丸み不均一スプライン

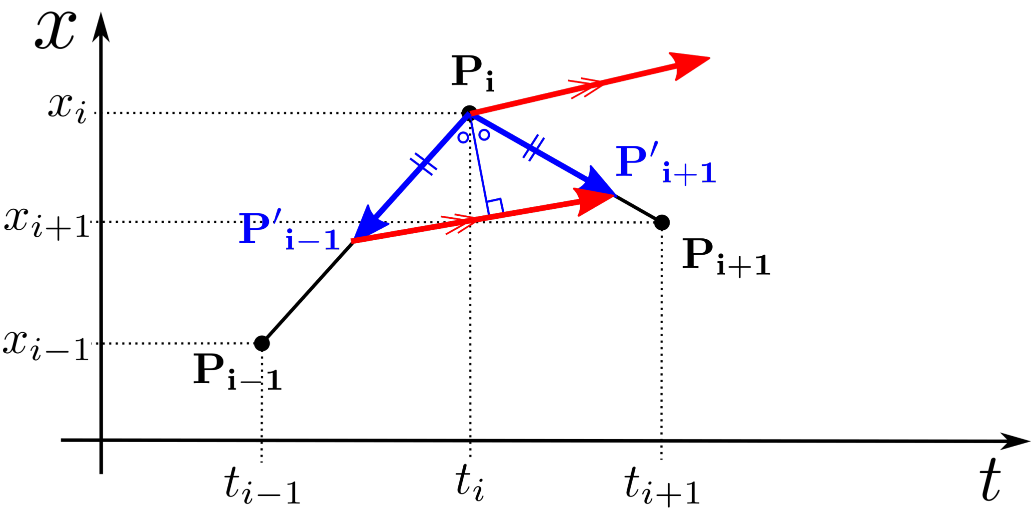

図 1　丸み不均一スプライン

丸み不均一スプラインにより速度 $\dot{x}$ を幾何学的に算出する。

時刻 t における位置 x を 時間-位置の座標平面上の点 $\mathbf{P}$ として表す。

時系列順に $0, 1, \ldots, N$ 番目の点がそれぞれ以下のようにあったとする。

$$\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} t_0 \\ x_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} t_N \\ x_N \end{bmatrix}$$

図 1 のように、$i-1,\ i,\ i+1$ 番目の連番 3 点を考える。

$$\mathbf{P}_{i-1} = \begin{bmatrix} t_{i-1} \\ x_{i-1} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} t_i \\ x_i \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{i+1} = \begin{bmatrix} t_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$$

3 点の内、 i 番目の速度 $\dot{x}_i$ を求める。

($\mathbf{P}_i$ の傾き) = (速度 $\dot{x}_i$) とみなす。この傾きは、$\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i-1}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}}$ のなす角を二等分する直線に対し垂直な方向ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{P'}_{i-1}\mathbf{P'}_{i+1}}$ と平行とする。

$$\overrightarrow{\mathbf{P'}_{i-1}\mathbf{P'}_{i+1}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{P'}_i\mathbf{P'}_{i+1}}\right|} - \frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i-1}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{P'}_i\mathbf{P'}_{i-1}}\right|} = \begin{bmatrix} \Delta t'_i \\ \Delta x'_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta t'_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{\sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - \frac{t_{i-1} - t_i}{\sqrt{(t_{i-1} - t_i)^2 + (x_{i-1} - x_i)^2}}$$

$$\Delta x'_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}} - \frac{x_{i-1} - x_i}{\sqrt{(t_{i-1} - t_i)^2 + (x_{i-1} - x_i)^2}}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\Delta x'_i}{\Delta t'_i}$$

以上