01 - 行列式概念的引进

二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

采用高斯消元法求解，引入了一种约定记号 $||$，即行列式

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

举例：二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

02 - n阶行列式

三阶行列式（快速记忆：对角线法则）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

换元

$$Let \quad A_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots$$

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

类似的有

$$\begin{gathered} D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3 \\ or \\ D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3 \end{gathered}$$

余子式和代数余子式

去除 a_{ij} 所在行和列，余下的式子称为余子式，一般用字母 M_{ij} 表示。

$$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$$

A_{ij}称为元素 a_{ij} 的代数余子式，采用专用字母 A 表示

n阶行列式的定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{gathered} D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots n) \\ or \\ D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots n) \end{gathered}$$

---

03 - 特殊行列式的计算

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角行列式和上三角行列式，统称为三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

斜下三角行列式和斜上三角行列式，统称为斜三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11}\cdots a_{nn}$$

例1. 特殊行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & & & \\ 0 & x & y & \ddots & & \\ & \ddots & \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

例2. 特殊行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ d & & & & & & & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^n$$

---

04 - 行列式的性质

行列式转置的定义

$$Let \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1：$D = D^T$

- 在行列式中，行和列的位置是对称的，对行成立的，对列也成立
- 下面的只以行为例，介绍行列式的性质

性质2：互换两行，行列式变号

- 老师此处采用了三阶行列式，展开计算的，并有严格证明，四阶及以上的没有计算。严格的证明在后面的讲解逆序数的章节进行的。
- 推论1：若行列式中有两行元素完全相同，则行列式为0
- 推论2：$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$

性质3：用数字 k 乘以行列式中某一行中所有元素，等于用 k 乘以此行列式

性质4：行列式中某一行元素加上另一行对应元素的 k 倍，行列式的值不变

性质5：若行列式某一行的元素是两数之和，则行列式可拆成两个行列式的和

---

05 - 行列式的计算

本节内容主要是：老师带着大家应用行列式性质计算一些实际的例子

问题：四阶行列式有没有类似三阶行列式的对角线法则?

回答：没有

---

06 - 克莱姆法则

n 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

定理：若方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一的解 $x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$，其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

要证明这一定理，需要证明三点：一是有解，二是解是唯一的，三是解的公式是 $x_j = \frac{D_j}{D}$，进一步考察，如果证明了三，也就证明了一。

欲证明 $x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是解，只需要证明如下 n 个等式成立

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = b_1$$
$$\cdots \cdots$$
$$a_{n1}\frac{D_1}{D} + a_{n2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{nn}\frac{D_n}{D} = b_n$$

取第1个等式为例，整理可得

$$b_1 D - a_{11}D_1 - a_{12}D_2 - \cdots - a_{1n}D_n = 0$$

考察如下行列式，按照第一行展开

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= b_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{11} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ a_{12} \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+1+n} \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \\
&= b_1 D - a_{11} D_1 - a_{12} D_2 - \cdots - a_{1n} D_n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

由于$D \neq 0$, 所以可以做除法，第三点证毕。

再证明解是唯一的，设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为一组解，则只需证明 $c_j = \frac{D_j}{D}$

$$
\because \quad \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_n \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
D \cdot c_j &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j}c_j & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj}c_j & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{col_i \times c_i \to col_j} = D_j
\end{aligned}
$$

第二点证毕。

齐次线性方程组的定义

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}
$$

定理2：若齐次线性方程组的系数行列式$D \neq 0$，则方程组有唯一的零解

---

07 - 范德蒙行列式

范德蒙行列式的定义

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

PS：列按照升幂排列，幂指数成等差数列，比如 $0, 2, 4, \cdots, 2n-2$，也是范德蒙行列式

老师采用的是归纳法证明的

---

08 - 逆序数与行列式

逆序

全排列 $123 \cdots n$ 称为标准排列，此时元素之间的顺序称为标准顺序。在任一排列中，若两个元素的顺序与标准顺序不同，就称这两个元素构成一个逆序。

逆序数

- 在一个排列中，逆序的总和称为逆序数。
- 从第一元素起，该元素前有几个数比它大，这个元素的逆序就是几。所有元素的逆序相加，即得到排列的逆序数。
- 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

对换

- 在一个排列中，任意对调两个元素，其余元素不变，即得到一个新排列，这样一种变换称为对换。
    - 任意一个排列，经一次对换后改变奇偶性

- 在 n 个元素的全排列中，奇偶排列各占一半，为 $\frac{n!}{2}$

行列式

对 $n!$ 个 j 的排列求和，其中 $N(j_1\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1\cdots j_n$ 的逆序数

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

有时简记为

$$D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$$

---

09 - 行列式展开定理

08课介绍了行列式新的定义后，行列式按行列展开就要重新阐述了，这就是行列式展开定理。(即02课的行列式定义其实是本课的一个定理)

定理：n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n$$
$$or$$
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n$$

---

10 - 矩阵是什么

由 $m\times n$ 个数按一定的次序排列成的 m 行 n 列的矩形数表称为 $m\times n$ 的矩阵。

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

- 严格说来，矩阵用 $()$ 表示，印刷的时候为了好看用 $[]$ 表示，手写的时候建议 $()$ 表示。
- 矩阵通常用大写字母 A，B，C等表示，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

11 - 几种特殊的矩阵

方阵

当 $m=n$ 时，即矩阵的行数与列数相同时，称矩阵为方阵。

- 主对角线元素的下标 $i=j$，对称的称为斜对角线
- 不是方阵没有主对角线，也没有斜对角线

零矩阵

所有的元素都是0的矩阵称为零矩阵。

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

- 一般用大写字母的 O 表示
- 特殊的有 n 阶零方阵

对角(矩)阵

首先得有对角线，所以必须是方阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

- 其他没写出来的元素都是零
- 在本课程内用专用希腊大写字母 Λ 表示

单位(矩)阵

若对角阵其主对角线的元素都是 1，则称为单位(矩)阵，用 E_n 表示

$$E_n=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

数量(矩)阵

若对角阵其主对角线的元素都是相同元素 k，则称为数量(矩)阵

$$\begin{bmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{bmatrix}$$

三角阵

上三角阵和下三角阵统称为三角阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

梯形矩阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为非零矩阵，若非零行（即至少有一个非零元素的行）全在零行的上面，A 中各非零行中第一个非零元素的前面零元素的个数随行数的增大而增多，则称为上梯形矩阵。简称上梯形阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 前面零元素的个数只要增多就行，没要求增加多少个

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为非零矩阵，若非零行（即至少有一个非零元素的行）全在零行的上面，A 中各非零行中最后一个非零元素的后面零元素的个数随行数的增大而减少，则称为下梯形矩阵。简称下梯形阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 后面零元素的个数只要减少就行，没要求减少多少个

下面这两个矩阵不是梯形阵

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\5&0&6&0&0\\2&3&4&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&4&3&2&1\\1&2&3&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

---

12 - 矩阵的运算（一）

相等

两个矩阵相等是指这两个矩阵有相同的行数与列数，且对应元素相等。

加减法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与矩阵 $B=(a_{ij})_{m\times n}$，定义 $A\pm B=(a_{ij}\pm bij)_{m\times n}$

- 必须是同型矩阵
- 对应元素相加减
- 运算规律：交换律、结合律、有 0 元、有负元

$$\begin{aligned}A+B=B+A\\(A+B)+C=A+(B+C)\\A+O=A=O+A\\A-A=O\end{aligned}$$

- 负矩阵：$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵为 $(-a_{ij})_{m\times n}$，记作 $-A$

数乘

矩阵 A 与数的乘法，简称为数乘，记作 kA

$$kA=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}$$

- 数 k 乘矩阵中的每一个元素
- 运算规律：数的分配率、数的结合律

$$
\begin{gathered}
k(A+B)=kA+kB \\
k(lA)=(kl)A \\
(k+l)A=kA+lA
\end{gathered}
$$

乘法

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3
\end{cases}
\quad and \quad
\begin{cases}
x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\
x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\
x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2
\end{cases}
$$

