X = X,

```

```

Q = Q,
a.s = a.s,
b.s = b.s,
a.g = a.g,
b.g = b.g,
mean.lambda0 = mean.lambda0,
pr.lambda0 = pr.lambda0,
mean.lambda = mean.lambda,
pr.lambda = pr.lambda
)
modfile <- "Long-HO-DINA.jags"
cat("

model {
  for (t in 1:T) {
    for (n in 1:N) {
      for (i in 1:I) {
        for (k in 1:K) {
          w[n, i, k, t] <- pow(alpha[n, k, t], Q[i, k, t])
        }
        eta[n, i, t] <- prod(w[n, i, 1:K, t])
        p[n, i, t] <- g[i, t] + (1 - s[i, t] - g[i, t]) * eta[n, i, t]
        X[n, i, t] ~ dbern(p[n, i, t])
      }
    }
    for (n in 1:N) {
      for (k in 1:K) {
        logit(prob.a[n, k, t]) <- lambda[k] * theta[n, t] - lambda0[k]
        alpha[n, k, t] ~ dbern(prob.a[n, k, t])
      }
    }
  }
  for (n in 1:N) {
    theta[n, 1:T] ~ dmmnorm.vcov(mu_theta[1:T], Sigma_theta[1:T, 1:T])
  }
  for (k in 1:K) {
    lambda0[k] ~ dnorm(mean.lambda0[k], pr.lambda0[k])
    lambda[k] ~ dnorm(mean.lambda[k], pr.lambda[k]) T(0, )
  }
  for (t in 1:T) {
    for (i in 1:I) {
      s[i, t] ~ dbeta(a.s[t], b.s[t])
      g[i, t] ~ dbeta(a.g[t], b.g[t]) T(0, 1 - s[i, t])
    }
  }

  delta[1] <- 0
  mu_theta[1] <- 0
  for (t in 2:T) {
    delta[t] ~ dnorm(0, 0.5) T(0, )
    mu_theta[t] <- delta[t] + mu_theta[t-1]
  }

  for (tt in 1:T) {
    Sigma_theta[tt, tt] <- 1
    for (ttt in 1:(tt-1)) {
      Sigma_theta[tt, ttt] ~ dunif(-1, 1)
      Sigma_theta[ttt, tt] <- Sigma_theta[tt, ttt]
    }
  }
}

```

```

    }

    for (t in 1:T) {
        for (n in 1:N) {
            for (i in 1:I) {
                log_lik[n, i, t] <- logdensity.bern(X[n, i, t], p[n, i, t])

                resstat[n, i, t] <- pow(X[n, i, t] - p[n, i, t], 2) / (p[n, i, t] * (1 -
                    p[n, i, t]))
                X_rep[n, i, t] ~ dbern(p[n, i, t])
                resstat_rep[n, i, t] <- pow(X_rep[n, i, t] - p[n, i, t], 2) / (p[n, i, t]
                    * (1 - p[n, i, t]))
            }
        }
    }
    resstat_sum <- sum(resstat[1:N, 1:I, 1:T])
    resstat_rep_sum <- sum(resstat_rep[1:N, 1:I, 1:T])
    ppp <- step(resstat_rep_sum - resstat_sum)
}

", file = modfile)

params <- c("alpha", "g", "s", "theta", "lambda0", "lambda", "mu_theta", "Sigma_theta", "
delta", "log_lik", "ppp", "X_rep", "resstat_sum", "resstat_rep_sum")

inits <- function(){
    list(
        g = matrix(runif(I*T, 0, 0.5), nrow = I, ncol = T),
        s = matrix(runif(I*T, 0, 0.5), nrow = I, ncol = T),
        lambda0 = rnorm(K, 0, 4),
        lambda = abs(rnorm(K, 0, 4))
    )
}

n_chains <- 5
n_iter <- 50000
n_burnin <- 15000
n_thin <- 4

res_mcmc_lhodina <- jags(
    data = data,
    inits = inits,
    parameters.to.save = params,
    model.file = modfile,
    n.chains = n_chains,
    n.iter = n_iter,
    n.burnin = n_burnin,
    n.thin = n_thin,
    parallel = TRUE,
    n.cores = n_chains
)

