令和 2 年　電磁気学 II

大山主朗

令和 2 年　電磁気学 II　第 1 回小テスト

1　以下の (a) 及び (d) に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率 $\varepsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

(b) 真空の透磁率 $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$

(c) 電子の電荷 $e : -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

(d) 電子の静止質量 $m : 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

2　$AB = BC = a$，$\angle B = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC がある．いま各頂点に点磁荷 m が存在するとき，以下の各問いに答えよ．

(a) 頂点 B に存在する点磁荷にはたらく力 F_B を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{BA} &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m^2}{\left((-a)^2\right)^{3/2}}(-a\boldsymbol{j}) \\
&= -\frac{m^2}{4\pi\mu_0 a^2}\boldsymbol{j}\,[\mathrm{N}] \\
\boldsymbol{F}_{BC} &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m^2}{\left(a^2\right)^{3/2}}(-a\boldsymbol{i}) \\
&= -\frac{m^2}{4\pi\mu_0 a^2}\boldsymbol{i}\,[\mathrm{N}] \\
\boldsymbol{F}_B &= \boldsymbol{F}_{BA} + \boldsymbol{F}_{BC} \\
&= -\frac{m^2}{4\pi\mu_0 a^2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\ [\mathrm{A/m}] \\
|\boldsymbol{F}_B| &= \frac{m^2}{4\pi\mu_0 a^2}\sqrt{2}\,[\mathrm{N}] \quad \text{頂点 B から辺 AB の反対側向き}
\end{aligned}
$$

(b) 頂点 A に存在する点磁荷にはたらく力 F_A を求めよ.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{AB} &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m^2}{(a^2)^{3/2}}\left(a\boldsymbol{j}\right) \\
&= \frac{m^2}{4\pi\mu_0 a^2}\boldsymbol{j}\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{F}_{AC} &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m^2}{((-a)^2+a^2)^{3/2}}\left(-a\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}\right) \\
&= \frac{m^2}{8\sqrt{2}\pi\mu_0 a^2}\left(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\right)\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{F}_A &= \boldsymbol{F}_{AB}+\boldsymbol{F}_{AC} \\
&= \frac{m^2}{4\pi\mu_0 a^2}\left\{-\frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{m^2}{16\pi\mu_0 a^2}\left\{-\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\left(4+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{j}\right\}\,[\mathrm{N}] \\
|\boldsymbol{F}_A| &= \frac{m^2}{16\pi\mu_0 a^2}\sqrt{2+16+8\sqrt{2}+2} \\
&= \frac{m^2}{16\pi\mu_0 a^2}\sqrt{20+8\sqrt{2}} \\
&= \frac{m^2}{8\pi\mu_0 a^2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\,[\mathrm{N}]\quad \text{左斜め上向き}
\end{aligned}$$

(c) 直角三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ.

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2S}{|AB|+|BC|+|AC|} \\
&= \frac{2\cdot\frac{1}{2}a^2}{a+a+a\sqrt{2}} \\
&= \frac{a^2}{2a+a\sqrt{2}} \\
&= \frac{a}{4-2}(2-\sqrt{2}) \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{2}a
\end{aligned}$$

(d) 頂点 A に存在する点磁荷が直角三角形 ABC の内心につくる磁界 H_A を求めよ．

$$\boldsymbol{H}_A = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a-a\right)^2\right)^{3/2}}\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\boldsymbol{i}+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a-a\right)\boldsymbol{j}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right)^{3/2}}\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_A| = \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right)^{3/2}}\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right)^{3/2}}\sqrt{2\left(\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4}\right)-(2-\sqrt{2})+1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right)^{3/2}}\sqrt{2\left(\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2}\right)-(2-\sqrt{2})+1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right)^{3/2}}\sqrt{2-2\sqrt{2}+1-(2-\sqrt{2})+1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right)^{3/2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0 a^2}\frac{m}{2-\sqrt{2}}\ [\mathrm{A/m}]$$

3　xy 直交座標系において，同量異符号の点磁荷 $\pm m$ が距離 l に固定された磁気双極子が存在する．このとき以下の問いに答えよ．

(a) 点 A に存在する磁荷 $-m$ が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に作る磁界 H_1 を求めよ．また，H_1 を x 方向成分 H_{x1} と y 方向成分 H_{y1} に分解せよ．

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{-m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_1| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2}\ [\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_{x1}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\ [\mathrm{A/m}]\quad \text{x 軸上方向}$$

$$|\boldsymbol{H}_{y1}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}y_0\ [\mathrm{A/m}]\quad \text{y 軸下方向}$$

