平成31年　電磁気学II

大山主朗

平成31年　電磁気学II　前期中間試験

1　以下に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率 $\varepsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

(b) 真空の透磁率 $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$

(c) 電子の電荷 $e : -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

(d) 電子の静止質量 $m : 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

2　xy 直交座標系において，同量異符号の点磁荷 $\pm m$ が距離 l に固定された磁気双極子が存在する．このとき以下の問いに答えよ．

(a) 点Aに存在する磁荷 $-m$ が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に作る磁界 H_1 を求めよ．また，H_1 を x 方向成分 H_{x1} と y 方向成分 H_{y1} に分解せよ．

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{-m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_1| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_{x1}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\ [\mathrm{A/m}]\quad \text{x 軸上方向}$$

$$|\boldsymbol{H}_{y1}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}y_0\,[\mathrm{A/m}]\quad \text{y 軸下方向}$$

(b) 点Bに存在する磁荷 $+m$ が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に作る磁界 H_2 を求めよ．また，H_2 を x 方向成分 H_{x2} と y 方向成分 H_{y2} に分解せよ．

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0-\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_2| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_{x2}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0-\frac{l}{2}\right)\ [\mathrm{A/m}]\quad \text{x 軸正方向}$$

$$|\boldsymbol{H}_{y2}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}y_0\,[\mathrm{A/m}]\quad \text{y 軸正方向}$$

(c) 点 P での磁界 H の x 方向成分 H_x と y 方向成分 H_y をそれぞれ求めよ．

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}_x| &= |\boldsymbol{H}_{x1}| + |\boldsymbol{H}_{x2}| \\
&= \frac{m}{4\pi\mu_0}\left\{\frac{1}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0-\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\right\} [\mathrm{A/m}] \\
|\boldsymbol{H}_y| &= |\boldsymbol{H}_{y1}| + |\boldsymbol{H}_{y2}| \\
&= \frac{m}{4\pi\mu_0} y_0 \left\{\frac{1}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\right\} [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

(d) 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M}$ の大きさと方向を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= m\boldsymbol{l} \\
&= ml\boldsymbol{i}\,[\mathrm{Wb\cdot m}] \\
|\boldsymbol{M}| &= ml\,[\mathrm{Wb\cdot m}] \quad \text{x 軸正方向}
\end{aligned}
$$

(e) 点 P が原点 O より十分遠方にあると仮定すると，$\sqrt{(x_0-l/2)^2+y_0^2} \simeq \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ 及び $\sqrt{(x_0+l/2)^2+y_0^2} \simeq \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ と近似できる．このことを用いて (c) にて得た磁界 H_x 及び H_y を簡略化せよ．

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}_x| &\simeq \frac{ml}{4\pi\mu_0\left(x_0^2+y_0^2\right)^{3/2}} [\mathrm{A/m}] \quad \text{x 軸左方向} \\
|\boldsymbol{H}_y| &\simeq 0\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

(f) y 方向に一様な磁界 $\boldsymbol{H}_0$ が存在するとき，磁気双極子にはたらくトルク T を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{M}H_0\sin\theta \\
&= ml\boldsymbol{i}H_0\sin\frac{\pi}{2} \\
&= mlH_0\boldsymbol{i} \\
|\boldsymbol{T}| &= mlH_0\,[\mathrm{Wb\cdot m}]
\end{aligned}
$$

3 磁化されていない強磁性体に磁界 H を外部から印加し，強磁性体内部での磁束密度 B を観測すると，図 3 に示すような結果が得られた．このとき，図中の行程 1: 点 O $\rightarrow$ 点 P_1，行程 2: 点 P_1 $\rightarrow$ 点 P_2，行程 3: 点 P_2 $\rightarrow$ 点 P_3，行程 4: 点 P_3 $\rightarrow$ 点 P4，行程 5: 点 P4 $\rightarrow$ 点 P_5， 行程 6: 点 P_5 $\rightarrow$ 点 P6，行程 7: 点 P_6 $\rightarrow$ 点 P1 の 7 つの行程に着目して，測定結果を説明せよ．

4 強磁性体，弱磁性体，常磁性体，反磁性体の 4 つの磁性体の性質を，「比透磁率 μ_s」と「磁化率 χ」という 2 つの語句を両方用いて説明せよ．

強磁性体は磁化率 χ が 0 よりかなり大きく，透磁率 μ_s が 1 よりかなり大きい磁化されやすい磁性体を指す．そのため，印加した磁界と同じ方向に磁化され，その大きさも大きい．