# Rhats over 1.05
Rhats <- data.frame(rownames = rownames(res_mcmc_lhodina$summary), Rhat = res_mcmc_lhodina
    $summary[, "Rhat"])
Rhats_over <- data.frame(Rhat = Rhats[!is.na(Rhats$Rhat) & Rhats$Rhat > 1.05, "Rhat"])
rownames(Rhats_over) <- Rhats[!is.na(Rhats$Rhat) & Rhats$Rhat > 1.05, "rownames"]
Rhats_over

```

```

alpha_indices <- grep("alpha\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
ipar_indices <- grep("[gs]\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
kpar_indices <- grep("(lambda0|lambda)\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
theta_indices <- grep("^theta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
delta_indices <- grep("delta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
mu_theta_indices <- grep("mu_theta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
Sigma_theta_indices <- grep("Sigma_theta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))

LHODINA_MCMC <- array(res_mcmc_lhodina$summary[alpha_indices, "mean"], dim = c(N, K, T))
alpha_mcmc_lhodina <- array(res_mcmc_lhodina$summary[alpha_indices, "50%"], dim = c(N, K,
T))
ipar_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[ipar_indices, "mean"], nrow = I,
ncol = 2*T)
ipar_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[ipar_indices, "sd"], nrow = I,
ncol = 2*T)
ipar_mcmc_lhodina <- cbind(ipar_mcmc_lhodina_mean[,1], ipar_mcmc_lhodina_sd[,1], ipar_mcmc_
lhodina_mean[,2], ipar_mcmc_lhodina_sd[,2], ipar_mcmc_lhodina_mean[,3], ipar_mcmc_
lhodina_sd[,3], ipar_mcmc_lhodina_mean[,4], ipar_mcmc_lhodina_sd[,4])
colnames(ipar_mcmc_lhodina) <- c("guessing T1", "SD", "guessing T2", "SD", "slipping T1",
"SD", "slipping T2", "SD")
rownames(ipar_mcmc_lhodina) <- c(paste0("Q", 1:I))
kpar_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[kpar_indices, "mean"], nrow = K,
ncol = 2)
kpar_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[kpar_indices, "sd"], nrow = K,
ncol = 2)
kpar_mcmc_lhodina <- cbind(kpar_mcmc_lhodina_mean[,1], kpar_mcmc_lhodina_sd[,1], kpar_mcmc_
lhodina_mean[,2], kpar_mcmc_lhodina_sd[,2])
colnames(kpar_mcmc_lhodina) <- c("lambda0", "SD0", "lambda", "SD")
rownames(kpar_mcmc_lhodina) <- c(paste0("A", 1:K))
theta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[theta_indices, "mean"], nrow =
N, ncol = T)
theta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[theta_indices, "sd"], nrow = N,
ncol = T)
theta_mcmc_lhodina <- cbind(theta_mcmc_lhodina_mean[,1], theta_mcmc_lhodina_sd[,1], theta_-
mcmc_lhodina_mean[,2], theta_mcmc_lhodina_sd[,2])
colnames(theta_mcmc_lhodina) <- c("T1", "SD1", "T2", "SD2")
delta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[delta_indices, "mean"], nrow =
T, ncol = 1)
delta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[delta_indices, "sd"], nrow = T,
ncol = 1)
delta_mcmc_lhodina <- cbind(delta_mcmc_lhodina_mean, delta_mcmc_lhodina_sd)
colnames(delta_mcmc_lhodina) <- c("delta", "SD")
rownames(delta_mcmc_lhodina) <- c(paste0("T", 1:T))
mu_theta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[mu_theta_indices, "mean"],
nrow = T, ncol = 1)
mu_theta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[mu_theta_indices, "sd"], nrow
= T, ncol = 1)
mu_theta_mcmc_lhodina <- cbind(mu_theta_mcmc_lhodina_mean, mu_theta_mcmc_lhodina_sd)
colnames(mu_theta_mcmc_lhodina) <- c("mu_theta", "SD")
rownames(mu_theta_mcmc_lhodina) <- c(paste0("T", 1:T))
Sigma_theta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[Sigma_theta_indices, "
mean"], nrow = T, ncol = T)
Sigma_theta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[Sigma_theta_indices, "sd"],
nrow = T, ncol = T)

sumcorr <- rowSums(X[, ,1])
for (t in 2:T) {
  sumcorr <- cbind(sumcorr, rowSums(X[, ,t]))
}

```

