3 次スプライン軌道 計算書

作成者 兼田大史

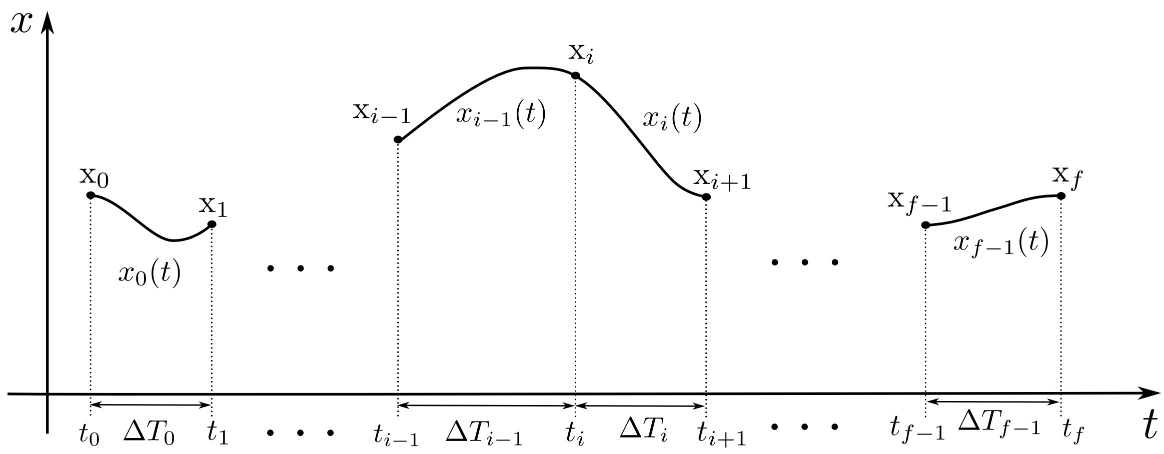

図 1　3 次スプラインのイメージ

1　モデル式

$$x_n(t) = a_n(t-t_n)^3 + b_n(t-t_n)^2 + c_n(t-t_n) + d_n \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}_n &= x_{n-1}(t_n) \\
&= x_n(t_n) \\
\mathrm{v}_n &= \left.\frac{dx_{n-1}}{dt}\right|_{t=t_n} = \dot{x}_{n-1}(t_n) \\
&= \left.\frac{dx_n}{dt}\right|_{t=t_n} = \dot{x}_n(t_n) \\
\mathrm{a}_n &= \left.\frac{d^2x_{n-1}}{dt^2}\right|_{t=t_n} = \ddot{x}_{n-1}(t_n) \\
&= \left.\frac{d^2x_n}{dt^2}\right|_{t=t_n} = \ddot{x}_n(t_n)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

2　入力

$[t_0, \mathrm{x}_0, \mathrm{v}_0]$, $\ldots$ $[t_{i-1}, \mathrm{x}_{i-1}]$, $[t_i, \mathrm{x}_i]$, $[t_{i+1}, \mathrm{x}_{i+1}]$, $\ldots$ $[t_f, \mathrm{x}_f, \mathrm{v}_f]$

3　出力

$[a_0, b_0, c_0, d_0]$, $\ldots$ $[a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, d_{i-1}]$, $[a_i, b_i, c_i, d_i]$, $[a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i*1}, d_{i+1}]$, $\ldots$ $[a_f, b_f, c_f, d_f]$,

4　計算

元の式 (0 階微分)、1 階微分、2 階微分は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
x_{i-1}(t) &= a_{i-1}(t-t_{i-1})^3 + b_{i-1}(t-t_{i-1})^2 + c_{i-1}(t-t_{i-1}) + d_{i-1} \\
\dot{x}_{i-1}(t) &= 3a_{i-1}(t-t_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(t-t_{i-1}) + c_{i-1} && (4.3) \\
\ddot{x}_{i-1}(t) &= 6a_{i-1}(t-t_{i-1}) + 2b_{i-1} && (4.4)
\end{aligned}
$$

