平成30年　電磁気学I

大山主朗

平成30年　電磁気学II　第1回小テスト

1　以下の(a)及び(c)に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率 $\varepsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

(b) 真空の透磁率 $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$

(c) 電子の電荷 $e : -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

2　一辺の長さ a の正方形がある．点Aに $-2q[\mathrm{C}]$，点Bに $+1q[\mathrm{C}]$，点Cに $-4q[\mathrm{C}]$，点Dに $+3q[\mathrm{C}]$，が点Oに $-q[\mathrm{C}]$ の点電荷が存在するとき，点Oにある電荷にはたらく力 F の大きさを求めよ．ただし，$q > 0$ とする．

$$\boldsymbol{F}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2q(-q)}{\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{-\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right\}\,[\mathrm{N}]$$

$$\boldsymbol{F}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(-q)}{\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{-\frac{a}{2}\boldsymbol{i}-\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right\}\,[\mathrm{N}]$$

$$\boldsymbol{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-4q(-q)}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{\frac{a}{2}\boldsymbol{i}-\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right\}\,[\mathrm{N}]$$

$$\boldsymbol{F}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q(-q)}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right\}\,[\mathrm{N}]$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_A+\boldsymbol{F}_B+\boldsymbol{F}_C+\boldsymbol{F}_D \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{\left(-a+\frac{a}{2}+2a-\frac{3}{2}a\right)\boldsymbol{i}+\left(a+\frac{a}{2}-2a-\frac{3}{2}a\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}(-2a\boldsymbol{j}) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8q^2}{a^3}(-2a\boldsymbol{j}) \\
&= -\frac{4q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j}\,[\mathrm{N}]
\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{4q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\,[\mathrm{N}]\quad \text{y 軸下向き}$$

3　一辺の長さ a の正方形がある．点 B に $+m$[Wb]，点 C に − $3m$[Wb]，点 D に $+2m$[Wb]，点 O に $+m$[Wb] の点磁荷が存在するとき，点 A にできる磁界 H の大きさを求めよ．ただし，$m > 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_O &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{-\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\frac{a^2}{2}\right)^{3/2}}\left\{-\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{m\sqrt{2}}{4\pi\mu_0 a^2}\left\{-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H}_B &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{(a^2)^{3/2}}a\boldsymbol{j} \\
&= \frac{m}{4\pi\mu_0 a^2}\boldsymbol{j}\ [\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H}_C &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{-3m}{((-a)^2+a^2)^{3/2}}\left\{-a\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{-3m}{2\sqrt{2}a^3}\left\{-a\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{-3m}{8\sqrt{2}\pi\mu_0 a^2}\left(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\right)\ [\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H}_D &= \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{2m}{((-a)^2)^{3/2}}\left(-a\boldsymbol{i}\right) \\
&= -\frac{m}{2\pi\mu_0 a^2}\boldsymbol{i}\ [\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_O+\boldsymbol{H}_B+\boldsymbol{H}_C+\boldsymbol{H}_D \\
&= \frac{m}{2\pi\mu_0 a^2}\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{4\sqrt{2}}-1\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{m}{2\pi\mu_0 a^2}\left\{\left(\frac{-8-\sqrt{2}}{8}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{4+\sqrt{2}}{8}\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
&= \frac{m}{16\pi\mu_0 a^2}\left\{-\left(8+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{i}+\left(4+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{j}\right\} \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{m}{16\pi\mu_0 a^2}\sqrt{(8+\sqrt{2})^2+(4+\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{m}{16\pi\mu_0 a^2}\sqrt{84+24\sqrt{2}} \\
&= \frac{m}{8\pi\mu_0 a^2}\sqrt{21+6\sqrt{2}}\,[\mathrm{A/m}]\quad \text{左斜め上向き}
\end{aligned}
$$

4　以下の (a) から (c) に示すような電荷分布が存在するとき，それぞれの電荷分布が周囲につくる電界 E をガウスの法則を用いて求めよ．

(a) q [C] の点電荷

$$
\begin{aligned}
\oint_S E_n dS &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i \\
E_n &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ [\mathrm{V/m}]
\end{aligned}
$$

(b) 線電荷密度 λ [C/m] で分布する無限長直線電荷

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i$$
$$E_n = \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,[\mathrm{V/m}]$$

(c) 面電荷密度 σ [C/m^2] の無限長面電荷

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i$$
$$E_n = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 S}$$
$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,[\mathrm{V/m}]$$