```

}

i_theta <- cbind(theta_mcmc_lhodina_mean, sumcorr)
colnames(i_theta) <- c(paste0("theta T", 1:T), paste0("sum T", 1:T))

log_lik_array <- res_mcmc_lhodina$sims.list$log_lik
log_lik_mat <- matrix(0, nrow = dim(log_lik_array)[1], ncol = N*I*T)
for (m in 1:dim(log_lik_array)[1]) {
  log_lik_mat[m,] <- unlist(log_lik_array[m,,,])
}

waic_mcmc_lhodina <- waic(log_lik_mat)
ppp_mcmc_lhodina <- pp.check(res_mcmc_lhodina, observed = "resstat_sum", simulated =
  "resstat_rep_sum")
waic_mcmc_lhodina
ppp_mcmc_lhodina

pat_table <- matrix(0, nrow = N, ncol = T)
for (t in 1:T) {
  pat_table[,t] <- apply(alpha_mcmc_lhodina[,,t], 1, function(x) {
    paste0(x[1],x[2],x[3])
  })
}
t1_pat <- c("000", "100", "010", "001", "110", "101", "011", "111", pat_table[complete_
  indices,1])
t2_pat <- c("000", "100", "010", "001", "110", "101", "011", "111", pat_table[complete_
  indices,2])
xtable_12 <- table(t1_pat, t2_pat)
diag(xtable_12) <- diag(xtable_12) - 1
xtable_12 <- cbind(xtable_12, table(t1_pat) - 1)
xtable_12 <- rbind(xtable_12, colSums(xtable_12))
colnames(xtable_12) <- c(colnames(xtable_12)[1:8], "SUM1")
rownames(xtable_12) <- c(rownames(xtable_12)[1:8], "SUM2")

# -----
# output
#
MCMCtrace(res_mcmc_lhodina, params = c("g", "s", "lambda0", "lambda", "theta", "mu_theta",
  "Sigma_theta", "delta"), filename = paste0("MCMCtrace_lhodina_t", T, ".pdf"))

# write mastery probability
for (t in 1:T) {
  write.csv(LHODINA_MCMC[,t], paste0("prob_T", T, "_", t, ".csv"), quote = FALSE)
}
# write fullcsv
for (t in 1:T) {
  write.csv(datafull[,t], paste0("full_T", T, "_", t, ".csv"), quote = FALSE)
}

# save RData
save(list = ls(), file = paste0("t", T, ".RData"))

```

第3回分析スクリプト

```
#  
# Kojima, K. (2023). Application of Cognitive Diagnosis Models (Senior thesis).  
# Script for analysis 3  
  
#  
  
rm(list=ls())  
  
library(jagsUI)  
library(MCMCvis)  
library(GDINA)  
library(Hmisc)  
library(loo)  
library(tidyverse)  
  
options(scipen = 100)  
  
set.seed(1843)  
  
# -----  
# import data  
#  
T <- 3  
  
Qcsv <- read.csv("./qmat1.csv", row.names = 1)  
I <- nrow(Qcsv)  
K <- ncol(Qcsv)  
  
Q <- array(0, dim = c(I, K, T), dimnames = list(rownames(Qcsv), colnames(Qcsv), paste0("T"  
, 1:T)))  
for (t in 1:T) {  
  Q[, , t] <- as.matrix(Qcsv)  
}  
  
datacsv1 <- read.csv("./t1.csv")  
datacsv2 <- read.csv("./t2.csv")  
datacsv3 <- read.csv("./t3.csv")  
datacsv12 <- full_join(datacsv1, datacsv2, by = "ID")  
datacsv <- full_join(datacsv12, datacsv3, by = "ID")  
N <- nrow(datacsv)  
  
datafull <- array(0, dim = c(N, ncol(datacsv1) - 1, T), dimnames = list(datacsv[, "ID"],  
  colnames(datacsv1)[-1], paste0("T", 1:T)))  
X <- array(0, dim = c(N, I, T), dimnames = list(datacsv[, "ID"], rownames(Qcsv), paste0("T"  
, 1:T)))  
for (t in 1:T) {  
  datafull[, , t] <- as.matrix(datacsv[, (2+(t-1)*(ncol(datacsv1)-1)):(ncol(datacsv1)+(t-1)  
    *(ncol(datacsv1)-1))])  
  X[, , t] <- datafull[, 1:I, t]  
  