$\Delta T_0 = t_1 - t_0, \ldots \Delta T_{i-1} = t_i - t_{i-1}, \Delta T_i = t_{i+1} - t_i, \ldots \Delta T_{f-1} = t_f - t_{f-1}$ とおく。
各曲線同士が連結する境界点 (0 階微分)、1 階微分、2 階微分の連続性より以下の等式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}_i &= x_{i-1}(t_i) = a_{i-1}\Delta T_{i-1}^3 + b_{i-1}\Delta T_{i-1}^2 + c_{i-1}\Delta T_{i-1} + d_{i-1} \\
&= x_i(t_i) = d_i \\
\mathrm{v}_i &= \dot{x}_i(t_i) = 3a_{i-1}\Delta T_{i-1}^2 + 2b_{i-1}\Delta T_{i-1} + c_{i-1} \\
&= \dot{x}_i(t_i) = c_i \\
\mathrm{a}_i &= \ddot{x}_{i-1}(t_i) = 6a_{i-1}\Delta T_{i-1} + 2b_{i-1} \\
&= \ddot{x}_i(t_i) = 2b_i && (4.5)
\end{aligned}
$$

まとめると、以下の連立方程式で表される。これを a_i, b_i, c_i $(i = 0 \ldots f)$ について解く。

$$
\begin{cases}
a_{i-1}\Delta T_{i-1}^3 & +b_{i-1}\Delta T_{i-1}^2 & +c_{i-1}\Delta T_{i-1} & +d_{i-1} & = d_i = \mathrm{x}_i \\
3a_{i-1}\Delta T_{i-1}^2 & +2b_{i-1}\Delta T_{i-1} & +c_{i-1} & & = c_i \\
6a_{i-1}\Delta T_{i-1} & +2b_{i-1} & & & = 2b_i
\end{cases} \tag{4.6}
$$

(2 式目) $\times \Delta T_{i-1} -$ (1 式目) $\times 2$

$$
\begin{aligned}
a_{i-1}\Delta T_{i-1}^3 - c_{i-1}\Delta T_{i-1} - 2d_{i-1} &= c_i\Delta T_{i-1} - 2d_i \\
\therefore a_{i-1} &= \frac{c_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} + \frac{c_i}{\Delta T_{i-1}^2} + \frac{-2d_i + 2d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^3} && (4.7)
\end{aligned}
$$

(1 式目) $\times 3 -$ (2 式目) $\times \Delta T_{i-1}$

$$
\begin{aligned}
b_{i-1}\Delta T_{i-1}^2 + 2c_{i-1}\Delta T_{i-1} + 3d_{i-1} &= 3d_i - 2c_i\Delta T_{i-1} \\
\therefore b_{i-1} &= -\frac{2c_{i-1}}{\Delta T_{i-1}} - \frac{c_i}{\Delta T_{i-1}} + \frac{3d_i - 3d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} && (4.8)
\end{aligned}
$$

算出した a_{i-1}, b_{i-1} を (3 式目) に代入

$$
\begin{aligned}
6\left\{\frac{c_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} + \frac{c_i}{\Delta T_{i-1}^2} + \frac{2d_{i-1} - 2d_i}{\Delta T_{i-1}^3}\right\}\Delta T_{i-1} + 2\left\{-\frac{2c_{i-1}}{\Delta T_{i-1}} - \frac{c_i}{\Delta T_{i-1}} + \frac{-3d_{i-1} + 3d_i}{\Delta T_{i-1}^2}\right\} &= 2b_i \\
\frac{2c_{i-1}}{\Delta T_{i-1}} + \frac{4c_i}{\Delta T_{i-1}} + \frac{6d_i - 6d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} &= 2b_i && (4.9)
\end{aligned}
$$

ここで b_{i-1} の式を漸化式として 1 ステップ進めて b_i を求めると、

$$
\therefore b_i = -\frac{2c_i}{\Delta T_i} - \frac{c_{i+1}}{\Delta T_i} + \frac{3d_{i+1} - 3d_i}{\Delta T_i^2} \tag{4.10}
$$

であるため、本 b_i の式を上の式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{2c_{i-1}}{\Delta T_{i-1}} + \frac{4c_i}{\Delta T_{i-1}} + \frac{6d_i - 6d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} &= 2\left\{-\frac{2c_i}{\Delta T_i} - \frac{c_{i+1}}{\Delta T_i} + \frac{3d_{i+1} - 3d_i}{\Delta T_i^2}\right\} \\
\frac{2}{\Delta T_{i-1}}c_{i-1} + \left(\frac{4}{\Delta T_{i-1}} + \frac{4}{\Delta T_i}\right)c_i + \frac{2}{\Delta T_i}c_{i+1} &= \frac{6d_{i+1} - 6d_i}{\Delta T_i^2} + \frac{6d_i - 6d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} && (4.11)
\end{aligned}
$$