如上方程组，代换后会形成 y 和 t 之间关系

$$
\begin{cases}
y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\
y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2
\end{cases}
$$

数乘定义：一般地，有

$$
\begin{gathered}
A=(a_{ij})_{m\times s} \quad B=(b_{ij})_{s\times n} \quad then \quad C=AB=(c_{ij})_{m\times n} \\
c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

$$
c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}
$$

- 条件：A 的列数与 B 的行数相等
- 不满足交换律：$AB \neq BA$
- 不满足消去律：$AB=AC$，不能 $\Rightarrow B=C$
- 有非零的零因子：$AB=O$，不能 $\Rightarrow A=O \quad or \quad B=O$
- 运算规律：结合律、左分配率、右分配率、数乘结合律、单位元

$$
\begin{gathered}
(AB)C=A(BC) \\
A(B+C)=AB+BC \\
(B+C)A=BA+CA \\
k(AB)=(kA)B=A(kB) \\
E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}=A_{m\times n}E_n
\end{gathered}
$$

13 - 矩阵的运算（二）

方阵的正整数幂

$$
\begin{aligned}
A^k &= AA\cdots A \\
A^0 &= E, \quad (A \neq O) \\
A^{k+l} &= A^k A^l \\
(AB)^k &\neq A^k B^k
\end{aligned}
$$

矩阵的转置

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

- 对角阵的转置还是它自己
- 运算规律：

$$
\begin{aligned}
(A^T)^T &= A \\
(A+B)^T &= A^T + B^T \\
(kA)^T &= kA^T \\
(AB)^T &= B^T A^T
\end{aligned}
$$

对称阵与反对称阵

- 对称阵：$A^T = A$
  - 一定是方阵
  - $a_{ij} = a_{ji}$
  - $AA^T, A^TA, A + A^T$都是对称阵
- 反对称阵：$A^T = -A$
  - 一定是方阵

- $a_{ij} = -a_{ji} \quad and \quad a_{ii} = 0$
- $A - A^T$是反对称阵

- 任一方阵都可以分解成对称阵与反对称阵的和
  - $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$

---

14 - 方阵的行列式

方阵的行列式的定义

由方阵 A 所构成的行列式称为方阵的行列式，记为 $\left|A\right|$ 或 $det\ A$

- 若方阵的行列式不为零，则称方阵为非奇异方阵，否则称为奇异方阵
- 由方阵 A 所确定的行列式除了具有一般的行列式性质外，还有如下性质：

$$
\begin{aligned}
(i)\ \ \left|kA\right| &= k^n \left|A\right| \\
(ii)\ \ \left|AB\right| &= \left|A\right| \left|B\right|
\end{aligned}
$$

- (ii) 课上老师没有给出证明，在同济大学《线性代数》中有证明
- 只有方阵才有行列式
- 奇数阶反对称阵的行列式为零

---

15 - 伴随矩阵

A^* 称为 A 的伴随矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}
$$

- 一定是方阵
- 有如下性质

$$AA^* = A^*A = \left|A\right| E$$

16 - 矩阵的初等变化

以下三种变换称为矩阵的初等变换

- 对换矩阵中第 i, j 两行（列）的位置，记作 $r_{ij}(c_{ij})$ or $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$
- 用非零常数 k 乘以第 i 行（列），记作 $kr_i(kc_i)$
- 将矩阵的第 j 行（列）乘以常数 k 后加到第 i 行（列）对应元素上去，记作 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$
- 矩初等变换可以简化矩阵，如将矩阵化为梯形阵
- 利用初等变换将 A 化为 B，A 与 B 之间用记号 $\to$ 或 $\cong$ 连接

矩阵的等价

对矩阵 A 执行有限次初等变换得到矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A \cong B$

- 矩阵的等价具有：自反性、对称性、传递性

$$\begin{gathered} A \cong A \\ A \cong B \Rightarrow B \cong A \\ A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C \end{gathered}$$

- 定理：任何一个矩阵都有等价标准型

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = I_{m\times n}$$

17 - 矩阵的秩

k 阶子式：在 $A_{m\times n}$ 中任取 k 行 k 列，位于这些行、列相交处的 k^2 个元素，按原次序组成的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式。

秩 $(rank)$ 定义：矩阵 A 的所有不等于零的子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩，记作 $r(A)$。

- $r(O)=0$，只要 A 不是零阵，就有 $r(A)>0\ and\ \ r(A_{m\times n}\le min\{m,n\})$
- $r(A^T)=r(A)$
- 梯形阵的秩是梯形阵中非零行的行数

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 定理：矩阵经初等变换后，其秩不变
- 秩的求法：初等变换法
- 若两个矩阵有相同的秩，则这两个矩阵有相同的等价标准型，而从等价；反之，若两个矩阵等价，则它们的秩相同

满秩矩阵：若方阵 A 的秩与其阶数相等，则称 A 为满秩矩阵；否则称为降秩矩阵

- 一定是方阵
- 定理：设 A 为满秩矩阵，则 A 的等价标准型为同阶单位阵 E
- 满秩矩阵一定是非奇异的，降秩矩阵一定是奇异的

---

18 - 初等矩阵

定义：对单位阵进行一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵。

- 无论是行变换还是列变换，结果只有如下三种形式

$$E(i,j)=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$E(i(k)=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$E(i,j(k))=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

初等矩阵的性质

- 初等矩阵的转置仍为同类型的初等矩阵。

$$\begin{aligned}E(i,j)^T&=E(i,j) \quad or\ note\ as \quad E^T(i,j)=E(i,j)\\ E(i(k))^T&=E(i(k)) \quad or\ note\ as \quad E^T(i(k))=E(i(k))\\ E(i,j(k))^T&=E(j,i(k)) \quad or\ note\ as \quad E^T(i,j(k))=E(j,i(k))\end{aligned}$$

- 初等矩阵的行列式都不为零，所以都是非奇异的。

初等变换和初等矩阵矩阵的关系

- 行变换相当于左乘初等矩阵，列变换相当于右乘初等矩阵。
- A 满秩 $\Leftrightarrow A \cong E \Leftrightarrow A$ 非奇异 $\Leftrightarrow A=P_1P_2\cdots P_m$ （P_i 为初等矩阵）
- 矩阵 A 与 B 等价的充要条件是：存在 m 阶及 n 阶满秩阵 $P\ and\ Q$，使得 $B_{m\times n}=P_mA_{m\times n}Q_n$

- $r(A) = r(PA) = r(PAQ) = r(AQ)$ ($P\ and\ Q$是满秩矩阵)

---

19 - 逆矩阵的定义及可逆条件

定义：对 n 阶方阵 A，若有 n 阶方阵 B 使的 $AB = BA = E$，则称 B 为 A 的逆矩阵，称 A 为可逆的，记为 A^{-1}

- 一定是方阵
- 逆阵唯一
  - 设 B, C 都是 A 的逆，则 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$，证毕
- 并非每个方阵都可逆
- 定理：n 阶方阵可逆的充要条件是 $\left|A\right| \neq 0$
  - $AA^* = |A|E$，证毕
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
- $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$
- A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 非奇异 $\Leftrightarrow$ A 满秩

---

20 - 逆矩阵的性质及求法2

逆矩阵的性质

- A 可逆 $\Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$
- A 可逆 $\Rightarrow A^{-1}$ 可逆，$(A^{-1})^{-1} = A$
- $AB = E \quad (or\ BA = E) \Rightarrow B = A^{-1}$
  - 证明过程：两边同时左乘 A^{-1}
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$
\begin{aligned}
(AA^{-1})^T &= E^T = E \\
\Rightarrow (A^{-1})^T A^T &= E \\
\Rightarrow (A^{-1})^T A^T (A^T)^{-1} &= E(A^T)^{-1}
\end{aligned}
$$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},\ (k \neq 0)$
- 初等矩阵都是可逆的

$$
\begin{aligned}
E^{-1}(i,j) &= E(i,j) \\
E^{-1}(i(k)) &= E(i(\frac{1}{k})) \\
E^{-1}(i,j(k)) &= E(i,j(-k))
\end{aligned}
$$

