# [수치해석] Linear-Equation2

## $I_2$ Norm

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}$$

## $I_\infty$ Norm

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

## Natural Norm

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

- 길이가 1인 벡터를 넣었을 때, 그 길이를 **최대 몇 배까지 증폭**
- $||AX||$의 가장 큰 값을 찾는다.

## $I_\infty$ Norm of a matrix

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- $||Av||$는 A의 Linear combination이다.
- $||Av||$의 각 Element는 각 행의 모든 Element의 합이다.
- 결국 $I_\infty$ Norm of a matrix$I_\infty||Av||$의 각 Element의 최댓값을 구하는 것이다

# Spectral radius

$$\rho(A) = \max|\lambda|$$

- $\lambda$: Eigen value

A가 Square matrix라면 아래 조건이 성립하다.

- $||A||_2$ = $\rho(A^tA)^{\frac{1}{2}}$
- $\rho(A) <= ||A||$

# Convergence matrix

A가 Convergence matrix라면 다음 조건을 모두 만족한다.

- 아래 조건 중 하나만 만족하면 Convergence matrix이다.

1. $lim_{n\to\infty}||A^n|| = 0$ for all natural norms
2. $\rho(A) < 1$
3. $lim_{n\to\infty}A^nx = 0$ for every x

# Convergence of a sequence

Sequence를 아래와 같이 정의해보자.

$$x^k = Tx^{(k-1)} + c$$

임의의 Initial value에 대해$x_0x = Tx + c$의 **유일한 해는 Matrix T가 Convergence matrix, $\rho(\lambda) < 1$인 경우에만 존재한다.**

# Iterative method

## 1. Jacobi Iteration

초기값 $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_2^{(0)}]$ 에서 시작해서 $x_i$ 하나씩 update 공식에 따라 바꾸어가며  $x^{(k)}$가 수렴하도록 하는 방법

아래 식을 $x_i$에 대한 기본 Update 공식으로 사용한다.

- $a_{ii}$ ≠ 0일 때의 식이다.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) \right\}$$

$k$번 반복했을 때, 다음 $(k+1)$ 번째 update 공식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right\} \\ &= x_i^{(k-1)} + \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right\} \\ &= x_i^{(k-1)} + \Delta x_i^{(k-1)} \end{aligned}$$

- 첫 번째 식에서 두 번째 식으로 넘어갈 때, 첫 번째 식의 우변의 $(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)})$에 $a_{ii}x_j$를 더하고 뺀다.

**수렴 조건**: Ax = b에서 Matrix A가 **Diagonal dominance** 인 경우에 초기값과 상관없이 수렴한다.

- Diagonal dominance라면 $a_{ii}$의 값이 크다.
- $a_{ii}$의 값이 크면 $\Delta x$의 값이 작아져 언젠가는 수렴함이 보장된다.

**Convergence of Sequence와 연결**

- 행렬 Augemented 행렬 [A:b]의 각 행을 그 행의 Diagonal element로 나눈다.
- 결과로 나오는 [A:b]에서 A의 Diagonal element를 0으로 만든 것이 T이다.
- 행연산을 적용한 b가 c가 된다.

위 과정을 진행하면 Iteration 자체가 $x = Tx + c$ 형태와 동일해진다.

**정지 조건**

- $||x^{(k+1)}$ - $x^{(k)}||$의 Norm이 지정값보다 작아질 때까지

# 2. Gauss-Seidel Iteration

**Jacobi iteration과 수렴 조건이 같고 Update 공식이 약간 다른 방법**

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right\} \\ &= x_i^{(k-1)} + \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right\} \\ &= x_i^{(k-1)} + \Delta x_i^{(k-1)} \end{aligned}$$

$i$ 번째 $x$를 계산할 때, $x_j$ ($j$ : $1$ ~ $n-1$)을 **최신값으로 사용**한다.

**Jacobi에 비해 비교적 최신값을 사용하기 때문에 Jacobi보다 빠르다는 장점**이 있다.

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + w\Delta x_i^{(k-1)}$$

- 여기서 $w$를 조정하는 방법도 있다.

### Successive Over Relaxation (SOR)

- $1 < w < 2$
- 수렴 속도가 빠르다.
- Linear method에 주로 사용된다.

### Successive Under Relaxation (SUR)

- $0 < w < 1$
- 수렴 속도가 느리다.
- Non-Linear method에 주로 사용된다.