

# 平成30年 電磁気学I

大山主朗

## 平成30年 電磁気学II 第1回小テスト

1 以下の (a) 及び (c) に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率  $\epsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

(b) 真空の透磁率  $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$

(c) 電子の電荷  $e : -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

2 一辺の長さ  $a$  の正方形がある．点 A に  $-2q[\text{C}]$ ，点 B に  $+1q[\text{C}]$ ，点 C に  $-4q[\text{C}]$ ，点 D に  $+3q[\text{C}]$ ，が点 O に  $-q[\text{C}]$  の点電荷が存在するとき，点 O にある電荷にはたらく力  $F$  の大きさを求めよ．ただし， $q > 0$  とする．

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2q(-q)}{\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left\{ -\frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{a}{2}\mathbf{j} \right\} [\text{N}]$$

$$\mathbf{F}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(-q)}{\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left\{ -\frac{a}{2}\mathbf{i} - \frac{a}{2}\mathbf{j} \right\} [\text{N}]$$

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-4q(-q)}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left\{ \frac{a}{2}\mathbf{i} - \frac{a}{2}\mathbf{j} \right\} [\text{N}]$$

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q(-q)}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left\{ \frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{a}{2}\mathbf{j} \right\} [\text{N}]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left\{ \left(-a + \frac{a}{2} + 2a - \frac{3}{2}a\right)\mathbf{i} + \left(a + \frac{a}{2} - 2a - \frac{3}{2}a\right)\mathbf{j} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(\frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} (-2a\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8q^2}{a^3} (-2a\mathbf{j})$$

$$= -\frac{4q^2}{\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{j} [\text{N}]$$

$$|\mathbf{F}| = \frac{4q^2}{\pi\epsilon_0 a^2} [\text{N}] \quad \text{y 軸下向き}$$

- 3 一辺の長さ  $a$  の正方形がある．点 B に  $+m[\text{Wb}]$ ，点 C に  $-3m[\text{Wb}]$ ，点 D に  $+2m[\text{Wb}]$ ，点 O に  $+m[\text{Wb}]$  の点磁荷が存在するとき，点 A にできる磁界  $H$  の大きさを求めよ．ただし， $m > 0$  とする．

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_O &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left\{-\frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{a}{2}\mathbf{j}\right\} \\
 &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{\left(\frac{a^2}{2}\right)^{3/2}} \left\{-\frac{a}{2}\mathbf{i} + \frac{a}{2}\mathbf{j}\right\} \\
 &= \frac{m\sqrt{2}}{4\pi\mu_0 a^2} \{-\mathbf{i} + \mathbf{j}\} [\text{A/m}] \\
 \mathbf{H}_B &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{(a^2)^{3/2}} a\mathbf{j} \\
 &= \frac{m}{4\pi\mu_0 a^2} \mathbf{j} [\text{A/m}] \\
 \mathbf{H}_C &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{-3m}{((-a)^2 + a^2)^{3/2}} \{-a\mathbf{i} + a\mathbf{j}\} \\
 &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{-3m}{2\sqrt{2}a^3} \{-a\mathbf{i} + a\mathbf{j}\} \\
 &= \frac{-3m}{8\sqrt{2}\pi\mu_0 a^2} (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) [\text{A/m}] \\
 \mathbf{H}_D &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{2m}{((-a)^2)^{3/2}} (-a\mathbf{i}) \\
 &= -\frac{m}{2\pi\mu_0 a^2} \mathbf{i} [\text{A/m}] \\
 \mathbf{H} &= \mathbf{H}_O + \mathbf{H}_B + \mathbf{H}_C + \mathbf{H}_D \\
 &= \frac{m}{2\pi\mu_0 a^2} \left\{ \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4\sqrt{2}} - 1 \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \right) \mathbf{j} \right\} \\
 &= \frac{m}{2\pi\mu_0 a^2} \left\{ \left( \frac{-8 - \sqrt{2}}{8} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{4 + \sqrt{2}}{8} \right) \mathbf{j} \right\} \\
 &= \frac{m}{16\pi\mu_0 a^2} \left\{ -\left( 8 + \sqrt{2} \right) \mathbf{i} + \left( 4 + \sqrt{2} \right) \mathbf{j} \right\} \\
 |\mathbf{H}| &= \frac{m}{16\pi\mu_0 a^2} \sqrt{(8 + \sqrt{2})^2 + (4 + \sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{m}{16\pi\mu_0 a^2} \sqrt{84 + 24\sqrt{2}} \\
 &= \frac{m}{8\pi\mu_0 a^2} \sqrt{21 + 6\sqrt{2}} [\text{A/m}] \quad \text{左斜め上向き}
 \end{aligned}$$