逆矩阵的求法

- 方法一：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
- 方法二：初等变换法

$$
A\ invertible \Rightarrow A^{-1}\ invertible \Rightarrow A^{-1} = P_1P_2\cdots P_s
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\Rightarrow P_1P_2P_sA &= E \\
P_1P_2P_sE &= A^{-1}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow
$$

$$
(A \vdots E) \xrightarrow{row\ operation} \cdots \xrightarrow{row\ operation} (E \vdots A^{-1})
$$

---

21 - 逆矩阵的求法3-4

方法三：用定义求

- $Sample\ 1:$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}, \quad \left|A\right| \neq 0$$

$$guess\ B=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow AB=E \\ &\therefore B=A^{-1} \end{aligned}$$

- $Smaple\ 2$: 设 A_n 满足 $A^2-A-2E=O$，求证 A 可逆，并求 A^{-1}

$$\begin{aligned} A^2-A&=2E+O \\ A(A-E)&=2E \\ \left|A(A-E)\right|&=\left|A\right|\left|A-E\right|=\left|2E\right|=2 \\ \therefore \left|A\right| &\neq 0, \Rightarrow \exists\ A^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because A\frac{(A-E)}{2}&=E \\ \therefore A^{-1}&=\frac{(A-E)}{2} \end{aligned}$$

方法四：用定义证明 B 为 A 的逆

- $Sample\ 3$: 设 $A^k=O$, 证明 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$

$$\begin{aligned} &\because (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) \\ &=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k) \\ &=E-A^k=E-O=E \\ &\therefore (E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1} \end{aligned}$$

---

22 - 分块矩阵

分块矩阵的定义

将矩阵用若干纵横直线分成若干个小块，每一小块称为矩阵的子块（或子阵），以子块为元素形成的矩阵称为分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的的运算

- 线性运算：加法与数乘
- 乘法运算：符合乘法的要求
  - $A\times B$, 对 A 可以任意分块，对 B 作分块的方式不能任意，要求对 B 行的分块方式和对 A 列的分块方式相同

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \hline b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \end{array}\right) \\ &=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 转置运算：大块小块一起转

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}^T$$

几种特殊的分块矩阵（老师都没给证明）

1. 准对角阵 (或称为分块对角阵)

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix} \quad A_i\ is\ square\ matrix,\ i=1,2,\cdots,s$$

- 其中 $|A|=|A_1|\,|A_2|\cdots|A_s|$
- A 可逆 $\Leftrightarrow$ A_i 可逆，$(i=1,2,\cdots,s)$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

- $r(A)=r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)$

2. **分块三角阵 (分块上三角阵或准分块上三角阵)**

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_{ii}\ is\ square\ matrix,\ i=1,2$$

- 其中$\left|A\right|=\left|A_{11}\right|\left|A_{22}\right|$
- A 可逆 $\Leftrightarrow$ A_{ii} 可逆，$(i=1,2)$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

- 老师没讲三阶及以上分块三角阵

3. 分块斜对角阵

$$M=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \quad A,B\ is\ squard\ matrix$$

- M 可逆 $\Leftrightarrow$ A,B 可逆

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

- 老师没讲三阶及以上分块斜三角阵

---

23 - 矩阵方程

- 形如 $AX=B$，A 可逆
  - 解法1：$X=A^{-1}B$
  - 解法2：初等行变换法

$$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$$

$$\left.\begin{matrix}P_1P_2\cdots P_sA=E\\P_1P_2\cdots P_sB=X\end{matrix}\right\}\Rightarrow(A\vdots B)\xrightarrow{row\ opeation}(E\vdots X)$$

- 形如 $XA=B$，A可逆
  - 解法1：$X=BA^{-1}$
  - 解法2：初等列变换法

$$A^{-1}=Q_1Q_2\cdots Q_s$$

$$\left.\begin{matrix}A\cdot Q_1Q_2\cdots Q_s=E\\B\cdot Q_1Q_2\cdots Q_s=X\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}A\\\cdots\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{col\ opeation}\begin{pmatrix}E\\\cdots\\X\end{pmatrix}$$

  - 解法3：初等行变换法

$$\begin{aligned}&XA=B\\\Rightarrow\ &A^TX^T=B^T\\\Rightarrow\ &(A\vdots B)\xrightarrow{row\ opeation}(E\vdots X^T)\\\Rightarrow\ &(X^T)^T=X\end{aligned}$$

- 形如 $AXC=B$，AC可逆
  - 解法1：如果 AC 的逆都比较好求，直接计算 $X=A^{-1}BC^{-1}$
  - 解法2：如果 AC 的逆有不好求，转化为 $AX=BC^{-1}\ or\ XC=A^{-1}B$，然后用初等变换法求解

---

24 - 矩阵习题课

本节内容主要是：老师带着大家计算一些矩阵的题目

- 其中求解一题提到一个概念，正交矩阵，前面没讲过，自行引申学习如下

正交矩阵

定义：若 A 是 n 阶方阵，满足 $AA^T=A^TA=E$，则 A 叫做正交矩阵。

- 正交矩阵一定是方阵
- 若 A 为正交矩阵，则 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$
- 若 A 为正交矩阵，则 A 的行列式为 $1\ or\ -1$

$$
\begin{aligned}
&\because AA^T=E\\
&\Rightarrow \left|AA^T\right|=1\\
&\Rightarrow \left|A\right|\left|A^T\right|=1\\
&\Rightarrow \left|A\right|\left|A\right|=1\\
&\therefore \left|A\right|=1\ or\ -1
\end{aligned}
$$

---

25 - n维向量极其线性运算

n 维向量的概念

定义1：

- 由数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组，称为 n 维向量，简称为向量。
- 向量通常由斜体希腊字母 α,β,γ 等表示。如下 α,β 分别代表行向量和列向量

$$
\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)
$$
$$
\beta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T
$$

- 其中 a_i 被称为向量的第 i 个分量
- 矩阵可以看成是由一些行（列）向量组成的

$$
A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}
$$

$$
A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)
$$

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

- 如果一个向量的分量都是 0，则称为 0 向量
- 负向量：$-\beta = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$
- 向量相等：
  - 维数相同，即同型
  - 对应分量都相等

定义2：

- $\beta = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 数值 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ 称为向量 β 的长度或范数或模，记作 $\|\beta\|$
- $\|\beta\| = 0 \Leftrightarrow \beta = 0, \quad \beta \neq 0 \Leftrightarrow \|\beta\| > 0$
- $\|\beta\| = 1$ 称 β 为单位向量

$$\alpha = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \beta = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),\ \gamma = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

  - 标准单位向量

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, \cdots, 0),\ \cdots,\ e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

n 维向量的线性运算

设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

- 加法：$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$
- 减法：$\alpha - \beta = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n)$
- 数乘：$k \times \alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$

线性运算满足八条运算规律

$$
\begin{aligned}
\alpha+\beta &= \beta+\alpha \\
(\alpha+\beta)+\gamma &= \alpha+(\beta+\gamma) \\
\alpha+0 &= \alpha = 0+\alpha \\
\alpha-\alpha &= 0 \\
k(\alpha+\beta) &= k\alpha+k\beta \\
(k+l)\alpha &= k\alpha+l\alpha \\
k(l\alpha) &= (kl)\alpha \\
1\alpha &= \alpha
\end{aligned}
$$

线性组合

定义：设向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，若存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$，则称向量 β 是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合，或称向量 β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示。

举例：

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

向量组的等价

定义：设有两个 n 维向量组 $(I): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \quad (II): \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，若向量组 (I) 中每个向量都可由向量组 (II) 线性表示，则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示；若向量组 (I) 与向量组 (II) 可以互相线性表示，则称向量组 (I) 与向量组 (II) 等价。

- 等价关系具有：自反性、对称性、传递性

---

26 - 向量组的线性相关性

线性相关性

定义：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关。否则称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