5 導体板の面積 S，導体板の平行平板キャパシタの内部が比誘電率 ε_r の誘電体で満たされているとき，この平行平板キャパシタの静電容量 C が $C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$ で求められる理由を説明せよ．

電極に $\pm Q$ の電荷を与える．次に，電極間に発生する電界 E を求め，電極間の電圧 V を求める．それらを，$C = \frac{Q}{V}$ に代入すことにより，与式が導出される．

$$C = \frac{Q}{V}$$
$$= \frac{Q}{Ed}$$
$$= \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}}$$
$$= \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}\,[\mathrm{F}]$$

6 真空中に単磁荷 m が存在する．ただし $m < 0$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(a) 点磁荷 m が，距離 r の位置に作る磁界 H を求めよ．

$$H = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^2}\,[\mathrm{A/m}]$$

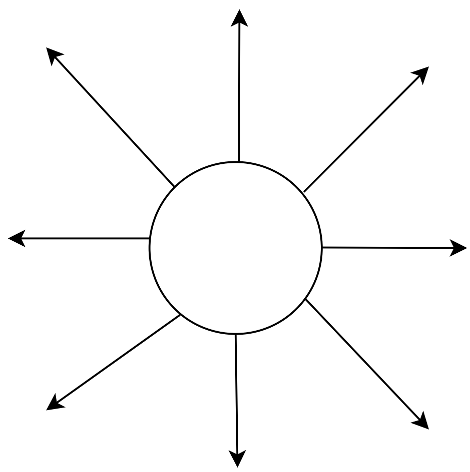
(b) 点磁荷 m が作る磁界の様子を磁力線を用いて図示せよ．

(c) 点磁荷 m から距離 r の位置における磁束密度 B を求めよ．

$$B = \mu_0 H = \frac{m}{4\pi r^2}\,[\mathrm{T}]$$

(d) 点磁荷 m から距離 r の位置を通過する磁束 Φ を磁束密度 B より求めよ．

$$\Phi = BS = m\,[\mathrm{Wb/m}]$$



7　**xy 直交座標系において，同量異符号の点磁荷 $\pm m$ が距離 l に固定された磁気双極子が存在する．このとき以下の問いに答えよ．ただし，x 方向の基準ベクトルを $\boldsymbol{i}$，y 方向の基準ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とする**

(a) 点 A に存在する磁荷 $-m$ が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に作る磁界 $\boldsymbol{H}_1$ を求めよ．

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{-m}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}]$$

(b) 点 B に存在する磁荷 $+m$ が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に作る磁界 $\boldsymbol{H}_2$ を求めよ．

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0-\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\ [\mathrm{A/m}]$$

(c) 点 P での磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2\\ &= \frac{m}{4\pi\mu_0}\left[\frac{-1}{\left(\left(x_0+\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0+\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}+\frac{1}{\left(\left(x_0-\frac{l}{2}\right)^2+y_0^2\right)^{3/2}}\left\{\left(x_0-\frac{l}{2}\right)\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}\right\}\right]\ [\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$

(d) 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= m\boldsymbol{l}\\ &= ml\boldsymbol{i}\,[\mathrm{Wb\cdot m}]\end{aligned}$$

(e) 点 P が原点 O より十分遠方にあると仮定すると，$\sqrt{(x_0-l/2)^2+y_0^2} \simeq \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ 及び $\sqrt{(x_0+l/2)^2+y_0^2} \simeq \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ と近似できる．このことを用いて (c) にて得た磁界 $\boldsymbol{H}$ を簡略化せよ．

$$\boldsymbol{H} \simeq -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{ml}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}\,[\mathrm{A/m}]$$

$$\left(\simeq -\frac{\boldsymbol{M}}{4\pi\mu_0 r^3}\,[\mathrm{A/m}]\right)$$

(f) y 方向に一様な磁界 $\boldsymbol{H}_0$ が存在するとき，磁気双極子にはたらくトルク T を求めよ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{M} H_0 \sin\theta \\ &= ml\boldsymbol{i} \sin\frac{\pi}{2} \\ &= ml\boldsymbol{i} \\ |\boldsymbol{T}| &= ml\,[\mathrm{Wb}\cdot\mathrm{m}],\ \text{x 軸右方向}\end{aligned}$$