  # confirm if YEARS match  
  if (t > 1) {  
    if (identical(datafull[, "YEAR", 1], datafull[, "YEAR", t])) {  
      print(paste0("YEARS match, OK. | t = ", t))  
    }  
  }  
}
```

```

g2 <- 0
for (t in 1:T) {
  x <- datafull[datafull[, "YEAR", 1] == 2,,t]
  g2 <- array(g2, dim = c(nrow(x), ncol(datafull[,,1]), T), dimnames = list(rownames(x),
    colnames(datafull[,,t])), paste0("T", 1:T)))
  g2[,,t] <- x
}

g3 <- 0
for (t in 1:T) {
  x <- datafull[datafull[, "YEAR", 1] == 3,,t]
  g3 <- array(g3, dim = c(nrow(x), ncol(datafull[,,1]), T), dimnames = list(rownames(x),
    colnames(datafull[,,t])), paste0("T", 1:T)))
  g3[,,t] <- x
}

num <- as.data.frame(cbind(nrow(g2[,,1]), nrow(g3[,,1]), nrow(g2[,,1])+nrow(g3[,,1])))
for (t in 2:T) {
  num <- as.data.frame(rbind(num, cbind(nrow(g2[complete.cases(g2[,,t]),,t]), nrow(g3[
    complete.cases(g3[,,t]),,t]), nrow(g2[complete.cases(g2[,,t]),,t]) + nrow(g3[
    complete.cases(g3[,,t]),,t)))))

  }
  colnames(num) <- c("2nd", "3rd", "SUM")
  rownames(num) <- paste0("T", 1:t)

pcorr <- as.data.frame(cbind(c(colMeans(g2[,1:I,1], na.rm = TRUE), mean(colMeans(g2[,1:I
  ,1], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(g3[,1:I,1], na.rm = TRUE), mean(colMeans(g3[,1:I
  ,1], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(X[,,1], na.rm = TRUE), mean(colMeans(X[,,1], na.rm
  = TRUE))*I)))
for (t in 2:T) {
  pcorr <- as.data.frame(cbind(pcorr, c(colMeans(g2[,1:I,t], na.rm = TRUE), mean(
    colMeans(g2[,1:I,t], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(g3[,1:I,t], na.rm = TRUE), mean(
    colMeans(g3[,1:I,t], na.rm = TRUE))*I), c(colMeans(X[,,t], na.rm = TRUE), mean(
    colMeans(X[,,t], na.rm = TRUE))*I)))
}

colnames(pcorr) <- c(paste0("T1", c("Y2", "Y3", "ALL")), paste0("T2", c("Y2", "Y3", "ALL"))
  , paste0("T3", c("Y2", "Y3", "ALL")))
  rownames(pcorr) <- c(paste0("(", 1:I, ")"), "All")

complete_indices <- !is.na(X[,1,1]) & !is.na(X[,1,2]) & !is.na(X[,1,3])

# -----
# Long-HO-DINA
#
mean.lambda0 <- c(-1, 0.5, 0.5)
pr.lambda0 <- c(0.5, 0.25, 0.25)
mean.lambda <- c(0.5, 1, 1)
pr.lambda <- c(0.25, 0.25, 0.25)

a.s <- c(1, 1, 1)
b.s <- c(1, 1, 1)
a.g <- c(1, 1, 1)
b.g <- c(1, 1, 1)