- 当向量组只含有一个向量时，若该向量是零向量，则它线性相关；若该向量是非零向量，则它线性无关。
- 两个向量线性相关的充要条件是其对应分量成比例。

- 任一含有零向量的向量组线性相关。

老师在本课的一个例子里用到了克莱姆法则，对于齐次线性方程组

- 如果系数行列式不等于0，方程组有唯一零解。（前面讲过）
- 如果系数行列式等于0，方程组有非零解。（后面有讲）

---

27 - 相关性的判定定理

1. 线性相关与线性组合的关系定理

- 定理1：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m > 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示。
- 定理2：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示且表示式唯一。

2. 相关性的判定定理

- 定理3：在一个向量组中，若有一部分向量组线性相关，则整个向量组也必定线性相关，反之不对。
  - 一个线性无关的向量组的任意非空的部分向量组都线性无关。
- 定理4：m 个 n 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) (i = 1, 2, \cdots, m)$ 线性相关的充要条件是由 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 构成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  的秩 $r(A) < m$。（老师说在下一课给出证明）
  - 推论1：当 $m > n$ 时，m 个 n 维向量线性相关。
  - 推论2：任意 m 个 n 维向量线性无关的充要条件是它们构成的矩阵 $A = A_{m \times n}$的秩 $r(A) = m$
  - 推论3：任意 n 个 n 维向量线性无关的充要条件是由它们构成的方阵 A 的行列式不等于零，或 $r(A) = n$

- 推论4：任意 n 个 n 维向量线性相关的充要条件是由它们构成的方阵 A 的行列式等于零，或 $r(A) < n$

- 定理5：若 m 个 r 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir})(i = 1, 2, \cdots, m)$ 线性无关，则对应的 m 个 $r + 1$ 维向量 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir}, a_{i,r+1})(i = 1, 2, \cdots, m)$ 也线性无关。
  - 用语言叙述为：线性无关的向量组，添加分量后仍然线性无关。
  - 推论：r 维线性无关的向量组，添加 $n - r$ 个相应分量组成的 n 维向量组仍然线性无关。

---

28 - 相关性判定定理4与定理5的证明

定理4

$\Rightarrow$: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性相关，则必有某个向量（不妨设 α_m）可由其余 $m - 1$ 个向量线性表示，即 $\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \cdots & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{row_1 \times -k_1 + row_m, \cdots, row_{m-1} \times -k_{m-1} + row_m} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \cdots & a_{(m-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow r(A) < m$$

$\Leftarrow$: $r(A) < m$，不妨设 A 的最左上角的 r 阶子式 $D_r \neq 0$, 考虑 $r + 1$ 阶子式

$$
\begin{aligned}
D_{r+1} = &\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)j} \end{vmatrix} = 0 \\
&\xrightarrow{expand\ by\ col_j} a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \cdots + a_{rj}A_r + a_{(r+1)j}D = 0 \\
&\therefore \quad \begin{cases} a_{11}A_1 + a_{21}A_2 + \cdots + a_{r1}A_r + a_{(r+1)1}D = 0 \\ a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + \cdots + a_{r2}A_r + a_{(r+1)2}D = 0 \\ \cdots\ \cdots \\ a_{1n}A_1 + a_{2n}A_2 + \cdots + a_{rn}A_r + a_{(r+1)n}D = 0 \end{cases} \\
&\therefore \quad \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_r A_r + \alpha_{r+1} D_r = 0 \\
&\because \quad D_r \neq 0 \\
&\therefore \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r+1}\ linear\ correlation \\
&\therefore \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\ linear\ correlation
\end{aligned}
$$

定理5

$$
\begin{aligned}
&Let\ A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \\
&Let\ B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{m,r+1} \end{pmatrix} \\
&\quad r(A) = m \\
&\because r(A) \leq r(B) \quad and \quad r(B) \leq m \\
&\qquad m = r(A) \leq r(B) \leq m \\
&\quad \therefore B = m \\
&\quad \therefore B\ \ linear\ independent.
\end{aligned}
$$

---

29 - 向量组的极大无关组与秩的定义

向量组的极大无关组

- 定义：设向量组 T 的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足

  (i) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

  (ii) T 中向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，或 T 中任一向量 α,

  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关。

  则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 T 的一个极大线性无关组，简称极大无关组

  - 极大无关注的含义有两层：1. 无关性；2. 极大性。
  - 线性无关向量组的极大无关组就是其本身
  - 向量组与其极大线性无关组等价
  - 同一个向量组的极大无关组不惟一，但它们之间是等价的。

极大无关组的性质

- 定理：设有两个 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (II) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$

  若向量组 (I) 线性无关，且可由向量组 (II) 线性表示，则 $r \leqslant s$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore r = r(A) \leqslant r(C) \leqslant s$$

- 推论1：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且 $r>s$ 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关。
- 推论2：任意两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相等。

向量组的秩

- 定义：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组所含向量的个数，称为向量组的秩，记为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$
  - 向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩=向量个数
- 定理：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\leqslant r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$
  - 推论：等价的向量组有相同的秩，反之不对。
  - 注意：有相同秩的两个向量组不一定等价（这一点和矩阵的等价就不一样了）

---

30 - 向量组的极大无关组与秩的求法

向量组秩的求法

- 行秩：矩阵行向量组的秩
- 列秩：矩阵列向量组的秩
- 定理：矩阵的行秩与列秩相等，为矩阵的秩。
  - 老师此处没给出证明，自行搜索，知乎上此处有证明。
  - 推论：向量组的秩与该向量组构成的矩阵的秩相等。

极大无关组的求法

- 列摆行变换法（推荐）
- 行摆列变换法

其他

- 上面的例子都是利用矩阵解决向量组的问题
- 实际上用向量组也可以解决矩阵的问题，举例证明如下有用的公式

- 证明 $r(A_{m\times s}B_{s\times n}) \leqslant min\{r(A), r(B)\}$

$$\begin{aligned} Let \quad C &= A_{m\times s}B_{s\times n} \\ A &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \\ C &= (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \\ B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) &= C = AB \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2s}b_{s1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2s}b_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \times b_{11} + \cdots + \alpha_s \times b_{s1} & \cdots & \alpha_1 \times b_{1n} + \cdots + \alpha_s \times b_{sn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Then \quad \gamma_1 &= \alpha_1 \times b_{11} + \cdots + \alpha_s \times b_{s1} \\ \gamma_2 &= \alpha_1 \times b_{21} + \cdots + \alpha_s \times b_{s1} \\ &\vdots \\ \gamma_n &= \alpha_1 \times b_{s1} + \cdots + \alpha_s \times b_{s1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad r(C) &\leqslant r(A) \\ Similarly \quad r(C) &\leqslant r(B) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad r(A_{m\times s}B_{s\times n}) \leqslant min\{r(A), r(B)\}$$

- 设有两个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_s\end{pmatrix},K=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{ss}\end{pmatrix}$$

  - 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=s$
  - 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(K)<s$

---

31 向量空间

向量空间及其子空间

- 定义1：（运算的封闭性）设 V 是 n 维向量的非空集合（记为 $V=\{\alpha\mid\alpha\in R^n\}$），如果 $\forall\,\alpha,\beta\in V,k\in R,\Rightarrow\alpha+\beta\in V,k\alpha\in V$成立，称 V 对于向量加法及数乘两种运算封闭。（$V\ is\ closed\ under$）

- 定义2：设 V 是 n 维向量的非空集合，如果 V 对于向量加法及数乘两种运算封闭，则称集合 V 为 n 维向量空间，简称为向量空间。（$Space$）

- 定义3：$V=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in R\}$，称 V 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的向量空间，给一个特殊记号$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$。（$V$是全体 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性组合构成的，线性：$Linear$）。也有的书中记为 $Span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$。(取生成、张成的意思)

- 定义4：设 W、V 为向量空间，若 $W\subset V$，则称 W 是 V 的子空间。

向量空间的基与维数

- 定义5：若 n 维向量空间 V中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

  (i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

  (ii) V中向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示

  则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 V 的一个基。

- 定义6：基中所含向量个数 r 称为向量空间的维数。

- 若将向量空间视作向量组，则基就是向量组的极大线性无关组，维数就是向量组的秩。
- 因此，基与维数的求法类似于向量组的极大无关组与秩的求法。
- 若向量空间的基为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r \Rightarrow V = L(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r)$