これを $\mathrm{L}_i, \mathrm{D}_i, \mathrm{U}_i, \mathrm{P}_i$ という記号を用いて、定数を以下のように置き換える。

$$
\mathrm{L}_i c_{i-1} + \mathrm{D}_i c_i + \mathrm{U}_i c_{i+1} = \mathrm{P}_i \tag{4.12}
$$

それぞれ以下のように置き換えている。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_i &= \frac{2}{\Delta T_{i-1}} \\
\mathrm{D}_i &= \left(\frac{4}{\Delta T_{i-1}} + \frac{4}{\Delta T_i}\right) \\
\mathrm{U}_i &= \frac{2}{\Delta T_i} \\
\mathrm{P}_i &= \frac{6d_{i+1} - 6d_i}{\Delta T_i^2} + \frac{6d_i - 6d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2}
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

ただし、開始 (左辺の下付き文字が $i = 0$) の場合、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_0 &= 0 \\
\mathrm{D}_0 &= 1 \\
\mathrm{U}_0 &= 0 \\
\mathrm{P}_0 &= \mathrm{v}_0
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

終端 (左辺の下付き文字が $i = f$) の場合、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_f &= 0 \\
\mathrm{D}_f &= 1 \\
\mathrm{U}_f &= 0 \\
\mathrm{P}_f &= \mathrm{v}_f
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

とする。これにより $i = 0 \ldots f$ 全てを書き出すと以下のようになる。

$$
\begin{array}{llllllll}
\mathrm{D}_0 c_0 & +\mathrm{U}_0 c_1 & & & & & & = \mathrm{P}_0 \\
\mathrm{L}_1 c_0 & +\mathrm{D}_1 c_1 & +\mathrm{U}_1 c_2 & & & & & = \mathrm{P}_1 \\
& & \cdots & & & & & \vdots \\
& & \mathrm{L}_{i-1} c_{i-2} & +\mathrm{D}_{i-1} c_{i-1} & +\mathrm{U}_{i-1} c_{i-1} & & & = \mathrm{P}_{i-1} \\
& & & \mathrm{L}_1 c_i & +\mathrm{D}_i c_i & +\mathrm{U}_i c_{i+1} & & = \mathrm{P}_i \\
& & & & & \cdots & & \vdots \\
& & & & & \mathrm{L}_{f-1} c_{f-2} & +\mathrm{D}_{f-1} c_{f-1} \quad +\mathrm{U}_{f-1} c_f & = \mathrm{P}_{f-1} \\
& & & & & & \mathrm{L}_f c_{f-1} \quad +\mathrm{D}_f c_f & = \mathrm{P}_f
\end{array} \tag{4.16}
$$

さらに行列式で表せば以下となる。

$$
\begin{bmatrix}
\mathrm{D}_0 & \mathrm{U}_0 & 0 & & & & & & \\
\mathrm{L}_1 & \mathrm{D}_1 & \mathrm{U}_1 & & & & & & \\
& & & \ddots & & & & & \\
& & & \mathrm{L}_1 & \mathrm{D}_i & \mathrm{U}_i & & & \\
& & & & & \ddots & & & \\
& & & & & \mathrm{L}_{f-1} & \mathrm{D}_{f-1} & \mathrm{U}_{f-1} \\
& & & & & 0 & \mathrm{L}_f & \mathrm{D}_f
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{i-1} \\ c_i \\ c_{i+1} \\ \vdots \\ c_{f-2} \\ c_{f-1} \\ c_f
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_1 \\ \mathrm{P}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{P}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{P}_{f-1} \\ \mathrm{P}_f
\end{bmatrix} \tag{4.17}
$$

左辺の行列は三重対角行列でありこの連立方程式は以下のアルゴリズムで効率よく解くことができる。
$i = 0$ から始めて、 $i = 0 \ldots f$ の昇順で以下のような計算で置き換えていく。

