平成28年　電磁気学II　第1回小テスト

大山主朗

1　以下の(a)及び(c)に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率 $\varepsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

(b) 真空の透磁率 $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$

(c) 電子の電荷 $e : -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

2　xyz 直交座標系における x, y, z 方向の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする。$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$ なる二つのベクトルがある．このとき以下の各式を計算せよ．

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}$

(b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k}$

(c) $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

(d) $\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトル $a_e = \dfrac{a}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

(e) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

(f) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

(g) $\dfrac{1}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{a^2} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \dfrac{1}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$

(h) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$

(i) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$

(j) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (a_z b_y - a_y b_z)\boldsymbol{i} + (a_x b_z - a_z b_x)\boldsymbol{j} + (a_y b_x - a_x b_y)\boldsymbol{k}$

(k) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の間の角を θ としたときの $\sin\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \sqrt{\dfrac{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$

(l) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の間の角を θ としたときの $\cos\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}\right)$

3　直線状電流 I が流れている．このとき，電流の周囲に発生する磁束密度 B を求めよ。特に B の大きさと方向を明示せよ．

水平方向を x 軸，鉛直上向きを y 軸，手前側に z 軸をとる

今, 直線状電流 (上端の y 座標 : y_b, 下端の y 座標 : y_a) から $x = a$ 離れた地点の磁界 H を考える

ここでx 軸と y_bを通る $\boldsymbol{r}$ がなす角を$\beta - \dfrac{\pi}{2}$, x 軸と y_aを通る $\boldsymbol{r}$ がなす角を $-\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ とする

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を x, y, z 方向の基底ベクトルとする

$$d\boldsymbol{l} = dy\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}, \quad r = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & dy & 0 \\ a & -y & 0 \end{vmatrix} = dy \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \\ a & 0 \end{vmatrix} = -ady\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{H} = \frac{Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \int_C d\boldsymbol{H} \\ &= -\frac{a\boldsymbol{k}I}{4\pi} \int_{y_a}^{y_b} (a^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dy \end{aligned}$$

$y = a\tan\theta$と置換する．$\therefore dy = \dfrac{a}{\cos\theta}d\theta$,　積分範囲は$\alpha - \dfrac{\pi}{2} \to \beta - \dfrac{\pi}{2}$に変化する

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= -\frac{a\boldsymbol{k}I}{4\pi}\frac{1}{a^3}\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2\theta)^{-\frac{3}{2}} \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= -\frac{\boldsymbol{k}I}{4\pi a}\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= -\frac{\boldsymbol{k}I}{4\pi a}\left\{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{\boldsymbol{k}I}{4\pi a}(-\cos\beta + \cos\alpha) \\ &= \frac{\boldsymbol{k}I}{4\pi a}(\cos\alpha - \cos\beta) \end{aligned}$$

ここで線電流の長さが無限より, $\alpha = 0, \beta = \infty$ であるため

$$H = \frac{I}{2\pi a}\,[\mathrm{A/m}],\ \text{z 軸逆向き.}$$

4　一様な磁束密度 B の中に長さ s の直線電流 I が流れている．磁束密度 B と電流 I のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ のとき，電流 I にはたらく力 F を求めよ．

$$\begin{aligned} |d\boldsymbol{F}| &= |Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}| \\ &= IB\sin\frac{\pi}{2} \\ &= IB \\ |\boldsymbol{F}| &= \int_0^s |d\boldsymbol{F}| \\ &= sIB\,[\mathrm{N}] \end{aligned}$$

5　一様な磁束密度 B の中に長さ s の直線電流 I が流れている．磁束密度 B と電流 I のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ のとき，電流 I にはたらく力 F を求めよ．

$$
\begin{aligned}
|d\boldsymbol{F}| &= |Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}| \\
&= IB\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{IB}{2} \\
|\boldsymbol{F}| &= \int_0^s |d\boldsymbol{F}| \\
&= \frac{sIB}{2}\,[\mathrm{N}]
\end{aligned}
$$

6　一様な磁束密度 B の中に質量 m，電荷 q の電荷粒子が B に垂直に初速度 v_0 で飛び込んで円運動をする．このとき以下の角値を求めよ．

(a) 電荷粒子にはたらくローレンツ力 F

$$
\begin{aligned}
F &= qv_0B\sin\theta \\
&= qv_0B\,[\mathrm{N}]
\end{aligned}
$$

(b) 電荷粒子にはたらく遠心力 F

$$
F = \frac{mv_0^2}{r}\,[\mathrm{N}]
$$

(c) 円運動の回転半径 r

$$
\begin{aligned}
qv_0B &= \frac{mv_0^2}{r} \\
r &= \frac{mv_0}{qB}\,[\mathrm{m}]
\end{aligned}
$$

(d) 円運動の周期 T

$$
T = \frac{2\pi r}{v_0}\,[\mathrm{s}]
$$

(e) 円運動の角速度 ω

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{T} \\
&= \frac{v_0}{r}\,[\mathrm{rad/s}]
\end{aligned}
$$