向量在基下的坐标

- 定义7：设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r$ 是向量空间 V 的基，$\alpha \in V$，且 $\alpha = k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \cdots + k_r\epsilon_r$，则称系数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为 α 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r$ 下的坐标。
    - 向量在一组确定的基下的坐标是唯一的。
    - 向量空间的基不唯一，因此向量在不同基下的坐标也不一样。
    - 向量在一组基下的坐标的求法：待定系数法与矩阵方程法

---

32 向量组的正交性

向量的内积

- 定义：设有向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 称为向量 α 与 β 的内积，记作 (α, β) 或 $< \alpha, \beta >$，也有人称之为数量积或点积。
    - $(\alpha, \beta) = \alpha\beta^T$
    - 交换律：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
    - 数乘：$(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta)$
    - 分配率：$(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
    - $(\alpha, \alpha) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \|\alpha\|^2$
- 向量的单位化

$$
\begin{aligned}
\because \quad & \left\|\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right\| = \frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1 \\
\therefore \quad & \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha, \quad it\ is\ a\ unit\ vector
\end{aligned}
$$

向量的夹角

- 老师略了，没讲，自行搜索学习
- 定义：当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时，$\theta = arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

向量的正交性

- 定义：若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称向量 α 与 β 正交。
  - 因为 0 向量与任何向量都正交，所以一般讨论向量正交时，不考虑 0 向量
- 定义：如果 m 个 n 维非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 两两正交，即满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, (i \neq j)$ 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为正交向量组，简称正交组。

正交向量组的性质

- 定理：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为正交向量组，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

$$\begin{aligned} assume \quad & k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \\ & \Rightarrow (\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m) = (\alpha_i, 0) = 0 \\ & \Rightarrow (\alpha_i, k_1\alpha_1) + (\alpha_i, k_2\alpha_2) + \cdots + (\alpha_i, k_m\alpha_m) = 0 \\ & \because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \; Orthogonal \\ & \Rightarrow (\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad (i \neq j) \\ & \therefore k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0 \\ & \therefore k_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & \therefore linear \; independent \end{aligned}$$

  - 反之，线性无关向量组不一定是正交向量组

向量组的正交规范化

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为线性无关向量组，令

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 \\ & \cdots \; \cdots \\ \beta_m &= \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_m, \beta_2)}{(\beta_1, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_m, \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}, \beta_{m-1})}\beta_{m-1} \end{aligned}$$

- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价
- $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为正交组

  这个过程成为施密特正交化过程。

- 再将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 单位化，即得到单位正交向量组

正交矩阵

- 定义：(前面讲过) 若 n 阶方阵 A 满足 $A^TA=E$,则称 A 为 n 阶正交矩阵。
- 性质：
  - 若 A 为 n 阶正交矩阵 $\Rightarrow |A|=\pm 1$
  - 若 A 为 n 阶正交矩阵 $\Rightarrow A^T$ 与 A^{-1} 也是正交矩阵
  - 若 A，B 为 n 阶正交矩阵 $\Rightarrow AB$ 与 BA 也是正交矩阵
- 正交矩阵的判定
  - 用定义判定
  - 定理：矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组为单位正交向量组

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=A^TA$$

$$\Rightarrow \alpha_i^T\alpha_j=0\quad (i\neq j)\quad and\quad \alpha_i^T\alpha_i=1$$

$\Leftarrow$:

$$\because\quad \alpha_i^T\alpha_j=0\quad (i\neq j)\quad and\quad \alpha_i^T\alpha_i=1$$
$$\therefore\quad A^TA=E$$

---

33 - n维向量习题课

本节课老师带着大家做了一些习题，演示了各个定理的应用

---

34 - 齐次方程组

定义：齐次线性方程组：（n 个未知数，m 个方程，且常数项全部为 0）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (1)$$

称 A 为系数矩阵，称 X 为未知向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称上面 (1) 的形式为方程组的代数形式，称 $AX=0$ 为方程组的矩阵形式。

引入向量：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

称 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 为方程组的向量方程形式。

齐次线性方程组解的性质

- 很显然 $0=(0,0,\cdots,0)^T$ 是方程组的解，称为零解。
- 若非零向量 $\xi=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 是方程组的解，则称为非零解，也称为非零解向量。
- 性质1：齐次方程组的两个解的和仍然是方程组的解。即：ξ_1,ξ_2 是解向量，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是解向量。

- 性质2：若 ξ 是解向量，则 $k\xi$ 也是解向量。
- 令 $V=\{\xi \mid A\xi=0\}$，则 V 满足运算的封闭性，可以构成一个向量空间，称为方程组的解空间。
- 若齐次线性方程组的解空间存在一组基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，则方程组的全部解就是 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$，这称为方程组的通解。
- 定义：若齐次方程组的有限个解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，满足：

  (i) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关；

  (ii) 方程组的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示；

  则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是齐次方程组的一个基础解系。

行最简形矩阵

有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $r(A)=r<n$, 且不妨设 A 中最左上角的 r 阶之式不为零。则经过有限次行初等变换，矩阵 A 化为：

$$I_{m\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1(n-r)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2(n-r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r(n-r)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 I 称为行最简形（因为只做了行初等变换），显然 $A\cong I$

- $AX=0$ 与 $IX=0$ 同解
- 也变相说明了初等行变换没有改变矩阵方程组的解

例子

求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row\ operation} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$IX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

- x_3 称为自由未知量
- x_1, x_2 称为真未知量
- $x_1 = -5x_3$，$x_2 = 3x_3$ 称为同解方程组
- 令 $\xi = (-5, 3, 1)^T$，则通解为 $k\xi = k(-5, 3, 1)^T$

---

35 - 基础解系的求法

$$
\begin{aligned}
&IX = 0 \\
\Rightarrow &\begin{cases} x_1 + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1(n-r)}x_n = 0 \\ x_2 + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2(n-r)}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\ \cdots \\ x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r(n-r)}x_n = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} x_1 = -(b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1(n-r)}x_n) \\ x_2 = -(b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2(n-r)}x_n) \\ \quad\cdots\ \cdots \\ x_r = -(b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r(n-r)}x_n) \end{cases}
\end{aligned}
$$

- $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 称为真未知量
- $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 称为自由未知量
- $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 由自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 唯一确定

把 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 排成向量，则 $V = \{(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)\}$ 构成的向量空间 R^{n-r}，其基含有 $n-r$ 个向量，最简单的一组基为：$e_1, e_2, \cdots, e_{n-r}$，则

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1(n-r)} \\ -b_{2(n-r)} \\ \vdots \\ -b_{r(n-r)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

组合得解向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (-b_{11}, -b_{21}, \cdots, -b_{r1}, 1, 0, \cdots, 0)^T$$

$$\vdots$$

$$\xi_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (-b_{1(n-r)}, -b_{2(n-r)}, \cdots, -b_{r(n-r)}, 0, 0, \cdots, 1)^T$$

(i) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关

(ii) 任一解都可以由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示

$$\begin{aligned}
&\forall\ \xi\ \ is\ AX = 0\ solution \\
&\quad \Rightarrow\ A\xi = 0 \\
&assume\ \ \xi = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&Let\ \ \xi_0 = c_{r+1}\xi_1 + c_{r+2}\xi_2 + \cdots + c_n\xi_{n-r} \\
&\quad = \begin{pmatrix} *_1 \\ \vdots \\ *_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&\because\ *_1, \cdots, *_r\ \ is\ determined\ by\ \ c_{r+1}, \cdots, c_n\ \ uniquely \\
&\therefore *_1 = c_1, \cdots, *_r = c_r \\
&\therefore \xi = \xi_0
\end{aligned}$$

所以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是解空间的一组基础解系。

- 从推导过程可以看出：基础解系不唯一，但所含向量个数相等，都等于 $n - r(A)$

综上有定理：若齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r<n$，则它有基础解系，且基础解系所含有向量的个数为 $n-r$ 。