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \mathrm{W}_i := \frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{D}_{i-1}} \\
&2) \quad \mathrm{D}'_i := \mathrm{D}_i - \mathrm{W}_i \mathrm{U}_{i-1} \\
& \mathrm{P}'_i := \mathrm{P}_i - \mathrm{W}_i \mathrm{P}_{i-1}
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

これにより、行列式は以下のように変形される。

$$\begin{bmatrix} \mathrm{D'}_0 & \mathrm{U}_0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \mathrm{D'}_1 & \mathrm{U}_1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & \mathrm{D'}_i & \mathrm{U}_i & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \mathrm{D'}_{f-1} & \mathrm{U}_{f-1} \\ & & & & & & 0 & 0 & \mathrm{D'}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{i-1} \\ c_i \\ c_{i+1} \\ \vdots \\ c_{f-2} \\ c_{f-1} \\ c_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P'}_0 \\ \mathrm{P'}_1 \\ \mathrm{P'}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{P'}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{P'}_{f-1} \\ \mathrm{P'}_f \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

次に、 $i=f$ から始めて、 $i=f\ldots 0$ の降順で以下のような計算で c_i を求めていく。

$$\begin{aligned} &\left(c_f = \frac{\mathrm{P'}_f}{\mathrm{D'}_f} \right) \\ &\therefore c_i = \frac{\mathrm{P'}_i - \mathrm{U}_i c_{i+1}}{\mathrm{D'}_i} \end{aligned} \tag{4.20}$$

5 まとめ

以上をまとめると、以下のアルゴリズムとなる。

(1) d_i を計算

$$d_i = \mathrm{x}_i \tag{5.21}$$

(2) L_i, D_i, U_i, P_i を計算。

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_i &= \frac{2}{\Delta T_{i-1}} \\ \mathrm{D}_i &= \left(\frac{4}{\Delta T_{i-1}} + \frac{4}{\Delta T_i} \right) \\ \mathrm{U}_i &= \frac{2}{\Delta T_i} \\ \mathrm{P}_i &= \frac{6d_{i+1} - 6d_i}{\Delta T_i^2} + \frac{6d_i - 6d_{i-1}}{\Delta T_{i-1}^2} \end{aligned} \tag{5.22}$$

ただし、開始 (左辺の下付き文字が $i=0$) の場合、

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_0 &= 0 \\ \mathrm{D}_0 &= 1 \\ \mathrm{U}_0 &= 0 \\ \mathrm{P}_0 &= \mathrm{v}_0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

終端 (左辺の下付き文字が $i=f$) の場合、

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_f &= 0 \\ \mathrm{D}_f &= 1 \\ \mathrm{U}_f &= 0 \\ \mathrm{P}_f &= \mathrm{v}_f \end{aligned} \tag{5.24}$$

とする。

(3) c_i を計算

$i = 0$ から始めて、 $i = 0 \ldots f$ の昇順で以下のような計算で置き換えていく。

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \mathrm{W}_i := \frac{\mathrm{L}_i}{\mathrm{D}_{i-1}} \\
2)\quad & \mathrm{D'}_i := \mathrm{D}_i - \mathrm{W}_i \mathrm{U}_{i-1} \\
& \mathrm{P'}_i := \mathrm{P}_i - \mathrm{W}_i \mathrm{P}_{i-1}
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

次に、 $i = f$ から始めて、 $i = f \ldots 0$ の降順で以下のような計算で c_i を求めていく。

$$
\begin{aligned}
& \left(c_f = \frac{\mathrm{P'}_f}{\mathrm{D'}_f} \right) \\
& \therefore c_i = \frac{\mathrm{P'}_i - \mathrm{U}_i c_{i+1}}{\mathrm{D'}_i}
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

(4) d_i を計算

$$
a_i = \frac{c_i}{\Delta T_i^2} + \frac{c_{i+1}}{\Delta T_i^2} + \frac{2d_{i+1} - 2d_i}{\Delta T_i^3} \tag{5.27}
$$

(5) b_i を計算

$$
b_i = -\frac{2c_i}{\Delta T_i} - \frac{c_{i+1}}{\Delta T_i} + \frac{3d_{i+1} - 3d_i}{\Delta T_i^2} \tag{5.28}
$$

以上