data <- list(
  N = N,
  I = I,
  K = K,

```

```

T = T,
X = X,
Q = Q,
a.s = a.s,
b.s = b.s,
a.g = a.g,
b.g = b.g,
mean.lambda0 = mean.lambda0,
pr.lambda0 = pr.lambda0,
mean.lambda = mean.lambda,
pr.lambda = pr.lambda
)
modfile <- "Long-HO-DINA_T3.jags"
cat("
model {
  for (t in 1:T) {
    for (n in 1:N) {
      for (i in 1:I) {
        for (k in 1:K) {
          w[n, i, k, t] <- pow(alpha[n, k, t], Q[i, k, t])
        }
        eta[n, i, t] <- prod(w[n, i, 1:K, t])
        p[n, i, t] <- g[i, t] + (1 - s[i, t] - g[i, t]) * eta[n, i, t]
        X[n, i, t] ~ dbern(p[n, i, t])
      }
    }
    for (n in 1:N) {
      for (k in 1:K) {
        logit(prob.a[n, k, t]) <- lambda[k] * theta[n, t] - lambda0[k]
        alpha[n, k, t] ~ dbern(prob.a[n, k, t])
      }
    }
  }
  for (n in 1:N) {
    theta[n, 1:T] ~ dmmnorm.vcov(mu_theta[1:T], Sigma_theta[1:T, 1:T])
  }
  for (k in 1:K) {
    lambda0[k] ~ dnorm(mean.lambda0[k], pr.lambda0[k])
    lambda[k] ~ dnorm(mean.lambda[k], pr.lambda[k]) T(0, )
  }
  for (t in 1:T) {
    for (i in 1:I) {
      s[i, t] ~ dbeta(a.s[t], b.s[t])
      g[i, t] ~ dbeta(a.g[t], b.g[t]) T(0, 1 - s[i, t])
    }
  }

  delta[1] <- 0
  mu_theta[1] <- 0
  for (t in 2:T) {
    delta[t] ~ dnorm(0, 0.5) T(0, )
    mu_theta[t] <- delta[t] + mu_theta[t-1]
  }

  for (tt in 1:T) {
    Sigma_theta[tt, tt] <- 1
    for (ttt in 1:(tt-1)) {
      Sigma_theta[tt, ttt] ~ dunif(-1, 1)
    }
  }
}

```

```

        Sigma_theta[ttt, tt] <- Sigma_theta[tt, ttt]
    }
}

for (t in 1:T) {
    for (n in 1:N) {
        for (i in 1:I) {
            log_lik[n, i, t] <- logdensity.bern(X[n, i, t], p[n, i, t])

            resstat[n, i, t] <- pow(X[n, i, t] - p[n, i, t], 2) / (p[n, i, t] * (1 -
                p[n, i, t]))
            X_rep[n, i, t] ~ dbern(p[n, i, t])
            resstat_rep[n, i, t] <- pow(X_rep[n, i, t] - p[n, i, t], 2) / (p[n, i, t]
                * (1 - p[n, i, t]))
        }
    }
}
resstat_sum <- sum(resstat[1:N, 1:I, 1:T])
resstat_rep_sum <- sum(resstat_rep[1:N, 1:I, 1:T])
ppp <- step(resstat_rep_sum - resstat_sum)
}

", file = modfile)

params <- c("alpha", "g", "s", "theta", "lambda0", "lambda", "mu_theta", "Sigma_theta", "
delta", "log_lik", "ppp", "X_rep", "resstat_sum", "resstat_rep_sum")

inits <- function(){
list(
    g = matrix(runif(I*T, 0, 0.5), nrow = I, ncol = T),
    s = matrix(runif(I*T, 0, 0.5), nrow = I, ncol = T),
    lambda0 = rnorm(K, 0, 4),
    lambda = abs(rnorm(K, 0, 4))
)
}

n_chains <- 5
n_iter <- 40000
n_burnin <- 15000
n_thin <- 4

res_mcmc_lhodina <- jags(
    data = data,
    inits = inits,
    parameters.to.save = params,
    model.file = modfile,
    n.chains = n_chains,
    n.iter = n_iter,
    n.burnin = n_burnin,
    n.thin = n_thin,
    parallel = TRUE,
    n.cores = n_chains
)

# Rhats over 1.05
Rhats <- data.frame(rownames = rownames(res_mcmc_lhodina$summary), Rhat = res_mcmc_lhodina
$summary[, "Rhat"])
Rhats_over <- data.frame(Rhat = Rhats[!is.na(Rhats$Rhat) & Rhats$Rhat > 1.05, "Rhat"])
rownames(Rhats_over) <- Rhats[!is.na(Rhats$Rhat) & Rhats$Rhat > 1.05, "rownames"]

```

Rhats_over

```
alpha_indices <- grep("alpha\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
ipar_indices <- grep("[gs]\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
kpar_indices <- grep("(lambda0|lambda)\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
theta_indices <- grep("^theta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
delta_indices <- grep("delta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
mu_theta_indices <- grep("mu_theta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))
Sigma_theta_indices <- grep("Sigma_theta\\\[", rownames(res_mcmc_lhodina$summary))