- 推论：对齐次线性方程组，有
  - 若 $r(A)=n$ 则方程组有唯一零解
  - 若 $r(A)<n$ 则方程组有无数多解，其通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

---

36 - 非齐次线性方程组

定义：非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

称 A 为系数矩阵，称 X 为未知向量，称 B 为常数向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称最上面 (1) 的形式为方程组的代数形式，称 $AX=B$ 为方程组的矩阵形式，称 $AX=0$ 为非齐次方程组的导出组 。

引入向量：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 为方程组的向量方程形式。

非齐次线性方程组的有解判定

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

- 从上面的三个例子可以看出，并非所有的非齐次线性方程组都有解，有解时，解的情况也不一样。（有唯一解，有无穷多解）

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \qquad (1)$$

方程组 (1) 有解：

- $\Leftrightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示
- $\Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 与 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\}$ 等价
- $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta)$
  - 前面讲过向量组的等价可以推导出等秩，反之则不成立
  - 这里面 $\Leftarrow$ 还成立的是因为："其中一组向量可由另一组向量表示"
  - 老师没讲详细的证明过程，只是提了如下的思路：右边找极大无关组可以不找 β，左右两边同时找极大无关组，找完就等价了
- $\Leftrightarrow \bar{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta),\ r(\bar{A}) = r(A)$

称 $\bar{A}$ 为方程组 (1) 的增广矩阵。$(augmented)$

非齐次线性方程组的解法

解的性质

- 性质1：非齐次线性方程组 (1) 的两个解的差是它导出组的解。即 $A\eta_1 = B, A\eta_2 = B \Rightarrow A(\eta_1 - \eta_2) = 0$
- 性质2：非齐次线性方程组 (1) 的一个解与其导出组的一个解的和是非齐次线性方程组 (1) 的解。即 $A\eta = B, A\xi = 0 \Rightarrow A(\eta + \xi) = B$

非齐次线性方程组的通解

- 定理： 设 η^* 是非齐次方程组的一个特解， $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是齐导出组的基础解系，则非齐次方程组 (1) 的通解为 $\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$
  - (i) $r(\bar{A}) = r(A) = n$ 时，方程组有唯一的解
  - (ii) $r(\bar{A}) = r(A) < n$ 时，方程组有无穷多解

- (iii) $r(\bar{A}) \neq r(A)$ 时， 方程组无解

---

37 - 含参数的方程组

形如

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 1 \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

的方程组称为含参数的方程组。

- 本节课老师带着大家通几个例子演示了如何解含参数的方程组
- 根据无解、有唯一解、有无穷解的条件，先确定参数，再把含参数的方程组转化为一般的齐次、非齐次方程组，最后求解。

---

38 - 方程组的习题课

本节课，老师带领大家做了几道题目，应用上面所学的关于方程组的知识

---

39 - 与方程组有关的证明题

本节课，老师继续带领大家做了几道题目，应用上面所学的关于方程组的知识

---

40 - 矩阵的相似性

矩阵的相似

定义：设 A 与 B 都是 n 阶矩阵，若存在一个 n 阶 可逆矩阵 P，使 $B = P^{-1}AP$，则称矩阵 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$ 。可逆矩阵 P 称为相似变换矩阵。

- 相似矩阵具有自反性、对称性、传递性。

- $A \sim B \Rightarrow A \simeq B$，反之不对。

相似矩阵的简单性质：

- $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$
- $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$
- $A \sim B \Rightarrow A$ 与 B 同时可逆或同时不可逆，且当可逆时 $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $A \sim B \Rightarrow f(A) \sim f(B), f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$

相似矩阵的简单应用

- 老师通过一个例子，演示了当 A 矩阵的相似矩阵是对角阵时，计算 A^k 会非常容易，自然的就有如下两个问题
  - A 满足什么条件时能与对角阵 Λ 相似?
  - A 与对角阵 Λ 相似时，可逆阵 P 及 对角阵 Λ 怎么求?

矩阵的特征值与特征向量

定义：设 A 是 n 阶矩阵，λ 为一个数，若存在非零向量 α，使 $A\alpha = \lambda\alpha$，则称数 λ 为矩阵 A 的特征向量，非零向量 α 为矩阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

---

41 - 特征值与特征向量的求法

$$
\begin{aligned}
& A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0 \\
\Rightarrow & (A - \lambda E)\alpha = 0 \\
\Rightarrow & \alpha\ is\ the\ non.zero\ soulation\ of\ (A - \lambda E)X = 0 \\
\Rightarrow & |A - \lambda E| = 0
\end{aligned}
$$

所以满足 $|A - \lambda E| = 0$ 的数 λ 为特征值，方程组 $(A - \lambda E)X = 0$ 的非零解为特征向量。

- $r(A - \lambda E) < n$， 方程组有无数个解
- 对于特征向量，一般我们关心的是基础解系

例1：求矩阵 A 的特征值与特征向量

$$
\begin{aligned}
& A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow |A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
& \quad =(1-\lambda)(2+\lambda)^2-16-16+4(2+\lambda)-16(1-\lambda)+4(2+\lambda) \\
& \quad =-\lambda^3-3\lambda^2+24\lambda-28 \\
& \quad =-(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14) \\
& \quad =-(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2)=0 \\
& \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-7
\end{aligned}
$$

通常称 $|A-\lambda E|$ 所代表的多项式为特征多项式。相同的根称为重根。

$$
\begin{aligned}
\lambda_1=\lambda_2=2,\ solve\ (A-2E)X=0 \\
A-2E=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ x_1=-2x_2+2x_3 \\
\therefore\ \xi_1=(-2,1,0)^T, \xi_2=(2,0,1)^T \\
\therefore\ \alpha=k_1\xi_1+k_2\xi_2, (k_1, k_2\ are\ \ not\ all\ zero)
\end{aligned}
$$

同理可求 $\lambda_3=-7$ 的特征向量 $\xi_3=(1,2,-2)^T$，其全部特征向量为 $k\xi_3(k\neq 0)$

- $|C|=0 \Rightarrow |C-0E|=0$，所以降秩的方阵，$0$ 一定是它的一个特征值
- 对于满秩的方阵，0 一定不是它的特征值
- 属于不同特征值的特征向量是线性无关的（下章给出了证明）

---

42 - 特征值与特征向量的性质

性质1：n 阶矩阵 A 的相异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 所对应的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 线性无关。

证：用数据归纳法

1. $m=1, \lambda_1$ 的特征向量 $\xi_1\neq 0$，$\therefore\ \xi_1$ 线性无关

2. 假设 $m-1$ 时结论成立，即 A 的相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$ 所对应的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m-1}$ 线性无关，下面证明 m 时成立。

$$\begin{aligned}
assume\ k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_m\xi_m=0 \qquad (1)\\
A\cdot(1)&\Rightarrow A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_m\xi_m)=0\\
&\Rightarrow k_1\lambda_1\xi_1+k_2\lambda_2\xi_2+\cdots+k_m\lambda_m\xi_m=0 \qquad (2)\\
\lambda_m\cdot(1)&\Rightarrow k_1\lambda_m\xi_1+k_2\lambda_m\xi_2+\cdots+k_m\lambda_m\xi_m=0 \qquad (3)\\
(2)-(3)&\Rightarrow k_1(\lambda_1-\lambda_m)\xi_1+\cdots+k_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\xi_{m-1}=0\\
independence&\rightarrow k_i(\lambda_i-\lambda_m)=0\\
&\Rightarrow k_i=0,(i=1,2,\cdots,m-1)\\
k_i&=0,\ substitution\ into\ (1)\\
&\Rightarrow k_m\xi_m=0\\
&\Rightarrow k_m=0\\
&\Rightarrow \xi_1,\xi_2,\cdots\xi_m\ independence
\end{aligned}$$

推论1：n 阶矩阵 A 的相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，$\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_r}$ 是特征值 λ_i 所对应的线性无关的特征向量，则 $\xi_{1_1},\xi_{1_2},\cdots,\xi_{1_{r_1}},\xi_{2_1},\xi_{2_2},\xi_{2_{r_2}},\cdots,\xi_{m_1},\xi_{m_2},\cdots,\xi_{m_{r_m}}$ 线性无关。