- 4 以下の (a) から (c) に示すような電荷分布が存在するとき，それぞれの電荷分布が周囲につくる電界  $E$  をガウスの法則を用いて求めよ．

(a)  $q [\text{C}]$  の点電荷

$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{E}_n dS &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i \\
 E_n &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} [\text{V/m}]
 \end{aligned}$$

(b) 線電荷密度  $\lambda$  [C/m] で分布する無限長直線電荷

$$\begin{aligned}\oint_S E_n dS &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i \\ E_n &= \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 r l} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ [V/m]}\end{aligned}$$

(c) 面電荷密度  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] の無限長面電荷

$$\begin{aligned}\oint_S E_n dS &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i \\ E_n &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 S} \\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ [V/m]}\end{aligned}$$

5 導体板の面積  $S$ ，導体板の平行平板キャパシタの内部が比誘電率  $\varepsilon_r$  の誘電体で満たされているとき，この平行平板キャパシタの静電容量  $C$  が  $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$  で求められる理由を説明せよ。

電極に  $\pm Q$  の電荷を与える．次に，電極間に発生する電界  $E$  を求め，電極間の電圧  $V$  を求める．それらを， $C = \frac{Q}{V}$  に代入することにより，与式が導出される．

$$\begin{aligned}C &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{Q}{Ed} \\ &= \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \text{ [F]}\end{aligned}$$

6 真空中に単磁荷  $m$  が存在する．ただし  $m < 0$  とする．このとき以下の問いに答えよ．

(a) 点磁荷  $m$  が，距離  $r$  の位置に作る磁界  $H$  を求めよ．

$$H = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^2} \text{ [A/m]}$$

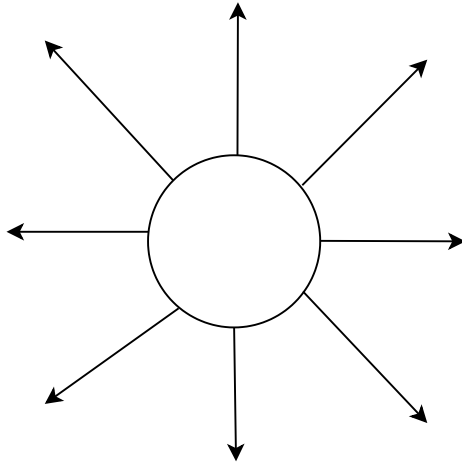
(b) 点磁荷  $m$  が作る磁界の様子を磁力線を用いて図示せよ．

(c) 点磁荷  $m$  から距離  $r$  の位置における磁束密度  $B$  を求めよ．

$$B = \mu_0 H = \frac{m}{4\pi r^2} \text{ [T]}$$

(d) 点磁荷  $m$  から距離  $r$  の位置を通過する磁束  $\Phi$  を磁束密度  $B$  より求めよ．

$$\Phi = BS = m \text{ [Wb/m]}$$



7  $xy$  直交座標系において，同量異符号の点磁荷  $\pm m$  が距離  $l$  に固定された磁気双極子が存在する．このとき以下の問いに答えよ．ただし， $x$  方向の基準ベクトルを  $i$ ， $y$  方向の基準ベクトルを  $j$  とする

(a) 点 A に存在する磁荷  $-m$  が点 P( $x_0, y_0$ ) に作る磁界  $\mathbf{H}_1$  を求めよ．

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{-m}{\left(\left(x_0 + \frac{l}{2}\right)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \left\{ \left(x_0 + \frac{l}{2}\right) \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} \right\} [\text{A/m}]$$

(b) 点 B に存在する磁荷  $+m$  が点 P( $x_0, y_0$ ) に作る磁界  $\mathbf{H}_2$  を求めよ．

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{\left(\left(x_0 - \frac{l}{2}\right)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \left\{ \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} \right\} [\text{A/m}]$$

(c) 点 P での磁界  $\mathbf{H}$  を求めよ．

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \\ &= \frac{m}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{-1}{\left(\left(x_0 + \frac{l}{2}\right)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \left\{ \left(x_0 + \frac{l}{2}\right) \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} \right\} + \frac{1}{\left(\left(x_0 - \frac{l}{2}\right)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \left\{ \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} \right\} \right] [\text{A/m}] \end{aligned}$$

(d) 磁気双極子モーメント  $\mathbf{M}$  を求めよ．

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= ml \\ &= ml \mathbf{i} [\text{Wb} \cdot \text{m}] \end{aligned}$$

(e) 点 P が原点 O より十分遠方にあると仮定すると， $\sqrt{(x_0 - l/2)^2 + y_0^2} \simeq \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  及び  $\sqrt{(x_0 + l/2)^2 + y_0^2} \simeq \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  と近似できる．このことを用いて (c) にて得た磁界  $\mathbf{H}$  を簡略化せよ．