8　強磁性体，常磁性体，反磁性体の 3 つの磁性体の性質を，比透磁率と磁化率を用いて説明せよ．

強磁性体は磁化率が 0 よりかなり大きく，透磁率が 1 よりかなり大きい磁性体を指す．そのため，磁界と同じ方向に磁化され，その大きさも大きい．

常磁性体は磁化率が 0 より大きく，透磁率は 1 未満の磁性体を指す．そのため，磁界と同じ方向に磁化され，その大きさは大きくない．

反磁性体は磁化率が 0 より小さく，透磁率が 1 より小さい磁性体を指す．そのため，磁界と逆方向に磁化され，その大きさは小さい．

平成30年　電磁気学II　第2回小テスト

1　以下の(a)及び(c)に示す物理定数は電磁気学を修めた者であれば常識的に覚えていなければならない数値である．それぞれの値を示せ．

(a) 真空の誘電率 $\varepsilon_0 : 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

(b) 真空の透磁率 $\mu_0 : 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$

(c) 電子の電荷 $e : -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

2　磁化されていない強磁性体に磁界 H を外部から印加し，強磁性体内部での磁束密度 B を観測すると，図3に示すような結果が得られた．このとき，図中の行程1: 点 $\mathrm{O} \to$ 点 P_1，行程 2: 点 $\mathrm{P}_1 \to$ 点 P_2，行程3: 点 $\mathrm{P}_2 \to$ 点 P_3，行程4: 点 $\mathrm{P}_3 \to$ 点P4，行程5: 点P4 $\to$ 点 P_5，行程6: 点 $\mathrm{P}_5 \to$ 点P6，行程7: 点 $\mathrm{P}_6 \to$ 点P1の7つの行程に着目して，測定結果を説明せよ．

3　xyz 直角座標空間において，y 軸上の点 $\mathbf{P}(0, h, 0)$ を中心とし，$y = h$ の平面内に半径 a の円形ループ電流 I が流れている．このとき，以下の各問いに答えよ．

(a) 点 P に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ.

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする

$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}$の方向より $d\boldsymbol{H}$ は y 軸左向き

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \oint d\boldsymbol{H} \\
&= \oint \frac{Id\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{r}}{4\pi a^3} \\
&= \frac{I}{4\pi a^3} \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{I} \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{I}{4\pi a^3} \oint r \sin\frac{\pi}{2} dl \\
&= \frac{I}{4\pi a^2} 2\pi a \\
&= \frac{I}{2a}\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H} &= \frac{I}{2a}\boldsymbol{j}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}$$

(b) 点 O に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ.

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする

$z > 0$ に円周上の微小磁界 $d\boldsymbol{H}_1$を

$z < 0$ に円周上の微小磁界 $d\boldsymbol{H}_2$を考える.

またそれぞれの線素ベクトルを $d\boldsymbol{l}$ ととる.

ここで, $d\boldsymbol{H}_1$と $d\boldsymbol{H}_2$の外積より, 2 つの磁界は打ち消される方向となっているため,

$d\boldsymbol{H}_1$と $d\boldsymbol{H}_2$を合成した磁界を $d\boldsymbol{H}$ とする. ($\phi : d\boldsymbol{H}_2$と $d\boldsymbol{H}$ のなす角)

また $d\boldsymbol{H}$ の向きはy 軸左方向である

$$
\begin{aligned}
|d\boldsymbol{H}_1| = |d\boldsymbol{H}_2| &= \frac{Idl}{4\pi r^2}\sin\theta \\
&= \frac{Idl}{4\pi(a^2+h^2)} \\
d\boldsymbol{H} &= 2d\boldsymbol{H}_1\cos\phi \\
&= 2d\boldsymbol{H}_1\frac{a}{r} \\
&= 2d\boldsymbol{H}_1\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
|d\boldsymbol{H}| &= 2|d\boldsymbol{H}_1|\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\
&= \frac{aIdl}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \\
\boldsymbol{H} &= \oint d\boldsymbol{H}_1 \\
|\boldsymbol{H}| &= \frac{1}{2}\oint |d\boldsymbol{H}| \\
&= \frac{1}{2}\oint \frac{aIdl}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{aI}{2\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\cdot 2\pi a \\
&= \frac{a^2 I}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\,[\mathrm{A/m}] \\
\boldsymbol{H} &= \frac{a^2 I}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}\,[\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

(c) (b) で得られた解答 $\boldsymbol{H}$ を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}dh$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}dh &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2 I}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}dh \\
h &= a\tan\theta\text{と置換する.} \\
\frac{dh}{d\theta} &= \frac{a}{\cos^2\theta} \quad \therefore dh = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta \\
\text{また積分範囲は} &-\infty \to \infty \text{ から } -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}\text{に変わる.} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2 I}{2a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\boldsymbol{j}\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \frac{I}{2}\boldsymbol{j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \frac{I}{2}\boldsymbol{j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^{3/2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \frac{I}{2}\boldsymbol{j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{I}{2}\boldsymbol{j}\left\{1-(-1)\right\} \\
&= I\boldsymbol{j}\ [\mathrm{A/m}]
\end{aligned}
$$