- 老师没有给出严格的证明，而是通过一个例子进行的简略证明
- 例子：设矩阵 A 的两个互异的特征值为 λ_1,λ_2, 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是属于 λ_1 的线性无关的特征向量，向量 β_1,β_2 是属于 λ_2 的线性无关的特征向量，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 线性无关。

$$\begin{aligned}
assume\ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+l_1\beta_1+l_2\beta_2=0 \qquad (1)\\
&\Rightarrow A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+l_1\beta_1+l_2\beta_2)=0\\
&\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_2+k_3\lambda_1\alpha_3+l_1\lambda_2\beta_1+l_2\lambda_2\beta_2=0 \qquad (2)\\
\lambda_1\cdot(1)&\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_2+k_3\lambda_1\alpha_3+l_1\lambda_1\beta_1+l_2\lambda_1\beta_2=0 \qquad (3)\\
(2)-(3)&\Rightarrow l_1(\lambda_2-\lambda_1)\beta_1+l_2(\lambda_2-\lambda_1)\beta_2=0\\
\beta_1,\beta_2\ independence&\rightarrow l_1(\lambda_2-\lambda_1)=0,l_2(\lambda_2-\lambda_1)=0\\
&\Rightarrow l_1=0,l_2=0,\ substitution\ into\ (1)\\
&\Rightarrow k_1=0,k_2=0,k_3=0\\
&\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\ independence
\end{aligned}$$

性质2：相似矩阵有相同的特征值

$$0=|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|A-\lambda E|$$

- 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这一特征值的特征向量
- 属于不同特征值的特征向量的非零线性组合一般就不是特征向量了

特征值的求法公式

- $k\lambda$ 为 kA 的特征值
- λ^m 为 A^m 的特征值
- $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值
- λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值（A 可逆）
- $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值（A 可逆）

$$
\begin{aligned}
A\alpha &= \lambda\alpha, \alpha \neq 0 \\
A^*A\alpha &= \lambda A^*\alpha \\
|A|\alpha &= \lambda A^*\alpha \\
\because\ \exists\ A^{-1} \\
\lambda \neq 0 \\
\therefore\ A^*\alpha &= \frac{|A|}{\lambda}\alpha
\end{aligned}
$$

  - 特别是，特征向量在推导过程中保持不变
  - 可以利用求 A 的特征向量，简化求公式中各种形式的特征向量

- λ 为 A^T 的特征值

特征值与矩阵的关系公式

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，(并没有一定不相同，重根也算一个)，则

- $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- 老师没给出证明，说书上有

---

43 - 一般矩阵的相似对角化

矩阵与对角阵相似的条件

设 A 与对角阵 Λ 相似，$\Rightarrow$ 存在一个 n 阶可逆阵 P，使的 $\Lambda = P^{-1}AP$

$$assume\ P = (P_1, P_2, \cdots, P_n),\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda \\ & AP = (AP_1, AP_2, \cdots, AP_n) \\ & P\Lambda = (P_1, P_2, \cdots, P_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ & \quad\ = (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_n P_n) \\ \Rightarrow & (AP_1, AP_2, \cdots, AP_n) = (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_n P_n) \\ \Rightarrow & AP_i = \lambda_i P_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

(P_i 是否为特征向量?) 只有当 P_i 是非零向量是才是特征向量。

因为 P 是可逆的，所以 $|P| \neq 0$, P是满秩的，所以 P_i 是非零向量。（且线性无关，因为 $r(P) = n$)。

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征值；$\Rightarrow P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是特征向量。

反之：设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，对应的特征向量为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$

$$assume\ P = (P_1, P_2, \cdots, P_n),\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AP & = (AP_1, AP_2, \cdots, AP_n) = (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_n P_n) \\ & = P\Lambda \end{aligned}$$

$A \sim \Lambda$ 的充要条件是 P 可逆 $\Leftrightarrow |P| \neq 0 \Leftrightarrow r(P) = n \Leftrightarrow P_1, P_2, \cdots, P_n$ 线性无关

定理1：n 阶矩阵 A 与对角阵相似的充要条件为 A 有 n 个 线性无关的特征向量。

推论：若 A 有 n 个互异的特征值，则 A 与对角阵相似，反之不对。

- 若 矩阵 A 有重特征值，则不能马上断言。这时要看特征向量了

- 实际上，只要 k 重特征向量对应 k 个线性无关的特征向量就行
- 设 λ 为 k 重特征值，只要 $r(A-\lambda E)=n-k$，则 $(A-\lambda E)X=0$，基础解系就有含有 k 个向量，也就有了 k 个线性无关的解向量

定理2：设 A 的相异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，其重数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_m, \sum_{i=1}^{m} r_i=n$,则 $A\sim\Lambda \Leftrightarrow r(A-\lambda_i E)=n-r_i$

矩阵相似对角化的方法

1. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，根据特征值是否相异，不相异时根据定理2判定 A 是否与对角阵相似
2. 当相似时，根据特征值求出特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 并令$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，特征值做主对角线排成对角阵，则 $\Lambda=P^{-1}AP$

---

44 - 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质

性质1：实对称矩阵的特征值都是实数。

设 λ_0 是 n 阶实对称矩阵 A 的特征值，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 是对应的特征向量，即 $A\alpha=\lambda_0 a$，两边取共轭，得：$\bar{A}\bar{\alpha}=\bar{\lambda_0}\bar{\alpha}$ (1)。

$\bar{A}=(\bar{a_{ij}})_{n\times n}=A, \bar{\alpha}=(\bar{a_1},\bar{a_2}\cdots,\bar{a_n})^T$，由于 A 为实对称阵，故 $\bar{A^T}=A^T=A$。

(1) 两端取转置，得：$\bar{\alpha}^TA^T=\bar{\lambda_0}\bar{\alpha}^T \Rightarrow \bar{\alpha}^TA=\bar{\lambda_0}\bar{\alpha}^T$，两端同时右乘 α

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \bar{\alpha}^TA\alpha=\bar{\lambda_0}\bar{\alpha}^T\alpha\\
&\Rightarrow \lambda_0\bar{\alpha}^T\alpha=\bar{\lambda_0}\bar{\alpha}^T\alpha\\
&\Rightarrow (\lambda_0-\bar{\lambda_0})\bar{\alpha}^T\alpha=0\\
&\because \bar{\alpha}^T\alpha=\|\alpha\|\neq 0\\
&\therefore \lambda_0=\bar{\lambda_0}\\
&\therefore \lambda_0\ is\ real\ number.
\end{aligned}
$$

性质2：实对称矩阵的相异特增值所对应的特征向量必定正交。

$$
\begin{aligned}
& A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \\
& (A\alpha_1)^T = \lambda_1\alpha_1^T \\
\Rightarrow & \alpha_1^T A = \lambda_1\alpha_1^T \\
\Rightarrow & \alpha_1^T A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2 \\
\Rightarrow & \lambda_2\alpha_1^T\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2 \\
\Rightarrow & (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_1^T\alpha_2 = 0 \\
\Rightarrow & \alpha_1^T\alpha_2 = 0
\end{aligned}
$$

性质3：实对称矩阵 A 的 k 重特征值所对应的线性无关的特征向量恰有 k 个

- 老师没有给出证明，说证明过程超过教学大纲了
- 推论：实对称矩阵一定与对角矩阵相似。

---

45 - 实对称矩阵的相似对角化

定理：实对称矩阵 A 一定与对角矩阵正交相似。

- 即存在正交阵 Q， 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵
- 正交阵的求法：
  - 求出 A 的所有相异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$
  - 对每一个重特征值 λ_i，求出对应的 r_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_{r_i}}, (i = 1, 2, \cdots, m)$，有性质知$\sum_{i=1}^m r_i = n$
  - 用施密特正交化方法将每一个重特征值 λ_i 所对应的 r_i 个线性无关的向量 $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_{r_i}}, (i = 1, 2, \cdots, m)$ 先正交化再单位化为 $\eta_{i_1}, \eta_{i_2} \cdots, \eta_{i_{r_i}}, (i = 1, 2, \cdots, m)$，由于都是线性组合而得到了，所以它们仍为属于 λ_i 的特征向量。
  - 将上面求得的正交向量，排成一个 n 阶方阵 Q，则 Q 即为所有的正交方阵。