(b) 点 B に存在する磁荷 $+m$ が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に作る磁界 H_2 を求めよ．また，H_2 を x 方向成分 H_{x2} と y 方向成分

H_{y2} に分解せよ．

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0-\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\,[\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_2| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2}\,[\mathrm{A/m}]$$

$$|\boldsymbol{H}_{x2}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0-\frac{l}{2}\right)\,[\mathrm{A/m}]\quad \text{x 軸正方向}$$

$$|\boldsymbol{H}_{y2}| = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}y_0\,[\mathrm{A/m}]\quad \text{y 軸正方向}$$

(c) 点 P での磁界 H の x 方向成分 H_x と y 方向成分 H_y をそれぞれ求めよ．

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{H}_x| &= |\boldsymbol{H}_{x1}|+|\boldsymbol{H}_{x2}|\\ &= \frac{m}{4\pi\mu_0}\left\{\frac{1}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0-\frac{l}{2}\right)-\frac{1}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\right\}\,[\mathrm{A/m}]\\ |\boldsymbol{H}_y| &= |\boldsymbol{H}_{y1}|+|\boldsymbol{H}_{y2}|\\ &= \frac{m}{4\pi\mu_0}y_0\left\{\frac{1}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\right\}\,[\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$

(d) 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M}$ の大きさと方向を求めよ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= m\boldsymbol{l}\\ &= ml\boldsymbol{i}\,[\mathrm{Wb\cdot m}]\\ |\boldsymbol{M}| &= ml\,[\mathrm{Wb\cdot m}]\quad \text{x 軸正方向}\end{aligned}$$

(e) 点 P が原点 O より十分遠方にあると仮定すると，$\sqrt{(x_0-l/2)^2+y_0^2}\simeq\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ 及び $\sqrt{(x_0+l/2)^2+y_0^2}\simeq\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ と近似できる．このことを用いて (c) にて得た磁界 H_x 及び H_y を簡略化せよ．

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{H}_x| &\simeq \frac{ml}{4\pi\mu_0\left(x_0^2+y_0^2\right)^{3/2}}\,[\mathrm{A/m}]\quad \text{x 軸左方向}\\ |\boldsymbol{H}_y| &\simeq 0\,[\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$

(f) y 方向に一様な磁界 $\boldsymbol{H}_0$ が存在するとき，磁気双極子にはたらくトルク T を求めよ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{M}H_0\sin\theta\\ &= ml\boldsymbol{i}H_0\sin\frac{\pi}{2}\\ &= mlH_0\boldsymbol{i}\\ |\boldsymbol{T}| &= mlH_0\,[\mathrm{Wb\cdot m}]\end{aligned}$$

4　磁化されていない強磁性体に磁界 H を外部から印加し，強磁性体内部での磁束密度 B を観測すると，図3に示すような結果が得られた．このとき，図中の行程1: 点 $\mathrm{O} \rightarrow$ 点 P_1，行程 2: 点 $\mathrm{P}_1 \rightarrow$ 点 P_2，行程3: 点 $\mathrm{P}_2 \rightarrow$ 点 P_3，行程4: 点 $\mathrm{P}_3 \rightarrow$ 点 P4，行程5: 点 P4 $\rightarrow$ 点 P_5， 行程6: 点 $\mathrm{P}_5 \rightarrow$ 点 P6，行程7: 点 $\mathrm{P}_6 \rightarrow$ 点 P1 の7つの行程に着目して，測定結果を説明せよ．

5　強磁性体，弱磁性体，常磁性体，反磁性体の4つの磁性体の性質を，「比透磁率 μ_s」と「磁化率 χ」という2つの語句を両方用いて説明せよ．

強磁性体は磁化率 χ が0よりかなり大きく，透磁率 μ_s が1よりかなり大きい磁化されやすい磁性体を指す．そのため，印加した磁界と同じ方向に磁化され，その大きさも大きい．

弱磁性体は磁化率 χ が0より大きく，透磁率 μ_s より小さい磁性体である．

常磁性体は磁化率 χ が0より大きく，透磁率 μ_s は1未満の磁性体を指す．そのため，印加した磁界と同じ方向に磁化され，その大きさは大きくない．

反磁性体は磁化率 χ が0より小さく，透磁率 μ_s が1より小さい磁性体を指す．そのため，印加した磁界と逆方向に磁化され，その大きさは小さい．

令和２年　電磁気学II　第２回小テスト

1　以下の (a) 及び (d) に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率 ε_0 : 8.854×10^{-12} F/m