LHODINA_MCMC <- array(res_mcmc_lhodina$summary[alpha_indices, "mean"], dim = c(N, K, T))
alpha_mcmc_lhodina <- array(res_mcmc_lhodina$summary[alpha_indices, "50%"], dim = c(N, K,
T))
ipar_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[ipar_indices, "mean"], nrow = I,
ncol = 2*T)
ipar_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[ipar_indices, "sd"], nrow = I,
ncol = 2*T)
ipar_mcmc_lhodina <- cbind(ipar_mcmc_lhodina_mean[,1], ipar_mcmc_lhodina_sd[,1], ipar_mcmc_
_lhodina_mean[,2], ipar_mcmc_lhodina_sd[,2], ipar_mcmc_lhodina_mean[,3], ipar_mcmc_
_lhodina_sd[,3], ipar_mcmc_lhodina_mean[,4], ipar_mcmc_lhodina_sd[,4], ipar_mcmc_
_lhodina_mean[,5], ipar_mcmc_lhodina_sd[,5], ipar_mcmc_lhodina_mean[,6], ipar_mcmc_
_lhodina_sd[,6])
colnames(ipar_mcmc_lhodina) <- c("guessing T1", "SD", "guessing T2", "SD", "guessing T3",
"SD", "slipping T1", "SD", "slipping T2", "SD", "slipping T3", "SD")
rownames(ipar_mcmc_lhodina) <- c(paste0("Q", 1:I))
kpar_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[kpar_indices, "mean"], nrow = K,
ncol = 2)
kpar_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[kpar_indices, "sd"], nrow = K,
ncol = 2)
kpar_mcmc_lhodina <- cbind(kpar_mcmc_lhodina_mean[,1], kpar_mcmc_lhodina_sd[,1], kpar_mcmc_
_lhodina_mean[,2], kpar_mcmc_lhodina_sd[,2])
colnames(kpar_mcmc_lhodina) <- c("lambda0", "SD0", "lambda", "SD")
rownames(kpar_mcmc_lhodina) <- c(paste0("A", 1:K))
theta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[theta_indices, "mean"], nrow =
N, ncol = T)
theta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[theta_indices, "sd"], nrow = N,
ncol = T)
theta_mcmc_lhodina <- cbind(theta_mcmc_lhodina_mean[,1], theta_mcmc_lhodina_sd[,1], theta_
mcmc_lhodina_mean[,2], theta_mcmc_lhodina_sd[,2], theta_mcmc_lhodina_mean[,3], theta_
mcmc_lhodina_sd[,3])
colnames(theta_mcmc_lhodina) <- c("T1", "SD1", "T2", "SD2", "T3", "SD3")
delta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[delta_indices, "mean"], nrow =
T, ncol = 1)
delta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[delta_indices, "sd"], nrow = T,
ncol = 1)
delta_mcmc_lhodina <- cbind(delta_mcmc_lhodina_mean, delta_mcmc_lhodina_sd)
colnames(delta_mcmc_lhodina) <- c("delta", "SD")
rownames(delta_mcmc_lhodina) <- c(paste0("T", 1:T))
mu_theta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[mu_theta_indices, "mean"],
nrow = T, ncol = 1)
mu_theta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[mu_theta_indices, "sd"], nrow
= T, ncol = 1)
mu_theta_mcmc_lhodina <- cbind(mu_theta_mcmc_lhodina_mean, mu_theta_mcmc_lhodina_sd)
colnames(mu_theta_mcmc_lhodina) <- c("mu_theta", "SD")
rownames(mu_theta_mcmc_lhodina) <- c(paste0("T", 1:T))
Sigma_theta_mcmc_lhodina_mean <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[Sigma_theta_indices, "mean"],
nrow = T, ncol = T)
```

```

Sigma_theta_mcmc_lhodina_sd <- matrix(res_mcmc_lhodina$summary[Sigma_theta_indices, "sd"],  