弱磁性体は磁化率 χ が 0 より大きく，透磁率 μ_s より小さい磁性体である．

常磁性体は磁化率 χ が 0 より大きく，透磁率 μ_s は 1 未満の磁性体を指す．そのため，印加した磁界と同じ方向に磁化され，その大きさは大きくない．

反磁性体は磁化率 χ が 0 より小さく，透磁率 μ_s が 1 より小さい磁性体を指す．そのため，印加した磁界と逆方向に磁化され，その大きさは小さい．

反磁性体は磁化率 χ が 0 より小さく，透磁率 μ_s が 1 より小さい磁性体を指す．そのため，印加した磁界と逆方向に磁化され，その大きさは小さい．

5　xyz 直交座標系の xy 平面内に原点 O を中心する半径 a の円周状に電流 I が流れている．このとき，以下の場所に発生する磁界 H とその方向を求めよ．

(a) 原点 O

$$\boldsymbol{H} = \oint d\boldsymbol{H}$$

円周上に線素ベクトル $d\boldsymbol{l}$ をとる．

ここで，円周上のどの点でも $d\boldsymbol{H}$ の向きが同じなので，

$$\begin{aligned} H &= \oint dH \\ &= \oint \frac{I \sin\theta}{4\pi r^2} dl \\ &= \frac{I \sin\frac{\pi}{2}}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{I}{2r} \\ &= \frac{I}{2a}\,[\mathrm{A/m}] \qquad \text{上向き} \end{aligned}$$

(b) $(x, y, z) = (0, 0, h)$ となる z 軸上の点 P

$y > 0$ に円周上の微小磁界 $d\boldsymbol{H}_1$を

$y < 0$ に円周上の微小磁界 $d\boldsymbol{H}_2$を考える.

またそれぞれの線素ベクトルを $d\boldsymbol{l}$ ととる.

ここで, $d\boldsymbol{H}_1$と $d\boldsymbol{H}_2$の外積より, 2 つの磁界は打ち消される方向となっているため,

$d\boldsymbol{H}_1$と $d\boldsymbol{H}_2$を合成した磁界を $d\boldsymbol{H}$ とする. ($\phi : d\boldsymbol{H}_2$と $d\boldsymbol{H}$ のなす角)

$$
\begin{aligned}
|d\boldsymbol{H}_1| = |d\boldsymbol{H}_2| &= \frac{Idl}{4\pi r^2}\sin\theta \\
&= \frac{Idl}{4\pi(a^2+h^2)} \\
d\boldsymbol{H} &= 2d\boldsymbol{H}_1\cos\phi \\
&= 2d\boldsymbol{H}_1\frac{a}{r} \\
&= 2d\boldsymbol{H}_1\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
|d\boldsymbol{H}| &= 2|d\boldsymbol{H}_1|\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
&= \frac{aIdl}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \\
\boldsymbol{H} &= \oint d\boldsymbol{H}_1 \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{1}{2}\oint|d\boldsymbol{H}| \\
&= \frac{1}{2}\oint\frac{aIdl}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{aI}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\cdot 2\pi a \\
&= \frac{a^2I}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\ [\mathrm{A/m}] \quad \text{上向き}
\end{aligned}
$$

6 xyz **直交座標系の** y **軸に沿って点** A **から点** B **まで有限長直線電流** I **が流れている．このとき，** x **軸上の点** $\mathrm{P}(a,0,0)$ **に発生する磁界** H **とその方向を求めよ．また，有限長直線電流** I **が無限長直線電流** I **になった場合，点** P **に発生する磁界** H **を求めよ．**

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とする

この時$d\boldsymbol{l} = dy\boldsymbol{i}, \boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$

$$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & dy & 0 \\ a & -y & 0 \end{vmatrix} = dy \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \\ a & 0 \end{vmatrix} = -ady\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \int_C d\boldsymbol{H} \\ &= -\int_C \frac{aI\boldsymbol{k}}{4\pi(a^2+y^2)^{3/2}} dy \\ &= -\int_{c_1}^{c_2} \frac{aI\boldsymbol{k}}{4\pi(a^2+y^2)^{3/2}} dy \end{aligned}$$

$h = a\tan\theta$と置換する．

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} \quad \therefore dh = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$$

また積分範囲は$c_1 \to c_2$から$\alpha - \frac{\pi}{2} \to \beta - \frac{\pi}{2}$に変更される．

$$\begin{aligned} &= -\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 I}{4\pi a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \boldsymbol{j} \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi}\boldsymbol{k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^{3/2}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi a} \left[\sin\theta\right]_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{k} \\ &= -\frac{I}{4\pi a} \left\{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \boldsymbol{k} \\ &= -\frac{I}{4\pi a} \left(-\cos\beta + \cos\alpha\right) \boldsymbol{k} \\ &= -\frac{I}{4\pi a} \left(\cos\alpha - \cos\beta\right) \boldsymbol{k}\, [\mathrm{A/m}] \end{aligned}$$

直線電流が無限長である場合は

$\alpha = 0$,$\beta = \pi$であるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= -\frac{I}{4\pi a} \cdot 2\boldsymbol{k} \\ &= -\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{k}\, [\mathrm{A/m}] \end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{I}{2\pi a}\, [\mathrm{A/m}] \quad \text{紙を突き刺す方向}$$