(b) 真空の透磁率 μ_0 : 1.257×10^{-6} H/m

(c) 電子の電荷 e : -1.602×10^{-19} C

(d) 電子の静止質量 m : 9.109×10^{-31} kg

2　xyz 直角座標空間において，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0, h, 0)$ を中心とし，$y = h$ の平面内に半径 a の円形ループ電流 I が流れている．このとき，以下の各問いに答えよ．

(a) 点 P に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする

$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}$の方向より $d\boldsymbol{H}$ は y 軸左向き

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \oint d\boldsymbol{H} \\
&= \oint \frac{Id\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{r}}{4\pi a^3} \\
&= \frac{I}{4\pi a^3} \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{I} \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{I}{4\pi a^3} \oint r \sin \frac{\pi}{2} dl \\
&= \frac{I}{4\pi a^2} 2\pi a \\
&= \frac{I}{2a}\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H} &= \frac{I}{2a}\boldsymbol{j}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

(b) 点 O に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ.

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする

$z > 0$ に円周上の微小磁界 $d\boldsymbol{H}_1$を

$z < 0$ に円周上の微小磁界 $d\boldsymbol{H}_2$を考える.

またそれぞれの線素ベクトルを $d\boldsymbol{l}$ ととる.

ここで, $d\boldsymbol{H}_1$と $d\boldsymbol{H}_2$の外積より, 2 つの磁界は打ち消される方向となっているため,

$d\boldsymbol{H}_1$と $d\boldsymbol{H}_2$を合成した磁界を $d\boldsymbol{H}$ とする. ($\phi : d\boldsymbol{H}_2$と $d\boldsymbol{H}$ のなす角)

また $d\boldsymbol{H}$ の向きはy 軸左方向である

$$
\begin{aligned}
|d\boldsymbol{H}_1| = |d\boldsymbol{H}_2| &= \frac{Idl}{4\pi r^2}\sin\theta \\
&= \frac{Idl}{4\pi(a^2+h^2)} \\
d\boldsymbol{H} &= 2d\boldsymbol{H}_1\cos\phi \\
&= 2d\boldsymbol{H}_1\frac{a}{r} \\
&= 2d\boldsymbol{H}_1\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
|d\boldsymbol{H}| &= 2|d\boldsymbol{H}_1|\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
&= \frac{aIdl}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \\
\boldsymbol{H} &= \oint d\boldsymbol{H}_1 \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{1}{2}\oint |d\boldsymbol{H}| \\
&= \frac{1}{2}\oint \frac{aIdl}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{aI}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\cdot 2\pi a \\
&= \frac{a^2 I}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H} &= \frac{a^2 I}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\boldsymbol{k}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

(c) (b) で得られた解答 $\boldsymbol{H}$ を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H} dh$ を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H} dh = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 I}{2(a^2+h^2)^{3/2}} \boldsymbol{k} dh$$

$$h = a\tan\theta \text{と置換する.}$$

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} \qquad \therefore dh = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$\text{また積分範囲は} -\infty \to \infty \text{から} -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \text{に変わる.}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 I}{2a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \boldsymbol{k} \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{I}{2} \boldsymbol{k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{I}{2} \boldsymbol{k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^{3/2}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{I}{2} \boldsymbol{k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\
&= \frac{I}{2} \boldsymbol{k} \{1-(-1)\} \\
&= I\boldsymbol{k} \, [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}$$

3 xyz **直角座標空間において，** y **軸上の点** $\mathrm{A}(0, \mathrm{c}_1, 0)$ **から点** $\mathrm{B}(0, \mathrm{c}_2, 0)$ **まで** y **軸に沿って直線状に流れる電流** I **がある．このとき，** x **軸上の点** $\mathrm{P}(\mathrm{a}, 0, 0)$ **に発生する磁界** $\boldsymbol{H}$ **を求めよ．また，電流** I **の始点** A **と終点** B **の座標がそれぞれ** $(0, -\infty, 0), (0, \infty, 0)$ **となった場合の点** P **に発生する磁界** $\boldsymbol{H}$ **を求めよ．**

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする

この時$d\boldsymbol{l} = dy\boldsymbol{i}, \boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$

$$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & dy & 0 \\ a & -y & 0 \end{vmatrix} = dy \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \\ a & 0 \end{vmatrix} = -ady\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \int_C d\boldsymbol{H} \\ &= -\int_C \frac{aI\boldsymbol{k}}{4\pi(a^2+y^2)^{3/2}} dy \\ &= -\int_{c_1}^{c_2} \frac{aI\boldsymbol{k}}{4\pi(a^2+y^2)^{3/2}} dy \end{aligned}$$