4 xyz **直角座標空間において，y 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\mathrm{c}_1,0)$ から点 $\mathrm{B}(0,\mathrm{c}_2,0)$ まで y 軸に沿って直線状に流れる電流 I がある．このとき，x 軸上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{a},0,0)$ に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．また，電流 I の始点 A と終点 B の座標がそれぞれ $(0,-\infty,0),(0,\infty,0)$ となった場合の点 P に発生する磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．**

x 方向, y 方向, z 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とする

この時$d\boldsymbol{l}=dy\boldsymbol{i},\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$

$$d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & dy & 0\\ a & -y & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\\ a & 0\end{vmatrix}=-ady\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\int_C d\boldsymbol{H}\\ &=-\int_C\frac{aI\boldsymbol{k}}{4\pi(a^2+y^2)^{3/2}}dy\\ &=-\int_{c_1}^{c_2}\frac{aI\boldsymbol{k}}{4\pi(a^2+y^2)^{3/2}}dy\end{aligned}$$

$h=a\tan\theta$と置換する.

$$\frac{dh}{d\theta}=\frac{a}{\cos^2\theta}\qquad\therefore dh=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

また積分範囲は$c_1\to c_2$から$\alpha-\frac{\pi}{2}\to\beta-\frac{\pi}{2}$に変更される.

$$\begin{aligned}&=-\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}}\frac{a^2I}{4\pi a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\boldsymbol{j}\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta\\ &=-\frac{I}{4\pi}\boldsymbol{j}\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\ &=-\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{j}\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^{3/2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\ &=-\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{j}\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\\ &=-\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{j}\left[\sin\theta\right]_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\beta-\frac{\pi}{2}}\\ &=-\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{j}\left\{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\ &=-\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{j}\left(-\cos\beta+\cos\alpha\right)\\ &=-\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{j}\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)\ [\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$

始点 A と終点 Bの座標がそれぞれ $(0,-\infty,0),(0,\infty,0)$ の場合は

$\alpha=0$,$\beta=\pi$であるので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=-\frac{I}{4\pi a}\cdot 2\boldsymbol{j}\\ &=-\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{j}\ [\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$

5　半径 a の円 O に外接する正多角形の辺上に電流が流れているとき，以下の問に答えよ．

(a) 正三角形の辺上を流れる電流 I が内接円の中心 O につくる磁界 H を求めよ.

問 4 より

$$\boldsymbol{H} = -\frac{I}{4\pi a}\boldsymbol{i}\,(\cos\alpha - \cos\beta)\ [\mathrm{A/m}]$$

ここでそれぞれの作る磁界は同一方向で, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \pi - \frac{\pi}{6}$ であるため

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{H}| &= \frac{3I}{4\pi a}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{5}{6}\pi\right)\\ &= \frac{3I}{4\pi a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{3I}{2\pi a}\ [\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$

(b) 一般的な正 n 角形 (ただし，n は 3 以上の自然数) の辺上を流れる電流 I が内接円の中心 O につくる磁界 H を求めよ.

上問より正 n 角形の内接円の中心につくる磁界は各辺がつくる磁界の n 倍であることがわかる

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{nI}{2\pi a}(\cos\alpha)\ [\mathrm{A/m}]$$

αは正 n 角形の頂点の半分であるため

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{H}| = \frac{nI}{2\pi a}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$= \frac{nI}{2\pi a}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\ [\mathrm{A/m}]$$

(c) (b) で求めた正 n 角形が，その内接円の中心 O につくる磁界 H を用いて，$n \to \infty$ の場合の極限値を求めよ.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{H}| &= \frac{nI}{2\pi a}\sin\frac{\pi}{n}\\ &= \frac{I}{2\pi a}n\sin\frac{\pi}{n}\\ &= \frac{I}{2\pi a}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\\ &= \frac{I}{2\pi a}\frac{-\frac{\pi}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}}{-\frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{H}| &= \frac{I}{2\pi a}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\frac{\pi}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}}{-\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \frac{I}{2a}\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\\ &= \frac{I}{2a}\ [\mathrm{A/m}]\end{aligned}$$