---

46 - 相似对角形小结

本课老师带着大家做了一次总结。

---

47 - 相似对角形习题课

本课老师带着大家做了一些习题的解题。

---

48 - 二次型及其矩阵

二次型

定义1：含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ +a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\ + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型，简称为二次型。

定义2：只含有平方项的二次型，即形如

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

称为二次型的标准形（或法式）

二次型的矩阵表示

设 $a_{ij} = a_{ji}$ 则

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&+\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n) \\
&+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n) \\
&+\cdots \\
&+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n) \\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&=X^TAX
\end{aligned}
$$

称 A 为二次型的矩阵，显然，A 是实对称阵

- 不设 $a_{ij}=a_{ji}$，仍可以写 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TBX$，$B$ 有无数可能。
- 但是我们要的对称阵的性质，而 B 的无数种可能中，对称阵只有一个。
- 只有这个对称阵才称为二次型的矩阵。

定义3：设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$, 则称对称矩阵 A 的秩为二次型 f 的秩。

二次型经可逆变换后的矩阵

定义4：若线性变换

$$
\begin{cases}
y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n \\
y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n \\
\qquad\cdots\ \cdots\ \cdots \\
y_n=c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n
\end{cases}
$$

的矩阵

$$C_{n\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

可逆，则称线性变换为可逆线性变换；

正交，则称线性变换为正交变换。

定义5：设 A,B 为两个 n 阶矩阵，若有 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=B$，则称矩阵 A 与 B 合同，记为 $A\simeq B$

- 合同矩阵具有自反性、对称性、传递性
- 等价、相似、合同的关系：

  $A\sim B\Rightarrow A\cong B$

  $A\simeq B\Rightarrow A\cong B$

  反之均不成立。一般而言，相似与合同没有关系，但，正交相似与合同一致。

定理1：实对称矩阵一定与对角阵合同。

定理2：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经过可逆线性变换 $X=CY$ 变成新变元的二次型 $f=Y^TBY$，它的矩阵 $B=C^TAC$，且 $r(A)=r(B)$.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= X^TAX \\ &= (CY)^TA(CY) \\ &= Y^T(C^TAC)Y \\ Let\ B &= C^TAC \\ \Rightarrow\ \ B^T &= (C^TAC)^T \\ &= C^TA^TC \\ &= C^TAC \\ &= B \\ &\Rightarrow B\ is\ Symmetric\ Matrix \\ &\Rightarrow B\ is\ Quadratic\ Matrix \end{aligned}$$

- 即对二次型做可逆变换不改变二次型的秩

49 - 正交变化法化二次型为标准型

- 将二次型化为标准型，实际上是什么问题？

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= X^TAX \\
&\xrightarrow{x=cy} Y^T(C^TAC)Y \\
&= Y^T\Lambda Y
\end{aligned}
$$

  - 寻找可逆矩阵 C，$C^TAC=\Lambda$

定理2：对实二次型 $f=X^TAX$，总存在正交变换 $X=QY$，使得

$$
\begin{aligned}
f &= X^TAX \\
&= (QY)^TA(AY) \\
&= Y^T(Q^TAQ)Y \\
&= Y^T\Lambda Y \\
&= \lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \\
\Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 f 的矩阵 A 的特征值
- Q 是对应特征值的正交阵，参见45章

---

50 - 配方法化二次型为标准型

老师通过2个例子，介绍了配方法

例1：用配方法化二次型为标准形，并求可逆变换矩阵。

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3 \\
&= (x_1^2+2x_1x_2)+2x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^3 \\
&= y_1^2+y_2^2+y_3^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} y_1 = x_1+x_2 \\ y_2 = x_2+2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1-y_2+2y_3 \\ x_2 = y_2-2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

例2：设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$

1. 求一个可逆变换将该二次型化为标准型
2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 是什么曲面

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3 \\
&= (x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^3 \\
&= y_1^2+y_2^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} y_1 = x_1+2x_3 \\ y_2 = x_2+2x_3 \\ y_3 = any \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1-2y_3 \\ x_2 = y_2-2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

- y_3 理论上可以是任意值，但是最终求出的 C 要求可逆，所以简单的取值是 $y_3=x_3$
- 配方法只能保证 C 是可逆的，不能保证 C 是正交的
- 只有正交变换法求出的 Q 才是正交的

要把判断二次齐次方程是什么曲面，要把二次型化为标准型才好判断。

- 把二次型转化为标准型，不能把图形压缩或拉伸，得保证图形形状不改变。
- 把二次型变为标准型在数学上只是做坐标变换，为了保证图形形状不变，要保证变换前后向量的长度不变，而正交变换可以保证向量长度不变

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=9 \\
f=1 &\Rightarrow y_2^2+9y_3^2=1 \\
&\Rightarrow is\ Elliptic\ Cylinder
\end{aligned}
$$

正交变换保持向量长度不变的证明

$$\begin{aligned}
Let\ Y &= QX \\
\|Y\|^2 &= Y^TY \\
&= (QX)^T(QX) \\
&= X^TQ^TQX \\
&= X^TX \\
&= \|X\|^2
\end{aligned}$$

小结：配方法化二次型为标准形一般有两种情形：

1. 二次型中含有平方项，如含有 x_1^2，此时先集中含有 x_1 的项，对 x_1 配成完全平方，在集中含有 x_2 的项，对 x_2 配成完全平方，如此继续下去，直到化为标准形。

2. 二次型不含有平方项，只含有x_ix_j 的项，此时先进行可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = x_i + y_i \\ x_j = x_i - y_i \\ x_k = y_k,\ k \neq i,j \end{cases} \Rightarrow x_ix_j = (y_i + y_j)(y_i - y_j) = y_i^2 - y_j^2$$

将二次型化为含平方项的二次型，在按照 1 中介绍的方法做。

---

51 - 二次型的分类

定义：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^TAX$ 是一个实二次型，若对于任何非零的向量 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$, 恒有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0 (< 0)$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定(负定)二次型，而其对应的矩阵 A 称为正定(负定)矩阵；

- 正定(负定)矩阵的定义是根据二次型的来的，所以一定是对称阵

若恒有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geq 0 (\leq 0)$，则称二次型是准正(负)定二次型 (也称半正定二次型)，其对应的矩阵 A 称为准正(负)定二次型；

若 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 有大于零，也有小于零，则二次型是不定二次型，其对应的矩阵称为不定二次型。

二次型的正定的判别法

- 判别法1：用定义

- 判别法2：用标准型
  - 定理1：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 正定的充分条件为 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是正数。
  - 定理2：可逆线性变换不改变二次型的正定性。（老师没有讲证明）
  - 定理3：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定的充要条件为 f 的标准形中 n 个系数全为正数。（老师没有讲证明）
  - 推论1：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定的充要条件为矩阵 A 的全部特征值都是正数。
  - 推论2：若 A 正定，则 $|A|>0$
  - 推论3：若 A 正定，则 A 与单位阵合同，即有可逆矩阵 C，使 $C^TAC=E$

$$\begin{aligned}\because\quad Q^TAQ &= \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda\\ Let\ C_1 &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow C_1^T\Lambda C_1=C_1\Lambda C_1=E\\ &\Rightarrow C_1^T(Q^TAQ)C=(QC_1)^TA(QC_1)=E\end{aligned}$$

- 判别发3：用特征值
- 判别发4：用顺序主子式
  - 定义：位于矩阵 A 的最左上角的 $1,2,\cdots,n$ 阶子式，称为矩阵 A 的$1,2,\cdots,n$ 阶顺序主子式。用 Δ_i 表示第 i 阶顺序主子式。
  - 定理：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定的充要条件为矩阵 A 的各阶顺序主子式都大于零，即 $\Delta_i>0$ (老师没讲证明)

---

52 - 二次型的习题课

本节课老师带领大家做了一些习题