                                         nrow = T, ncol = T)

sumcorr <- rowSums(X[, , 1])
for (t in 2:T) {
  sumcorr <- cbind(sumcorr, rowSums(X[, , t]))
}
i_theta <- cbind(theta_mcmc_lhodina_mean, sumcorr)
colnames(i_theta) <- c(paste0("theta T", 1:T), paste0("sum T", 1:T))

log_lik_array <- res_mcmc_lhodina$sims.list$log_lik
log_lik_mat <- matrix(0, nrow = dim(log_lik_array)[1], ncol = N*I*T)
for (m in 1:dim(log_lik_array)[1]) {
  log_lik_mat[m, ] <- unlist(log_lik_array[m, , ])
}

waic_mcmc_lhodina <- waic(log_lik_mat)
ppp_mcmc_lhodina <- pp.check(res_mcmc_lhodina, observed = "resstat_sum", simulated = "  

  resstat_rep_sum")
waic_mcmc_lhodina
ppp_mcmc_lhodina

pat_table <- matrix(0, nrow = N, ncol = T)
for (t in 1:T) {
  pat_table[, t] <- apply(alpha_mcmc_lhodina[, , t], 1, function(x) {  

    paste0(x[1], x[2], x[3])
  })
}
t1_pat <- c("000", "100", "010", "001", "110", "101", "011", "111", pat_table[complete_
  indices, 1])
t2_pat <- c("000", "100", "010", "001", "110", "101", "011", "111", pat_table[complete_
  indices, 2])
t3_pat <- c("000", "100", "010", "001", "110", "101", "011", "111", pat_table[complete_
  indices, 3])

xtable_12 <- table(t1_pat, t2_pat)
diag(xtable_12) <- diag(xtable_12) - 1
xtable_12 <- cbind(xtable_12, table(t1_pat) - 1)
xtable_12 <- rbind(xtable_12, colSums(xtable_12))
colnames(xtable_12) <- c(colnames(xtable_12)[1:8], "SUM1")
rownames(xtable_12) <- c(rownames(xtable_12)[1:8], "SUM2")

xtable_13 <- table(t1_pat, t3_pat)
diag(xtable_13) <- diag(xtable_13) - 1
xtable_13 <- cbind(xtable_13, table(t1_pat) - 1)
xtable_13 <- rbind(xtable_13, colSums(xtable_13))
colnames(xtable_13) <- c(colnames(xtable_13)[1:8], "SUM1")
rownames(xtable_13) <- c(rownames(xtable_13)[1:8], "SUM3")

xtable_23 <- table(t2_pat, t3_pat)
diag(xtable_23) <- diag(xtable_23) - 1
xtable_23 <- cbind(xtable_23, table(t2_pat) - 1)
xtable_23 <- rbind(xtable_23, colSums(xtable_23))
colnames(xtable_23) <- c(colnames(xtable_23)[1:8], "SUM2")
rownames(xtable_23) <- c(rownames(xtable_23)[1:8], "SUM3")

# -----
# output

```

```
#  
MCMCtrace(res_mcmc_lhodina, params = c("g", "s", "lambda0", "lambda", "theta", "mu_theta",  
"Sigma_theta", "delta"), filename = paste0("MCMCtrace_lhodina_t", T, ".pdf"))  
  
# write mastery probability  
for (t in 1:T) {  
  write.csv(LHODINA_MCMC[,,t], paste0("prob_T", T, "_", t, ".csv"), quote = FALSE)  
}  
# write fullcsv  
for (t in 1:T) {  
  write.csv(datafull[,,t], paste0("full_T", T, "_", t, ".csv"), quote = FALSE)  
}  
  
# save RData  
save(list = ls(), file = paste0("t", T, ".RData"))
```

謝　　辞

本研究の遂行にあたり、多くの方からご支援とご指導をいただきました。研究にご協力いただきました学習塾の教室長および副教室長ならびに講師の皆様方には、テスト実施の度に答案用紙や実施状況の管理をいただきましたことを深く御礼申し上げます。

著者の指導教員である筑波大学人間系心理学域助教の山口一大先生には、研究構想から執筆まで始終ご指導いただきました。山口先生には、研究構想当初には研究の進め方もわからず認知診断モデルについても全くの無知であった私を、一つの実践研究ができるまでご指導いただいたことに心より感謝しております。

東京大学大学院教育学研究科の佐宗駿氏にはアトリビュートとテスト項目の作成にあたり、全体の内容から細かな表現までご意見をいただきました。同時に、曖昧であった研究目的を考える機会を与えていただいたことに深く感謝を申し上げます。

また、本研究に快く参加していただきました学習塾の生徒の皆さんにも、この場を借りて感謝申し上げます。本当にありがとうございました。

最後になりましたが、これまでの私の人生を見守り、支えてくれた家族に感謝の意を表します。