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\simeq -\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{ml}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \mathbf{i} [\text{A/m}] \\ &\left( \simeq -\frac{\mathbf{M}}{4\pi\mu_0 r^3} [\text{A/m}] \right) \end{aligned}$$

(f)  $y$  方向に一樣な磁界  $H_0$  が存在するとき、磁気双極子にはたらくトルク  $T$  を求めよ.

$$\begin{aligned} T &= MH_0 \sin \theta \\ &= mli \sin \frac{\pi}{2} \\ &= mli \\ |T| &= ml [\text{Wb} \cdot \text{m}], \text{ x 軸右方向} \end{aligned}$$

## 8 強磁性体，常磁性体，反磁性体の3つの磁性体の性質を，比透磁率と磁化率を用いて説明せよ．

強磁性体は磁化率が0よりかなり大きく，透磁率が1よりかなり大きい磁性体を指す．そのため，磁界と同じ方向に磁化され，その大きさも大きい．

常磁性体は磁化率が0より大きく，透磁率は1未満の磁性体を指す．そのため，磁界と同じ方向に磁化され，その大きさは大きくない．

反磁性体は磁化率が0より小さく，透磁率が1より小さい磁性体を指す．そのため，磁界と逆方向に磁化され，その大きさは小さい．

## 平成 30 年 電磁気学 II 第 2 回小テスト

1 以下の (a) 及び (c) に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率  $\varepsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

(b) 真空の透磁率  $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$

(c) 電子の電荷  $e : -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

2 磁化されていない強磁性体に磁界  $H$  を外部から印加し，強磁性体内部での磁束密度  $B$  を観測すると，図 3 に示すような結果が得られた．このとき，図中の行程 1: 点  $O \rightarrow$  点  $P_1$ ，行程 2: 点  $P_1 \rightarrow$  点  $P_2$ ，行程 3: 点  $P_2 \rightarrow$  点  $P_3$ ，行程 4: 点  $P_3 \rightarrow$  点  $P_4$ ，行程 5: 点  $P_4 \rightarrow$  点  $P_5$ ，行程 6: 点  $P_5 \rightarrow$  点  $P_6$ ，行程 7: 点  $P_6 \rightarrow$  点  $P_1$  の 7 つの行程に着目して，測定結果を説明せよ．

3  $xyz$  直角座標空間において， $y$  軸上の点  $P(0, h, 0)$  を中心とし， $y = h$  の平面内に半径  $a$  の円形ループ電流  $I$  が流れている．このとき，以下の各問いに答えよ．

(a) 点  $P$  に発生する磁界  $H$  を求めよ．

(b) 点  $O$  に発生する磁界  $H$  を求めよ．

(c) (c) で得られた解答  $H$  を用いて  $\int_{-\infty}^{\infty} H dh$  を計算せよ．

4  $xyz$  直角座標空間において， $y$  軸上の点  $A(0, c_1, 0)$  から点  $B(0, c_2, 0)$  まで  $y$  軸に沿って直線状に流れる電流  $I$  がある．このとき， $x$  軸上の点  $P(a, 0, 0)$  に発生する磁界  $H$  を求めよ．また，電流  $I$  の始点  $A$  と終点  $B$  の座標がそれぞれ  $(0, -\infty, 0)$ ， $(0, \infty, 0)$  となった場合の点  $P$  に発生する磁界  $H$  を求めよ．

5 半径  $a$  の円  $O$  に概説する正多角形の辺上に電流が流れているとき，以下の問に答えよ．

(a) 正三角形の辺上を流れる電流  $I$  が内接円の中心  $O$  につくる磁界  $H$  を求めよ．

(b) 一般的な正  $n$  角形 (ただし， $n$  は 3 以上の自然数) の辺上を流れる電流  $I$  が内接円の中心  $O$  につくる磁界  $H$  を求めよ．

(c) (b) で求めた正  $n$  角形が，その内接円の中心  $O$  につくる磁界  $H$  を用いて， $n \rightarrow \infty$  の場合の極限值を求めよ．

6 縦  $2a$ ，横  $4a$  の長さの辺を有した長方形の回路があり，交流電源  $E_1, E_2$  とコイル  $L$  およびコンデンサ  $C$  が接続されている．また，回路の長辺の中心間は抵抗  $R$  を介して接続されている．このとき，以下の問に答えよ．ただし，電源，抵抗，コイル，コンデンサなどの回路素子の寸法は無視できるものとする．

(a) この回路の各枝路に流れる電流を求めよ．

(b) 点  $P$  に発生する磁界  $H$  を求めよ．

平成 30 年 電磁気学 II 前期末試験