$h = a\tan\theta$と置換する．

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta} \qquad \therefore dh = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$$

また積分範囲は$c_1 \to c_2$から$\alpha - \frac{\pi}{2} \to \beta - \frac{\pi}{2}$に変更される．

$$\begin{aligned} &= -\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 I}{4\pi a^3 (1+\tan^2\theta)^{3/2}} \boldsymbol{j} \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi}\boldsymbol{k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^{3/2}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \left[\sin\theta\right]_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \left\{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \left(-\cos\beta + \cos\alpha\right) \\ &= -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k} \left(\cos\alpha - \cos\beta\right) \ [\mathrm{A/m}] \end{aligned}$$

始点 A と終点 Bの座標がそれぞれ $(0, -\infty, 0), (0, \infty, 0)$ の場合は

$\alpha = 0$,$\beta = \pi$であるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= -\frac{I}{4\pi a} \cdot 2\boldsymbol{k} \\ &= -\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{k} \, [\mathrm{A/m}] \end{aligned}$$

4　半径 r の半円と，半円に接続された半直線状に電流 I が流れている．このとき，半円の中心 O に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする

半円部分の電流がつくる微小磁界と磁界をそれぞれ, $d\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_1$とする

$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}$の方向より $d\boldsymbol{H}$ は紙に突き刺さる

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_1 &= \oint d\boldsymbol{H}_1 \\
&= \oint \frac{Id\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \\
&= \frac{I}{4\pi r^3} \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{I} \\
|\boldsymbol{H}_1| &= \frac{I}{4\pi r^3} \oint r \sin \frac{\pi}{2} dl \\
&= \frac{I}{4\pi r^2} \pi a \\
&= \frac{I}{4r}\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H}_1 &= -\frac{I}{4r}\boldsymbol{k}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

また, $x = r$ の半直線がつくる磁界を $\boldsymbol{H}_2$とする

問 3 より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_2 &= -\frac{I}{4\pi r}\boldsymbol{k}\,(\cos\alpha - \cos\beta) \\
&= -\frac{I}{4\pi r}\boldsymbol{k}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right) \\
&= -\frac{I}{4\pi r}\boldsymbol{k}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

また, $x = -r$ の半直線がつくる磁界を $\boldsymbol{H}_3$とする

$\theta = 0$ より, $\sin\theta = 0$ となり,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_3 &= 0 \\
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{H}_3 \\
&= -\frac{I}{4r}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\boldsymbol{k}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

5　半径 a の円 O に外接する正多角形の辺上に電流が流れているとき，以下の問に答えよ．

(a) 正三角形の辺上を流れる電流 I が内接円の中心 O につくる磁界 H を求めよ．

問 4 より

$$\boldsymbol{H} = -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{k}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)\ [\mathrm{A/m}]$$

ここでそれぞれの作る磁界は同一方向で, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \pi - \frac{\pi}{6}$ であるため

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}| &= \frac{3I}{4\pi a}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{5}{6}\pi\right) \\
&= \frac{3I}{4\pi a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}I}{4\pi a}\ [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}$$

(b) 一般的な正 n 角形 (ただし，n は 3 以上の自然数) の辺上を流れる電流 I が内接円の中心 O につくる磁界 H を求めよ．

上問より正 n 角形の内接円の中心につくる磁界は各辺がつくる磁界の n 倍であることがわかる

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{nI}{2\pi a}\left(\cos\alpha\right)\ [\mathrm{A/m}]$$

αは正 n 角形の頂点の半分であるため

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{nI}{2\pi a}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right\} \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\theta \\
&= \frac{nI}{2\pi a}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\ [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}$$

(c) (b) で求めた正 n 角形が，その内接円の中心 O につくる磁界 H を用いて，$n \to \infty$ の場合の極限値を求めよ．

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}| &= \frac{nI}{2\pi a}\sin\frac{\pi}{n} \\
&= \frac{I}{2\pi a}n\sin\frac{\pi}{n} \\
&= \frac{I}{2\pi a}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{I}{2\pi a}\frac{-\frac{\pi}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}}{-\frac{1}{n^2}} \\
\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{H}| &= \frac{I}{2\pi a}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{\pi}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}}{-\frac{1}{n^2}}\right) \\
&= \frac{I}{2a}\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) \\
&= \frac{I}{2a}\ [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}$$